Ensaios Matemáticos
in: Ensaios Matemáticos | Periodical Volume

Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library
For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek
Digitalisierungszentrum
37070 Goettingen
Germany
Email: gdz@www.sub.uni-goettingen.de

Purchase a CD-ROM

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:
Niedersaechisische Staats- und Universitaetsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum
37070 Goettingen, Germany, Email: gdz@www.sub.uni-goettingen.de

ENSAIOS
MATEMÁTICOS
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Feuilletages Proches d'une Fibration

C. BONATTI
Université de Dijon

VOLUME 5 1993

Ensaios Matemáticos

Esta série objetiva publicar textos sobre temas atuais da Matemática, permitindo ao leitor, através de exposições acessíveis, adquirir ampla perspectiva do assunto em questão, inclusive no que se refere aos seus aspectos em aberto. Os trabalhos devem ser enviados a um dos editores.

This series is intended as a vehicle for survey papers in all areas of Mathematics. The aim of the series is to offer readers an accessible overview of current topics in Mathematics. The Brazilian Mathematical Society invites authors to submit papers for inclusion in the series by sending their work to one of the editors.

Full instructions on the preparation of copy are available from the editors upon request.

Editors

R. Moussu
Département de Mathématiques
Université de Dijon
Dijon – France – 21004

P. Sad
Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA
Estrada D. Castorina 110 – J. Botânico
Rio de Janeiro – Brazil – 22460

How to order Ensaios Matemáticos

Ensaios Matemáticos are available directly from the Brazilian Mathematical Society by writing to the following address:

Ensaios Matemáticos
Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Rio de Janeiro RJ
Brazil

©1993 Sociedade Brasileira de Matemática

Financed by the Programa de Apoio a Publicações Científicas CNPq/FINEP.
Partial support from Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

TABLE DE MATIÈRES

INTRODUCTION ET ARTICULATION 1

§1 Stabilité de la fibre d'une fibration: présentation du sujet . 1
§2 Paramètres du problème de stabilité de la fibre d'une fibration 5
§3 Principaux résultats pour le problème de stabilité de la fibre 6
§4 Un outil général pour les problèmes de déformations des feuilletages 9
§5 Articulation 10

CHAPITRE 1. FEUILLETAGES ET DÉFORMATIONS DE FEUILLETAGES 12

§1 Feuilletages 12
§2 Transversales, holonomie 20
§3 Holonomie: point de vue global 24
§4 Perturbations d'un feuilletage 32
§5 Germes de déformation d'un feuilletage et de son holonomie 37

APPENDICE 1. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE RÉALISATION DES DÉFORMATIONS DE L'HOLONOMIE 47

§1 Injectivité 48
§2 Surjectivité 51

CHAPITRE 2. FEUILLETAGES DÉFINIS PAR UNE FIBRATION: PROBLÈMES DE STABILITÉ 62

§1 Introduction 62
§2 Enoncé précis du problème de stabilité de la fibre d'une fibration 63
§3 Etat actuel du problème et résultats connus 67

CHAPITRE 3. EXEMPLES DE DÉFORMATIONS DE FEUILLETAGES DÉFINIS PAR UNE FIBRATION 75
§1 Fibration en cercles 76
§2 Fibrations en tores $\mathbf{T}^n$ 80
§3 Fibrations triviales 85
§4 Fibrations telles que $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^k$ 91
§5 Fibres toujours instables 95
§6 Déformations d'une fibration, à partir d'un champ de vecteurs de la base 103

CHAPITRE 4. OUTILS ET MÉTHODES 111
§1 Présentation rapide 111
§2 Applications de premier retour 113
§3 Difféomorphismes C^1-proches de l'identité 122
§4 Comparaison des déformations de deux feuilletages . . . 137

CHAPITRE 5. LES FIBRATIONS EN CERCLES . 143
§1 La démonstration de Seifert (base de dimension 2) . . . 145
§2 La démonstration de Fuller: un indice pour les fibrations en cercles 152

APPENDICE 1. LE THÉORÈME DE FULLER . . 161
§1 Introduction 161
§2 Définitions. Construction de l'indice 162
§3 Indice d'un compact isolé d'orbites périodiques (Théorème de Fuller) 165
§4 Remarque sur la définition 166
§5 Démonstration du Théorème de Fuller 169
§6 Démonstration du Lemme 5.b-1 174

CHAPITRE 6. FIBRES F TELLES QUE $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$ 180
§1 Introduction 180
§2 $\mathbf{C^0}$-instabilité de la fibration $\mathbf{p}: S^2 \times K \to S^2$ 183
§3 Si la base est de dimension 2: la démonstration de Seifert 188
§4 Cas général 196

CHAPITRE 7. FIBRATIONS EN TORES: EXEMPLES DE STABILITÉ ET D'INSTABILITÉ 214

§1 Introduction 214
§2 Difféomorphismes commutants des surfaces 216
§3 Exemples de fibrations en tores instables 224

CONCLUSION 232

§1 Stabilité de feuilles compactes isolées 233

BIBLIOGRAPHIE 246

INTRODUCTION ET ARTICULATION

§1 Stabilité de la fibre d'une fibration: présentation du sujet

De nombreuses notions de stabilité ont été introduites dans l'étude des systèmes dynamiques, et elles y ont joué un grand rôle: stabilité d'un point fixe, stabilité structurelle locale au voisinage d'un point fixe ou d'une orbite périodique, Ω-stabilité, stabilité structurelle globale... D'une façon générale, une notion de stabilité exprime la persistance d'une propriété par perturbation du système dynamique considéré; elle indique que la propriété est générique, en ce sens qu'elle est vraie pour un ouvert dans l'ensemble des systèmes dynamiques.

Ces notions de stabilité, maintenant assez bien comprises pour les difféomorphismes ou les flots, se généralisent naturellement aux feuilletages. Mais dans le cadre des feuilletages les questions de stabilité sont loin d'être résolues, et on ne dispose pour l'instant que de réponses très partielles.

Ce travail a pour but d'étudier la stabilité de la fibre d'une fibration, c'est-à-dire la persistance d'une feuille compacte difféomorphe à la fibre, et proche d'une fibre, par perturbation du feuilletage défini par la fibration.

Ce sujet a son origine dans les travaux de Seifert et de Fuller sur les champs de vecteurs.

En 1950, Seifert a prouvé l'existence d'orbites périodiques pour tout champ de vecteurs C^o-proche du champ de vecteurs unitaire dirigeant les fibres de la fibration de Hopf, sur la sphère S^3. Il demandait alors si tout champ de vecteurs non nul, sur la sphère S^3, possède une orbite périodique.

. Le problème était de savoir si la topologie de la variété ambiante peut forcer l'existence d'orbites périodiques pour les champs de vecteurs non nuls, de même qu'elle peut forcer l'existence de points fixes ou périodiques pour les endomorphismes continus. L'idéal aurait été de pouvoir généraliser, pour les orbites périodiques des flots sans points fixes, la théorie d'indice de Lefschetz pour les points fixes des applications continues.

La réponse n'est pas si simple, et comporte deux aspects opposés:

– d'une part, toute variété M compacte, de caractéristique d'Euler $\chi(M)$ nulle, et différente du cercle S^1 et de la bouteille de Klein K, possède un champ de vecteurs non nul sans orbite périodique: théorème de Wilson, 1967, si $\dim M \geq 4$, et théorème de Schweitzer, 1974, si $\dim M = 3$.

– d'autre part, la théorie d'indice de points fixes des homéomorphismes peut se généraliser aux orbites périodiques des flots, mais dans un cadre semi-local:

Fuller, en 1968, a introduit la notion de compact isolé K d'orbites périodiques, muni d'un voisinage isolant U, pour un champ de vecteurs X. A un tel compact K, il associe un nombre rationnel $i(K)$ (appelé indice de Fuller), et cet indice est invariant par les perturbations du champ X qui ne créent pas d'orbites périodiques sur

le bord de U. En conséquence, si $i(K)$ est non nul, tout champ de vecteurs suffisamment proche de X possède des orbites périodiques contenues dans U: l'indice de Fuller est donc un critère de stabilité pour les orbites périodiques du champ X.

Le théorème d'indice de Fuller permet de résoudre simplement le problème d'existence d'orbites périodiques pour les champs de vecteurs proches d'une fibration en cercles orientée, $S^1 \hookrightarrow M \to B$:

En effet, l'ensemble des fibres, parcourues une fois, forme un compact isolé d'orbites périodiques, dont l'indice de Fuller est égal à la caractéristique d'Euler $\chi(B)$ de la base. Si $\chi(B)$ est non nulle, tout champ de vecteurs suffisamment C^o-proche de la fibration aura au moins une orbite fermée, proche d'une fibre.

En résumé, Seifert et Fuller ont montré le résultat suivant:

THÉORÈME. *Soit B une variété compacte, et $p: M \to B$ une fibration de fibre le cercle S^1. Si la caractéristique d'Euler $\chi(B)$ est non nulle, alors tout feuilletage C^0-proche de la fibration possède une feuille compacte proche d'une fibre.*

Les résultats de Seifert et Fuller n'utilisent pas d'une façon essentielle le paramétrage des orbites: ce sont donc des résultats de stabilité de feuilles compactes pour les feuilletages de dimension 1 dirigés par les champs de vecteurs considérés. On peut d'ailleurs construire un indice, type indice de Fuller, pour les fibrations en cercles non orientées, qui permet de donner une condition nécessaire et suffisante à l'existence de feuilles compactes proches d'une fibre pour toute perturbation d'un feuilletage défini par une fibration en cercles:

THÉORÈME A. *Soit B une variété compacte, et $p: M \to B$ une fibration de fibre le cercle S^1.*

a) Si B est de dimension paire:

i) si la caractéristique d'Euler $\chi(B)$ est non nulle, alors tout feuilletage C^0-proche de la fibration possède une feuille compacte proche d'une fibre (c'est le théorème de Seifert et Fuller).

ii) si $\chi(B)$ est nulle, il existe des feuilletages C^∞-proches de la fibration, sans feuilles compactes proches d'une fibre.

b) Si B est de dimension impaire, on considère le revêtement à deux feuillets $\pi: \tilde{B} \to B$ des orientations de la fibre, et on construit un invariant topologique $\chi(\pi) \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ associé à ce revêtement. Alors:

i) si $\chi(\pi) \neq 0$, tout feuilletage C^0-proche de la fibration possède une feuille compacte proche d'une fibre.

ii) si $\chi(\pi) = 0$, il existe des feuilletages C^∞-proches de la fibrations, sans feuilles compactes proches d'une fibre.

On cherche alors à généraliser aux feuilletages de dimension plus grande que 1 les théorèmes de Seifert et Fuller.

Soit $p: M \to B$ une fibration de fibre F, où M, B et F sont des variétés compactes connexes. Elle définit sur M un feuilletage F dont les feuilles sont les fibres de p. On dira que la fibre F est C^r-stable si tout feuilletage C^r-proche de $\mathcal{F}$ possède une feuille compacte difféomorphe à F et proche d'une fibre. On dira que F est C^r-instable dans le cas contraire.

PROBLÈME. *Trouver des conditions sur la fibration p, permettant de décider si la fibre est stable ou instable.*

L'exemple des fibrations en cercles laisse présager que la résolution complète de ce problème nécessitera la construction d'un indice, type indice de Fuller, pour les feuilles compactes des feuilletages.

La construction d'un tel indice me semble inabordable actuellement, car elle supposerait résolu (en partie) le problème de la

stabilité locale, par perturbations, des feuilles compactes isolées des feuilletages... peu de choses sont encore connues sur ce sujet.

On peut espérer que des réponses partielles au problème de la stabilité de la fibre d'une fibration permettront de préciser ce que pourrait être un tel indice.

§2 Paramètres du problème de stabilité de la fibre d'une fibration

Ce travail présente quelques classes particulières de fibrations, pour lesquelles on saura décider si les fibres sont stables ou instables.

Avant de citer les résultats obtenus, il me semble nécessaire de présenter les propriétés topologiques de la fibration qui vont jouer le rôle de paramètres du problème. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage défini par une fibration $p: M \to B$ de fibre F. Tout ouvert de B trivialisant p peut être considéré comme une transversale du feuilletage $\mathcal{F}$, par le choix d'une section locale de p. Soit $\mathcal{G}$ un feuilletage proche de $\mathcal{F}$. A tout lacet dans une fibre de la fibration p on associe, par holonomie le long des feuilles de $\mathcal{G}$, un difféomorphisme d'un ouvert de B (considéré comme transversale des feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$). Les feuilles compactes, proches d'une fibre, du feuilletage $\mathcal{G}$ correspondent alors aux points fixes communs des difféomorphismes d'holonomie associés à une partie génératrice du groupe fondamental $\pi_1(F)$ de la fibre.

Il est alors naturel que les deux paramètres essentiels du problème soient:

- le groupe fondamental $\pi_1(F)$ de la fibre.
- la topologie (dimension, caractéristique d'Euler) de la base B.

Dans le cas particulier de la fibration triviale $B \times F \to B$, la base B peut-être considérée comme transversale complète du feuilletage défini par la fibration. Tout feuilletage proche de la fibration est

alors défini (à conjugaison près) par une représentation du groupe fondamental $\pi_1(F)$ dans le groupe $\mathrm{Diff}(B)$ des difféomorphismes de la base. La situation dans ce cas est relativement simple.

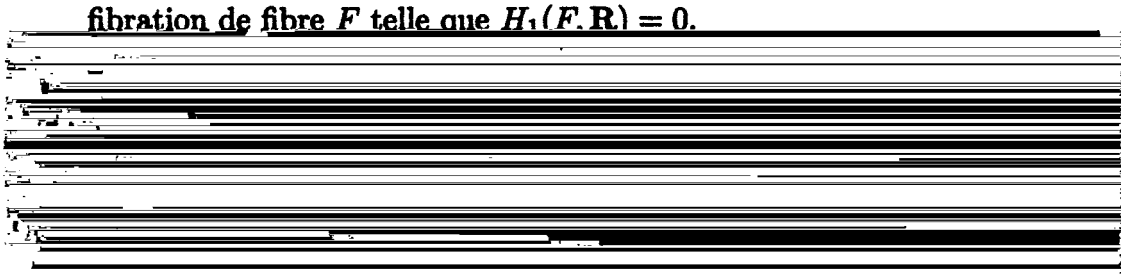
Les autres paramètres du problème mesurent en quelque sorte l'écart entre la fibration considérée, $p: M \to B$ de fibre F, et la fibration triviale $B \times F \to B$.

Par exemple:

- l'action naturelle de $\pi_1(B)$ sur le premier groupe d'homologie $H_1(F, \mathbf{R})$ de la fibre.
- l'existence ou l'absence d'une section globale de la fibration.

§3 Principaux résultats pour le problème de stabilité de la fibre

Quand H. Rosenberg m'a proposé de regarder le problème de la stabilité de la fibre des fibrations, des résultats de Langevin et Rosenberg, Schweitzer et Druck laissaient conjecturer que les théorèmes de Seifert et Fuller sur les fibrations en cercles se généraliseraient aux fibrations dont la fibre F vérifie $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$. Langevin et Rosenberg avaient généralisé la preuve de Seifert aux fibrations dont la fibre F vérifie $\pi_1(F) = \mathbf{Z}$, et dont la base est une surface. De plus, Langevin et Rosenberg avaient aménagé un lemme de Thurston qui, sous cette nouvelle forme, suggérait que les lacets de la fibre F, nuls en homologie, ont un rôle négligeable pour les C^1-perturbations de la fibration. Cela leur avait permis de prouver la C^1-stabilité structurelle des feuilletages définis par une fibration de fibre F telle que $H_1(F, \mathbf{R}) = 0$.



§4 Un outil général pour les problèmes de déformations des feuilletages

Outre ces résultats sur la stabilité de la fibre des fibrations, on présente avec A. Haefliger un outil d'intérêt plus général, baptisé ici théorème de réalisation des déformations de l'holonomie, qui est commode pour construire des déformations de feuilletages: il est par exemple utilisé de façon essentielle dans la preuve du théorème B cité plus haut. C'est un travail fait avec A.Haefliger d'après ses idées. Voici en quelques mots ce travail:

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur une variété M, soit T une transversale complète du feuilletage $\mathcal{F}$, et soit $(S,0)$ un espace pointé, localement compact. On définit les notions de déformations (paramétrées par S) du feuilletage $\mathcal{F}$ et de son holonomie sur T.

Une déformation de $\mathcal{F}$ est une famille continue $\mathcal{F}^S = \{\mathcal{F}^s\}_{s\in S}$ de feuilletages, telle que $\mathcal{F}^0$ soit le feuilletage $\mathcal{F}$.

Un germe de déformation de l'holonomie de $\mathcal{F}$ est une application H^S qui, à tout chemin γ contenu dans une feuille de $\mathcal{F}$, joignant deux points x et y de T, associe le germe en $(x,0)$ d'un homéomorphisme local de $T\times S$ de la forme $(z,s)\to(h^s(z),s)$, où h^0 est l'holonomie du feuilletage $\mathcal{F}$ le long de γ, et où h^s est un difféomorphisme local de T variant continûment avec s. On demande de plus à H^S d'être un homomorphisme pour la composition de chemins et la composition des germes d'homéomorphismes de $T\times S$, et continu pour les topologies naturelles de ces deux groupoïdes.

Une déformation $\mathcal{F}^S$ du feuilletage $\mathcal{F}$ induit naturellement un germe de déformation H^S de son holonomie: H^S est l'holonomie de $\mathcal{F}^S$, considéré comme feuilletage de $M\times S$, sur la transversale $T\times S$.

THÉORÈME *(Réalisation des déformations d'holonomie). Pour tout germe H^S de déformation de l'holonomie de $\mathcal{F}$, il existe une déformation $\mathcal{F}^S$ du feuilletage $\mathcal{F}$ qui induise H^S par holonomie. De plus le germe de la déformation $\mathcal{F}^S$ est unique à équivalence près.*

Ce théorème met en évidence l'importance, pour la compréhension des déformations d'un feuilletage $\mathcal{F}$, du groupoïde dont les éléments sont les classes d'homotopies de chemins dans les feuilles de $\mathcal{F}$ et à extrémités sur une transversale T. Nous avons appelé ce groupoïde, groupoïde fondamental de $\mathcal{F}$, par analogie avec le groupe fondamental d'une variété.

Des comparaisons algébriques des groupoïdes fondamentaux de deux feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ permettent alors des comparaisons de leurs déformations: c'est ce qui a permis, dans le théorème B de déduire

– la sous-variété f_x dépend différentiablement (de classe C^r) du point x.

EXEMPLES:

1) Si X est un champ de vecteurs sans singularités, de classe C^r, $r \geq 1$, sur M, alors l'ensemble des orbites du champ X définit un feuilletage de dimension 1, de classe C^r, sur M. Les feuilles sont les orbites du flot de X. Ces orbites peuvent être denses dans M: c'est le cas pour un flot irrationnel sur le tore T^2, ce sont alors des variétés immergées injectivement mais non plongées.
2) Soit $p: M \to B$ une fibration de fibre F, où B, M et F sont des variétés compactes connexes, et où p est une submersion de classe C^r. Alors p définit sur M un feuilletage de classe C^r, dont les feuilles sont les fibres de p. La codimension de ce feuilletage est égale à la dimension de la base B.

   Dans cet exemple, toutes les feuilles sont des sous-variétés compactes plongées dans M.
3) La Figure 1.1 représente une composante de Reeb: c'est un feuilletage de codimension 1, défini au voisinage d'un tore plein $D^2 \times S^1$ plongé dans une variété M de dimension 3. Le bord $S^1 \times S^1$ du tore plein est une feuille compacte du feuilletage. Les feuilles contenues dans l'intérieur du tore plein sont difféomorphes à $\mathbf{R}^2$, et "s'enroulent" sur la feuille compacte $S^1 \times S^1 \simeq T^2$.

   En collant deux composantes de Reeb le long de la feuille compacte, on construit facilement un feuilletage de codimension un sur la sphère S^3 (cette construction est due à Reeb, et le feuilletage est appelé feuilletage de Reeb).

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de dimension k sur une variété M de dimension n.

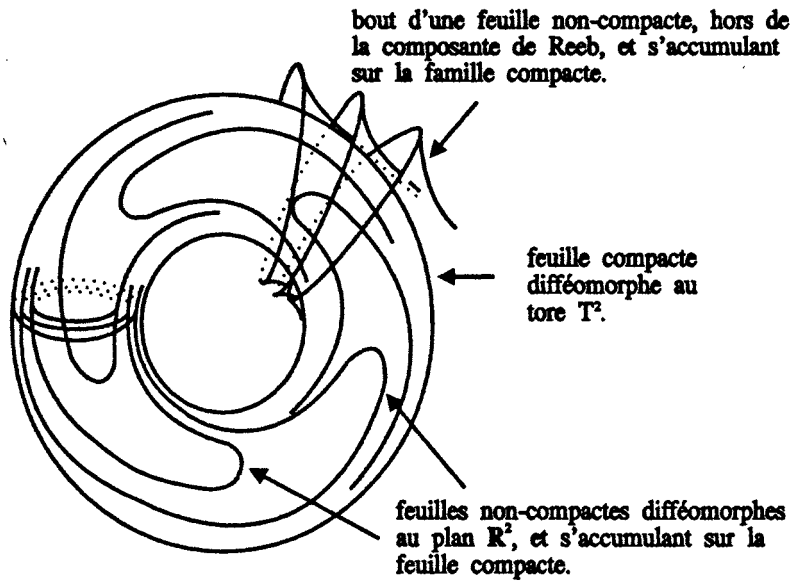


Figure 1.1.

Pour tout point $0 \in M$, il existe des coordonnées locales $(x_1(x), \ldots, x_k(x), y_1(x), \ldots, y_{n-k}(x))$ définies sur un voisinage U de 0, avec la propriété suivante: si $x, y \in U$ sont tels que $y_i(x) = y_i(y)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n-k\}$, alors les feuilles f_x et f_y sont égales.

Autrement dit, l'application $g : U \to \mathbf{R}^{n-k}$, définie par $g(x) = (y_1(x), \ldots, y_{n-k}(x))$, est une submersion dont les fibres sont contenues dans les feuilles de $\mathcal{F}$. On dira que (U, g) est une carte feuilletée pour $\mathcal{F}$, en 0.

Voici à présent une définition formelle d'un feuilletage:

DÉFINITION 1.1.A-1 *(Atlas feuilleté)*: Soit M une variété différentiable de dimension n. On appelle atlas de M par des cartes feuilletées de classe C^r, $r \geq 1$, de dimension k (codimension $n-k$) la donnée de:

– un recouvrement $\{U_i\}$ de M par des ouverts.

– pour tout i, une submersion de classe C^r, g_i, de U_i sur un ouvert de $\mathbf{R}^{n-k}$, de façon que l'on ait la propriété suivante: pour tout $x \in U_i \cap U_j$, il existe un voisinage $U_{i,j}^x$ de x, et un difféomorphisme $h_{i,j}^x : g_j(U_{i,j}^x) \to g_i(U_{i,j}^x)$ tel que, sur $U_{i,j}^x$, on ait: $h_{i,j}^x \circ g_j = g_i$.

DÉFINITION 1.1.A-2 *(Feuilletage)*: Deux atlas feuilletés $\{(U_i, g_i)\}$, $\{(V_j, h_j)\}$ de classe C^r, de dimension k, définissent le même feuilletage sur M si la famille $\{(U_i, g_i)\} \cup \{(V_j, h_j)\}$ est un atlas feuilleté sur M.

DÉFINITION 1.1.A-3 *(Feuille)*: Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage (de classe C^r, de dimension k) sur M, défini par un atlas $\{(U_i, g_i)\}$. On dit que deux points $x, y \in M$ sont sur la même feuille de $\mathcal{F}$ s'il existe une suite finie de points $x = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = y$ tels que, pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, x_i et x_{i+1} appartiennent à un même ouvert U_j, et que $g_j(x_i) = g_j(x_{i+1})$.

REMARQUE 1.1.A-4. Pour définir un feuilletage de classe C^0, il suffit de remplacer les submersions g_i par des homéomorphismes $\varphi_i : U_i \to \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n-k}$, et de noter g_i la composée de φ_i avec la projection de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}^{n-k}$.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de dimension k sur M. Soit $x \in M$. On note $T_x\mathcal{F}$ le sous espace vectoriel de T_xM, tangent à la feuille passant par x. Si (U, g) est une carte feuilletée de $\mathcal{F}$ en x, $T_x\mathcal{F}$ est le noyau de la différentielle T_xg.

On a ainsi défini un champ de k-plans sur M (c'est à dire un sous-fibré vectoriel de dimension k de TM), appelé *fibré tangent à* $\mathcal{F}$ et noté $T\mathcal{F}$. De plus, si $\mathcal{F}$ est de classe $C^r, r \in \mathbf{N}^*$, $T\mathcal{F}$ est de classe C^{r-1}.

On appelle *fibré normal* N du feuilletage $\mathcal{F}$ le fibré vectoriel quotient $TM/T\mathcal{F}$. Il est de classe C^{r-1} et de dimension $n-k$. Il est canoniquement isomorphe à tout champ de $(n-k)$-plans sur M transverse à $T\mathcal{F}$, par exemple au champ de $(n-k)$-plans $T\mathcal{F}^{\perp}$ orthogonal à $T\mathcal{F}$ pour une métrique riemanienne sur M.

Réciproquement, si τ est un champ de k-plans sur M de classe C^r, on dit qu'il est *intégrable* s'il est tangent à un feuilletage $\mathcal{F}$ sur M. Dans ce cas le feuilletage $\mathcal{F}$ est de classe C^r(au moins).

THÉORÈME 1.1.A-5 *(Frobénius). Un champ de k-plansτ sur M, de classe $C^r, r \geq 1$, est intégrable si et seulement si, pour tout couple X, Y de champs de vecteurs tangents à τ, le crochet $[X,Y]$ est tangent à τ.*

Un champs de k-plans τ de classe $C^r, r \geq 1$, peut toujours être défini localement comme intersection des noyaux de $(n-k)$ 1-formes différentiables de classe C^r, indépendantes, $\omega^1, \ldots, \omega^{n-k}$.

THÉORÈME 1.1.A-6 *(Frobénius). Avec les notations ci-dessus, le champs de k-plans τ est intégrable si et seulement si, pour tout $\alpha \in \{1, \ldots, n-k\}$ on a:*

$$d\omega^{\alpha} \wedge \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k = 0$$

Pour toute variété différentiable M, pour tous entiers $k, r \in \mathbf{N}$ nous noterons $Fol_k^r(M)$ l'ensemble des feuilletages de dimension k et de classe C^r sur M, et $Fol_k^{r+}(M)$ l'ensemble des champs de k-plans intégrables de classe C^r sur M. L'ensemble des feuilletages de classe C^{∞} coïncide avec l'ensemble des champs de plans intégrables de classe C^{∞}. On le note $Fol_k^{\infty}(M)$. On a les inclusions suivantes:

$$Fol_k^{\infty}(M) \subset \cdots \subset Fol_k^{r+1}(M) \subset Fol_k^{r+}(M) \subset Fol_k^r(M)$$

b) Transport des feuilletages par des applications

Soient M et N deux variétés différentiables, et soit $f: M \to N$ une application de classe $C^s, s \geq 1$.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension k sur N, de classe C^r, $r \geq 1$.

On dit que l'application f est *transverse au feuilletage* $\mathcal{F}$ si, en tout point $x \in f(M)$, on a:

$$T_xN = T_x\mathcal{F} + f_*(T_xM)$$

Soit $\{(U_i, g_i)\}$ un atlas feuilleté de $\mathcal{F}$. Pour tout i, $g_i \circ f$ est une submersion de $f^{-1}(U_i)$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^k$. La famille $\{(f^{-1}(U_i), g_i \circ f)\}$ est un atlas feuilleté de M, définissant le feuilletage $f^{-1}(\mathcal{F})$, de codimension k, de classe C^p, où $p = inf(r, s)$; on l'appelle *image réciproque (ou pull back) de* $\mathcal{F}$ *par* f. Une feuille de $f^{-1}(\mathcal{F})$ est une composante connexe de l'image réciproque par f d'une feuille de $\mathcal{F}$.

Soit $f: M \to N$ un difféomorphisme et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur M défini par un atlas (U_i, g_i). Alors $\{(f(U_i), g_i \circ f^{-1})\}$ est un atlas sur N définissant un feuilletage $f(\mathcal{F})$, *image de* $\mathcal{F}$ *par* f, dont les feuilles sont les images par f des feuilles de $\mathcal{F}$.

Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux feuilletages sur M. On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont *conjugués* (topologiquement) s'il existe un homéomorphisme f de M tel que $f(\mathcal{F}) = \mathcal{G}$.

Soit $f: M \to M$ un difféomorphisme, et $\mathcal{F}$ un feuilletage de M. On dit que $\mathcal{F}$ est *invariant* par f si $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. Pour cela, il suffit que f envoie chaque feuille de $\mathcal{F}$ sur une feuille de $\mathcal{F}$.

Supposons que le quotient de M par f soit une variété N (donc f est un automorphisme d'un revêtement cyclique $\pi: M \to N$). Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage sur M invariant par f, il ***passe au quotient par***

f (ou il se projette par π'') en un feuilletage sur N qu'on appelle *quotient de $\mathcal{F}$ par f.*

EXEMPLE (Cf Chapitre 3.3): Soient B et F deux variétés compactes connexes, et soit $\rho: \pi_1(F) \to \mathrm{Diff}(B)$ un homomorphisme contravariant (c'est-à-dire que $\pi_1(F)$ agit à droite sur B par difféomorphismes). Le Chapitre 2.3 construit la suspension de la représentation ρ: c'est un feuilletage obtenu par quotient du feuilletage sur $B \times \tilde{F}$($\tilde{F}$ = revêtement universel de F) défini par la fibration triviale $B \times \tilde{F} \to B$. Je conseille au lecteur de regarder en détail cet exemple, important pour la compréhension des feuilletages et pour la suite de cette thèse.

c) Topologie des feuilles et dynamique d'un feuilletage

Il est indispensable d'avoir un aperçu de ce que signifie etudier la dynamique d'un feuilletage, bien que ce ne soit pas l'objet de ce travail. En voici juste quelques mots:

Les feuilles d'un feuilletage $\mathcal{F}$ sont des variétés immergées injectivement, mais a priori non plongées dans la variété ambiante M. Leur topologie ne coïncide donc pas avec la topologie induite de celle de M. On distingue plusieurs types de feuilles:

– les feuilles *compactes* de $\mathcal{F}$. Ce sont des sous-variétés compactes de M.

– les feuilles *propres* de $\mathcal{F}$ sont, par définition, les feuilles plongées dans M. Une feuille f de $\mathcal{F}$ est propre, si pour tout point x de f il existe un voisinage ouvert U de x, et une submersion $g: U \to \mathbf{R}^{n-k}$ telle que $f \cap U$ soit égal à $g^{-1}(0)$, $0 \in \mathbf{R}^{n-k}$.

– les feuilles *localement denses* de $\mathcal{F}$ sont celles dont l'adhérence contient un ouvert M.

– enfin, on appelle *feuilles exceptionnelles*, les feuilles qui ne sont ni propres ni localement denses.

Une partie E de M est dite *saturée* pour $\mathcal{F}$ si toute feuille passant par un point de E est incluse dans E.

Si M est compacte, pour toute feuille f de $\mathcal{F}$ l'adhérence $\bar{f}$ de f est un compact saturé pour $\mathcal{F}$. On appelle *minimal* de $\mathcal{F}$ tout compact non vide de M, saturé pour $\mathcal{F}$, et ne contenant pas de sous-ensembles propres ayant ces propriétés. Toute feuille contient dans son adhérence un tel minimal.

Par exemple, une feuille compacte est un minimal.

Toute feuille d'un minimal K est dense dans K. Si K n'est pas une feuille compacte, les feuilles contenues dans K ne sont pas propres.

Remarquons enfin que la relation $g \subset \bar{f}$ définit sur l'ensemble des feuilles de $\mathcal{F}$ une relation de préordre. On dit que f *s'accumule* sur g (évidemment, f peut s'accumuler aussi sur d'autres feuilles).

EXEMPLE: Dans le cas de la composante de Reeb, toutes les feuilles contenues dans le tore solide bordée par la feuille compacte sont des plans plongés qui s'accumulent sur la feuille compacte. Toutes les feuilles sont donc propres, et le seul minimal est la feuille compacte (difféomorphe au tore T^2).

Etudier la dynamique d'un feuilletage consiste à décrire le comportement asymptotique des feuilles. On recherche les feuilles compactes du feuilletage et tous les compacts minimaux invariants, l'existence de feuilles localement denses, etc. Notons que le rôle joué par les feuilles compactes dans l'étude de la dynamique d'un feuilletage est tout à fait comparable à celui des points fixes d'un difféomorphisme, ou à celui des orbites fermées d'un flot. Ceci explique l'importance qu'on leur accorde.

De nombreux auteurs ont étudié la dynamique des feuilletages, surtout des feuilletages de codimension un. Voir par exemple: Cantwell & Conlon [CC 2], Hector [He], Plante [P], R. Sacksteder [Sa].

§2 Transversales, holonomie

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de classe C^1, de dimension k, sur une variété M de dimension n.

DÉFINITION 1.2-1: On appelle *transversale du feuilletage* $\mathcal{F}$ la donnée d'une variété T (a priori non connexe!) de dimension $n-k$ et d'une immersion $\tau: T \to M$ telle qu'en tout point $x \in \tau(T)$ on ait:

$$T_x(M) = \tau_*(T_x(T)) \oplus T_x(\mathcal{F}).$$

Par abus de langage on parlera de la transversale T. On dira qu'une transversale T est complète si elle rencontre chaque feuille.

PROPOSITION 1.2-2. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de classe C^1 d'une variété compacte M. Alors il existe deux variétés $T \subset T'$ t telles que T soit relativement compacte dans T', et un plongement $\tau: T' \to M$ qui fasse de T et T' des transversales complètes de $\mathcal{F}$.*

Nous verrons qu'une telle transversale complète, relativement compacte dans une autre transversale plongée, est très pratique.

L'un des outils essentiels pour l'étude des feuilletages est l'holonomie. Ce travail sur les déformations des feuilletages est tout autant un travail sur les déformations de l'holonomie.

Voici d'abord une présentation intuitive de cet outil important. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur une variété M, et T une transversale du feuilletage $\mathcal{F}$. Soient x et y deux points de T se trouvant sur la même feuille de $\mathcal{F}$, et soit γ un chemin sur cette feuille, reliant x

à y. Alors on peut pousser le chemin γ sur les feuilles voisines, de façon à obtenir des chemins, chacun sur une feuille de $\mathcal{F}$ et joignant deux points de T. L'application qui, à l'origine de chacun de ces chemins associe son extrémité finale définit un difféomorphisme d'un voisinage de x dans T sur un voisinage de y dans T: c'est l'*holonomie du feuilletage $\mathcal{F}$ le long de γ sur la transversale T.*

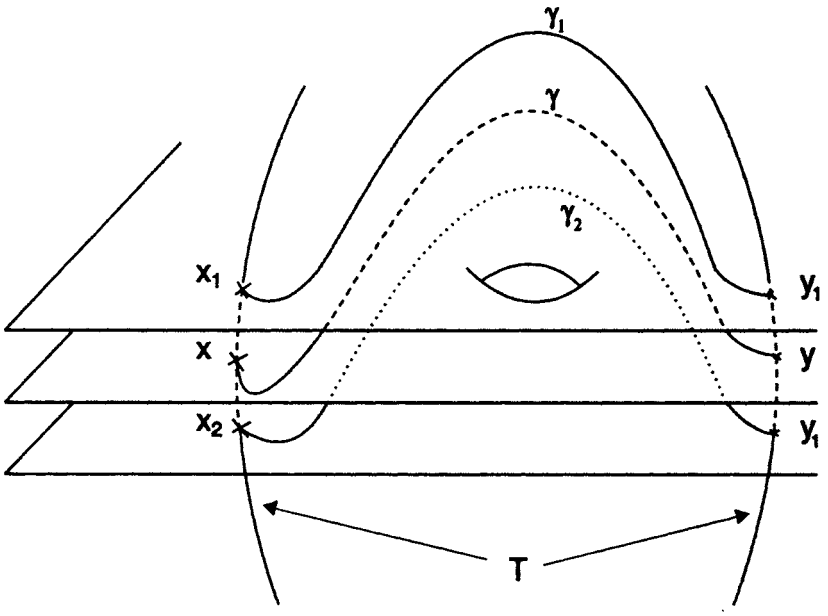


Figure 1.2.

Voici à présent une définition plus formelle.

Soit $\tau: T \to M$ une transversale du feuilletage $\mathcal{F}$, et soient $x, y \in T$ deux points tels que $\tau(x)$ et $\tau(y)$ soient sur la même feuille de $\mathcal{F}$. Soit $\gamma: [0,1] \to M$ un chemin joignant $\tau(x)$ à $\tau(y)$ et contenu dans la feuille de $\mathcal{F}$ passant par $\tau(x)$. Alors il existe un voisinage ouvert

U de x et un voisinage ouvert V de y, et une application continue $\Gamma: U \times [0,1] \to M$ ayant les propriétés suivantes:

– pour tout $z \in U$, la restriction de Γ à $\{z\} \times [0,1]$ est un chemin, sur une feuille de $\mathcal{F}$, d'origine $\Gamma(z,0) = \tau(z)$ et d'extrémité $\Gamma(z,1) \in \tau(V)$.

– pour tout $t \in [0,1]$, $\Gamma(x,t) = \gamma(t)$.

Alors l'application $h_\gamma: U \to V$ définie par $h_\gamma(z) = \tau^{-1}(\Gamma(z,1))$ est un difféomorphisme de U sur un ouvert de V, et $h_\gamma(x) = y$.

Par définition, on appelle *h_γ un difféomorphisme d'holonomie de $\mathcal{F}$ sur la transversale T le long de γ.*

ATTENTION! Le difféomorphisme h_γ n'est pas défini de façon unique à partir de $\mathcal{F}, \tau$, γ et U. En effet, quand on pousse γ sur une feuille voisine, la classe d'homotopie (à extrémités fixées sur la transversale τ) du chemin obtenu n'est pas bien déterminée.

Par exemple, regardons la composante de Reeb (voir le paragraphe 1.a): on choisit une transversale T coupant la feuille compacte (difféomorphe au tore T^2), et un lacet γ sur une feuille contenue dans l'intérieur du tore solide $D^2 \times S^1$. En poussant ce lacet sur la feuille compacte, on peut obtenir un lacet homotope à zéro sur T^2, ou un lacet homotope aux méridiens (le bord de D^2). Cependant, si h_γ et h'_γ sont deux difféomorphismes d'holonomie de $\mathcal{F}$ sur T le long de γ, alors ils coïncident sur un voisinage du point x. Autrement dit, le germe en x, $\tilde{h}_\gamma$, du difféomorphisme d'holonomie h_γ,est bien déterminé par $\mathcal{F}, T$ et γ.

DÉFINITION 1.2-3 *(Germe d'holonomie)*: Avec les notations ci-dessus, le germe $\tilde{h}_\gamma$ est le germe d'holonomie du feuilletage $\mathcal{F}$ le long de γ sur la transversale T.

PROPRIÉTÉS:

i) la classe de différentiabilité de $\tilde{h}_\gamma$ est celle de $\mathcal{F}$.

ii) Soient γ_1 et γ_2 deux lacets sur la même feuille de $\mathcal{F}$, ayant mêmes extrémités x et y sur T, et homotopes dans cette feuille de $\mathcal{F}$, par une homotopie à extrémités fixées. On a alors: $\tilde{h}_{\gamma_1} = \tilde{h}_{\gamma_2}$; le germe d'holonomie ne dépend donc que de la classe d'homotopie dans la feuille de $\mathcal{F}$, à extrémités fixées, du chemin γ. En particulier, si γ est un lacet d'origine x, homotope à zéro dans la feuille de $\mathcal{F}$ contenant x, alors $\tilde{h}_\gamma$ est le germe en x de l'identité de T.

iii) Soient γ_1 et γ_2 deux chemins sur la même feuille de $\mathcal{F}$, à extrémités sur T, γ_1 d'origine x et d'extrémité y, γ_2 d'origine y et extrémité z. Alors on a:

$$\tilde{h}_{\gamma_1\gamma_2} = \tilde{h}_{\gamma_2} \circ \tilde{h}_{\gamma_1}$$

iv) Soit x un point de T. L'application qui, à tout lacet γ d'origine x sur la feuille f_x de $\mathcal{F}$ passant par x, associe le germe $\tilde{h}_\gamma$, définit un homomorphisme contravariant du groupe fondamental $\pi_1(f_x, x)$ dans le groupe des germes de difféomorphismes de T de source et but x.

La propriété suivante montre toute l'importance de l'holonomie dans l'étude des feuilletages. Soient M et M' deux variétés de même dimension, et soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux feuilletages de même dimension sur (respectivement) M et M'. On suppose qu'il existe une variété compacte C, et deux plongements $\varphi: C \to M$ et $\varphi': C \to M'$ qui réalisent C comme feuille compacte de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{F}'$. Soit $x \in C$ et soient T et T' des transversales de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ aux points $\varphi(x)$ et $\varphi'(x)$. On suppose qu'il existe un germe de difféomorphisme g, de T sur T', de source $\varphi(x)$ et de but $\varphi'(x)$, de façon que, pour tout lacet γ d'origine x sur C on ait: $g \circ \tilde{h}_{\varphi(\gamma)} \circ g^{-1} = \tilde{h}_{\varphi'(\gamma)}$.

THÉORÈME 1.2-4. *Avec les notations ci-dessus, il existe un difféomorphisme ψ, défini d'un voisinage U de $\varphi(C)$ dans M sur un voisinage V de $\varphi'(C)$ dans M', égal à $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ sur $\varphi(C)$, et conjuguant les restrictions à U et à U' de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{F}'$.*

Donc, au voisinage d'une feuille compacte, un feuilletage est déterminé (à conjugaison près) par les germes d'holonomie des lacets sur cette feuille.

COROLLAIRE 1.2-5 *(Théorème de stabilité de Reeb). Si la feuille compacte C de$\mathcal{F}$ est sans holonomie (ou "d'holonomie triviale") (c'est-à-dire que, pour tout lacet γ sur C, $\tilde{h}_\gamma$ est le germe de l'identité de la transversale T), alors toute feuille rencontrant un petit voisinage de C est compacte et difféomorphe à C.*

C'est en particulier le cas si C est simplement connexe.

En codimension 1, cela entraîne que toute les feuilles sont compactes et difféomorphes à C.

§3 Holonomie: point de vue global

Cette partie définit le pseudogroupe d'holonomie et le groupoïde d'holonomie d'un feuilletage (déjà utilisés par de nombreux auteurs pour étudier la dynamique d'un feuilletage), et introduit la notion de groupoïde fondamental, qui joue un rôle essentiel pour comprendre les déformations de ce feuilletage.

a) Définitions

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage d'une variété différentiable M et soit $\tau: T \to M$ une transversale complète du feuilletage $\mathcal{F}$. On a défini (partie 2) ce qu'est un difféomorphisme d'holonomie du feuilletage $\mathcal{F}$ pour la transversale T.

L'ensemble de tous ces difféomorphismes d'holonomie de $\mathcal{F}$ sur T, munis de la composition, forme un pseudo-groupe de difféomorphismes définis sur des ouverts de T: c'est le *pseudo-groupe d'holonomie* $\mathcal{H}$ du feuilletage $\mathcal{F}$ pour la transversale T.

L'ensemble de tous les germes des éléments de $\mathcal{H}$ muni de la composition, est un groupoïde appelé *groupoïde d'holonomie* de $\mathcal{F}$ pour T. La donnée du groupoïde d'holonomie est équivalente à la donnée du pseudogroupe d'holonomie.

Le pseudo-groupe d'holonomie $\mathcal{H}$ d'un feuilletage $\mathcal{F}$ en caractérise complètement la dynamique: une feuille compacte correspond à une orbite de $\mathcal{H}$, fermée dans la transversale T ; une feuille propre correspond à une orbite discrète; si f et g sont deux feuilles de $\mathcal{F}$, et x et y des points de $f \cap T$ et $g \cap T$, alors f s'accumule sur g si et seulement si y est contenu dans l'adhérence de l'orbite de x.

Par contre, il oublie la topologie des feuilles, en particulier il ne permet pas de retrouver le groupe fondamental des feuilles. Or, nous verrons que le groupe fondamental des feuilles contient l'information sur les possibilités de déformation du feuilletage.

Le *groupoïde fondamental* $\Pi(\mathcal{F}, T)$ de $\mathcal{F}$ pour la transversale T est un groupoïde topologique défini de la façon suivante: son espace des unités est T. Pour $x, y \in T$, les éléments de $\Pi(\mathcal{F}, T)$ de source x et de but y sont les classes d'homotopie dans les feuilles de $\mathcal{F}$, de chemins tangents à $\mathcal{F}$ d'origine $\tau(x)$ et d'extrémité $\tau(y)$.

On obtient une base d'ouverts définissant la topologie de $\Pi(\mathcal{F}, T)$ en prenant les ensembles définis comme suit:

Soit h un difféomorphisme d'un ouvert U de T sur un ouvert V de T tel qu'il existe une application continue $C: U \times [0,1] \to M$ telle que, pour tout $u \in U, C_u: t \to C(u,t)$ soit un chemin contenu dans une feuille de $\mathcal{F}$, d'origine $\tau(u)$ et d'extrémité $\tau(h(u))$. Alors

l'ensemble des classes d'homotopie dans les feuilles de $\mathcal{F}$ des chemins $C_u, u \in U$, est l'ouvert annoncé.

REMARQUE 1.3.A-1. Les difféomorphismes h ci-dessus engendrent le pseudo-groupe d'holonomie de $\mathcal{F}$ pour la transversale T.

REMARQUE 1.3.A-2. L'identification de chaque point $x \in T$ avec le lacet constant en x, fait de ce point une unité du groupoïde $\Pi(\mathcal{F}, T)$. C'est pourquoi T est l'espace des unités de $\Pi(\mathcal{F}, T)$.

Le groupoïde fondamental $\Pi(\mathcal{F}, T)$ est muni d'une unique structure différentiable telle que les projections source et but (notées σ, β) de $\Pi(\mathcal{F}, T)$ dans T soient *étales* (c'est-à-dire: localement des difféomorphismes). La composition et le passage à l'inverse sont alors différentiables. Un groupoïde Γ possèdant de telles propriétés est appelé un *groupoïde différentiable étale* sur son espace d'unités T. Chaque élément $\gamma \in \Gamma$ de source $\sigma(\gamma) = x$ et but $\beta(\gamma) = y$ induit un germe de difféomorphisme de T, à savoir le germe en x de $\beta \circ s$, où s est une section locale de la projection source σ telle que $s(x) = \gamma$. Ces germes de difféomorphismes forment un sous-groupoïde topologique du groupoïde $\mathrm{Diff}(T)$ des germes de difféomorphismes locaux de T.

Si Γ est le groupoïde fondamental $\Pi(\mathcal{F}, T)$, le germe de difféomorphisme ainsi associé à $\gamma \in \Pi(\mathcal{F}, T)$ n'est autre que le germe d'holonomie $\tilde{h}_\gamma$ du feuilletage $\mathcal{F}$ le long des chemins représentés par γ. L'application qui à γ associe $\tilde{h}_\gamma$ définit un homomorphisme contravariant H de $\Pi(\mathcal{F}, T)$ dans le groupoïde $\mathrm{Diff}(T)$ des germes de difféomorphismes locaux de T, dont l'image est le groupoïde d'holonomie de $\mathcal{F}$ pour T. On appelle H *l'homomorphisme* (ou *représentation*) *d'holonomie.*

On a vu que la donnée du groupoïde fondamental $\Pi(\mathcal{F}, T)$ contient toute l'information sur l'holonomie de $\mathcal{F}$: pour tout chemin γ tangent à $\mathcal{F}$ et à extrémités sur T, son holonomie $\tilde{h}_\gamma$ est égale à $H(\gamma)$. Ce groupoïde fondamental jouera un rôle très important dans la théorie des déformations des feuilletages.

REMARQUE 1.3.A-3. Le rôle de la transversale T pour le groupoïde fondamental $\Pi(\mathcal{F}, T)$ est tout à fait analogue à celui du point base x pour le groupe fondamental $\pi_1(V, x)$ d'une variété V. Rappelons que, si $y \in V$ est un autre point, $\pi_1(V, y)$ est isomorphe à $\pi_1(V, x)$, cet isomorphisme étant défini par le choix d'un chemin sur V joignant y à x.

De même, si T' est une autre transversale complète du feuilletage $\mathcal{F}, \Pi(\mathcal{F}, T')$ sera équivalent à $\Pi(\mathcal{F}, T)$, l'équivalence étant définie par des familles de chemins tangents à $\mathcal{F}$ et joignant les points de T' à des points de T.

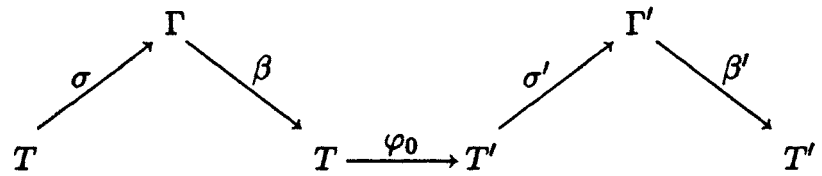
Le paragraphe suivant va donner un sens formel à cette remarque. Cette formalisation est relativement lourde, et n'est pas indispensable à une première lecture. Cependant, le groupoïde fondamental est l'outil clé pour comprendre les déformations d'un feuilletage. C'est pourquoi il est nécessaire de rappeler précisément les notions élémentaires telles que: homomorphismes, morphismes, et équivalences de groupoïdes différentiables.

b) Morphismes et équivalences de groupoïdes

REMARQUE PRÉLIMINAIRE 1.3 B-1: On peut faire le produit $\gamma_1\gamma_2$ de deux éléments γ_1 et γ_2 d'un groupoïde Γ, selon les conventions, si le but de γ_1 est égal à la source de γ_2, ou si la source de γ_1 est égale au but de γ_2. Par exemple, les groupoïdes de chemins (et donc le groupoïde fondamental) sont notés, traditionnellement,

suivant la première convention, alors que les groupoïdes de germes de difféomorphismes suivent la seconde convention. Dans ce paragraphe, les groupoïdes seront supposés suivre la première convention.

Soient Γ et Γ' deux groupoïdes différentiables étales avec espaces d'unités T et T'. Un *homomorphisme* (sous-entendu différentiable étale) $\varphi : \Gamma \to \Gamma'$ est une application étale (localement un difféomorphisme) telle que, $\varphi(\gamma_1\gamma_2) = \varphi(\gamma_1)\varphi(\gamma_2)$ (pour tout couple (γ_1, γ_2) tel que le produit $\gamma_1\gamma_2$ soit défini)et $\varphi(\gamma)^{-1} = \varphi(\gamma^{-1})$. Si γ est une unité de Γ, alors $\varphi(\gamma)$ est une unité de Γ'. Notons $\varphi_0 : T \to T'$ l'application différentiable étale ainsi obtenue. L'homomorphisme φ se projette par les projections sources σ, σ' et but β, β' sur l'application φ_0, comme l'indique le diagramme suivant:



L'homomorphisme φ est un *isomorphisme* s'il est de plus un difféomorphisme de Γ sur Γ'.

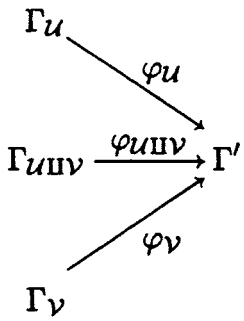
Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de T. Notons $\Gamma_{i,j} = \{(\gamma, i, j) \in \Gamma \times I \times I / \sigma(\gamma) \in U_i \text{ et } \beta(\gamma) \in U_j\}$. Notons $\Gamma_{\mathcal{U}}$ l'union disjointe $\amalg_{i,j}\Gamma_{i,j}$. L'ensemble $\Gamma_{\mathcal{U}}$ est muni naturellement d'une structure de groupoïde différentiable étale, dont l'espace des unités est $\amalg_i U_i$: le composé $(\gamma, i, j)(\gamma', k, l)$ est défini si $\beta(\gamma) = \sigma(\gamma')$ et $j = k$; il vaut alors $(\gamma\gamma', i, l)$.

La projection naturelle de $\Gamma_{\mathcal{U}}$ sur Γ est un homomorphisme. On dira que $\Gamma_{\mathcal{U}}$ est le *localisé* de Γ relativement à $\mathcal{U}$.

Si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont deux recouvrements de T, on notera $\mathcal{U} \amalg \mathcal{V}$ le recouvrement de T obtenu en prenant la réunion disjointe des fa-

milles d'ouverts de $\mathcal{U}$ et de $\mathcal{V}$. En particulier $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont des sous-recouvrements de $\mathcal{U} \amalg \mathcal{V}$.

DÉFINITION 1.3.B-2 *(Morphisme de groupoïde)*: Soient Γ et Γ'des groupoïdes avec des espaces d'unités T et T'. Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux recouvrements de T, et soient $\varphi_{\mathcal{U}}: \Gamma_{\mathcal{U}} \to \Gamma'$ et $\varphi_{\mathcal{V}}: \Gamma_{\mathcal{V}} \to \Gamma'$ deux homomorphismes. On dira que $\varphi_{\mathcal{U}}$ et $\varphi_{\mathcal{V}}$ représentent le même morphisme ϕ de Γ dans Γ' s'il existe un homomorphisme $\varphi_{\mathcal{U}\amalg\mathcal{V}}: \Gamma_{\mathcal{U}\amalg\mathcal{V}} \to \Gamma'$ étendant $\varphi_{\mathcal{U}}$ et $\varphi_{\mathcal{V}}$.



REMARQUE. Cette notion de morphisme de Γ dans Γ' est un cas particulier de la notion d'homomorphisme (généralisé) de G. Skandalis, exposée dans [**Hae 2**], 2.3.

DÉFINITION 1.3.B-3 *(Equivalence de groupoïdes)*: Deux groupoïdes différentiables étales Γ et Γ', d'espaces d'unités T et T' sont dits équivalents s'il existe des recouvrements $\mathcal{U}$de T et $\mathcal{U}'$ de T' tels que $\Gamma_{\mathcal{U}}$ et $\Gamma'_{\mathcal{U}'}$, soient isomorphes.

Si $\varphi: \Gamma_{\mathcal{U}} \to \Gamma'_{\mathcal{U}'}$ est un isomorphisme, alors le morphisme $\phi: \Gamma \to \Gamma'$ représenté par $1_{\mathcal{U}'} \circ \varphi$ (où $1_{\mathcal{U}'}: \Gamma'_{\mathcal{U}'} \to \Gamma'$est la projection naturelle) s'appellera une équivalence entre Γ et Γ'.

EXEMPLES:

– Soient T_0 un ouvert de T rencontrant toutes les orbites de Γ, et soit Γ_0 le sous-groupoïde de Γ formé des éléments de source et but dans T_0; alors l'inclusion de Γ_0 dans Γ représente une équivalence.

– $\mathcal{U}$ étant un recouvrement de T, alors la projection naturelle $1_{\mathcal{U}}: \Gamma_{\mathcal{U}} \to \Gamma$ représente une équivalence.

DÉFINITION 1.3.B-4 *(Composition de morphismes)*: Soient $\phi: \Gamma \to \Gamma'$ et $\phi': \Gamma' \to \Gamma''$ deux morphismes représentés par les homomorphismes $\varphi: \Gamma_{\mathcal{U}} \to \Gamma'$ et $\varphi': \Gamma'_{\mathcal{U}'} \to \Gamma''$. La définition du morphisme composé $\phi' \circ \phi$ est schématisée par le diagramme suivant:

$$\Gamma_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\varphi} \Gamma'$$

$$\Gamma_{\varphi_0^{-1}\mathcal{U}'} \xrightarrow{\varphi_0} \Gamma'_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\varphi'} \Gamma''$$

(φ_0 est l'application de $T_{\mathcal{U}} = \amalg_{U \in \mathcal{U}} U$ sur T' induite par φ, et $\varphi_0^{-1}(\mathcal{U}')$ est donc un recouvrement ouvert de $T_{\mathcal{U}}$).

CAS DU GROUPOÏDE FONDAMENTAL:

Soit $\Pi = \Pi(\mathcal{F}, T)$ le groupoïde fondamental de $\mathcal{F}$ pour la transversale T, et soit $\mathcal{U}$ un recouvrement de T. L'immersion $\tau: T \to M$ définit une immersion $\tau: \amalg U_i \to M$ par restriction de τ à chacun des ouverts de $\mathcal{U}$, ce qui fait de $\amalg U_i$ une autre transversale du feuilletage $\mathcal{F}$. Alors le groupoïde $\Pi_{\mathcal{U}}$ n'est autre que le groupoïde fondamental de $\mathcal{F}$ pour la transversale $\amalg U_i$.

On montre facilement la proposition suivante:

PROPOSITION 1.3.B-5. *Si T et T' sont deux transversales complètes d'un même feuilletage $\mathcal{F}$, le feuilletage $\mathcal{F}$ définit une équivalence entre les groupoïdes $\Pi(\mathcal{F}, T)$ et $\Pi(\mathcal{F}, T')$.*

DÉMONSTRATION: On choisit un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}$ de T et un recouvrement $\mathcal{V} = \{V_i\}$ de T', et, pour tout i, un difféomorphisme d'holonomie $h_i: U_i \to V_i$, et une application continue C^i: $U^i \times [0,1] \to M$, telle que, pour tout $x \in U_i$ le chemin $C^i_x: t \to C^i(x,t)$ est contenu dans une feuille de $\mathcal{F}$ et joint x à $h_i(x)$.

Notons $\Gamma = \Pi(\mathcal{F}, T)$ et $\Gamma' = \Pi(\mathcal{F}, T')$. On définit un isomorphisme entre $\Gamma_{\mathcal{U}}$ et $\Gamma'_{\mathcal{V}}$ de la façon suivante: à l'élément de $\Gamma_{\mathcal{U}}$ représenté par un chemin γ tangent à $\mathcal{F}$, joignant $x \in U_i$ à $y \in U_j$, on associe l'élément de $\Gamma'_{\mathcal{V}}$ représenté par le chemin $(C^i_x)^{-1} \cdot \gamma \cdot C^j_y$. □

CONSÉQUENCE: On pourra donc parler du groupoïde fondamental $\Pi(\mathcal{F})$ du feuilletage $\mathcal{F}$, sans avoir à préciser la transversale choisie.

Si $\varphi: \Pi(\mathcal{F}, T) \to \Gamma$ est un homomorphisme différentiable étale sur un groupoïde Γ, alors, pour toute transversale complète T' de $\mathcal{F}, \varphi$ détermine un morphisme de $\Pi(\mathcal{F}, T')$ dans Γ: il suffit pour cela de composer φ avec l'équivalence entre $\Pi(\mathcal{F}, T)$ et $\Pi(\mathcal{F}, T')$ définie par $\mathcal{F}$.

On peut donc parler de morphismes du groupoïde fondamental de $\mathcal{F}$ sur le groupoïde Γ sans avoir à préciser la transversale.

REMARQUE 1.3.B-6. Soit V une variété différentiable de dimension k. Fixons $r \in \mathbf{N}^*$. On note $\mathrm{Diff}(V)$ le groupoïde des germes de difféomorphismes locaux de classe C^r de V.

La donnée d'un atlas sur V, y définissant la structure de variété différentiable, détermine une équivalence entre les groupoïdes différentiables $\mathrm{Diff}(V)$ et $\mathrm{Diff}(\mathbf{R}^k)$.

L'homomorphisme d'holonomie $H: \Pi(\mathcal{F}, T) \to \mathrm{Diff}(T)$ détermine donc, pour toute transversale complète T' de $\mathcal{F}$, un morphisme de $\Pi(\mathcal{F}, T')$ dans $\mathrm{Diff}(\mathbf{R}^k)$. Ce morphisme ne dépend pas de la

transversale T initialement choisie.

On pourra donc parler sans ambiguité du *morphisme d'holonomie de* $\mathcal{F}$, du groupoïde fondamental $\Pi(\mathcal{F})$ dans $\mathrm{Diff}(\mathbf{R}^k)$, sans devoir préciser la transversale considérée.

§4 Perturbations d'un feuilletage

Le but de ce travail est d'étudier les feuilletages proches d'un feuilletage fixé $\mathcal{F}$ (le feuilletage $\mathcal{F}$ étant très simple puisque défini par une fibration).

Il faut d'abord définir la notion de proximité dans l'ensemble des feuilletages, c'est-à-dire munir cet ensemble d'une topologie.

a) Topologies de l'ensemble des feuilletages

Soit M une variété compacte.

Chacun des ensembles, $Fol_k^r(M)$ et $Fol_k^{r+}(M)$, des feuilletages ou des champs de plans intégrables, de classe C^r et de dimension k, possède une topologie naturelle que nous allons décrire brièvement.

DÉFINITION 1.4.A-1 *(C^r-topologie des champs de plans et C^r-topologie sur Fol_k^{r+}):*

Un champ de k-plans sur M est une section du fibré de base M dont la fibre au dessus de $x \in M$ est la grassmannienne de dimension k de l'espace tangent T_xM. L'ensemble des sections de classe C^r est muni d'une topologie naturelle, comme ensemble d'applications de classe C^r d'une variété compacte dans une autre: c'est la C^r-topologie naturelle sur l'espace des champs de k-plans sur M, qui induit par restriction aux champs de k-plans intégrables, la C^r-topologie sur $Fol_k^{r+}(M)$.

Cette définition fait de $Fol_k^{r+}(M)$ un fermé de l'espace des champs de k-plans sur M.

DÉFINITION 1.4.A-2 *(C^r-topologie (d'Epstein) sur $Fol_k^r(M)$)*:

Dans [E], Epstein définit une topologie sur l'ensemble $\mathcal{F}ol_k^r(M)$, que l'on peut décrire intuitivement de la façon suivante: un feuilletage $\mathcal{G}$ est C^r-proche d'un feuilletage $\mathcal{F}$, s'il admet un atlas feuilleté par des cartes C^r-proches de cartes fixées de $\mathcal{F}$. Pour que cette définition ait un sens, il faut cependant choisir l'atlas de $\mathcal{F}$ de façon que les cartes soient bien "cubiques".

Voyons à présent la définition formelle de la topologie d'Epstein:

Soit $\mathcal{F} \in Fol_k^r(M)$, $r \geq 1$, un feuilletage sur M.

On peut choisir une famille finie $\{K_i\}$ de compacts telle que l'on ait les propriétés suivantes:

i) Les intérieurs des K_i recouvrent M.

ii) Pour tout i, il existe un ouvert U_i de M contenant K_i et un difféomorphisme $\varphi_i = (f_i, g_i)$ de U_i sur un ouvert de $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n-k}$ de façon que (U_i, g_i) soit une carte feuilletée de $\mathcal{F}$, et que $\varphi_i(K_i)$ soit égal au cube $D^k \times D^{n-k}$ où D^k et D^{n-k} sont les disques de rayon 1 de $\mathbf{R}^k$ et $\mathbf{R}^{n-k}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, notons $\mathcal{V}_\varepsilon(\mathcal{F})$ l'ensemble des feuilletages $\mathcal{G} \in Fol_k^r(M)$ tels qu'on ait les propriétés suivantes:

1) il existe un recouvrement fini V_i de M par des ouverts tels que, pour tout i, V_i contienne le compact K_i.

2) pour tout i, il existe un difféomorphisme $\psi_i = (l_i, h_i)$ de V_i sur un ouvert de $\mathbf{R}^h \times \mathbf{R}^{n-h}$ de façon que (V_i, h_i) soit une carte feuilletée du feuilletage $\mathcal{G}$.

3) pour tout i notons $\Delta_i : D^k \times D^{n-k} \to \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n-k}$ l'application de classe C^r définie par $\Delta_i = \psi_i \circ \varphi_i^{-1} - \mathrm{id}$ (où id est la restriction à $D^k \times D^{n-k}$ de l'identité); alors, en tout point $x \in D^k \times D^{n-k}$, les normes de Δ_i et de toutes ses dérivées partielles en x d'ordre inférieur ou égal à r sont toutes inférieures strictement à ε.

Alors, par définition de la C^r-topologie sur $Fol_k^r(M)$, les ensembles $\mathcal{V}^\epsilon$ sont des ouverts de $Fol_k^r(M)$ et forment une base de voisinage du feuilletage $\mathcal{F}$.

REMARQUE 1.4.A-3.
i) On sait très peu de chose sur les propriétés topologiques des ensembles de feuilletages d'une variété M. Par exemple, on ne sait pas répondre à la question suivante:

QUESTION: *$Fol_k^r(M)$ (ou $Fol_k^{r+}(M)$), $k > 1$, est-il localement connexe? ou localement connexe par arc ?*

Autrement dit, on ne sait pas s'il est toujours possible de joindre deux feuilletages très voisins par un (petit) chemin dans l'ensemble des feuilletages. On ne sait pas même répondre à cette question au voisinage de feuilletages très simples. Par exemple:

QUESTION: *Le feuilletage défini par la fibration $S^1 \times T^2 \to S^1$ possède-t-il un voisinage connexe par arcs, pour la topologie C^r, $r \geq 1$?*

ii) Soient $s > r$ deux entiers. Alors $Fol_k^s(M)$ est naturellement inclus dans $Fol_k^r(M)$ et dans $Fol_k^{r+}(M)$, qui sont chacun munis de leur C^r-topologie. On appellera C^r-topologie (d'Epstein) et C^r-topologie des champs de plans, les topologies induites sur $Fol_k^s(M)$.

iii) La C^r-topologie sur $Fol_k^s(M)$ est moins fine que la C^r-topologie des champs de plans. La C^∞-topologie d'Epstein coïncide avec la C^∞-topologie des champs de plans (sur $Fol_k^\infty(M)$).

iv) par la suite, beaucoup d'énoncés débuteront par: "soit $\mathcal{G}$ un feuilletage C^r-proche de $\mathcal{F}$ ... "; ou par "pour un feuilletage $\mathcal{G}$, C^r-proche de $\mathcal{F}$ ... "; ces expressions sont des abus de langages signifiant: "Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $\mathcal{F}$ pour la C^r-topologie, tel que, pour tout feuilletage $\mathcal{G} \in \mathcal{U}$ ... ".

De même, "Il existe $\mathcal{G}C^r$-proche de $\mathcal{F}$ ... " signifie: "Pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de $\mathcal{F}$ pour la C^r-topologie, il existe $\mathcal{G} \in \mathcal{U}$ ... ".

Enfin on utilisera l'expression "C^r- petite perturbation de $\mathcal{F}$" au lieu de "feuilletage C^r-proche de $\mathcal{F}$".

v) d'après la remarque iii, et dans le langage de la remarque iv, si un énoncé est vrai "pour tout feuilletage $\mathcal{G}$, C^r-proche de $\mathcal{F}$ au sens de la topologie d'Epstein", il est encore vrai "pour tout feuilletage C^r-proche de $\mathcal{F}$ au sens de la topologie des champs de plans". Je ne sais rien quant à la réciproque.

De même, un contre exemple à un énoncé, pour la C^r-topologie des champs de plans est également un contre exemple pour la C^r-topologie d'Epstein.

vi) chacun des espaces de feuilletages sur M est à base dénombrable d'ouverts.

CONVENTION: Dans toute la suite de cette thèse, pour tout $r \geq 1$, la C^r-topologie sera celle définie par Epstein. Par contre, pour $r = 0$, nous utiliserons la C^0-topologie des champs de plans.

b) Perturbations d'un feuilletage et holonomie

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage d'une variété compacte M. On demande à $\mathcal{F}$ d'être de classe C^1, ou au moins d'être défini par un champ de plans intégrable de classe C^0.

Soit T une transversale complète du feuilletage $\mathcal{F}$, relativement compacte dans une transversale T'.

PROPOSITION 1.4.B-1. *Pour tout feuilletage $\mathcal{G}$, C^0-proche de $\mathcal{F}$ au sens de la topologie des champs de plans, T, est une transversale complète de $\mathcal{G}$.*

Soient U et V deux ouverts de T, soit $h: U \to V$ un difféomorphisme d'holonomie de $\mathcal{F}$, et soit $C: U \times [0,1] \to M$ une application

continue telle que pour tout $x \in U$ le chemin $C_x : t \to C(x,t)$ soit contenu dans une feuille de $\mathcal{F}$ et joigne x à $h(x)$.

Soit U' un ouvert relativement compact dans U.

PROPOSITION 1.4.B-2.

1) *Soit $\mathcal{G}$ un feuilletage C^0-proche de $\mathcal{F}$ (au sens de la topologie des champs de plans). Alors il existe un unique difféomorphisme h' d'holonomie de $\mathcal{G}$, de U' sur un ouvert V' d'adhérence contenue dans V, tel qu'il existe une application continue $C' : U' \times [0,1] \to M$, C^0-proche de la restriction de C à $U' \times [0,1]$, et telle que pour tout $x \in U'$ le chemin $C'_x : t \to C'(x,t)$ soit contenu dans une feuille de $\mathcal{G}$ et joigne x à $h'(x)$.*

2) *de plus, si $\mathcal{G}$ est C^r-proche de $\mathcal{F}$, h' est C^r-proche de la restriction de h à U'.*

Intuitivement, on peut exprimer ainsi cette proposition:

"Un feuilletage C^r-proche de $\mathcal{F}$ a une holonomie C^r-proche de celle de $\mathcal{F}$."

ATTENTION: Cette interprétation intuitive peut être trompeuse. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage, T, une transversale complète de $\mathcal{F}$ relativement compacte dans une autre transversale, $\{U_i\}$ un recouvrement de T par une famille finie d'ouverts, et pour tout i un difféomorphisme d'holonomie h_i, défini sur un voisinage de l'adhérence de U_i dans T'. On suppose que la famille $\{h_i \mid_{U_i}\}$ engendre le pseudogroupe d'holonomie de $\mathcal{F}$ sur T.

Il est faux qu'un feuilletage $\mathcal{F}'$, C^r-proche de $\mathcal{F}$, a son pseudogroupe d'holonomie sur T engendré par une famille $\{h'_i\}$ où h'_i est proche de h_i.

En effet, le pseudogroupe d'holonomie du feuilletage $\mathcal{F}'$ peut avoir davantage de générateurs que n'en a celui de $\mathcal{F}$.

EXEMPLE: Soit F une variété compacte dont le groupe fondamental est le groupe libre $\mathbf{Z} * \mathbf{Z}$. Soit B une variété compacte, et soit $\mathcal{F}$ le feuilletage défini par la fibration triviale $B \times F \to F$. Choisissons un point $0 \in F$. L'identification de B avec $B \times \{0\}$ fait de la base B une transversale complète du feuilletage $\mathcal{F}$. Le pseudogroupe d'holonomie de $\mathcal{F}$ sur cette transversale est trivial, c'est-à-dire engendré par l'identité de B. Cependant, pour tout couple (f, g) de difféomorphismes de B, C^r-proches de l'identité, il existe un feuilletage C^r-proche de $\mathcal{F}$ dont le pseudogroupe d'holonomie soit engendré par f et g: il suffit de faire la suspension des difféomorphismes f et g (voir Chapitre 3.3).

§5 Germes de déformation d'un feuilletage et de son holonomie

Cette partie a pour but de donner un sens précis à l'idée intuitive que la partie 4 a introduite:

Déformer un feuilletage revient à déformer son holonomie.

a) Déformations et germes de déformation d'un feuilletage.

Soit M une variété compacte, et soit $(S, 0)$ un espace topologique localement compact pointé en 0. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur M. Une *C^r-déformation de $\mathcal{F}$* paramétrée par S est une famille $\{\mathcal{F}_s\}_{s \in S}$ de feuilletages sur M, continue pour la C^r-topologie d'Epstein, telle que $\mathcal{F}_0$ est le feuilletage $\mathcal{F}$.

Deux déformations $\{\mathcal{F}_s^1\}_{s \in S}, \{\mathcal{F}_s^2\}_{s \in S}$ définissent le même *germe de déformation de $\mathcal{F}$* si pour tout s suffisamment proche de 0 les feuilletages $\mathcal{F}_s^1$ et $\mathcal{F}_s^2$ sont égaux.

Deux germes de C^r-déformations de $\mathcal{F}$ représentés par les déformations $\{\mathcal{F}_s^1\}_{s\in S}$ et $\{\mathcal{F}_s^2\}_{s\in S}$ seront dits *équivalents* s'il existe une famille $\{\varphi^s\}_{s\in S}$ de difféomorphismes de M, continue pour la topologie C^r, tels que φ^0 est l'identité de M, et que, pour s proche de 0, $\varphi^s(\mathcal{F}_s^1) = \mathcal{F}_s^2$.

REMARQUE 1.5.A-1. 1) Choisissons comme ensemble des paramètres S l'ensemble $\{0\} \cup \{1/n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$, avec la topologie induite de celle de $\mathbf{R}$. Une C^r-déformation de $\mathcal{F}$ paramétrée par S est une suite $\mathcal{F}_n$ de feuilletages convergeant vers $\mathcal{F}$ pour la C^r-topologie.

2) Comme $Fol_k^r(M)$ est à base dénombrable d'ouverts, pour montrer qu'une propriété A est vraie pour tout feuilletage C^r-proche de $\mathcal{F}$, il suffit de montrer l'énoncé suivant: "Soit $\{\mathcal{F}^s\}_{s\in S}$ une C^r-déformation de $\mathcal{F}$, alors pour s assez voisin de 0, $\mathcal{F}^s$ vérifie la propriété A (où S est l'ensemble $\{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbf{N}^*}$.)."

Il est commode de considérer une déformation $\{\mathcal{F}^s\}_{s\in S}$ d'un feuilletage $\mathcal{F}$, comme un *feuilletage au-dessus de* S défini sur l'espace $M\times S$. Comme $M\times S$ n'est pas a priori une variété (puisque S est un espace localement compact quelconque) il faut préciser cette appellation.

Un *feuilletage* $\mathcal{F}^S$, *au-dessus de* S, *défini sur un ouvert* U *de* $M\times S$, sera (d'une façon analogue à la définition usuelle des feuilletages) défini par un atlas de cartes feuilletées, sur U, c'est à dire:

– un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de U par des ouverts U_i de $M\times S$. On notera $U_i^s = U_i \cap (M\times\{s\})$.

– pour chaque i, une application p_i de U_i sur un ouvert de $\mathbf{R}^{n-k}\times S$, de la forme $p_i(x,s) = (p_i^s(x), s)$ où p_i^s est une submersion de U_i^s dans $\mathbf{R}^n$ variant continûment avec le paramètre s.

– pour tout $(x,s) \in U_i \cap U_j$, un voisinage ouvert $U^x_{i,j}$ de (x,s) et une application $h_{i,j}: p_j(U^x_{i,j}) \to p_i(U^x_{i,j})$ de la forme $h_{i,j}(a,s) = (h^s_{i,j}(a), s)$ ou h^s_{ij} est un difféomorphisme de $\mathbf{R}^{n-k}$ variant continûment avec s, tels que, sur $U^x_{i,j}$ on ait: $h_{i,j} \circ g_j = g_i$.

Deux tels atlas $(\mathcal{U}, p_i, g_{ij}), (\mathcal{U}, q_k, h_{kl})$ définiront le même feuilletage $\mathcal{F}^S$ sur U s'ils peuvent se prolonger en un cocycle sur le recouvrement $\mathcal{U}\ \mathcal{V}$ de U qui est l'union disjointe des familles $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ et $\mathcal{V} = \{V_k\}_{k\in K}$ d'ouverts de U.

Un tel feuilletage $\mathcal{F}^S$ définit sur chaque ouvert $U^s = U \cap (M \times \{s\})$ de $M \times \{s\}$ un feuilletage $\mathcal{F}^s$ (au sens habituel), variant continûment avec le paramètre s. On appelle feuille du feuilletage $\mathcal{F}^S$ passant par un point (x,s), la feuille du feuilletage $\mathcal{F}^s$ passant par ce point.

Avec cette définition, il est clair que se donner une déformation du feuilletage $\mathcal{F}$ est équivalent à se donner un feuilletage $\mathcal{F}^S$ au-dessus de S sur $M \times S$ tel que le feuilletage $\mathcal{F}^0$ induit sur $M \times \{0\}$ soit égal à $\mathcal{F} \times \{0\}$.

b) Germes de déformation de l'holonomie d'un feuilletage

Soit $\mathcal{F}^S = \{\mathcal{F}^s\}_{s\in S}$ une C^r-déformation d'un feuilletage $\mathcal{F}$, considérée comme un feuilletage sur $M \times S$.

Soit T une transversale complète du feuilletage $\mathcal{F}$, relativement compacte dans une transversale T'. Pour s assez proche de $0, T$ est une transversale complete de $\mathcal{F}^s$. On considère $T \times S$ comme une transversale complete du feuilletage $\mathcal{F}^S$ restreint $M \times S_0$, où S_0 est un voisinage ouvert de 0 dans S.

Soit γ un chemin contenu dans une feuille de $\mathcal{F}$, joignant les points x et y de T. Soit $\tilde{h}_\gamma$ son germe d'holonomie. On considère le chemin $\gamma \times \{0\} \subset M \times \{0\}$; c'est un chemin contenu dans une

feuille de $\mathcal{F}^S$, joignant les points $(x,0)$ et $(y,0)$ de la transversale $T \times S$.

Un homéomorphisme d'holonomie h^S_γ du feuilletage $\mathcal{F}^S$ le long de $\gamma \times \{0\}$, sur $T \times S$, est du type: $h^S_\gamma(z,s) = (h^s_\gamma(z), s)$ où h^s_γ est un difféomorphisme local de T variant continûment avec s pour la topologie C^r(c'est un difféomorphisme d'holonomie du feuilletage $\mathcal{F}^s$); de plus h^0_γ est un difféomorphisme d'holonomie de $\mathcal{F}$ le long de γ.

Le germe en $(x,0)$, $\tilde{h}^S_\gamma$, de $\tilde{h}^S_\gamma$ est le germe d'holonomie de $\mathcal{F}^S$ le long du chemin $\gamma \times \{0\}$; il induit $\tilde{h}_\gamma$ par restriction à $T \simeq T \times \{0\}$. Il peut être considéré comme un germe de déformation du germe de difféomorphisme $\tilde{h}_\gamma$.

NOTATIONS:

Soit V une variété différentiable. Fixons $r \in \mathbf{N}^*$. On note $\mathrm{Diff}(V)$ le groupoïde des germes des difféomorphismes locaux de classe C^r, de V.

On note $\mathrm{Diff}^S(V)$ le pseudogroupe des homéomorphismes locaux φ^S de $V \times S$, de la forme $\varphi^S(x,s) = (\varphi^s(x), s)$ où φ^s est un difféomorphisme local de V variant continûmenavec s pour la topologie C^r.

On note $\mathrm{Diff}^S(V)$ le groupoïde des germes des éléments de $\mathrm{Diff}^S(V)$ (muni de la topologie des germes), et $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(V)$ le sous groupoïde des germes des éléments de $\mathrm{Diff}^S(V)$ pris aux points de $V \times \{0\}$

La restriction à $V \times \{0\}$ des éléments de $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(V)$ induit une projection naturelle de $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(V)$ sur $\mathrm{Diff}(V)$.

REMARQUE 1.5.B-1. Soit k la dimension de la variété V. La donnée d'un atlas, définissant la structure de variété différentiable sur V,

détermine naturellement une équivalence entre les groupoïdes différentiables $\mathrm{Diff}(V)$ et $\mathrm{Diff}(\mathbf{R}^k)$, et de même entre $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(V)$ et $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(\mathbf{R}^k)$.

Soit $\Pi(\mathcal{F},T)$ le groupoïde fondamental du feuilletage $\mathcal{F}$, pour la transversale T et soit $H\colon \Pi(\mathcal{F},T) \to \mathrm{Diff}(T)$ la représentation d'holonomie de $\mathcal{F}$. Soit $\mathcal{F}^S$ une déformation de $\mathcal{F}$.

Notons $H^S\colon \Pi(\mathcal{F},T) \to \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ l'application qui à tout élément de $\Pi(\mathcal{F},T)$, représenté par un chemin γ, associe le germe d'holonomie $\tilde{h}^S_\gamma$ de $\mathcal{F}^S$ le long de $\gamma \times \{0\}$. C'est un homomorphisme différentiable, rendant commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T) \\ & \overset{H^S}{\nearrow} & \\ \Pi(\mathcal{F},T) & \xrightarrow{\quad H \quad} & \mathrm{Diff}(T) \end{array}$$

DÉFINITION 1.5.B-2: On appelle *germe de déformation (paramétrée par S) de l'holonomie de $\mathcal{F}$ sur la transversale T* tout homomorphisme différentiable, contravariant, $H^S\colon \Pi(\mathcal{F},T) \to \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$, dont la composée avec la projection naturelle de $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ sur $\mathrm{Diff}(T)$ est l'homomorphisme d'holonomie de $\mathcal{F}$ sur T.

REMARQUE 1.5.B-3.

1) Soit $k = \dim T$ la codimension de $\mathcal{F}$. Tout morphisme de $\Pi(\mathcal{F},T)$ dans $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(\mathbf{R}^k)$ définit, par l'équivalence entre $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(\mathbf{R}^k)$ et $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$, un morphisme de $\Pi(\mathcal{F},T)$ dans $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$.

2) Si T' est une autre transversale complète du feuilletage $\mathcal{F}$, l'équivalence (définie par $\mathcal{F}$) entre $\Pi(\mathcal{F},T)$ et $\Pi(\mathcal{F},T')$ permet d'associer un unique morphisme de $\Pi(\mathcal{F},T')$ dans $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(T')$ à tout morphisme de $\Pi(\mathcal{F},T)$ dans $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$.

3) Enfin, soit ψ un morphisme de $\Pi(\mathcal{F},T)$ dans $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(\mathbf{R}^k)$. Il existe un recouvrement $\mathcal{U}=\{U_i\}$ de T tel que, en notant $T'=\amalg U_i$, le morphisme induit par ψ, de $\Pi(\mathcal{F},T')$ dans $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(T')$, soit représenté par un homomorphisme $H^S\colon\Pi(\mathcal{F},T')\to\mathrm{Diff}^{(S,0)}(T')$ qui soit un germe de déformation de l'holonomie de $\mathcal{F}$ sur T'.

En effet, soit $\mathcal{U}=\{U_i\}$, un recouvrement de T tel que ψ soit représenté par un homomorphisme (différentiable étale) $\varphi\colon\Pi(\mathcal{F},T')\to\mathrm{Diff}^{(S,0)}(\mathbf{R}^k)$, où T' est l'union disjointe $\amalg U_i$. Soit x un point de U_i: c'est une unité de $\Pi(\mathcal{F},T')$. Notons $\varphi_i(x)$ l'image de x par φ: c'est une unité de $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(\mathbf{R}^k)$ et donc un point de $\mathbf{R}^k$. On a ainsi défini un difféomorphisme φ_i de U_i sur un ouvert V_i de $\mathbf{R}^k$. Notons $V=\amalg V_i$; l'homomorphisme φ détermine canoniquement un homomorphisme $\varphi'\colon\Pi(\mathcal{F},T')\to\mathrm{Diff}^{(S,0)}(V)$. En composant φ' avec l'isomorphisme de $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(V)$ sur $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(T')$ défini par les φ_i^{-1}, on obtient un homomorphisme qui est un germe de déformation de l'holonomie de $\mathcal{F}$ sur T'.

Ces trois remarques justifient la définition suivante:

DÉFINITION 1.5.B-4: On appelle *germe de déformation (paramétrée par S) de l'holonomie de* $\mathcal{F}$, tout morphisme (différentiable étale) de $\Pi(\mathcal{F},T)$ dans $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(\mathbf{R}^k)$.

On a vu que tout germe de déformation $\mathcal{F}^{(S,0)}$ de $\mathcal{F}$ induit de façon naturelle un germe de déformation de l'holonomie de $\mathcal{F}$.

LEMME 1.5.B-5. *Deux germes de déformations* $\mathcal{F}_1^{(S,0)}$ *et* $\mathcal{F}_2^{(S,0)}$ *de* $\mathcal{F}$ *qui sont équivalents induisent le même germe de déformation de l'holonomie de* $\mathcal{F}$*: les homomorphismes* H_1^S *et* H_2^S *de* $\Pi(\mathcal{F},T)$ *dans* $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$, *induits par* $\mathcal{F}_1^{(S,0)}$ *et* $\mathcal{F}_2^{(S,0)}$, *représentent le même morphisme.*

DÉMONSTRATION: Il suffit d'utiliser les remarques suivantes:

REMARQUE 1.5.B-6. Si $\mathcal{F}_1^{(S,O)}$ et $\mathcal{F}_2^{(S,0)}$ sont deux germes de défomation de $\mathcal{F}$ qui sont équivalents, alors il existe un homéomorphisme $\psi \in \text{Diff}^{S}(T)$, défini sur un voisinage de $T \times \{0\}$ dans $T \times S$, et induisant l'identité sur $T \times S$, et tel que, pour tout $\gamma \in \Pi(\mathcal{F}, T)$ on ait:

$$H_2^S(\gamma) = \psi \circ H_1^S(\gamma) \circ \psi^{-1}.$$

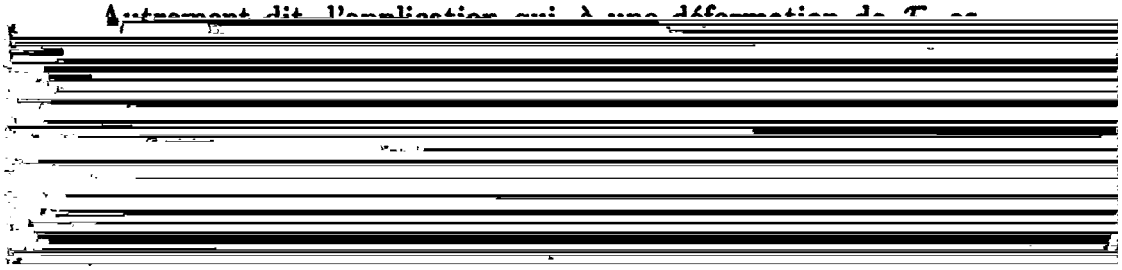
REMARQUE 1.5.B-7. Soient φ_1 et φ_2 deux homomorphismes (différentiables étales) de $\Pi(\mathcal{F}, T)$ dans $\text{Diff}^{(S,0)}(T)$, tel qu'il existe $\psi \in \text{Diff}^{S}(T)$, défini sur un voisinage de $T \times \{0\}$ dans $T \times S$, induisant l'identité sur $T \times \{0\}$, et tel que, pour tout $\gamma \in \Pi(\mathcal{F}, T)$ on ait

$$\varphi_1(\gamma) = \psi \circ \varphi_2(\gamma) \circ \psi^{-1}$$

Alors φ_1 et φ_2 représentent le même morphisme, c'est-à-dire se prolongent en un homomorphisme sur $\Pi(\mathcal{F}, T' \amalg T)$. □

THÉORÈME *(Réalisation des déformations d'holonomie). Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de classe C^r sur une variété compacte M. Soit $(S, 0)$ un espace localement compact pointé en 0.*

Pour tout germe H^S de déformation paramétrée par $(S, 0)$ de l'holonomie de $\mathcal{F}$, il existe un germe de déformation $\mathcal{F}^{(S,0)}$ de $\mathcal{F}$ qui induise H^S par holonomie. De plus le germe de déformation $\mathcal{F}^{(S,0)}$ est unique à équivalence près.



LEMME 1.5.B-9. *Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de$M \times \{0\}$ dans $M \times S$, et un homéomorphisme $\Psi \in \mathrm{Diff}^S(T)$ défini de $\mathcal{V}$ sur un ouvert de $M \times S$, égal à l'identité sur $M \times \{0\}$ et vérifiant la propriété suivante:*

Il existe un voisinage $V \subset U$ de $T \times \{0\}$ dans $T \times S$ tel que $\Psi(v) \subset T \times S$, et que la restriction de Ψ à v coïncide avec ψ.

Notons $\mathcal{F}^S = \Psi(\mathcal{F}_0^S)$. C'est une déformation de $\mathcal{F}$ car Ψ coïncide avec l'identité sur $M \times \{0\}$. De plus, la déformation de l'holonomie de $\mathcal{F}$ sur T engendrée par $\mathcal{F}^S$ est exactement H^S: le corollaire est démontré. □

Appendice 1

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE RÉALISATION DES DÉFORMATIONS DE L'HOLONOMIE

Nous venons de voir que, à chaque classe d'équivalence de germes de déformation d'un feuilletage $\mathcal{F}$, est associé (par holonomie) un germe de déformation de l'holonomie de $\mathcal{F}$. Le but de cet appendice est de montrer que cette application est bijective. La démonstration présentée ici est essentiellement la même que celle donnée dans [BH], exprimée dans un langage plus géométrique, et légèrement simplifiée.

L'injectivité de cette application se montre assez facilement: si deux déformations $\mathcal{F}_1^S$ et $\mathcal{F}_2^S$ de $\mathcal{F}$ induisent la même déformation de l'holonomie de $\mathcal{F}$ sur T, alors les germes de $\mathcal{F}_1^S$ et $\mathcal{F}_2^S$ sont équivalents, c'est-à-dire que $\mathcal{F}_2^S$ coïncide, au voisinage de $M \times \{0\}$, avec l'image de $\mathcal{F}_1^S$ par un homéomorphisme $\psi \in \mathrm{Diff}^S(M)$, induisant l'identité sur $M \times \{0\}$. On construit ψ en projetant les feuilles de $\mathcal{F}_1^S$ sur celles de $\mathcal{F}_2^S$ le long d'un champ de disques transverse à $\mathcal{F}$.

Pour montrer la surjectivité, on va construire un inverse à cette application, c'est-à-dire reconstruire une déformation de $\mathcal{F}$ à partir d'une déformation de son holonomie. Cette construction est entièrement due à A. Haefliger: à partir d'une déformation de l'ho-

lonomie de $\mathcal{F}$, on construit un microfibré au dessus de $M \times S$, muni d'un feuilletage $\hat{F}$, et d'une section σ définie sur $M \times \{0\}$, transverse au feuilletage $\hat{F}$ et telle que le feuilletage $\sigma^{-1}(\hat{F})$, défini sur $M \times \{0\}$, soit égal à $\mathcal{F}$. On prolonge alors la section σ en une section σ^S définie au voisinage de $M \times \{0\}$ et transverse à $\hat{F}$. Le pull-back $(\sigma^S)^{-1}(\hat{F})$ est une déformation du feuilletage $\mathcal{F}$, et la déformation de l'holonomie qu'elle induit est celle dont on était partie.

On notera $\mathcal{F}$ un feuilletage d'une variété compacte connexe M, T une transversale complète du feuilletage $\mathcal{F}$. On note $(S, 0)$ un espace localement compact pointé en 0.

§1 Injectivité

Le but de cette partie est de prouver la proposition suivante.

PROPOSITION 1.A.1-1. *Soit $\mathcal{F}_1^S$ et $\mathcal{F}_2^S$ deux déformations du feuilletage $\mathcal{F}$, et notons H_1^S et H_2^S les déformations de l'holonomie de $\mathcal{F}$ sur T induites par $\mathcal{F}_1^S$ et $\mathcal{F}_2^S$. On suppose que H_1^S et H_2^S représentent le même morphisme de $\Pi(\mathcal{F}, T)$ dans $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$.*

Alors les germes de $\mathcal{F}_1^S$ et $\mathcal{F}_2^S$ sont équivalents.

La démonstration de cette proposition utilise la notion de champ de disques sur M transverse à $\mathcal{F}$, qui est définie au Chapitre 2.1.a.

DÉMONSTRATION: Soient $\mathcal{F}_1^S$ et $\mathcal{F}_2^S$ deux déformations du feuilletage $\mathcal{F}$, vérifiant les hypothèses de la proposition.

Remarquons d'abord que, le fait que H_1^S et H_2^S représentent le même morphisme, ne dépend pas de la transversale complète T. On peut donc supposer que T est une transversale complète relativement compacte dans une transversale plongée T'.

Alors, l'argument de la démonstration du corollaire 1.5.b-8 montre qu'il existe une déformation $\mathcal{F}_3^S$ dont le germe est équivalent à celui de $\mathcal{F}_2^S$, et qui induit la même déformation de l'holonomie de $\mathcal{F}$ sur T' que celle induite par $\mathcal{F}_1^S$.

D'après la remarque ci-dessus, on peut supposer que l'on a:

$$H_1^S = H_2^S : \Pi(\mathcal{F}, T') \to \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T')$$

Soit $\{D_x\}_{x\in M}$ un champ de disques sur M, transverse à $\mathcal{F}$. On suppose de plus que, pour tout point $x \in T$, le disque D_x est inclus dans T'.

Pour s assez proche de 0, les feuilletages $\mathcal{F}_1^s$ et $\mathcal{F}_2^s$ sont transverses au champ de disques $\{D_x\}_{x\in M}$.

Choisissons une métrique riemanienne sur M. Alors il existe $l > 0$, et il existe un voisinage S_0 de 0 dans S, tels que, pour tout $s \in S_0$, les deux propriétés suivantes soient vraies:

i) pour tout $x \in M$, il existe un chemin γ_x^s tangent au feuilletage $\mathcal{F}_1^s$, tel que $\gamma_x^s(0) \in T, \gamma_x^s(1) = x$, et la longueur $l(\gamma_x^s)$ est majorée par l.

ii) tout chemin γ, tangent à $\mathcal{F}_1^s$ et de longueur $l(\gamma) \leq 2l$, se projette en un chemin $\bar{\gamma}$, tangent à $\mathcal{F}_2^s$, tel que $\gamma(0) = \bar{\gamma}(0)$ et tel que $\bar{\gamma}(t) \in D_{\gamma(t)}$.

LEMME 1.A.1-2. *Il existe un voisinage $S_1 \subset S_0$ de 0 dans S tel que, pour tout $s \in S_1$, on ait la propriété suivante:*

Soient γ_1 et γ_2 deux chemins tangents à $\mathcal{F}_1^s$ tels que $\gamma_1(0)$ et $\gamma_2(0)$ appartiennent à T, que $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, et que les longueurs $l(\gamma_1)$ et $l(\gamma_2)$ soient inférieures à l. Soient $\bar{\gamma}_1$ et $\bar{\gamma}_2$ leurs projections sur $\mathcal{F}_2^s$ le long du champ de disques $\{D_x\}$. Alors on a:

$$\bar{\gamma}_1(1) = \bar{\gamma}_2(1)$$

DÉMONSTRATION: Raisonnons par l'absurde. On suppose qu'il existe une suite $s_i \in S_0$, $\lim_i s_i = 0$, telle que pour tout i, il existe deux chemins γ_1^i, γ_2^i tangents à $\mathcal{F}_1^{s_i}$ vérifiant les hypothèses du lemme, et tels que $\bar{\gamma}_1^i(1)$ soit différent de $\bar{\gamma}_2^i(1)$.

Notons $\sigma_i = \gamma_1^i(\gamma_2^i)^{-1}$; c'est un chemin tangent à $\mathcal{F}_1^{s_i}$ et de longueur $l(\sigma_i) \leq 2l$. Comme $s_i \in S_0$, on peut projeter σ_i en un chemin $\bar{\sigma}_i$ tangent à $\mathcal{F}_2^{s_i}$, et tel que $\sigma_i(0) = \bar{\sigma}_i(0)$, et $\bar{\sigma}_i(1) \in D_{\sigma_{i(1)}} \subset T'$.

On montre facilement que $\bar{\sigma}_i(1)$ est différent de $\sigma_i(1)$: sinon $\bar{\sigma}_i$ serait égal à $\bar{\gamma}_1^i(\bar{\gamma}_2^i)^{-1}$ ce qui n'est pas possible puisque $\bar{\gamma}_1^i(1) \neq \bar{\gamma}_2^i(1)$, par hypothèse.

Comme les chemins σ_i sont de longueur majorée par $2l$, quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que ces chemins convergent vers un chemin σ, tangent à $\mathcal{F}_1^0 = \mathcal{F}$, de longueur majorée par $2l$, et à extrémités dans T'. De plus σ est la limite des chemins $\bar{\sigma}_i$.

On voit facilement que $H_1^S(\sigma) \neq H_2^S(\sigma)$: en effet, pour toutes réalisations h_1 et h_2 des germes $H_1^S(\sigma)$ et $H_2^S(\sigma)$, pour i assez grand on a:

$$h_1(\sigma_i(0)) = \sigma_i(1) \neq \bar{\sigma}_i(1) = h_2(\sigma_i(0)).$$

Cela est contraire à l'hypothèse $H_1^S = H_2^S$, et cette contradiction achève la démonstration du lemme. □

On peut à présent achever la démonstration de la proposition. Pour tout $x \in M$, et tout $s \in S_1$, il existe un chemin γ_x^s, tangent à $\mathcal{F}_1^s$, de longueur $l(\gamma_x^s) \leq l$, tel que $\gamma_x^s(0)$ appartienne à T et que $\gamma_x^s(1) = x$. D'après le lemme, l'extremité $\bar{\gamma}_x^s(1)$, de la projection de γ_x^s sur $\mathcal{F}_2^s$, ne dépend pas du chemin γ_x^s choisi.

On note donc $\psi^s(x) = \bar{\gamma}_x^s(1)$

Il est facile alors de montrer que, pour s assez proche de $0, \psi^s$ est un difféomorphisme de M variant continûment avec s, que ψ^0

est l'identité, et que $\psi^s(\mathcal{F}_1^s) = \mathcal{F}_2^s$.

Les germes des déformations $\mathcal{F}_1^S$ et $\mathcal{F}_2^S$ sont donc équivalents: la proposition est démontrée. □

§2 Surjectivité

Soit T une transversale complète du feuilletage $\mathcal{F}$ et soit H_0^S: $\Pi(\mathcal{F}, T) \to \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ une déformation de l'holonomie de $\mathcal{F}$ sur T.

Le but de cette partie est de construire une déformation $\mathcal{F}^S$ de $\mathcal{F}$ qui induise H^S représentant le même morphisme que H_0^S.

a) Un cocycle sur M à valeurs dans $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$.

Soit $\mathcal{U} = \{U_k\}$ un recouvrement fini de M par des ouverts, assez fin pour que, pour tout k, il existe une submersion $h_k: U_k \to T$ et une application continue, $C_k: U_k \times [0,1] \to M$, telle que, pour tout $x \in U_k$, le chemin $C_k^x = C_k \mid_{\{x\}\times[0,1]}$ soit contenu dans une feuille de $\mathcal{F}$, et joigne x à $h_k(x)$.

Notons $g_{ij}: U_i \cap U_j \to \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ l'application définie par $g_{ij}(x) = H_0^S(\gamma_{ij}^x)$, où $\gamma_{ij}^x)$ est l'élément de $\Pi(\mathcal{F}, T)$ représenté par $(C_i^x)^{-1} \cdot C_j^x$. La source de $g_{ij}(x)$ est $h_i(x)$, et son but h $_j(x)$.

REMARQUE 1.A.2.A-1. La donnée du recouvrement $\mathcal{U}$ et des applications $g_{ij}: U_i \cap U_j \to \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ forme un cocycle sur M à valeurs dans $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$; c'est-à-dire que, pour tout (i,j,k), pour tout $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$, on a:

$$g_{jk}(x) \circ g_{ij}(x) = g_{ik}(x).$$

REMARQUE 1.A.2.A-2. Pour tout i, pour tout $x \in U_i$, γ_{ii}^x est l'unité de $\Pi(\mathcal{F}, T)$ correspondant au point $h_i(x)$. Donc $g_{ij}(x)$ est l'unité de $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ correspondant au point $(h_i(x), 0) \in T \times \{0\}$.

Les applications g_{ii} sont donc égales aux submersions h_i sur T, et la donnée des (U_i, g_{ii}) forme un atlas feuilleté définissant le feuilletage $\mathcal{F}$.

De plus, la restriction à $T \times \{0\}$ de $g_{ij}(x)$ est le germe en $h_i(x)$ du changement de carte, de la carte (U_i, h_i) à la carte (U_j, h_j).

On dira donc que le cocycle $(\mathcal{U}, \{g_{ij}\})$ induit sur M le feuilletage $\mathcal{F}$ (par restriction à $T \times \{0\}$ des éléments de $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$).

b) Microfibré feuilleté de base M: définition

Un $\mathrm{Diff}^S(T)$-microfibré de base M, induisant sur M le feuilletage $\mathcal{F}$, est la donnée de:

i) un espace topologique séparé E^S, muni d'un atlas formé de cartes qui sont des homéomorphismes d'ouverts de E^S sur des ouverts de $M \times T \times S$, les changements de cartes appartenant au pseudogroupe $1_M \times \mathrm{Diff}^S$ (T), c'est à dire de la forme $(x, y, s) \to (x, h^s(y), s)$ où h^s est un difféomorphisme local de T variant continûment avec s.

A cause de la forme particulière des changements de cartes, on a une projection $P = (p, q): E^S \to M \times S$, définie dans les cartes par $(x, y, s) \to (x, s)$. Notons $E^s = q^{-1}(s)$: c'est une variété différentiable.

Pour tout s, on obtient un atlas feuilleté sur E^s en composant les cartes avec la projection $(x, y, s) \to y$ sur T. On note $\hat{F}^s$ le feuilletage ainsi obtenu sur E^s.

La famille des feuilletages $\hat{F}^s$ définit sur E^s un feuilletage $\hat{F}^S$ transverse aux fibres de la projection $P: E^S \to M \times S$.

ii) une section différentiable $\sigma: M \times \{0\} \to E^0$ de la projection P (c'est-à-dire $P o \sigma = 1_{M \times \{0\}}$), transverse au feuilletage $\hat{F}^0$, et telle que $\mathcal{F} = \sigma^{-1}(\hat{F}^0)$.

c) Un microfibré feuilleté associé au cocycle $(\mathcal{U}, \{g_{ij}\})$.

A partir du cocycle $(\mathcal{U}, \{g_{ij}\})$, nous allons construire un Diff$^S(T)$ -microfibré (E^S, σ) de base M, induisant sur M le feuilletage $\mathcal{F}$. La principale difficulté est d'obtenir que l'espace E^S soit séparé, et cela va imposer des précautions techniques minutieuses.

Cette construction est une simple traduction de la démonstration de la Proposition 3 page 299 de [**Hae**], où elle avait été faite dans un cadre beaucoup plus général. Je me suis contenté d'en expliciter les détails.

Soient $\mathcal{U}' = \{U_i'\}$ et $\mathcal{U}'' = \{U_i''\}$ deux recouvrements de M par des ouverts, de façon que, pour tout i, U_i'' soit relativement compact dans U_i' lui même relativement compact dans U_i.

Pour tout i, notons $V_i = U_i \times h_i(U_i) \times S$, et notons H_i l'application de U_i dans V_i définie par $H_i(x) = (x, h_i(x), 0)$.

Notons V_i' un voisinage ouvert de l'image $h_i(\bar{U}_i'')$ de l'adhérence de U_i'', tel que V_i' soit relativement compact dans $U_i' \times h_i(U_i) \times S$. En particulier, l'adhérence $\bar{V}_i'$ ne rencontre pas $H_i(U_i - U_i')$.

Pour tout couple (i,j) tel que $U_i \cap U_j \neq \phi$, on choisit un homéomorphisme G_{ij} appartenant au pseudogroupe $1_M \times$ Diff $^S(T)$, défini d'un voisinage dans V_i de $H_i(\bar{U}_i' \cap \bar{U}_j')$ sur un voisinage dans V_j de $H_j(\bar{U}_i' \cap U_j')$, et tel que son germe en tout point $(x, h_i(x), 0) \in H_i(\bar{U}_i' \cap \bar{U}_j')$ soit égal à $1_M(x) \times g_{ij}(x)$ 'u $1_M(x)$ est le germe en x de l'identité de M); on choisit $G_{ii} =$ identité de V_i et $G_{ji} = {G_{ij}}^{-1}$.

LEMME 1.A.2.c-1. *L'intersection de l'adhérence de $V_i' \cap G_{ji}(V_j')$ avec $H_i(U_i - U_i' \cap U_j')$ ne rencontre pas le compact $H_i(\bar{U}_i' \cap \bar{U}_j')$.*

DÉMONSTRATION: Voici d'abord trois remarques:

i) $(U_i - U_i' \cap U_j') \cap (\bar{U}_i' \cap \bar{U}_j') = \bar{U}_i' \cap \bar{U}_j' - U_i' \cap U_j'$

$= (\bar{U}_i' \cap \partial U_j') \cup (\bar{U}_j' \cap \partial U_i')$

ii) $\bar{V}_i' \cap H_i(\partial U_i') = \phi$, par hypothèse sur V_i'.

iii) Montrons par l'absurde: $\overline{G_{ji}(V_j')} \cap H_i(\bar{U}_i' \cap \partial U_j') = \phi$

soit $y \in \overline{G_{ji}(V_j')} \cap H_i(\bar{U}_i' \cap \partial U_j')$. Alors G_{ij} est défini au voisinage de y. On en déduit que l'on a:

$$G_{ij}(y) \in \bar{V}_j' \cap H_j(\bar{U}_i' \cap \partial U_j')$$

ceci est impossible car $\bar{V}_j' \cap H_j(\partial U_j') = \phi$.

On en déduit que:

$$\overline{V_i' \cap G_{ji}(V_j')} \cap H_i(U_i - U_i' \cap U_j') \cap H_i(\bar{U}_i' \cap \bar{U}_j')$$

$$= \overline{V_i' \cap G_{ji}(V_j')} \cap [H_i(\bar{U}_j' \cap \partial U_i') \cup H_i(\bar{U}_i' \cap \partial U_j')] = \phi.$$

Ce calcul achève la démonstration du lemme. □

COROLLAIRE 1.A.2.C-2. *Quitte à restreindre le voisinage de $H_i(\bar{U}_i' \cap \bar{U}_j')$ où G_{ij} est définie, on peut supposer que l'intersection de $H_i(U_i)$ avec l'adhérence de $V_i' \cap G_{ij}(V_j')$ est incluse dans $H_i(U_i' \cap \bar{U}_j')$.*

DÉMONSTRATION: Il suffit de choisir un voisinage de $H_i(\bar{U}_i' \cap \bar{U}_j')$, dont l'adhérence ne rencontre pas $H_i(U_i - U_i' \cap U_j') \cap \overline{V_i' \cap G_{ji}(V_j')}$ (c'est possible car ce sont deux fermés de V_i, disjoints). On considère la restriction de G_{ij} à ce voisinage.

Alors $H_i(U_i) \cap \overline{V_i' \cap G_{ji}(V_j')}$ est inclus dans $H_i(\bar{U}_i' \cap \bar{U}_j')$. Comme $H_i(U_i) \cap \bar{V}_i' \subset H_i(U_i')$, on obtient le résultat. □

LEMME 1.A.2.C-3. *Pour tout $x \in U_i$, il existe un voisinage ouvert W_x^i de $H_i(x)$ dans V_i, tel que l'on ait les deux propriétés suivantes:*
1) Pour tout couple (j,k) tel que $x \in \bar{U}_i' \cap \bar{U}_j' \cap \bar{U}_k'$, $G_{kj} \circ G_{ji}$ et G_{ki} sont définis et égaux sur W_x^i.

2) Pour tout j tel que $x \in U_i' \cap \bar{U}_j'$, on a:

$$W_x^i \cap G_{ji}(V_j') \cap V_i' = \phi$$

DÉMONSTRATION: On montre facilement le lemme à partir des trois remarques suivantes:

- il n'y a qu'un nombre fini d'indices.
- si $x \in \bar{U}_j' \cap \bar{U}_j' \cap \bar{U}_k'$ alors $G_{kj} o G_{ji}$ et G_{ki} sont définis au voisinage de $H_i(x)$ et leur germe en $H_i(x)$ sont égaux.
- si $x \in U_j'$ alors $H_i(x)$ n'appartient pas à l'adhérence de $G_{ji}(V_j') \cap V_i'$, d'après le Corollaire 2. □

Notons alors $W_i = \bigcup_{x \in U_i} W_i^x \cap V_i'$, et notons $W = {}_iW_i = \bigcup_i \{i\} \times W_i$.

Notons $\sim$ la relation sur W définie par: $(i, y) \sim (j, z)$ si et seulement si $G_{ij}(y) = z$.

LEMME 1.A.2.C-4. *La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur W.*

DÉMONSTRATION: Elle est réflexive puisque $G_{ii} = 1_{V_i}$, et symétrique puisque ${G_{ij}}^{-1} = G_{ji}$. Voyons qu'elle est transitive:

Soient $y \in W_i, z \in W_j, t \in W_k$ tels que $G_{ij}(y) = z$ et $G_{jk}(z) = ut$. Il existe $x \in U_j$ tel que $z \in W_j^x \cap V_j'$.
On a alors:

$$V_i' \cap W_j^x \cap G_{ij}(U_j') \neq \phi \text{ et } V_k' \cap W_j^x \cap G_{kj}(U_k') \neq \phi.$$

Donc, par définition de W_j^x, on a: $x \in \bar{U}_i' \cap \bar{U}_j' \cap \bar{U}_k'$.
Donc $G_{ik} o G_{ji}$ est défini sur W_j^x et est égal à G_{jk}. En particulier $G_{ik}(y) = t$.

On vient de montrer: $((i,y) \sim (j,z)$ et $(i,z) \sim (k,t)) \Rightarrow ((i,y) \sim (k,t))$. La relation $\sim$ est donc transitive. □

Notons $E^S = W/\sim$, l'espace quotient de W par la relation $\sim$, avec la topologie induite. Notons $\Pi: W \to E^S$ la projection canonique.

LEMME 1.A.2.C-5. *L'espace E^S est séparé.*

DÉMONSTRATION: Soient y_1 et y_2 deux points distincts de E^S. Il existe $i, j, x_i \in W_i, x_j \in W_j$ tel que $y_1 = \Pi(x_i)$ et $y_2 = \Pi(x_j)$. Il existe $x \in U_i$ tel que $x_i \in W_i^x \cap V_i'$.

1) si $x \in U_i' \cap \bar{U}_j'$, alors par définition de W_i^xon a: $(W_i^x \cap V_i') \cap G_{ji}(W_j) = \phi$. Donc $\Pi(W_x^i \cap V_i')$ et $\Pi(W_j)$ sont des voisinages disjoints de y_1 et y_2.

2) si $x \in U_i' \cap \bar{U}_j'$, alors G_{ij} est défini sur W_x^i, donc $G_{ij}(x_i)$ est défini. Alors $G_{ij}(x_i)$ et x_j sont deux points distincts de W_j. Soient 0_1 et 0_2 deux voisinages de $G_{ij}(x_i)$ et de x_j tels que $0_1 \cap 0_2 = \phi$. Alors $\Pi(G_{ji}(0_1))$ et $\Pi(0_2)$ sont deux voisinages disjoints, des points y_1 et y_2. □

Les ouverts $W_i \subset M \times T \times S$ sont canoniquement homéomorphes à des ouverts de E^S, et forment un atlas sur E^S, les changements de cartes étant les $G_{ij} \in 1_M \times \mathrm{Diff}^S(T)$. On note $P = (p,q): E^S \to M \times S$, la projection définie dans les cartes par $(x,y,s) \to (x,s)$. On note $E^s = q^{-1}(s)$. Pour tout s on note $\mathcal{F}^s$ le feuilletage défini dans les cartes par $(x,y,s) \to y$, et l'on note $\mathcal{F}^S = \{\mathcal{F}^s\}_{s \in S}$ le feuilletage ainsi défini sur E^S.

Les applications $H_i: U_i'' \to W_i$ se recollent en une section $\sigma_0: M \times \{0\} \to E^S$ de la projection P. En effet, $G_{ij}(H_i(x)) = H_j(x)$.

Rappelons que $H_i(x) = (x, h_i(x), 0)$. On en déduit facilement que la section σ_0 est transverse au feuilletage $\mathcal{F}^0$ (car les h_i sont

des submersions de U_i sur T). De plus, le feuilletage $\sigma_0^{-1}(\mathcal{F}_0)$ est défini par les cartes (U_i'', h_i): donc $\sigma_0^{-1}(\mathcal{F}_0) = \mathcal{F}$.

On vient de montrer que (E^S, σ) est un $\mathrm{Diff}^S(T)$ micro-fibré feuilleté de base M, induisant sur M le feuilletage $\mathcal{F}$.

d) Prolongement de la section σ_0 à un voisinage de $M \times \{0\}$.

ATTENTION: Dans ce paragraphe les notations ne sont pas cohérentes avec celle des paragraphes a et b.

LEMME 1.A.2.D-1. *Soit (E^S, σ) un $\mathrm{Diff}^S(T)$ -microfibré feuilleté de base M, et soit $P: E^S \to M \times S$ sa projection sur E^S. Alors, il existe un voisinage ouvert U de $M \times \{0\}$ dans $M \times S$, et une section $\sigma^S: U \to E^S$ de la projection P, de la forme $\sigma^S(x,s) = (\sigma^s(x), s)$ où σ^s est une famille continue d'applications différentiables.*

DÉMONSTRATION: On recouvre l'image de la section $\sigma(M \times \{0\}) \subset E^S$, par un nombre fini de cartes $\varphi_i: U_i \to M \times \mathbf{R}^n \times S$ où $n = \dim T$, compatibles avec l'atlas de E^S, et telles que les ouverts $\varphi_i(U_i)$ soient de la forme $\varphi_i(U_i) = V_i \times D^n \times S_0$, où V_i est l'ouvert $\sigma^{-1}(U_i)$ de M, où D^n est le disque ouvert unité de $\mathbf{R}^n$, et où S_0 est un voisinage de 0 dans S. Dans ces cartes, la section σ s'écrit comme $\sigma(x,0) = (x,0,0)$.

Notons que les ouverts V_i forment un recouvrement ouvert fini de M.

Soit $W = \{W_i\}$ un recouvrement ouvert fini de M tel que pour tout i, W_i soit relativement compact dans V_i. Pour tout i, on choisit une fonction de classe C^∞, $f_i: V_i \to [0,1]$, égale à 1 au voisinage de ∂V_i, et égale à 0 sur un voisinage de l'adhérence de W_i.

On construit par itération une section σ_i^S, définie sur un voisinage ouvert de $(\bigcup_{j=1}^{i} W_j) \times \{0\}$ dans $M \times S$, et induisant la section

σ par restriction à $M \times \{0\}$:

- la section σ_1^S est définie de $V_1 \times S_0$ dans la carte $U_1 \simeq V_1 \times D^n \times S_0$ par $(x, s) \to (x, 0, s)$.

Supposons σ_i^S définie sur un voisinage O_i de $(\bigcup_{j=1}^{i} W_j) \times \{0\}$. Quitte à restreindre le voisinage O_i, on peut supposer que, sur $O_i \cap (V_{i+1} \times S_0)$ la section σ_i^S est à valeurs dans la carte U_{i+1}: en effet sa restriction à $M \times \{0\}$ est σ, qui est définie sur $V_{i\times 1} \times \{0\}$ par $(x, 0) \to (x, 0, 0)$. Donc, sur $(O_i \cap V_{i+1}) \times S_0$, la section σ_i^S est de la forme $(x, s) \to (x, \sigma_i^s(x), s)$.

On définit $\sigma^S{}_{i+1}$ de la façon suivante:

- sur $O_i - (V_{i+1} \times S_0), \sigma_{i+1}^S$ coïncide avec σ_i^{S}.
- sur $W_{i+1} \times S_0$, on définit σ_{i+1}^S dans la carte U_i par $(x, s) \to (x, 0, s)$
- sur $V_{i+1} \times S_0 \cap U_i$ on définit σ_{i+1}^S eans la carte U_i par $(x, s) \to (x, f_i(x) \cdot \sigma_i^{s}(x), s)$ où le produit $f_i(x) \cdot \sigma_i^s(x)$ est à considérer comme le produit d'un point de $\mathbf{R}^n$ par un réel.

Comme le recouvrement $W = \{W_i\}$ de M est fini, en un nombre fini d'étapes on a ainsi construit la section σ^S annoncée. □

e) Fin de la démonstration de la surjectivité

Soit (E^S, σ) le microfibré feuilleté de base $M \times S$ induisant sur M le feuilletage $\mathcal{F}$, construit au Paragraphe b), et soit σ^S un prolongement de la section σ à un voisinage de $M \times \{0\}$ (voir le Lemme d-1).

Notons $\hat{F}^S = \{\hat{F}^s\}_{s \in S}$le feuilletage sur E^S: pour tout $s, \hat{F}^s$ est un feuilletage de E^s variant continûment avec s. De même $\sigma^S = \{\sigma^s\}$ est une famille continue de sections différentiables de $M \times \{s\}$ dans E^s.

Donc, pour s assez petit, la section σ^s est transverse au feuilletage $\hat{F}^s$. Notons S_0 un voisinage de 0 tel que, pour tout $s \in S_0, \sigma^s$ soit transverse à $\hat{F}^s$.

Notons $\mathcal{F}^S = \{\mathcal{F}^s\}_{s \in S_0}$ la famille de feuilletages définie par $\mathcal{F}^s = (\sigma^s)^{-1}(\hat{F}^s)$. C'est une déformation du feuilletage $\mathcal{F}$.

REMARQUE 1.A.2.E-1. Pour assurer que, pour s petit, la section σ^s est transverse au feuilletage $\hat{F}^s$, on utilise le fait que σ^s et $\hat{F}^s$ dépendent continûment de s pour la C^r-topologie, $r \geq 1$. c'est à cause de ce point que le théorème a été exprimé pour des C^r-déformation s, $r \geq 1$.

Le but du reste de ce paragraphe est de montrer la proposition suivante, qui achève la démonstration de la surjectivité, et donc du théorème.

PROPOSITION 1.A.2.E-2. *La déformation de l'holonomie de $\mathcal{F}$ sur T H^S: $\Pi(\mathcal{F}, T) \to \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$, induite par la déformation $\mathcal{F}^S$ que l'on vient de construire, représente le même morphisme que la déformation H_0^S dont on est parti.*

DÉMONSTRATION: On utilise à nouveau les notations des paragraphes a et b.

Rappelons que E^S est recouvert par les ouverts $\Pi(W_i)$ où W_i est un ouvert de $U_i \times h_i(U_i) \times S$, qui contient $H_i(U_i'')$. Rappelons que la section σ (restriction de σ^S à $M \times \{0\}$) coïncide avec $\Pi \circ H_i$. Il existe donc un voisinage O_i de $U_i'' \times \{0\}$, et une application h_i^S de la forme $h_i^S(x, s) = (h_i^s(x), s)$ (où h_i^s est une famille continue de submersions sur T, et que $h_i^0 = h$) telle que σ^S coïncide sur O_i avec la composée de Π avec $(x, s) \to (x, h_i^s(x), s)$.

Pour tout $x \in U_i'' \cap T$ on notera $\tilde{h}_i(x)$ le germe en $(x, 0)$ de la restriction à $U_i'' \cap T$ de h_i^S. C'est un élément de $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$.

Rappelons que, pour tout i, pour tout $x \in U_i, C_i^x$ est un chemin tangent à $\mathcal{F}$ joignant x à $h_i(x)$. Si $x \in T$ on note encore C_i^x l'élément de $\Pi(\mathcal{F}, T)$ qu'il représente.

LEMME 1.A.2.E-3. *Pour tout $x \in T$, le germe $H_0^S(C_i^x)^{-1} \circ \tilde{h}_i(x)$ ne dépend pas de l'indice i tel que $x \in U_i''$. On le note $\varphi(x) \in \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$. Il dépend continûment de x. De plus il induit l'identité par restriction à $T \times \{0\}$.*

DÉMONSTRATION: Il suffit d'utiliser que le changement de cartes, de la carte W_i à la carte W_j, est l'application G_{ij} dont le germe en $H_i(x)$ est $1_M(x) \times g_{ij}(x)$, où, par définition, $g_{ij}(x) = H_0^S((C_i^x)^{-1}C_j^x)$ $= H_0^S(C_j^x) \circ H_0^s(C_i^x)^{-1}$. □

LEMME 1.A.2.E-4. *Soit γ un élément de $\Pi(\mathcal{F}, T)$. On note x sa source et y son but. Alors on a:*

$$H^S(\gamma) = \varphi(y)^{-1} \circ H_0^S(\gamma) \circ \varphi(x).$$

Remarquons que l'on déduit immédiatement du Lemme 1.A.2.e-4 le fait que H^S et H_0^S représentent le même morphisme (voir la Remarque 1.5.b-7) ce qui conclut la preuve de la proposition.

DÉMONSTRATION DU LEMME: Soit $C\colon [0,1] \to M$ un chemin tangent à $\mathcal{F}$ représentant γ. Remarquons que $\sigma^S(T \times S)$ est une transversale du feuilletage $\hat{F}^S$, et que $\sigma^S \circ C$ est un chemin tangent au feuilletage $\hat{F}^S$. On a alors:

$$H^S(\gamma) = (\sigma^S)_0^{-1} \hat{H}_C^S \circ \sigma^S,$$

où $\hat{H}_C^S$ est le germe d'holonomie de $\hat{F}^S$ le long de $\sigma^S \circ C$, sur la transversale $\sigma^S(T \times S)$.

Démonstration du Théorème de Réalisation

On choisit une subdivision $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m = 1$ telle que, pour tout $k < m$ il existe i_k tel que $c([t_k, t_{k+1}]) \subset U''_{i_k}$, donc $\sigma^S \circ C([t_k, t_{k+1}]) \subset W_{i_k}$. On note $x_k = C(t_k)$.

On calcule alors facilement $H^S(\gamma)$ grâce à l'expression de σ^S dans les cartes W_{i_0} et W_{i_m}, et grâce à l'expression des changements de cartes G_{ij}. On obtient:

$$H^s(\gamma) = [\tilde{h}_{im-1}(g)]^{-1} \circ g_{i_{m-2}i_{m-1}}(X_{i_{m-1}}) \circ \cdots \circ g_{i_0 i_1}(x_1) \circ \tilde{h}_{i_0}(x).$$

D'autre part, le chemin C est homotope, par une homotopie dans la feuille de $\mathcal{F}$ et à extrémités fixées, au chemin C' suivant:

$$C' = C^x_{i_0} \cdot (C^{x_1}_{i_0})^{-1} \cdot C^{x_1}_{i_1} \cdots C^{x_k}_{i_k} \cdot (C^{x_{k+1}}_{i_k})^{-1} \cdots C^{x_{m-1}}_{i_{m-1}} \cdot (C^y_{i_{m-1}})^{-1}.$$

Par définition $g_{i_{k-1}i_k}(x_k) = H^S_0((C^{x_k}_{i_{k-1}})^{-1} \cdot C^{x_k}_{i_k})$.
On a donc:

$$H^S_0(\gamma) = H^S_0(C^y_{i_{m-1}})^{-1} \circ g_{i_{m-2}i_{m-1}}(x_{m-1}) \circ \cdots \circ g_{i_0 i_1}(x_1) \circ H^S_0(C^x_{i_0}).$$

On a donc:

$$\begin{aligned} H^S(\gamma) &= [\tilde{h}_{i_{m-1}}(g)]^{-1} \circ H^S_0(C^y_{i_{m-1}}) \circ H^S_0(\gamma) \circ [H^S_0(C^x_{i_0})]^{-1} \circ \tilde{h}_{i_0}(x) \\ &= \varphi(y)^{-1} \circ H^S_0(\gamma) \circ \varphi(x). \end{aligned}$$

Le lemme est démontré. □

Chapitre 2

FEUILLETAGES DÉFINIS PAR UNE FIBRATION: PROBLÈMES DE STABILITÉ

§1 Introduction

Une fibration $p: M \to B$ de fibre F définit sur M un feuilletage $\mathcal{F}$ dont les feuilles sont les fibres de p. La codimension de ce feuilletage est la dimension de la base B. On obtient une transversale complète du feuilletage $\mathcal{F}$ en considérant un recouvrement $\{U_i\}$ de B par des ouverts trivialisant la fibration, et en choisissant, pour tout i, une section locale $\sigma_i: U_i \to M$ de la fibration p: alors $\amalg\sigma_i: \amalg U_i \to M$ fait de $T = \amalg U_i$ une transversale complète de $\mathcal{F}$.

La dynamique d'un tel feuilletage est triviale: toutes les feuilles sont compactes, toutes les holonomies sont égales à l'identité. Si l'on reprend l'analogie entre les feuilles compactes d'un feuilletage et les points fixes des difféomorphismes, un tel feuilletage correspond à l'identité.

Tout au long de ce livre, nous allons donner quelques réponses partielles au problème suivant:

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage défini par une fibration $p: M \to B$ de fibre F, où M, B et F sont des variétés compactes connexes.

Feuilletages Définis Par une Fibration: Problèmes

PROBLÈME: *Tout feuilletage proche de $\mathcal{F}$ possède-t-il une feuille compacte proche d'une fibre?*

La question analogue pour les difféomorphismes d'une variété compacte M est la suivante: *tout difféomorphisme de M proche de l'identité possède-t'il un point fixe?* La réponse (bien connue) est alors donnée par la nullité ou la non nullité de la caractéristique d'Euler $\chi(M)$: à tout point fixe isolé d'un difféomorphisme φ de M est associé un entier appelé indice. Si φ est proche de l'identité et n'a qu'un nombre fini de points fixes, la somme de leurs indices est égale à la caractéristique d'Euler $\chi(M)$ de M.

Jusqu'à présent, il n'existe aucune théorie générale associant un indice aux feuilles compactes isolées d'un feuilletage. On cherche à comprendre s'il est possible d'associer un tel indice aux feuilles compactes proches d'une fibre. Ce but est partiellement atteint: Fuller avait défini un indice associé aux orbites fermées isolées d'un champ de vecteurs. Nous verrons que sa théorie se généralise aux feuilletages C^1-proches d'une fibration dont la fibre F vérifie $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$. Les résultats obtenus quand la fibre est le tore T^2 sont également encourageants, comme nous le verrons dans la conclusion. Le but de ce chapitre est de faire le point sur le problème de la stabilité de la fibre d'une fibration.

La première partie l'énonce de façon précise, en définissant en particulier la notion de feuille compacte proche d' une fibre.

La seconde partie présente tous les résultats que je connais à ce jour sur ce sujet, en tentant de les classer par la progression dans la complexité du problème (au détriment de l'ordre chronologique).

§2 Enoncé précis du problème de stabilité de la fibre d'une fibration

Il faut essentiellement définir ce qu'est une feuille compacte proche d'une fibre.

Fixons $p: M \to B$ une fibration de fibre F, où M, B et F sont des variétés compacte connexes. On note $\mathcal{F}$ le feuilletage défini sur M par cette fibration.

Fixons-nous une métrique sur M (les propriétés géométriques de cette métrique ne nous intéressent pas ici).

a) Champ de disques transverses au feuilletage $\mathcal{F}$

Soit $q: N \to M$ le fibré normal au feuilletage $\mathcal{F}$ (c'est-à-dire le sous-fibré vectoriel du fibré tangent à M, orthogonal au fibré tangent au feuilletage $\mathcal{F}$). Notons $\sigma: M \to N$ la section nulle de ce fibré vectoriel.

On se donne un voisinage $\mathcal{V}$ de la section nulle $\sigma(M)$ et une submersion $\varphi: \mathcal{V} \to M$, coïncidant avec q sur $\sigma(M)$ (c'est-à-dire que $\varphi o \sigma = id_M$), et telle que sa restriction à chaque fibre $q^{-1}(x) \cap \mathcal{V}$ est un plongement transverse au feuilletage $\mathcal{F}$. (Par exemple, φ peut être définie par l'exponentielle à partir d'une métrique riemanienne sur M).

Choisissons un voisinage ouvert $\mathcal{V}_0$ de la section nulle, relativement compact dans $\mathcal{V}$, de façon que, pour tout $x \in M$, $q^{-1}(x) \cap \mathcal{V}_0$ soit un disque $\hat{D}_x$ centré en $\sigma(x)$. Notons $D_x = \varphi(\hat{D}_x)$: c'est un disque plongé dans M transversalement à $\mathcal{F}$, centré en x, et variant différentiablement avec x: on dira que la famille $\{D_x\}_{x \in M}$est un *champ de disques transverses* au feuilletage $\mathcal{F}$.

REMARQUE 2.1.A-1. Pour définir un tel champ de disques transverses à un feuilletage $\mathcal{F}$, on n'a pas besoin que $\mathcal{F}$ soit défini par

une fibration.

En utilisant la compacité de la fibre F, on voit facilement que, quitte à restreindre le voisinage $\mathcal{V}_0$, on a la propriété suivante:

Pour toute fibre F_x de la fibration p, la restriction de φ à $q^{-1}(F_x) \cap \mathcal{V}^0 = \bigcup_{y \in F_x} \hat{D}_y$ est un plongement dans M. Alors l'union $\bigcup_{y \in F_x} D_y$ définit un voisinage tubulaire de la fibre F_x qui se projette naturellement sur F_x par l'application π définie par $\pi(D_x) = x$.

REMARQUE 2.1.A-2. Le champ de disques $\{D_x\}$ n'est pas a priori porté par un feuilletage transverse à $\mathcal{F}$ (c'est-à-dire que les disques $\{D_x\}$ seraient contenus dans les feuilles d'un feuilletage transverse à $\mathcal{F}$), (voir Figure 2.1). Par exemple la fibration de Hopf, $S^3 \to S^2$, ne possède pas de feuilletage transverse.

b) Feuilles compactes proches d'une fibre

Si $\mathcal{F}'$ est un feuilletage sur M, suffisamment C^0-proche de $\mathcal{F}$ pour la topologie des champs de plans, alors $\mathcal{F}'$ est transverse à tous les disques D_x.

On dira qu'une feuille compacte f' de $\mathcal{F}'$ est *proche d'une fibre* de p, s'il existe une fibre $F_b = p^{-1}(b), b \in B$, telle que f' soit contenue dans le voisinage tubulaire $\bigcup_{x \in F_b} D_x$ de la fibre F_b, et que la projection $\pi: \bigcup_{x \in F_b} D_x \to F_b$ induise un difféomorphisme de f' sur F_b.

REMARQUE 2.1.B-1. Si $\mathcal{F}_n, n \in \mathbf{N}$, est une suite de feuilletages convergeant vers $\mathcal{F}$ pour la C^r-topologie ($r \geq 1$), et si, pour tout n, f_n est une feuille compacte de $\mathcal{F}_n$ proche d'une fibre, alors il existe une sous-suite $(n_i)_{i \in \mathbf{N}}$ telle que les feuilles f_{n_i} convergent vers une fibre de p pour la topologie C^r.

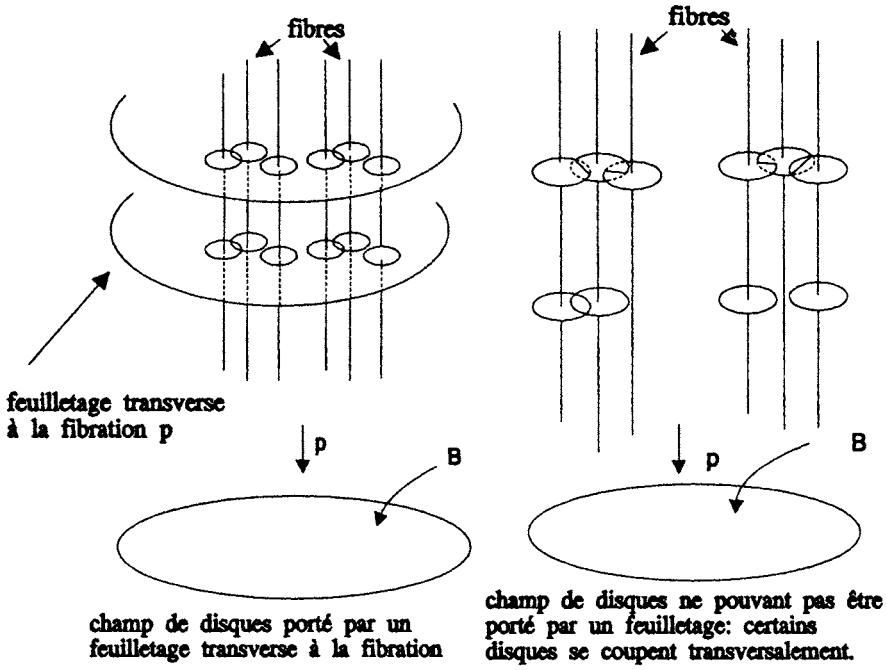


Figure 2.1.

REMARQUE 2.1.B-2. Pour mieux comprendre cette définition, voici un exemple de feuilles compactes difféomorphes à la fibre, qui ne soient pas proches d'une fibre. Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage défini par la fibration triviale $S^1 \times S^1 \to S^1$. On peut l'approximer (de façon C^∞) par des feuilletages définis par un flot rationnel sur le tore $T^2 = S^1 \times S^1$ (dans des coordonnées globales (x, y) sur T^2, $x \in S^1$, $y \in S^1$, on considère le flot du champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial y} + \alpha \frac{\partial}{\partial x}, \alpha \in \mathbf{Q}$). Toutes les feuilles de ces feuilletages sont compactes, mais leur projection sur la base S^1 est surjective. Leur projection sur la fibre en fait un revêtement à k feuillets, $k > 1$, de la fibre.

DÉFINITION 2.1.B-3. On dira que la fibre F de la fibration p est *C^r-stable* si tout feuilletage C^r-proche de $\mathcal{F}$ possède une feuille compacte proche d'une fibre ; dans le cas contraire, on dira que la fibre est C^r-instable.

PROBLÈME: *Quelles sont les fibrations dont la fibre est C^r-stable?*

Dans ce livre, on a donc choisi de ne s'intéresser qu'aux feuilles compactes proches d'une fibre. L'existence de feuilles compactes, éventuellement loin d'une fibre, pour un feuilletage proche d'une fibration, est un autre problème ouvert: nous citerons par exemple le résultat de Plante au Paragraphe 2.d.

§3 Etat actuel du problème et résultats connus

Les paramètres que l'on a fait varier dans l'étude de ce problème sont:

- le groupe fondamental de la fibre, $\pi_1(F)$.
- le premier groupe d'homologie $H_1(F, \mathbf{R})$ de la fibre.
- l'action naturelle du groupe fondamental de la base, $\pi_1(B)$, sur l'homologie $H_1(F, \mathbf{R})$ de la fibre.
- la caractéristique d'Euler de la base, $\chi(B)$.
- l'existence ou la non-existence d'une section globale de la fibration.
- la dimension de la base.

a) Fibres telles que $\pi_1(F) = 0$ ou $H_1(F, \mathbf{R}) = 0$

THÉORÈME *(Stabilité de Reeb (1952). Si la fibre F est simplement connexe, alors tout feuilletage $\mathcal{F}'$, C^0-proche de la fibration $p: M \to B$, est conjugué à $\mathcal{F}$ par un difféomorphisme C^0-proche de l'identité. (on dit que $\mathcal{F}$ est C^0-structurellement stable). En particulier toutes*

les feuilles de $\mathcal{F}'$ sont compactes, difféomorphes à F, et proches d'une fibre.

Ce résultat a été généralisé par Langevin et Rosenberg (1977, [**LR 1**]) aux C^1-perturbations de fibrations dont la fibre vérifie $H_1(F, \mathbf{R}) = 0$.

THÉORÈME *(Langevin, Rosenberg). Le feuilletage $\mathcal{F}$ est C^1-structurellement stable (c'est-à-dire que tout feuilletage C^1-proche de $\mathcal{F}$ est conjugué à $\mathcal{F}$) si et seulement si la fibre F vérifie $H_1(F, \mathbf{R}) = 0$.*

(une démonstration de ce théorème sera donnée au Chapitre 4.2.f)

b) La fibre F est le cercle S^1

Dans le cas où la fibre est le cercle S^1, Seifert (1950, [Sei], cas où B est de dimension 2) puis Fuller (1968, [**F**]) ont prouvé la C^0-stabilité de la fibre si la caractéristique d'Euler $\chi(B)$ est non-nulle. On en déduit facilement le théorème suivant:

THÉORÈME A *(Seifert, Fuller). Soit $p: M \to B$ une fibration de fibre le cercle S^1. Supposons que la dimension dim B de la base soit paire. Alors on a:*
1) Si la caractéristique d'Euler $\chi(B)$ est non nulle, alors la fibre est C^0-stable.
2) Si la caractéristique d'Euler $\chi(B)$ est nulle, alors la fibre est C^∞-instable.

Dans le cas où la base B est de dimension impaire, il faut tenir compte de l'action naturelle du groupe fondamental sur l'homologie de la fibre, $H_1(S^1, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$:

Cette action détermine un revêtement à deux feuillets $\pi: \tilde{B} \to B$, dont l'automorphisme sera noté σ. On construit facilement un invariant topologique $\chi(\pi) \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ de ce revêtement, dont la nullité est

équivalente à l'existence sur $\tilde{B}$ de champs de vecteurs non singuliers X tels que $\sigma_*(X) = -X$ (voir chapitre 3.1, ou [**B 2**]).

THÉORÈME A *(suite). Soit $p: M \to B$ une fibration de fibre le cercle S^1. Supposons que la dimension dim B de la base soit impaire. Soit $\pi: \tilde{B} \to B$ le revêtement à deux feuillets associé à l'action (définie par la fibration) de $\pi_1(B)$ sur $H_1(S^1, \mathbf{R})$, et soit $\chi(\pi)$ l'invariant topologique associé à ce revêtement.*
1) Si $\chi(\pi)$ est non nul, alors la fibre est C^0-stable.
2) Si $\chi(\pi)$ est nul, la fibre est C^∞-instable (c'est en particulier le cas si la fibration en cercles p est orienté).

La démonstration de ce théorème est donnée au Chapitre 5.

c) Fibres telles que $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$

Les résultats sur les fibrations en cercles se généralisent, dans le cadre de la C^1-stabilité, aux fibrations dont la fibre vérifie $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$. Cette généralisation s'est faite par étapes successives (voir: Langevin-Rosenberg [**LR 2**], Schweitzer [**Sch**], Druck [**D**], Bonatti-Haefliger [**BH**], Bonatti [**B 1**]) avant qu'une résolution générale soit trouvé (voir le Chapitre 6 ou [**B 2**]).

THÉORÈME B. *Soit $p: M \to B$ une fibration dont la fibre F vérifie $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$.*
a) si B est de dimension paire, *alors on a:*
1) Si la caractéristique d'Euler $\chi(B)$ est non nulle, alors la fibre est C^1-stable.
2) Si la caractéristique d'Euler $\chi(B)$ est nulle, la fibre est C^∞-instable.
b) Si B est de dimension impaire: *Soit $\pi: \tilde{B} \to B$ le revêtement à deux feuillets associé à l'action, définie par p, de $\pi_1(B)$ sur*

$H_1(F,\mathbf{R})$, et soit $\chi(\pi)$ l'invariant topologique associé à ce revêtement. Alors on a:

1) Si $\chi(\pi)$ est non nul, alors la fibre F est C^1-stable.

2) Si $\chi(\pi)$ est nul, alors la fibre F est C^∞-instable.

Dans le cas où la base est de dimension 2 et de caractéristique d'Euler non nulle, et où le groupe fondamental $\pi_1(F)$ est égal à $\mathbf{Z}$, Langevin et Rosenberg [**LR 2**] montrent la C^0-stabilité de la fibre.

Le Chapitre 6.3 donne la démonstration du Thèorème B dans le cas, beaucoup plus simple, où B est de dimension 2.

Le chapitre 6.4 donne la démonstration générale du Théorème B. Cette démonstration utilise le théorème de réalisation des déformations de l'holonomie (voir le Chapitre 1, ou [**BH**]).

REMARQUE 2.2.C-1. Le Théorème B est faux pour des C^0-perturbations: considérons la fibration triviale $S^2 \times K \to S^2$ de fibre la bouteille de Klein K, de base la sphère S^2. On montrera au chapitre 6.2 que la fibre de cette fibration est C^0-instable. Cependant elle est C^1-stable, d'après le Théorème B.

Quand $H_1(F,\mathbf{R}) = \mathbf{R}^k, k > 1$, il y a encore peu de résultats connus, sauf si la base est de dimension 1 ou 2, c'est-à-dire que B est le cercle S^1, ou que B est une surface S. Notons enfin que si $\pi_1(F)$ est un groupe libre à p générateurs, $p > 1$, alors la fibre est C^∞-instable, sans conditions sur la fibration. Voici ces résultats:

d) La base B est le cercle S^1

Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage défini par une fibration $p: M \to S^1$ de fibre F. L'action naturelle de $\pi_1(S^1)$ sur $H_1(F,\mathbf{R})$ est engendrée par une application linéaire $l: H_1(F,\mathbf{R}) \to H_1(F,\mathbf{R})$.

Le Chapitre 3.6 montre la proposition suivante (voir le Corollaire 3.6-3, et la Remarque 3.6-4):

PROPOSITION 2.D–1. Si $l : H_1(F, \mathbf{R}) \to H_1(F, \mathbf{R})$ possède une valeur propre positive, alors la fibre F est C^∞-instable.

Plante [P] a montré le théorème de stabilité suivant: Notons $\mathcal{S}$ la classe des groupes G finîment engendrés, tels qu'il existe une chaine $1 = G_0 \subset G_1 \subset \ldots G_k = G$ de sous-groupes de G avec les propriétés suivantes:

i) G_{i-1}est un sous groupe normal de G_i.

ii) G_i/G_{i-1} possède un sous groupe H_i finîment engendré, de croissance sous-exponentielle, et tel que tout élément g de G_i/G_{i-1} possède une puissance g^n dans H_i.

THÉORÈME *(Plante). Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage défini par une fibration $p: M \to S^1$ de fibre une variété compacte F telle que $\pi_1(F) \in \mathcal{S}$. Soit $l: H_1(F, \mathbf{R}) \to H_1(F, \mathbf{R})$ l'application linéaire engendrant l'action de $\pi_1(S^1)$ sur $H_1(F, \mathbf{R})$.*

Si l n'a aucune valeur propre positive, alors tout feuilletage C^0-proche de $\mathcal{F}$ possède une feuille compacte.

REMARQUE 2.2.D-1. Pour que $\pi_1(F)$ appartienne à $\mathcal{S}$ il suffit qu'il soit abelien, ou à croissance sous-exponentielle.

REMARQUE 2.2.D-2. Le théorème de Plante ne précise pas si les feuilles compactes d'un feuilletage proche de $\mathcal{F}$ sont proches d'une fibre. On ne peut donc pas affirmer que la fibre soit stable au sens que nous avons fixé.

e) Fibrations en tores T^n au dessus des surfaces

Nous verrons au chapitre 3.4, que les fibrations en tores T^n sont, parmis les fibrations de fibre F telle que $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^n$, celles qui admettent le moins de C^1-déformations.

Les fibrations en tores sont donc les bons candidats pour les questions de stabilité.

Cette partie a son origine dans une question de Rosenberg, [Ro]:

QUESTION: *Soit $p: M \to B$ une fibration de fibre le tore T^n, $n \in \mathbf{N}^*$. La non-nullité de la caractéristique d'Euler $\chi(B)$ implique-t-elle la stabilité de la fibre?*

Rosenberg supposait une réponse positive à cette question.

On présente deux réponses partielles, l'une positive, l'autre négative, à cette question lorsque la base est une surface S de caractéristique d'Euler $\chi(S) \neq 0$.

Voici d'abord la réponse positive:

THÉORÈME C. *Soit S une surface compacte de caractéristique d'Euler $\chi(S) \neq 0$. La fibre de la fibration triviale $S \times T^n \to S$ (de fibre le tore T^n) est C^1-stable.*

Nous verrons au Chapitre 3.3 comment déduire la stabilité de la fibre T^n du théorème suivant:

THÉORÈME C'. *Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de l'identité dans l'espace $\mathrm{Diff}^1(S)$ des difféomorphismes de classe C^1 de S muni de la topologie C^1, tel que, si $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{U}$ sont n difféomorphismes commutants de S, alors ils ont un point fixe commun.*

La démonstration de ce Théorème sera présentée au Chapitre 7. (Voir également [B 3] qui présente le cas simple où S est la sphère S^2, et [B 4]).

REMARQUE 2.2.E-2. Dans l'énoncé du théorème C, l'important n'est pas que la fibre est le tore T^n, mais que son groupe fondamental est commutatif. De plus , d'après [BH], certaines conditions sur le groupe fontamental de la fibre d'une fibration im-

pliquent que toute déformation de cette fibration est le pull-back d'une déformation d'une fibration en tores (voir [B H], partie II, fibrations se comportant comme une fibration en tores T^k). On en déduit immédiatement:

THÉORÈME C *(bis). Soit S une surface compacte de caractéristique d'Euler $\chi(S) \neq 0$. La fibre de la fibration triviale $S \times F \to S$ est C^1-stable si le groupe fondamental $\pi_1(F)$ de la fibre vérifie la condition suivante:*
– le noyau N de la projection de $\pi_1(F)$ dans $H_1(F, \mathbf{R})$ est de génération finie, et $H^1(N, \mathbf{R}) = 0$.

REMARQUE 2.2.E-2. Dans [**Han**] M. Handel résoud complètement le problème d'existence d'un point fixe commun pour 2 difféomorphismes commutants de la sphère S^2, ce qui est une très jolie et très forte généralisation du théorème C'. En voici l'énoncé:

Soient $f, g \in Homéo_+(S^2)$ deux difféomorphismes commutants de la sphère S^2. On définit $W(f,g) \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ de la façon suivante: choisissons des isotopies $(f_t), (g_t), t \in [0,1]$, de f et g à l'identité. Alors, $W(f,g)$ est la classe d'homotopie, dans $\pi_1(\mathrm{Diff}_+(S^2)) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, du lacet defini par: $t \to f_t \circ g_t \circ f_t^{-1} \circ g_t^{-1}$ (il faut bien-sûr vérifier que la classe de ce lacet ne dépend pas du choix des isotopies). M. Handel montre alors:

THÉORÈME *(Handel). Soient $f, g \in \mathrm{Diff}_+(S^2)$ deux difféomorphismes commutants de la sphère S^2; alors, si $W(f,g)$ est nul, f et g ont un point fixe commun.*

La condition $W(f,g) = 0$ a une interprétation géométrique très simple en termes de feuilletages transverses à une fibration. Voici donc la traduction, dans le langage des feuilletages, du théorème de Handel:

COROLLAIRE 2.E–2. *Tout feuilletage de $S^2 \times T^2$, transverse aux fibres S^2, possède une feuille compacte telle que la restriction à cette feuille de la projection $S^2 \times T^2 \to T^2$ soit un difféomorphisme.*

Voyons maintenant une réponse négative à la question de Rosenberg:

THÉORÈME D. *Soit S une surface orientée de genre $g > 1$ (le tore à g trous). Il existe une fibration de base S, de fibre le tore T^2, et une famille $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ de feuilletages dépendant différentiablement de t, telle que $\mathcal{F}_0$ soit défini par la fibration et que, pour tout $t \neq 0, \mathcal{F}_t$ n'ait aucune feuille compacte: la fibre est C^∞-instable.*

f) Fibres toujours instables

THÉORÈME E. *Soit F une variété compacte dont le groupe fondamental $\pi_1(F)$ est un groupe libre à k générateurs, $k > 1$. Alors, pour toute fibration $p: M \to B$ de fibre F, la fibre de p est C^∞-instable.*

Ce résultat (simple) sera montré au Chapitre 3.5.

REMARQUE 2.2.F-1. La méthode de comparaison des déformations des fibrations de fibre F, $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$, avec les fibrations en cercles, ne peut pas se généraliser sans hypothèses sur $\pi_1(F)$: en effet, d'après les théorèmes C et E, une fibration de fibre F, $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^k$, ne se comporte a priori pas comme une fibration en tores T^k.

Dans la même direction, signalons un résultat de K. Fukui [**Fu**].

THÉORÈME *(Fukui). Soit F une surface de genre $g(F) \geq 6$. Soit B une surface compacte. Soit $p: M \to B$ une fibration de fibre F. Alors la fibre F est C^r-instable, $r \in \mathbf{N}$.*

Chapitre 3

EXEMPLES DE DÉFORMATIONS DE FEUILLETAGES DÉFINIS PAR UNE FIBRATION

Cette partie a pour but de familiariser le lecteur avec les fibrations, regardées comme feuilletages, et de donner une intuition des déformations possibles d'un tel feuilletage. Aucun résultat difficile n'y est présenté; on verra cependant des conditions simples pour que la fibre d'une fibration soit C^∞-instable: on retrouvera bien sûr ces conditions (sous la forme opposée) comme hypothèses des théorèmes de stabilité qui font l'objet des Chapitres 5, 6 et 7.

Dans toute la suite, B et F seront des variétés compactes connexes, B étant la base et F la fibre de la fibration considérée.

Avant de voir des exemples, rappelons la construction de l'action naturelle du groupe fondamental $\pi_1(B)$ sur le groupe d'homologie $H_1(F, \mathbf{Z})$ de la fibre.

Soit b un point base de B et soit x un point base de la fibre $p^{-1}(b)$. Soit $\gamma\colon [0,1] \to B$ un lacet sur B d'origine b. On en déduit un fibré de fibre F au-dessus du segment $[0,1]$; ce fibré est trivialisable (comme tout fibré de base le segment $[0,1]$), et le choix d'une trivialisation induit un isomorphisme du groupe fondamental $\pi_1(p^{-1}(b), x)$. Cet isomorphisme est bien déterminé à conjugaison près par un élément du groupe fondamental de la fibre (car il n'y a pas de choix canonique du point base de la fibre le long de γ). Cet

isomorphisme de $\pi_1(p^{-1}(b), x)$ induit un isomorphisme du groupe $H_1(p^{-1}(b), \mathbf{Z})$, (qui est l'abelianisé de $\pi_1(p^{-1}(b), x)$), et donc aussi de $H_1(p^{-1}(b), \mathbf{Z})/\text{Torsion}$. Ces isomorphismes sont bien définis et ne dépendent que de la classe d'homotopie du lacet γ.

On a ainsi défini une action naturelle à droite du groupe fondamental $\pi_1(B)$ sur $H_1(F, \mathbf{Z})/\text{Torsion}$. Comme $H_1(F, \mathbf{Z})/\text{Torsion}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}^n$, $n = \dim(H_1(F, \mathbf{R}))$, cette action est définie par une représentation contravariante $\rho: \pi_1(B) \to GL(n, \mathbf{Z})$; on a $\rho(\gamma_1, \gamma_2) = \rho(\gamma_2) \circ \rho(\gamma_1)$.

§1 Fibration en cercles

a) Fibrations en cercles orientées

Soit $p: M \to B$ une fibration de fibre le cercle S^1, on suppose que chaque fibre est orientée, l'orientation variant continûment avec la fibre. Alors il existe un champ de vecteurs X sur M, non nul, tangent aux fibres, et tel que chaque fibre soit une orbite périodique de période égale à 1.

Notons $\mathcal{F}$ le feuilletage de M défini par la fibration. Un feuilletage $\mathcal{F}'$ proche de $\mathcal{F}$ sera dirigé par un champ de vecteurs X' proche de X. Une feuille compacte de $\mathcal{F}'$ sera une orbite périodique de X', et cette feuille sera proche d'une fibre si sa période est proche de 1.

Notons N le champ d'hyperplans sur M, orthogonal à $\mathcal{F}$. On associe à tout champ de vecteurs Y sur M la famille continue de feuilletage $\mathcal{F}_t(Y), t \in \mathbf{R}$, définie de la façon suivante: notons $\bar{Y}$ le champ de vecteurs sur M, tangent à N, et qui se projette par p_* sur Y; alors $\mathcal{F}_t(Y)$ sera le feuilletage de M dirigé par le champ $X + t\bar{Y}$. Le feuilletage $\mathcal{F}_0(Y)$ est égal a $\mathcal{F}$.

Pour tout $t \neq 0$, toute feuille du feuilletage $\mathcal{F}_t(Y)$ se projette par p exactement sur une orbite du champ Y. Les feuilles compactes de

$\mathcal{F}_t(Y)$ se projettent donc sur les orbites fermées de Y. Supposons que Y ne possède pas de singularités; alors, il existe $\delta > 0$ tel que toute orbite fermée de Y ait un diamètre plus grand que δ. Pour $t \neq 0$ assez petit , la projection par p de toute feuille compacte proche d'une fibre du feuilletage $\mathcal{F}_t(Y)$ sera de diamètre inférieur à δ. Donc, pour tout $t \neq 0$ assez petit, le feuilletage $\mathcal{F}_t(Y)$ est sans feuilles compactes proches d'une fibre.

On a donc montré le résultat suivant:

Soit B une variété compacte de caractéristique d'Euler $\chi(B)$ égale à zéro. Alors, pour toute fibration en cercles orientée $p: M \to B$, la fibre est C^∞-instable.

b) Fibrations en cercles non orientées

Soit $p: M \to B$ une fibration en cercles de base B (l'exemple à garder à l'esprit est $p: K \to S^1$ où K est la bouteille de Klein).

Chaque fibre $p^{-1}(x), x \in B$, a deux orientations possibles: on construit ainsi les revêtements à deux feuillets $\pi: \tilde{B} \to B$ et $\Pi: \tilde{M} \to M$ des variétés M et B, et une fibration en cercles orientée $\tilde{p}: \tilde{M} \to \tilde{B}$ de façon que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\Pi} & M \\ \tilde{p}\downarrow & & \downarrow p \\ \tilde{B} & \xrightarrow{\pi} & B \end{array}$$

Si la fibration p n'est pas orientée, les variétés $\tilde{B}$ et $\tilde{M}$ sont connexes (dans l'exemple $p: K \to S^1$, $\tilde{M}$ est le tore $T^2 = S^1 \times S^1$, et $\tilde{p}$ est la fibration triviale $S^1 \times S^1 \to S^1$).

On note σ et Σ les automorphismes des revêtements π et Π.

On construit facilement un champ de vecteurs X sur $\tilde{M}$, non nul et tangent aux fibres, tel que chaque fibre soit une orbite périodique de période 1, et vérifiant $\Sigma_*(X) = -X$.

Notons $\mathcal{F}$ et $\tilde{F}$ les feuilletages définis sur M et $\tilde{M}$ par les fibrations p et $\tilde{p}$. Si $\mathcal{G}$ est un feuilletage proche de $\mathcal{F}$ alors $\tilde{G} = \Pi^{-1}(\mathcal{G})$ sera un feuilletage proche de $\tilde{F}$, et les feuilles compactes de $\tilde{G}$ seront les images réciproques par Π des feuilles compactes de $\mathcal{G}$. Inversement, un feuilletage $\tilde{G}$ proche de $\tilde{F}$ se projette par Π en un feuilletage proche de $\mathcal{F}$ si $\tilde{G}$ est invariant par Σ.

Notons N un champ d'hyperplans transverses à $\mathcal{F}$ et notons $\tilde{N} = \Pi^{-1}(N)$: c'est un champ d'hyperplans de $\tilde{M}$, transverse à $\tilde{F}$, et invariant par Σ_*.

A tout champ de vecteurs Y sur $\tilde{B}$, vérifiant: $\sigma_*(Y) = -Y$, on associe la famille continue de feuilletages de $M, \mathcal{F}_t(Y), t \in \mathbf{R}$, définie de la façon suivante:

Notons $\bar{Y}$ le champ de vecteurs sur $\tilde{M}$, tangent à $\tilde{N}$, et qui se projette par $\tilde{p}_*$ sur Y. Notons $\tilde{F}_t(Y)$ le feuilletage de $\tilde{M}$ dirigé par $X + t\bar{Y}$; comme on a: $\Sigma_*(X + t\bar{Y}) = -(X + t\bar{Y})$, le feuilletage $\tilde{F}_t(Y)$ est invariant par Σ et se projette donc par Π en un feuilletage $\mathcal{F}_t(Y)$ sur M. Bien sûr $\mathcal{F}_0(Y) = \mathcal{F}$.

S'il existe un champ de vecteurs Y sur $\tilde{B}$, non nul et tel que $\sigma_*(Y) = -Y$, alors, pour tout $t \neq 0$, le feuilletage $\mathcal{F}_t(Y)$ sera sans feuilles compactes proches d'une fibre: la fibre est alors C^∞-instable.

Il reste à caractériser l'existence d'un tel champ sur $\tilde{B}$:

Choisissons un champ Y sur $\tilde{B}$, vérifiant $\sigma_*(Y) = -Y$, et n'ayant qu'un nombre fini de singularités. Si x est une singularité, on note $ind(x)$ l'indice de x comme singularité isolée de Y. Remarquons que $\sigma(x)$ est également une singularité de Y et que l'on a $ind(\sigma(x)) = ind(x)$ ou $ind(\sigma(x)) = -ind(x)$ suivant que la

dimension de B est paire ou impaire.

Si la dimension de B est paire, l'existence d'un champ de vecteurs Y, non nul sur $\tilde{B}$ et vérifiant$\sigma_*(Y) = -Y$, est équivalente à la nullité de la caractéristique d'Euler $\chi(B)$:

En effet, si $\chi(B) \neq 0$, alors $\chi(\tilde{B}) \neq 0$, ce qui interdit l'existence d'un tel champ.

Si $\chi(B) = 0$, on construit d'abord sur $\tilde{B}$ un champ de vecteurs Y vérifiant $\sigma_*(Y) = -Y$, et ne possédant qu'une unique paire de singularités: $(x, \sigma(x))$. Alors l'indice de x et celui de $\sigma(x)$ sont égaux, et donc nuls. Par une perturbation locale du champ Y au voisinage de ces singularités, on construit alors un champ Y' , sans singularités, et vérifiant $\sigma_*(Y') = -\sigma(Y)$.

Supposons à présent que la dimension de B soit impaire (c'est le cas pour l'exemple $p: K \to S^1$).

On ordonne les singularités de Y par paires $(x_i, \sigma(x_i))$, $i = 1, \ldots, k$. La somme des indices, $\sum_{i=1}^{k} ind(x_i) + \sum_{i=1}^{k} ind(\sigma(x_i))$ est nulle, mais la somme $\sum_{i=1}^{k} ind, (x_i)$ peut ne pas être nulle.

On montre facilement que la classe modulo 2 de $\sum_{i=1}^{k} ind(x_i)$ ne dépend ni du choix du champ de vecteurs Y, ni de la façon d'ordonner par paires les singularités: on la note $\chi(\pi) \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. (Dans l'exemple $p: K \to S^1$, le revêtement π est le revêtement à deux feuillets du cercle S^1 par lui-même; on a: $\chi(\pi) = 1$).

L'existence d'un champ de vecteurs Y, non nul sur $\tilde{B}$ et vérifiant $\sigma_*(Y) = -Y$ est équivalente à la nullité de $\chi(\pi)$.

En résumé, on vient de montrer la proposition suivante, qui est la partie facile du Théorème A.

PROPOSITION 3.1.B-1. *Soit B une variété compacte.*

a) supposons que la dimension de B soit paire, et que la caractéristique d'Euler $\chi(B)$ soit nulle. Alors, pour toute fibration en cercles de base B, la fibre est C^∞-instable.

b) supposons que la dimension de B soit impaire. Soit $p: M \to B$ une fibration en cercles, et soit $\pi: \tilde{B} \to B$ le revêtement des orientations des fibres de p. Si $\chi(\pi)$ est nul, alors la fibre est C^∞-instable (c'est en particulier le cas si la fibration est orientée).

§2 Fibrations en tores $\mathbf{T^n}$

Soit B une variété compacte. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Toute fibration $p: M \to B$ de fibre le tore T^n détermine naturellement une action linéaire à droite du groupe fondamental $\pi_1(B)$ sur l'homologie $H_1(T^n, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}^n$ de la fibre, c'est à dire une représentation contravariante $\rho: \pi_1(B) \to GL(n, \mathbf{Z})$.

Considérons les fibrations possédant une section globale. Deux fibrations de ce type sont isomorphes si les représentations, qu'elles déterminent de $\pi_1(B)$ dans $GL(n, \mathbf{Z})$, sont conjuguées.

Le but de la partie 2 est de présenter une C^∞-déformation d'une telle fibration, pour laquelle il sera facile de caractériser l'existence de feuilles compactes proches d'une fibre. Pour cela, nous allons d'abord rappeler la construction (classique) d'une telle fibration à partir d'une représentation $\rho: \pi_1(B) \to GL(n, \mathbf{Z})$.

a) Revêtement associé à une représentation

Soit $\rho: \pi_1(B) \to GL(n, \mathbf{Z})$ une représentation contravariante. Notons $\pi: \tilde{B} \to B$ le revêtement de B associé à la représentation ρ: il est obtenu par quotient du revêtement universel de B par le noyau de ρ: c'est un revêtement galoisien.

Rappelons que le groupe fondamental $\pi_1(B)$ agit à gauche sur $\tilde{B}$ par relèvement des chemins; à tout $\gamma \in \pi_1(B)$ on associe ainsi un automorphisme φ_γ du revêtement et l'application $\gamma \to \varphi_\gamma$ est un homomorphisme surjectif de $\pi_1(B)$ dans Aut (π).

Deux éléments $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1(B)$ définissent le même automorphisme de π si et seulement si ils ont même image par ρ. De plus, étant donné $y_1, y_2 \in \tilde{B}$ dans la même fibre du revêtement (c'est à dire: $\pi(y_1) = \pi(y_2)$), il existe un unique automorphisme φ_γ tel que $\varphi_\gamma(y_1) = y_2$. En particulier, au couple (y_1, y_2) est associé sans ambiguité l'élément $\rho(\gamma) \in GL(n, \mathbf{Z})$.

b) La fibration triviale $\tilde{\mathbf{B}} \times \mathbf{T}^n \to \mathbf{B}$: notations

Le tore T^n est le quotient de $\mathbf{R}^n$ par $\mathbf{Z}^n$. Il hérite de $\mathbf{Z}^n$ les coordonnées canoniques que nous noterons $(x_1, \ldots, x_n)$. Alors $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ sont n champs de vecteurs commutants sur T^n.

Soit $\tilde{B} \times T^n \to \tilde{B}$ la fibration triviale de fibre T^n (la base $\tilde{B}$ a été définie en a)). Les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ de T^n définissent sur $\tilde{B} \times T^n$ des champs de vecteurs tangents aux fibres, que l'on notera encore $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Bien sûr, ces champs commutent.

On appelle feuilletage horizontal de $\tilde{B} \times T^n$ le feuilletage dont les feuilles sont les $\tilde{B} \times \{p\}$, $p \in T^n$. La section nulle est l'application de $\tilde{B}$ dans $\tilde{B} \times T^n$ qui à $a \in \tilde{B}$ associe $(a, 0) \in \tilde{B} \times T^n$.

Le groupe fondamental $\pi_1(B)$ agit à gauche sur $\tilde{B} \times T^n$ par automorphisme de la fibration, de la façon suivante: on rappelle que tout élément de $GL(n, \mathbf{Z})$ définit un difféomorphisme de T^n. Pour tout $\gamma \in \pi_1(B)$ on note $\rho_\gamma = \varphi_\gamma \times \rho(\gamma)^{-1} : \tilde{B} \times T^n \to \tilde{B} \times T^n$.

Tous les difféomorphismes ρ_γ laissent invariant le feuilletage horizontal et la section nulle.

c) Fibration associée à representation ρ

Notons $\rho_{\pi_1(B)} = \{\rho_\gamma\}_{\gamma\in\pi_1(B)}$: c'est un group d'automorphismes de la fibration triviale $\tilde{B} \times T^n\tilde{B}$.

Le quotient $\tilde{B} \times T^n/\rho_{\pi_1(B)}$ est une variété différentiable compacte M_ρ, et la projection $\tilde{B} \times T^n \to \tilde{B}$ passe au quotient en une fibration $f_\rho: M_\rho \to B$ de fibre le tore T^n. La section nulle de $\tilde{B}\times T^n$ passe au quotient en une section globale de la fibration f_ρ (appelée elle aussi section nulle), et le feuilletage horizontal de $\tilde{B}\times T^n$ définit sur M_ρ un feuilletage transverse aux fibres, appelé feuilletage horizontal.

On vérifie facilement que l'action naturelle de $\pi_1(B)$, sur l'homologie de la fibre $H_1(T^n, \mathbf{Z})$, est celle donnée par la représentation ρ.

d) Déformations d'une fibration f_ρ

Pour tout champ de vecteurs X sur $\tilde{B}$, on notera $\bar{X}$ le champ de vecteurs sur $\tilde{B}\times T^n$, tangent au feuilletage horizontal et se projetant sur X.

Notons $\mathcal{F}$ le feuilletage défini par la fibration f_ρ. On cherche une perturbation $\mathcal{F}'$ du feuilletage $\mathcal{F}$ telle que le feuilletage $\tilde{F}'$ sur $\tilde{B} \times T^n$ (pull back de $\mathcal{F}'$ par la projection de $\tilde{B} \times T^n$ sur M_ρ) soit défini par un champ de n-plans admettant pour base $(\frac{\partial}{\partial x_1} + \bar{X}_1, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} + \bar{X}_n)$, où $X_1, \ldots, X_n$ sont n champs de vecteurs sur $\tilde{B}$.

Deux problèmes se posent:

PROBLÈME 1: *A quelle condition un tel champ de plans passe-t-il au quotient en un champ de plans sur M_ρ?*

PROBLÈME 2: *A quelle condition est-il intégrable ?*

Voyons comment les résoudre:

Exemples de Déformations de Feuilletages Définis

Pour tout espace vectoriel $V, GL(n, \mathbf{Z})$ agit naturellement sur le produit V^n par:

$$(a_{ij}) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma a_{j,1} v_j \\ \vdots \\ \Sigma a_{j,n} v_n \end{pmatrix}$$

On peut donc faire agir $GL(n, \mathbf{Z})$ sur les n-uples de champs de vecteurs de $\tilde{B}$.

On vérifie facilement que pour tout $\gamma \in \pi_1(B)$ on a:

$$\begin{pmatrix} (\rho_\gamma)_*(\frac{\partial}{\partial x_1}) \\ \vdots \\ (\rho_\gamma)_*(\frac{\partial}{\partial x_n}) \end{pmatrix} = \rho(\gamma)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

On en déduit facilement le lemme suivant:

LEMMA 3.2.D-1. *Soient $X_1, \ldots, X_n, n$ champs de vecteurs sur $\tilde{B}$. Le champ de n-plans sur $\tilde{B} \times T^n$ engendré par les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_i} + \bar{X}_i, i \in \{1, \ldots, n\}$, passe au quotient en un champ de n-plans sur M_ρ si et seulement si les champs $X_1, \ldots, X_n$ vérifie la condition (1) suivante:*

$$\forall \gamma \in \pi_1(B), \begin{pmatrix} (\varphi_\gamma)_* X_1 \\ \vdots \\ (\varphi_\gamma)_* X_n \end{pmatrix} = \rho(\gamma) \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

Remarquons de plus si le n-uple $(X_1, \ldots, X_n)$ de champs de vecteurs de $\tilde{B}$ vérifie la relation (1) alors il en va de même pour tout n-uple $(tX_1, \ldots, tX_n)$, $t \in \mathbf{R}$.

Soient $X_1, \ldots, X_n n$ champs de vecteurs sur $\tilde{B}$ vérifiant la condition (1). Supposons que ces champs commutent deux à deux.

Alors les champs $\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial}{\partial x_n}$, commutent deux à deux. Donc pour tout $t \in \mathbf{R}$ le champ de plans sur $\tilde{B} \times T^n$ dirigé par les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_1} + t\bar{X}_1, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} + t\bar{X}_n$, définit un feuilletage $\tilde{F}_t(X_1, \ldots, X_n)$ qui passe au quotient sur M_ρ en un feuilletage $\mathcal{F}_t(X_1, \ldots, X_n)$.

Si les champs $X_1, \ldots, X_n$ sont de classe C^∞, la famille de feuilletage $\mathcal{F}_t(X_1, \ldots, X_n)$ est une C^∞-déformation du feuilletage $\mathcal{F}$ défini par la fibration f_ρ.

e) Feuilles compactes proches d'une fibre, de $\mathcal{F}_t(X_1, \ldots, X_n)$

Soient $X_1, \ldots, X_n, n$ champs de vecteurs commutants sur $\tilde{B}$, et vérifiant la relation 1.

Comme $\tilde{B}$ n'est pas compacte, la donnée de n champ commutants, $X_1, \ldots, X_n$, sur $\tilde{B}$ ne définit pas une action de $\mathbf{R}^n$ sur $\tilde{B}$, mais seulement une action locale de $\mathbf{R}^n$ sur $\tilde{B}$. Nous appellerons orbite d'un point x pour cette action locale de $\mathbf{R}^n$ sur $\tilde{B}$, l'ensemble des points de $\tilde{B}$ que l'on peut joindre à x par un chemin obtenu en mettant bout-à-bout un nombre fini de segments, chacun de ces segments étant contenu dans une orbite du flot (local) d'un champ $\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n$.

On vérifie facilement que l'image d'une orbite de l'action locale de $\mathbf{R}^n$ sur $\tilde{B}$ engendrée par les champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_n$, par un automorphisme φ_γ du revêtement $\pi: \tilde{B} \to B$, est également une orbite de cette action locale: en effet, les champs $X_1, \ldots, X_n$ vérifient (1), c'est-à-dire:

$$\begin{pmatrix} (\varphi_\gamma)_*(X_1) \\ \vdots \\ (\varphi_\gamma)_*(X_n) \end{pmatrix} = \rho(\gamma) \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

Ces orbites se projettent donc en une partition de B.

On montre facilement le lemme suivant:

LEMMA 3.2.E-1. *Avec les notations ci-dessus, pour tout $t \neq 0$, chaque feuille du feuilletage $\tilde{F}_t(X_1, \ldots, X_n)$ se projette sur $\tilde{B}$ sur exactement une orbite de l'action locale de $\mathbf{R}^n$ sur $\tilde{B}$ définie par les champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_n$.*

Supposons que les champs $X_1, \ldots, X_n$ aient un zéro commun $x \in \tilde{B}$. Notons $y = \pi(x)$. Alors, pour tout $t \in \mathbf{R}$ la fibre $f_\rho^{-1}(y)$ est une feuille (compacte) de $\mathcal{F}_t(X_1, \ldots, X_n)$. Réciproquement:

PROPOSITION 3.2.E-2. *Si $X_1, \ldots X_n$ sont n champs de vecteurs commutants sur $\tilde{B}$, vérifiant (1), et n'ayant aucun zéro commun, alors, pour tout $t \neq 0$ assez proche de zéro, le feuilletage $\mathcal{F}_t(X_1, \ldots, X_n)$ sera sans feuille compacte proche d'une fibre.*

DEMONSTRATION: Supposons (par l'absurde) qu'il existe une suite $\{t_n\}_{n \in \mathbf{N}}, t_n \neq 0, \lim_{n \to \infty} t_n = 0$, telle que $\mathcal{F}_{t_n}(X_1, \ldots, X_n)$ possède une feuille compacte L_n, proche d'une fibre.

Choisissons une métrique riemanienne sur B, et notons S_n le diamètre de la projection $f_\rho(L_n)$ de L_n sur B. On a: $\lim_{n \to \infty} S_n = 0$. Donc, par compacité de B, il existe une sous-suite m_i telle que les projections $f_\rho(L_{m_i})$ convergent vers un point $b \in B$. En utilisant le fait que $f_\rho(L_{m_i})$ est la projection par π d'une orbite de l'action locale de $\mathbf{R}^n$ sur $\tilde{B}$ définie par les champs X_i, on montre facilement que tout point de $\pi^{-1}(b)$ est un point fixe commun à tous les champs de vecteurs X_i, ce qui est contraire à l'hypothèse. □

§3 Fibrations triviales

Dans cette partie nous allons voir que se donner un feuilletage proche d'une fibration triviale $p: B \times F \to B$ est équivalent à se

donner une représentation du groupe fondamental $\pi_1(F)$ dans le groupe des difféomorphismes de la base $\mathrm{Diff}(B)$, telle que l'image d'un système fixé de générateurs de $\pi_1(F)$ soit contenue dans un petit voisinage de l'identité: la représentation est l'holonomie du feuilletage, et inversement on obtient le feuilletage en faisant une suspension de la représentation. Comme toute fibration est localement triviale, ceci permet de comprendre ce qu'est, localement, un feuilletage proche d'une fibration.

Notons $\mathcal{F}$ le feuilletage défini par la fibration triviale $p: B \times F \to B$. Fixons un point $0 \in F$; l'identification de B avec $B \times \{0\}$ fait de la base B une transversale complète du feuilletage $\mathcal{F}$.

Notons $q: B \times F \to F$ la projection sur le second facteur.

a) Représentation $\pi_1(F) \to \mathrm{Diff}_0(B)$, associée à un feuilletage proche de $\mathcal{F}$

Tout feuilletage $\mathcal{G}, C^1$-proche de $\mathcal{F}$, est transverse à tous les facteurs $B \times \{x\}$: il est transverse à la fibration $q: B \times F \to F$. en particulier $B \times \{0\}$ est une transversale complète de $\mathcal{G}$.

Comme $\mathcal{G}$ est transverse à une fibration, son pseudo-groupe d'holonomie est engendré par un groupe de difféomorphismes de la transversale $B \times \{0\}$. On peut le voir facilement:

La projection q fait de chaque feuille de $\mathcal{G}$ un revêtement de la fibre F. On peut donc relever sur les feuilles de $\mathcal{G}$ les chemins sur F. Pour tout lacet γ (d'origine $0 \in F$), soit φ_γ l'application qui, à $(x, 0) \in B \times \{0\}$, associe l'extrémité du chemin d'origine $(x, 0)$ relevant le lacet γ sur la feuille de $\mathcal{G}$ passant par $(x, 0)$. C'est un difféomorphisme d'holonomie de $\mathcal{G}$, défini de $B \times \{0\}$ dans $B \times \{0\}$.

On voit facilement que φ_γ appartient à la composante connexe $\mathrm{Diff}_0(B)$ de l'identité dans $\mathrm{Diff}(B)$. (en effet les holonomies de $\mathcal{G}$ le

long de γ sur les fibres $B \times \gamma(t)$ réalisent une isotopie reliant φ_γ à l'identité).

Au feuilletage $\mathcal{G}$ est ainsi associée une représentation contravariante $\varphi: \pi_1(F) \to \mathrm{Diff}_0(B)$ qu'on appellera représentation d'holonomie de $\mathcal{G}$. Cette représentation caractérise le feuilletage $\mathcal{G}$ à conjugaison près, comme le montre la proposition suivante:

PROPOSITION 3.3.A-1. *Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ deux feuilletages transverses à la fibration $q: B \times F \to F$, qui induisent la même représentation d'holonomie $\varphi: \pi_1(F) \to \mathrm{Diff}_0(B)$. Alors $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont conjugués par un difféomorphisme de $B \times F$, laissant invariant les fibres de q, et égal à l'identité sur $B \times \{0\}$.*

DÉMONSTRATION: Le difféomorphisme ψ consiste à projeter les feuilles de $\mathcal{G}$ sur celle de $\mathcal{G}'$ le long des facteurs $B \times \{s\}, s \in F$:

Soit $(y, s) \in B \times F$; la feuille de $\mathcal{G}$ passant par (y, s) coupe $B \times \{0\}$ en (au moins) un point $(x, 0)$. Soit γ un chemin tangent à $\mathcal{G}$ joignant $(x, 0)$ à (y, s). La projection $q(\gamma)$ est un chemin sur F joignant 0 à s. Relevons $q(\gamma)$ en un chemin γ' tangent à $\mathcal{G}'$ d'origine $(x, 0)$. L'extrémité de ce chemin sera par définition $\psi(\gamma)$.

Pour que cette définition soit cohérente, il faut que cette extrémité ne dépende pas du chemin γ ni du point $(x, 0)$. Soit γ_1 un chemin tangent à $\mathcal{G}$ joignant (y, s) à un point $(x_1, 0)$. Alors $q(\gamma \cdot \gamma_1^{-1})$ est un lacet d'origine 0 sur F. Relevons $q(\gamma \cdot \gamma_1^{-1})$ en un chemin tangent à $\mathcal{G}'$ passant par $(x, 0)$: l'extrémité est $(\varphi_{\gamma \cdot \gamma_1^{-1}}(x), 0)$ c'est-à-dire $(x_1, 0)$. On en déduit immédiatement que le chemin γ_1', d'origine $(x_1', 0)$ tangent à $\mathcal{G}'$ et relevant $q(\gamma_1)$ a pour extrémité (y, s), et que $\gamma'(\gamma_1')^{-1}$ est le relevé sur $\mathcal{G}'$ d'origine $(x, 0)$ de $q(\gamma \cdot \gamma_1^{-1})$. □

PROPOSITION 3.3.A-2. *Choisissons* $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ *un système générateur de* $\pi_1(F)$. *Soit* $\mathcal{G}$ *un feuilletage transverse à la fibration* $q: B \times F \to F$. *Alors la feuille* g_x *de* $\mathcal{G}$ *passant par* $(x, 0) \in B \times \{0\}$ *est une feuille compacte proche d'une fibre de la fibration* $p: B \times F \to B$ *si et seulement si* x *est un point fixe commun aux* $\varphi_{\gamma_i}, i \in \{1, \ldots, n\}$.

En effet, si x est un point fixe commun aux φ_{γ_i}, on peut projeter la fibre $\{x\} \times F$ sur la feuille g_x le long des $B \times \{s\}, s \in F$, comme dans la Proposition 1.

Notons enfin, que si $\mathcal{G}$ est C^1-proche de $\mathcal{F}$ (défini par p), la représentation φ est proche de l'identité au sens suivant: $\varphi_{\gamma_1}, \ldots, \varphi_{\gamma_n}$ sont C^1-proches de l'identité. Cela ne signifie absolument pas que, pour tout $\gamma \in \pi_1(F), \varphi_\gamma$ soit C^1-proche de l'identité.

b) Feuilletage construit par suspension d'une représentation $\varphi: \pi_1(F) \to \mathrm{Diff}(B)$

PROPOSITION 3.3.B-1. *Soit* φ *une représentation contravariante de* $\pi_1(F)$ *dans* $\mathrm{Diff}(B)$. *Alors il existe une fibration* $q: M \to F$, *de fibre* B, *et un feuilletage* $\mathcal{G}$ *transverse à cette fibration, tel que* φ *soit la représentation d'holonomie du feuilletage* $\mathcal{G}$.

DÉFINITION 3.3.B-2. On dit que $\mathcal{G}$ est le feuilletage obtenu par suspension de la représentation φ.

DÉMONSTRATION: Notons $\pi: \tilde{F} \to F$ le revêtement universel de F. Le relèvement des chemins définit une action naturelle à gauche du groupe fondamental $\pi_1(F)$ sur $\tilde{F}$, et cette action induit un isomorphisme de $\pi_1(F)$ dans le groupe $\mathrm{Aut}(\pi)$ des automorphismes du revêtement. On note $A_\gamma, \gamma \in \pi_1(F)$, l'automorphisme de π ainsi associé au lacet γ.

Exemples de Déformations de Feuilletages Définis

On considère $B \times \tilde{F}$, muni du feuilletage vertical, défini par la fibration triviale $B \times \tilde{F} \to B$, et du feuilletage horizontal défini par la fibration $B \times \tilde{F} \to F$.

Pour tout $\gamma \in \pi_1(F)$, notons $\psi_\gamma = \varphi(\gamma)^{-1} \times A_\gamma : B \times \tilde{F} \to B \times \tilde{F}$. C'est un difféomorphisme de $B \times \tilde{F}$, qui laisse invariants le feuilletage vertical et le feuilletage horizontal. De plus $\gamma \to \psi_\gamma$ est un homomorphisme de $\pi_1(F)$ dans $\mathrm{Diff}(B \times \tilde{F})$. Notons $\psi_{\pi_1(F)} = \{\psi_\gamma, \gamma \in \pi_1(F)\}$; c'est un sous groupe de $\mathrm{Diff}(B \times \tilde{F})$.

Alors $B \times F/\psi_{\pi_1(F)}$ est une variété différentiable compacte M, de plus le feuilletage horizontal et le feuilletage vertical passent au quotient sur$M$ en deux feuilletages transverses (appelés encore horizontal et vertical). Le feuilletage horizontal définit une projection $q : M \to F$, qui fait de M une fibration sur F de fibre B. Le feuilletage vertical, $\mathcal{G}$, est transverse à la fibration q.

Enfin, la représentation d'holonomie du feuilletage vertical $\mathcal{G}$ de$M$, sur la transversale $q^{-1}(0)$ (0 =point base de F), est exactement $\varphi : \pi_1(F) \to \mathrm{Diff}(B)$. □

PROPOSITION 3.3.B-3. *Soit $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ un système générateur de $\pi_1(F)$. Soit $\varphi : \pi_1(F) \to \mathrm{Diff}_0(B)$ une représentation contravariante. Si, pour tout i, $\varphi(\gamma_i)$ est suffisamment C^r-proche de l'identité ($r \geq 1$), alors le feuilletage $\mathcal{G}$ obtenu par suspension de φ est défini sur $B \times F$ et est C^1-proche du feuilletage $\mathcal{F}$ défini par la fibration triviale $p : B \times F \to B$.*

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION: Soit $\varphi_n, n \in \mathbf{N}$, une suite de représentation telle que, pour tout $\gamma \in \pi_1(F)$, $\varphi_n(\gamma)$ converge vers l'identité pour la C^r-topologie. Notons $S = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbf{N}}$, et pour tout $\gamma \in \pi_1(F)$ notons $\psi(\gamma)$ l'élément de $\mathrm{Diff}^S(B)$ défini par: $(x, \frac{1}{n}) \to (\varphi_n(x), \frac{1}{n})$. On construit facilement, à l'aide des $\psi(\gamma)$,

une déformation de l'holonomie du feuilletage $\mathcal{F}$. Le téorème de réalisation des déformations de l'holonomie permet de construire alors une déformation $\mathcal{F}^S = \{\mathcal{F}^s\}_{s\in S}$ du feuilletage $\mathcal{F}$ telle que, pour $s = \frac{1}{n}$ proche de 0, l'holonomie du feuilletage $\mathcal{F}^s$ soit donnée par la représentation φ_n. De même que dans la Proposition a-1, on montre alors facilement que $\mathcal{F}^s$ est conjugué au feuilletage défini par suspension de φ_n. □

On m'a dit que la proposition ci-dessus est encore vraie pour des représentations C^0-proches de l'identité. Cependant, je ne connais pas de démonstration simple, ni de références, pour cette affirmation. On utilisera donc par la suite la proposition suivante, beaucoup plus simple:

PROPOSITION 3.3.B-4. *Soit $\varphi: \pi_1(F) \to \mathrm{Diff}(B)$ une représentation contravariante isotope à la représentation triviale; alors le feuilletage obtenu par suspension de φ est défini sur $B \times F$ et transverse à la fibration triviale $B \times F \to F$.*

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION: On choisit une isotopie $\varphi_s, s \in [0,1]$, reliant φ à la représentation triviale; pour tout γ on note $\psi(\gamma)$ le difféomorphisme de $B \times [0,1]$ défini par: $(x,s) \to (\varphi_s(x), s)$. On fait alors la suspension de la représentation $\gamma \to \psi(\gamma)$: on obtient un feuilletage défini sur un fibré de base $F \times [0,1]$ et de fibre B, et induisant au dessus de $F \times \{s\}$ la suspension de la représentation φ_s. Comme φ_1 est la représentation triviale, ce fibré est trivial au dessus de $F \times [0,1]$, donc est trivial. □

CONCLUSION: Soit $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ un système générateur de $\pi_1(F)$. Il est équivalent de se donner un feuilletage C^r-proche de la fibration triviale $B \times F \to B$, ou de se donner une représentation contravariante $\varphi: \pi_1(F) \to \mathrm{Diff}_0(B)$ telle que $\varphi(\gamma_1), \ldots, \varphi(\gamma_n)$ soient

C^r-proches de l'identité.

§4 Fibrations telles que $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^k$

Nous allons voir que le tore T^k est la plus stable des fibres F telles que $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^k$, ou, autrement dit, que les fibrations de fibre T^k sont celles qui admettent le moins de C^1-déformations. Elles représentent donc l'un des pôles pour l'étude de la stabilité, le pôle opposé étant les fibrations dont la fibre a un groupe fondamental égal au groupe libre à k générateurs: ces dernières sont toujours C^∞-instables, (si $k > 1$) comme nous le verrons dans la partie 5 de ce chapitre.

a) Fibration en tores associée à une fibration

PROPOSITION 3.4.A-1. *Soit $p: M \to B$ une fibration de fibre F telle que $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^k, k \in \mathbf{N}^*$. Alors il existe une fibration $q: E \to B$ de fibre le tore T^k et une application différentiable $f: M \to E$, se projetant par p et q sur l'identité de B, et induisant sur chaque fibre un isomorphisme de $H_1(F, \mathbf{Z})/$ Torsion sur $H_1(T^k, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}^k$.*

(On rappelle que $H_1(F, \mathbf{Z})/$ Torsion est l'image de $H_1(F, \mathbf{Z})$ dans $H_1(F, \mathbf{R})$).

Avant de montrer cette proposition, voyons comment l'utiliser:

On a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & E \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ B & \xrightarrow[id]{} & B \end{array} \qquad f_*: H_1(F, \mathbf{Z})/\text{Torsion} \to H_1(T^k, \mathbf{Z})$$

Notons $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ les feuilletages de M et E définis par les fibrations p et q. L'application f est transverse au feuilletage $\mathcal{G}$, puisqu'elle se projette sur l'identité de B.

Soit T une transversale complète du feuilletage $\mathcal{F}$, relativement compacte dans une autre transversale T'. Alors $f(T)$ et $f(T')$ sont des transversales complètes du feuilletage $\mathcal{G}$. On les notera encore T et T'. De plus, f induit un difféomorphisme local de T' sur $f(T')$.

Tout feuilletage C^1-proche de $\mathcal{F}$ ou de $\mathcal{G}$ admettra T comme transversale complète, et ses feuilles compactes sont les feuilles qui coupent T en un nombre fini de points.

Si $\mathcal{G}'$ est un feuilletage C^1-proche de $\mathcal{G}$, l'application f est transverse à $\mathcal{G}$': on peut donc prendre l'image réciproque de $\mathcal{G}'$ par f et $\mathcal{F}' = f^{-1}(\mathcal{G}')$ est un feuilletage C^1-proche de $\mathcal{F}$.

De plus les feuilles compactes (resp. proches d'une fibre) de $\mathcal{F}'$ sont exactement les images réciproques par f des feuilles compactes (resp. proches d'une fibre) de $\mathcal{G}'$: il suffit pour le voir de considérer leurs intersections avec la transversale T.

En particulier, si la fibre T^k de la fibration q est instable, alors la fibre F de la fibration p est instable.

En ce sens, on peut dire que les fibrations en tores T^k sont, parmi les fibrations dont la fibre F vérifie $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^k$, celles dont la fibre est la plus stable.

b) Démonstration de la proposition

Pour tout $x \in B$ on note $F_x = p^{-1}(x)$ la fibre de p au dessus de x.

1ère étape. Considérons le fibré sur B dont la fibre en tout point $x \in B$ est $H_1(F_x, \mathbf{R})$. Pour tout point $x \in B$, on note $\Gamma_x = H_1(F_x, \mathbf{Z})/\text{Torsion}$ l'image de $H_1(F_x, \mathbf{Z})$ dans $H_1(F_x, \mathbf{R})$ par la projection naturelle; c'est un réseau (isomorphe à $\mathbf{Z}^k$), variant différentiablement avec le point x. Le quotient de $H_1(F_x, \mathbf{R})$ par le réseau Γ_x est un groupe isomorphe au tore $T^k = \mathbf{R}^k/\mathbf{Z}^k$.

On obtient ainsi un fibré différentiable $q_0 = E_0 \to B$ dont la fibre en tout point $x \in B$ est le groupe $H_1(F_x, \mathbf{R})/\Gamma_x \simeq T^k$.

2ème étape. Soit $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, k lacets sur F dont les classes d'homologie $[\gamma_i]$, $i = 1, \ldots, k$, forment une base de $H_1(F, \mathbf{R})$. Choisissons k 1-formes fermées $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sur F, à valeurs dans $\mathbf{R}$, de façon que, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ on ait $\int_{\gamma_i} \alpha_j = \delta_{ij}$ (où $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$, et $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$).

Notons $\omega = \sum_1^k \alpha_i.[\gamma_i]$; c'est une 1-forme fermée sur F à valeurs dans $H_1(F, \mathbf{R})$, ayant la propriété suivante: pour tout lacet γ sur F, on a: $\int_\gamma \omega = [\gamma]$, où $[\gamma]$ est la classe d'homologie réelle de γ.

Notons Γ l'image de la projection naturelle de $H_1(F, \mathbf{Z})$ dans $H_1(F, \mathbf{R})$.

Soient a et b deux points de F, et γ_1 et γ_2 deux chemins sur F joignant a à b. Alors la différence $\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega$ est égale à la classe d'homologie $[\gamma_1 \gamma_2^{-1}]$ du lacet $\gamma_1 \gamma_2^{-1}$; on a donc

$$\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega \in \Gamma$$

donc $\int_{\gamma_1} \omega$ et $\int_{\gamma_2} \omega$ ont même projection sur $H_1(F, \mathbf{R})/\Gamma$: on notera $\int_a^b \omega \in H_1(F, \mathbf{R})/\Gamma$ la projection sur $H_1(F, \mathbf{R})/\Gamma$ de $\int_\gamma \omega$ où γ est un chemin sur F joignant a à b.

3éme étape. Soit $\{U_i\}$ un recouvrement fini de B par des ouverts trivialisant la fibration p, et soit $\{\varphi_i\}$ une partition de l'unité associée au recouvrement U_i. Pour chaque i, on construit comme ci-dessus (en utilisant une trivialisation de p au-dessus de U_i) une famille différentiable, $\{\omega_x^i\}_{x \in U_i}$, où, pour tout $x \in U_i, \omega_x^i$ est une 1-forme fermée sur la fibre F_x, à valeurs dans $H_1(F_x, \mathbf{R})$, et telle que pour tout lacet γ sur la fibre F_x, l'intégrale $\int_\gamma \omega_x$ soit égale à la classe d'homologie réelle $[\gamma] \in H_1(F_x, \mathbf{R})$.

Notons, pour tout $x \in B$, $\omega_x = \sum_1^k \varphi_i(x)\omega_x^i$. On a ainsi construit une famille différentiable, $\{\omega_x\}_{x\in B}$, où pour tout $x \in B$, ω_x est une 1-forme fermée sur F_x à valeurs dans $H_1(F_x, \mathbf{R})$, telle que $\int_\gamma \omega_x = [\gamma] \in H_1(F_x, \mathbf{R})$ pour tout lacet γ sur F_x.

Si a et b sont deux points d'une même fibre F_x et si γ est un chemin sur F_x, joignant a à b, alors la projection sur $H_1(F_x, \mathbf{R})/\Gamma_x = q_0^{-1}(x)$ de $\int_\gamma \omega_x$ ne dépend pas du chemin γ; on la note $\int_a^b \omega_x$.

4ème étape. Pour tout i, on fixe une section locale $\sigma_i : U_i \to M$ de la fibration p au-dessus de U_i.

Pour tout $x \in U_i$, on note $f_i^x : F_x \to H_1(F_x, \mathbf{R})/\Gamma_x$ l'application différentiable définie par $f_i^x(a) = \int_{\sigma_i(x)}^a \omega_x$. On note $f_i : p^{-1}(U_i) \to q_0^{-1}(U_i)$ l'application différentiable dont la restriction à chaque fibre F_x est f_i^x. Notons que, pour tout $x \in U_i \cap U_j$ la différence entre les fonctions f_i^x et f_j^x est égale à la constante $\int_{\sigma_i(x)}^{\sigma_j(x)} \omega_x$.

On considère l'union disjointe $q_0^{-1}(U_i)$ et l'on recolle $q_0^{-1}(U_i)$ avec $q_0^{-1}(U_j)$ le long de $q_0^{-1}(U_i \cap U_j)$ par le difféomorphisme ψ_{ij} dont la restriction ψ_{ij}^x à chaque fibre $q_0^{-1}(x)$ est définie par $\psi_{ij}^x(z) = z - \int_{\sigma_i(x)}^{\sigma_j(x)} \omega_x$ (c'est-à-dire que ψ_{ij}^x est la translation de vecteur $-\int_{\sigma_i(x)}^{\sigma_j(x)} \omega_x$ sur le tore $q_0^{-1}(x) \simeq T^k$).

Notons $E = \amalg q_0^{-1}(U_i)/\psi_{i,j}$: c'est une variété différentiable, et les projections $q_0 : q_0^{-1}(U_i) \to U_i$ se recollent en une fibration $q : E \to B$ de fibre T^k, et les applications $f_i : p^{-1}(U_i) \to q_0^{-1}(U_i)$ se recollent en une application différentiable $f : M \to E$ se projetant sur l'identité de B.

On montre facilement que f induit sur chaque fibre un isomorphisme

$$f_* : H_1(F, \mathbf{Z})/\text{Torsion} \to H_1(T^k, \mathbf{Z}).$$

□

§5 Fibres toujours instables

La partie 4 a montré que le tore T^k est la plus stable des fibres F telles que $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^k$.

Nous allons voir à présent un exemple de fibres extrêmement instables: celles dont le groupe fondamental est le groupe libre à k générateurs, $k \geq 2$:

THÉORÈME E. *Soit F une variété compacte dont le groupe fondamental $\pi_1(F)$ est un groupe libre à k générateurs, $k \geq 2$.*

Alors, pour toute fibration $p: M \to B$ de fibre F, la fibre de p est C^∞ instable.

Le but de cette partie est de présenter une démonstration de ce théorème. Le paragraphe a) donne l'idée, très simple, de cette démonstration. Le paragraphe c) montre comment utiliser le théorème de réalisation des déformations d'holonomie pour formaliser cette idée et la rendre rigoureuse.

a) Idée de la démonstration

Localement, perturber une fibration p au dessus d'un ouvert U, où U trivialise p, revient à se donner une représentation du groupe fondamental $\pi_1(F)$ dans le groupe des difféomorphismes de U; alors les feuilles compactes proche d'une fibre au dessus de U du feuilletage obtenu correspondent aux points fixes communs à tous les difféomorphismes associés aux éléments de $\pi_1(F)$.

Le groupe fondamental $\pi_1(F)$ étant le groupe libre à k générateurs, une telle représentation est définie par k difféomorphismes de U, qui ne sont a priori liés par aucune relation: il est donc facile de les choisir sans point fixes communs, c'est-à-dire que le feuilletage obtenu sera sans feuilles compactes proches d'une fibre, au-dessus de U.

On choisit alors deux recouvrements finis $\{U_i\}, \{V_i\}, i \in \{1, \ldots, s\}$, de B par des ouverts trivialisant p, tels que V_i soit relativement compact dans U_i.

L'idée est de construire, par itération sur i, des feuilletages $\mathcal{F}_i$ qui sont des perturbations de p "au dessus de $\bigcup_1^i U_j''$ et qui sont sans feuilles compactes proches d'une fibre "au-dessus de $\bigcup_1^i V_j$ ".

Le feuilletage $\mathcal{F}_{i+1}$ est obtenu en perturbant $\mathcal{F}_i$ au dessus de U_{i+1}: comme U_{i+1} trivialise p, on peut choisir une section σ_{i+1}: $U_{i+1} \to M$, et une même base, $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ pour le groupe fondamental de toutes les fibres au dessus de U_{i+1}. Notons $f_1, \ldots, f_k$ les difféomorphismes d'holonomie du feuilletage $\mathcal{F}_i$ le long des γ_j, sur la transversale $\sigma_{i+1}(U_{i+1})$. On perturbe alors les f_j de façon qu'ils n'aient plus de points fixes communs au-dessus de V_{i+1}, en faisant attention de ne pas en recréer au-dessus de $\bigcup_1^i V_l$. La perturbation $\mathcal{F}_{i+1}$ de $\mathcal{F}_i$ ainsi définie n'aura donc pas de feuilles compactes au dessus de $\bigcup_1^{i+1} V_j$.

Comme $\bigcup_1^s V_j$ est la variété B toute entière, le feuilletage $\mathcal{F}_s$ sera une perturbation de la fibration p, sans feuilles compactes proches d'une fibre.

b) Points fixes communs de difféomorphismes

La preuve du théorème repose sur le lemme facile suivant:

LEMMA 3.5.B-1. *Soient U_0, U_1, U_2 trois ouverts d'une variété M, tels que U_{i+1} soit relativement compact dans $U_i, i = 1, 2$.*

i) Soient $f_1, \ldots, f_k$, k difféomorphismes de U_0 sur des ouverts de M.

Alors il existe des difféomorphismes $g_1, \ldots, g_k$ aussi C^∞-proches que l'on veut des $f_1, \ldots, f_k$, vérifiant les deux propriétés suivantes:

$- f_i(x) = g_i(x)$ pour tout $x \in U_0 - U_1$.

– Les g_i n'ont pas de points fixes communs appartenant à l'adhérence $\bar{U}_2$ de U_2.

ii) De plus, si les f_i n'avaient pas de points fixes communs appartenant à un compact K de M, alors il en sera de même pour les g_i.

DÉMONSTRATION: On choisit d'abord des perturbations g_i^1 des f_i telles que g_i^1 coïncide avec f_i sur $U_0 - U_1$, et n'ait qu'un nombre fini de points fixes sur $\bar{U}_2$. Il est alors facile de perturber les g_i^1 de façons qu'ils n'aient pas de points fixes communs.

Supposons à présent que les f_i étaient sans points fixes communs sur le compact K. Alors, en utilisant la compacité de $K \cap \bar{U}_1$ et le fait que les g_i coïncident avec les f_i sur $U_0 - U_1$, on voit facilement qu'il suffit que les g_i soient suffisamment C^o-proches des f_i pour qu'ils soient sans points fixes communs sur K. □

c) Formalisation de l'idée de la démonstration

Notons $\mathcal{F}$ le feuilletage défini par la fibration p.

Fixons-nous $\{U_i\}_{i\in\{1,\dots,s\}}$ et $\{V_i\}_{i\in\{1,\dots,s\}}$ deux recouvrements finis de B par des ouverts trivialisant la fibration, et tels que V_i soit relativement compact dans U_i.

Pour tout i, soit $\sigma_i : U_i \to M$ une section de p, et soit $T = \amalg U_i$. Les sections σ_i font de T une transversale complète du feuilletage $\mathcal{F}$.

Notons $S = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbf{N}^*}$: ce sera notre espace des paramétres, pointé en 0.

DÉFINITION 3.5.C-1. On appelle déformation triviale H_0^S de l'holonomie de $\mathcal{F}$ sur T la déformation induite par la déformation triviale de $\mathcal{F}$ $\{\mathcal{F}^s = \mathcal{F}\}_{s\in S}$

Pour tout $\gamma \in \Pi(\mathcal{F},T)$ sur la fibre $F_x = p^{-1}(x)$, $H_0^s(\gamma)$ est l'élément de $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ de mêmes extrémités que γ, qui se projette (par la projection canonique de T sur B) sur le germe en $(x,0)$ de l'identité de $B \times S$.

DÉFINITION 3.5.C-2. Pour tout ouvert $U \subset B$, on appelle déformation de h'olonomie de $\mathcal{F}$ sur T à support au-dessus de U une déformation $H^S : \Pi(\mathcal{F},t) \to \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ qui coïncide avec la déformation triviale H_0^S sur tout élément $\gamma \in \Pi(\mathcal{F},T)$ contenu dans une fibre F_S, $x \in U$.

Si H^S est une déformation de l'holonomie de $\mathcal{F}$ sur T, et si $\mathcal{F}^S$ est une déformation de $\mathcal{F}$ réalisant H^S, on veut pouvoir lire sur H^S l'existence de feuilles compactes proches d'une fibre pour les feuilles $\mathcal{F}^s$ pour s proche de 0. Nous allons voir à présent comment le faire:

DÉFINITION 3.5.C-3. Soient $f_1,\ldots,f_n$ n éléments de $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ de même source et but $(x,0)$, et induisant le germe de l'identité sur $T \times \{0\}$. On dira que les germes f_i sont sans points fixes communs hors de $T \times \{0\}$ si, pour toute réalisation $\hat{f}_i \in \mathrm{Diff}^S(T)$ des f_i, il existe un voisinage V de $(X,0)$ tel que les $\hat{f}_i$ soient sans points fixes communs sur $V - T \times \{0\}$.

REMARQUE 3.5.C-4. soit H^S une déformation de l'holonomie de $\mathcal{F}$ sur T, et soit $x \in U_i \cap U_j$. Soient $(\gamma_1,\ldots,\gamma_k)$ et $(\delta_1,\ldots,\delta_k)$ deux systèmes générateurs de $\pi_1(F_x,\sigma_i(x))$ et $\pi_1(F_x,\sigma_j(x))$, respectivement.

Alors les germes de $H^S(\gamma_i)$ sont sans points fixes communs hors de T×{0} si et seulement si les germes $H^S(\delta_i)$ sont de même.

PROPOSITION 3.5.C-5. *Soit H^S une déformation de l'holonomie de $\mathcal{F}$ sur T, et soit $\mathcal{F}^S$ une déformation de $\mathcal{F}$ réalisant H^S. Soit $K \subset B$*

un compact. Alors, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

- *il existe un voisinage V de $K \times \{0\}$ dans $B \times S$ tel que $p^{-1}(V) - M \times \{0\}$ ne rencontre pas de feuilles compactes de $\mathcal{F}^S$, proches d'une fibre.*
- *pour tout $x \in K$, il existe i tel que $x \in U_i$, et il existe un système générateur $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$ de $\pi_1(F_x, \sigma_i(x))$ tel que les germes $H^S(\gamma_i)$ soient sans points fixes communs hors de $T \times \{0\}$.*

Pour la démonstration, se reporter au Chapitre 4.2.g.

DÉFINITION 3.5.C-6. Si H^S est une déformation de l'holonomie de $\mathcal{F}$ sur T vérifiant les propriétés de la proposition ci-dessus, alors on dira que H^S est sans points fixes hors de $T \times \{0\}$ au voisinage de $K \times \{0\}$.

Dans ce langage, le Théorème E est une conséquence simple de la proposition suivante:

PROPOSITION 3.5.C-7. *Soit U un ouvert de B et $K \subset U$ un compact. Soit H^S une déformation de l'holonomie de $\mathcal{F}$ sur T, à support au-dessus de U, et sans points fixes hors de $T \times \{0\}$ au voisinage de $K \times \{0\}$. Soit U_i l'un des ouverts du recouvrement.*

Alors il existe une déformation H_1^S à support au-dessus de $U \cup U_i$, sans points fixes hors de $T \times \{0\}$ au voisinage de $(K \cup \bar{V}_i) \times \{0\}$.

Voyons d'abord comment démontrer le Théorème E à partir de cette proposition: par itération sur i, on construit facilement, pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, une déformation H_i^S de l'holonomie de $\mathcal{F}$ sur T, à support au dessus de $\bigcup_1^i U_j$, et sans points fixes hors de $T \times \{0\}$ au voisinage de $\bigcup_1^i \bar{V}_j$. Comme $B = \bigcup_1^s V_j$, pour toute déformation $\mathcal{F}^S$ de $\mathcal{F}$ réalisant H_s^S, les feuilletages $\mathcal{F}^s$, $s \neq 0$ assez petit, seront sans feuilles compactes proches d'une fibre. □

Il reste donc à montrer la proposition.

d) Démonstration de la Proposition c-7

Pour simplifier les notations, nous allons montrer la proposition pour U_1.

Le point essentiel est que, comme U_1 trivialise la fibration p, on va pouvoir choisir une "base" de $\Pi(\mathcal{F},T)$ au dessus de U_1:

– Pour tout i on peut choisir une famille continue $\{\alpha_i^x\}_{x\in U_1\cap U_i}$ d'éléments de $\Pi(\mathcal{F},T)$ joignant $\sigma_1(x)$ à $\sigma_i(x)$. Alors tout élément $\gamma\in\Pi(\mathcal{F},T)$, joignant $\sigma_i(x)$ à $\sigma_j(x)$, $x\in U_1$, s'écrit comme $\gamma=(\alpha_i^x)^{-1}\cdot\tilde{\gamma}\cdot\alpha_j^x$, où $\tilde{\gamma}\in\Pi_1(F_x,\sigma_1(x))$.

– On peut choisir k familles continues $\{\gamma_1^x\},\dots,\{\gamma_k^x\}$, $x\in U_1$, d'éléments de $\Pi(\mathcal{F},T)$, telles que pour tout $x\in U_1$, le groupe $\pi_1(F_x,\sigma_1(x))$ soit le groupe libre engendré par $\{\gamma_1^x,\dots,\gamma_k^x\}$.

Cette base va nous permettre de construire facilement des déformations de l'holonomie de $\mathcal{F}$:

LEMMA 3.5.D-1. *Soient $\{f_1^x\},\dots,\{f_k^x\}$, $x\in U_1$, k familles continues d'éléments de $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ vérifiant les trois propriétés suivantes:*

– Pour tout $x\in U_1$, les f_i^x sont des germes de source et but $(x,0)\in U_1\times\{0\}\subset T\times\{0\}$.

– Il existe un ouvert W relativement compact dans U_1 tel que, pour tout $x\in U_1-W$, $f_i^x=H^S(\gamma_i^x)$.

– Si $x\in K\cup\bar{V}_1$ alors les germes $f_1^x,\dots,f_k^x$ sont sans points fixes communs hors de $T\times\{0\}$.

Alors il existe une unique déformation H_1^S de l'holonomie de $\mathcal{F}$ sur T telle que:

– $H_1^S(\gamma)=H^S(\gamma)$ pour tout $\gamma\in\Pi(\mathcal{F},T)$ contenu dans une fibre F_x, $x\in U_1$.

– $H_1^S(\gamma_i^x) = f_i^x, \forall x \in U_1$.

De plus, H_1^S est à support au dessus de $U \cup U_1$, et est sans points fixes hors de $t \times \{0\}$ au voisinage de $K \cup \bar{V}$.

DÉMONSTRATION: H_1^S est définie de la façon suivante:

– pour tout $\gamma \in \Pi(\mathcal{F}, T)$ dans une fibre F_x, $x \in U_1$ on pose $H_1^S(\gamma) = H^S(\gamma)$.

– pour tout $x \in U_1$, $\pi_1(F_x, \sigma_1(x))$ est le groupe libre engendré par les γ_i^x. Il existe donc un unique homomorphisme contravariant φ_x de $\pi_1(F_x, \sigma_1(x))$ dans le groupe des éléments de $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ de source et but $(x, 0)$, tel que $\varphi_x(\gamma_i^x) = f_i^x$. On note alors $H_1^S(\gamma) = \varphi_x(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \pi_1(F_x, \sigma_1(x)) \subset \Pi(\mathcal{F}, T)$.

– pour tout $x \in U_1$, pour tout $\gamma \in \Pi(\mathcal{F}, T), \gamma$ joignant $\sigma_i(x)$ à $\sigma_j(x)$ on note:

$$H_1^S(\gamma) = H^S(\alpha_j) \circ H_1^S(\tilde{\gamma}) \circ H^S(\alpha_i)^{-1}$$

où $\tilde{\gamma}$ est l'élément de $\pi_1(F_x, \sigma_1(x))$ tel que $\gamma = \alpha_i^{-1}.\tilde{\gamma} \cdot \alpha_j$

On vérifie facilement que H_1^S ainsi défini est une déformation de l'holonomie de $\mathcal{F}$ sur T ayant les propriétés annoncées. Notons cependant que la continuité (et donc la différentiabilité) de H_1^S provient de la continuité des familles f_i^x, et de ce que $f_i^x = H^S(\gamma_i^x)$ pour $x \in U_1 - W$.

Il reste donc à construire les familles continues de germes f_i^x, $x \in U_1$, vérifiant les hypothèses du Lemme d-1.

Choisissons trois ouverts W_0, W_1, W_2 contenant l'adhérence de V_1, d'adhérence contenue dans U_1, et tels que W_{i+1} soit relativement compact dans W_i.

Considérons les familles de germes $H^S(\gamma_i^x)$, $x \in U_1$. Alors, en utilisant la continuité de ces familles, et la compacité relative de W_0

dans U_1, on voit facilement que, pour tout i, il existe une suite de difféomorphismes $\{g_i^n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ de W_0 sur un ouvert de U_1, vérifiant les propriétés suivantes:

– la suite g_i^n converge uniformément sur W_0 vers l'identité id_{W_0} pour la topologie C^∞. On note alors G_i l'élément de $\mathrm{Diff}^S(T)$ défini par $G_i(x,0)=(x,0)$, et $G_i(x,1/n)=(g_i^n(x),\frac{1}{n})$, pour tout $x\in W_0$.

– pour tout $x\in W_0$, $H^S(\gamma_i^x)$ est le germe en $(x,0)$ de G_i.

De plus, comme H^S a été supposé sans points fixes hors de $T\times\{0\}$ au voisinage de K, il existe un voisinage compact K' de K tel que, pour n assez grand, les g_i^n sont sans points fixes communs dans K'.

Alors, d'après le Lemme b-1, il existe des suites f_i^n de difféomorphismes de W_0 sur un ouvert de U, telle que:

– les suites f_i^n coïncident avec g_i^n sur W_0-W_1.

– les f_i^n sont sans points fixes communs sur W_2.

– les f_i^n sont sans points fixes communs sur W_2.

– pour n assez grand, les f_i^n sont sans points fixes communs sur K'.

Pour tout i, notons F_i l'élément de $\mathrm{Diff}^S(T)$ défini par: $(x,0)\to(x,0)$, et $(x,\frac{1}{n})\to(f_i^n(x),1/n)$, pour tout $x\in W_0$.

Notons alors f_i^x le germe en $(x,0)$ de F_i, pour tout $x\in W_0$, et $f_i^x=g_i^x$ pour $x\in U_1-W_0$. On obtient ainsi k familles continues de germes $\{f_i^x\}_{x\in U_1}$, qui vérifient trivialement les hypothèses du lemme d-1.

La déformation H_1^S construite à partir de ces familles est alors à support au-dessus de $U\cup U_1$, et sans point fixe hors de $T\times\{0\}$ au voisinage de $K\cup\bar{V}_1$: la Proposition c-7 est démontrée. □

§6 Déformations d'une fibration, à partir d'un champ de vecteurs de la base

On a vu comment déformer une fibration en cercles orientés, à partir d'un champ de vecteurs X sur la base.

Cette idée se généralise pour d'autres fibres. On construit une déformation $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbf{R}}$de la fibration, telle que pour tout $t \neq 0$ chaque feuille de $\mathcal{F}_t$ se projette exactement sur une orbite du champ X. Si le champ X ne possède pas de singularité, alors, pour t suffisamment petit, $\mathcal{F}_t$ sera sans feuille compacte proche d'une fibre.

Pour cela, on a besoin d'une hypothèse sur la fibration, qui remplace l'hypothèse d'orientabilité de la fibre pour les fibrations en cercles: on demande qu'il existe une demi-droite $\mathbf{R}_+\alpha$, $\alpha \in H^1(F,\mathbf{R}), \alpha \neq 0$, invariante par l'action du groupe fondamental de la base $\pi_1(B)$ sur $H^1(F,\mathbf{R})$ (on rappelle que cette action est duale de l'action de $\pi_1(B)$ sur $H_1(F,\mathbf{R})$ décrite au début du chapitre).

L'idée de ces déformations m'a été donnée par H.Rosenberg. Les techniques utilisées ici sont totalement différentes de celles qui seront développées dans les autres chapitres. C'est en particulier l'unique fois que nous considèrerons les feuilletages comme étant des formes intégrables.

THÉORÈME 3.6-1. *Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage défini par une fibration $p: M \to B$ de fibre F, ou B et F sont compactes connexes, et B est orientée. On suppose qu'il existe une classe de cohomologie $[\alpha] \in H^1(F,\mathbf{R}) - \{0\}$ telle que la demi-droite $\mathbf{R}_+[\alpha]$ soit invariante par l'action de $\pi_1(B)$ sur $H^1(F,\mathbf{R})$.*

Alors, pour tout champ de vecteurs X sur B, de classe C^∞, à singularités isolées, il existe une C^∞-déformation $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ du feuilletage $\mathcal{F}$ telle que, pour tout $t \neq 0$, la projection par p sur B de

toute feuille de $\mathcal{F}_t$ soit exactement une orbite du champ X.

CORLLAIRE 3.6-2. *Sous les hypothèses du théorème, il existe une C^∞-déformation $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ du feuilletage $\mathcal{F}$ telle que, pour tout $t \neq 0$, $\mathcal{F}_t$ n'ait qu'un nombre fini de feuilles compactes.*

Il suffit pour cela de choisir X ayant un nombre fini de singularités, et sans orbites fermées régulières (par exemple le gradient d'une fonction de Morse sur B). Les seules feuilles compactes de $\mathcal{F}_t$ seront les fibres au dessus des singularités du champ X.

CORLLAIRE 3.6-3. *Si de plus la caractéristique d'Euler $\chi(B)$ est nulle, alors la fibre F est C^∞-instable. De plus, si B est de dimension supérieure à 3, alors il existe une C^∞-déformation $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ du feuilletage $\mathcal{F}$, telle que pour $t \neq 0$ $\mathcal{F}_t$ n'ait aucune feuille compacte.*

En effet, il suffit de choisir le champ X sans singularités pour que, pour $t \neq 0$ sufissamment proche de 0, $\mathcal{F}_t$ soit sans feuille compacte proche d'une fibre. Si $\dim B > 3$ et $\chi(B) = 0$, il existe sur B des champs de vecteurs non nuls et sans orbites fermées (Théorème de Wilson [W]). Donc pour tout $t \neq 0$, $\mathcal{F}_t$ ne possède aucune feuille compacte.

REMARQUE 3.6-4. Dans le cas où la base est le cercle S^1, le Corollaire 6-3 fournit une sorte de réciproque au Théorème de Plante (voir [P] et Chapitre 2.2.d)

Le reste de cette partie est la démonstration du théorème 3.6-1.

a) Une déformation d'une fibration

Notons $\mathcal{F}$ un feuilletage défini par une fibration $p: M \to B$ de fibre F. On note $n = \dim M$, $k = \dim B = \operatorname{codim} \mathcal{F}$.

On choisit une forme volume ω sur B (c'est pour l'existence d'une telle forme que B a été supposée orientée). Notons $\Omega = p^*(\omega)$:

c'est une k-forme fermée sur M, qui définit le $(n-k)$-feuilletage $\mathcal{F}$, c'est-à-dire que le noyau de Ω est l'espace tangent $T\mathcal{F}$.

Soient X un champ de vecteurs sur B, et α une $1-$forme sur M. On dira que (X, α) vérifie la relation (*) si l'on a les deux propriétés suivantes:

– α induit sur chaque fibre une 1-forme fermée.

– pour toute orbite γ du champ X, la 1-forme α_γ, induite par α sur $p^{-1}(\gamma)$, est intégrable (c'est-à-dire que la 3-forme induite sur $p^{-1}(\gamma)$ par $\alpha \wedge d\alpha$ est nulle.)

Choisissons un couple (X, α) vérifiant la relation (*).

Pour tout $s \in \mathbf{R}$ on pose:

$$\Omega_s = \Omega + s.\alpha \wedge p^*(i_X\omega).$$

c'est une k-forme sur M, a priori non fermée.

LEMMA 3.6.A-1. *Pour s voisin de 0, le noyau de la forme Ω_s est un champ de $(n-k)-$ plans intégrable qui définit sur M un feuilletage $\mathcal{F}_s$ dépendant continûment de s. De plus, toute feuille de $\mathcal{F}_s$ se projette par p dans une orbite du champ X.*

DÉMONSTRATION: On montre facilement que, pour s voisin de 0, le noyau de Ω_s définit un champ de $(n-k)$-plans, $\ker \Omega_s$, variant continûment avec s, et que $p_*(\ker \Omega_s)$ est inclus dans le champ de droite (singulier) $\mathbf{R}.X$ sur B (autrement dit $\ker \Omega_s$ est tangent aux $p^{-1}(\gamma)$, Y orbite de X).

Il reste à montrer que $\ker \Omega_s$ est intégrable. Pour cela il suffit de montrer que, pour toute orbite γ de X, la restriction de $\ker \Omega_s$ à $p^{-1}(\gamma)$ est intégrable.

Le cas des orbites singulières est trivial: si x est une singularité de X, la restriction de $\ker \Omega_s$ à $p^{-1}(x)$ est le fibré tangent à cette fibre.

Cas des orbites régulières: notons $\mathrm{sing}(X)$ l'ensemble des singularités de X. Choisissons une 1-forme ω_0 sur $B - sing(X)$ telle que $\omega_0(X) = 1$. Alors on a:

$$\omega = \omega_0 \wedge i_X\omega \text{ et donc } \Omega_s = (p^*\omega_0 + s\alpha) \wedge p^*i_X\omega.$$

Soit γ une orbite régulière du champ X. Notons ω_0' la 1-forme sur γ induite par ω_0, et, α_γ la 1-forme induite par α sur $p^{-1}(\gamma)$. Alors $(p^*\omega_0' + s\alpha_\gamma)$ est la 1-forme sur $p^{-1}(\gamma)$ induite par $(p^*\omega_0 + s\alpha)$.

On vérifie facilement que, sur $p^{-1}(\gamma)$ on a:

$$\ker \Omega_s = \ker(p^*\omega_0' + s\alpha_\gamma).$$

(en effet la $(k-1)$-forme induite par $p^*i_X\omega$ sur $p^{-1}(\gamma)$ est identiquement nulle).

La condition d'intégrabilité de $\ker\Omega_s$ est donc:

$$(p^*\omega_0' + s\alpha_\gamma) \wedge d(p^*\omega_0' + s\alpha_\gamma) = 0.$$

Voyons ce calcul:

Par l'hypothèse $(*)$ on a $\alpha_\gamma \wedge d\alpha_\gamma = 0$. De plus $d\omega_0' = 0$ donc $dp^*\omega_0' = 0$. Enfin $p^*\omega_0'$ est nul sur les vecteurs tangents aux fibres, et $d\alpha_\gamma$ est nul sur les couples de vecteurs tangents aux fibres (puisque α induit une forme fermée sur les fibres): on en déduit: $p^*\omega_0' \wedge d\alpha_\gamma = 0$.

Le champ $\ker \Omega_s$ est donc intégrable.

b) Feuilles de $\mathcal{F}_s$ et orbites de X

Soit (X, α) vérifiant la condition $(*)$ et soit $\{\mathcal{F}_s\}_{s\in\mathbf{R}}$ la déformation de $\mathcal{F}$ associée au couple (X, α).

Le Lemme a-1 nous dit que la projection de toute famille de $\mathcal{F}_s$ est incluse dans une orbite du champ X, mais pas à priori égale à une orbite.

LEMMA 3.6.B-1. *Supposons de plus que la classe de cohomologie de la forme fermée α_x induite par α sur la fibre $p^{-1}(x)$ soit non nulle pour tout $x \in B$. Alors, pour $s \neq 0$ assez petit, toute feuille de $\mathcal{F}_s$ se projette exactement sur une orbite de X.*

EBAUCHE DE LA DÉMONSTRATION: Fixons $m > 0$ et $a > 0$ tels que l'on ait la propriété suivante:

Pour tout point $y \in M$, il existe une courbe fermée c d'origine y, sur la fibre F_y de p passant par g, de longueur majorée par m, et telle que l'intégrale $\int_\alpha c$ soit minorée par α.

Choisissons un recouvrement fini $\{O_i\}$ de B par des ouverts trivialisant la fibration, et pour chaque i, on fixe une trivialisation $\varphi_i : p^{-1}(O_i) \xrightarrow{\sim} O_i \times F$.

Pour s assez petit, pour tout $y \in M$, il existe i tel que $p(y) \in O_i$ et tel que l'on ait la propriété suivante:

Tout chemin $c : [0,1] \to F_y$ d'origine y, et de longueur inférieure à m, se projette le long des horizontales $O_i \times \{z\}$ de la trivialisation de $p^{-1}(O_i)$ en un chemin c^s tangent à $\mathcal{F}_s$, d'origine y.

IDÉE: Notons $x = p(y)$. Notons $\gamma : \mathbf{R} \to B$ telle que $\gamma(t)$ soit le temps t de l'orbite de X passant par x.

L'extrémité $c^s(1)$ se projette par p en un point $\gamma(t^s)$ de γ. L'idée est que, pour s assez petit, t^s est très voisin de $s \cdot \int_c \alpha$. Donc, pour s assez petit, pour tout point $y \in M$, la projection par p de la feuille de $\mathcal{F}_s$ passant par y contient l'intervalle de temps $[-s\frac{a}{2}, s\frac{a}{2}]$ de l'orbite de X d'origine $x = p(y)$.

On en déduit facilement que la projection sur B de chaque feuille de $\mathcal{F}_s$ est exactement une orbite de X.

c) Choix d'un couple (X, α)

On suppose à présent que la fibration $p: M \to B$ est telle que l'action naturelle de $\pi_1(B)$ sur $H^1(F, \mathbf{R})$ laisse invariante une demi-droite $\mathbf{R}_+[\alpha]$, $[\alpha] \in H^1(F, \mathbf{R}) - 0$: pour tout $x \in B$ on peut donc parler de la $\frac{1}{2}$-droite $\mathbf{R}_+\alpha \in H^1(F_x, \mathbf{R})$, où F_x est la fibre $p^{-1}(x)$.

On conclut la preuve du Théorème 3.6-1 grâce au lemme suivant:

LEMMA 3.6.C-1. *Sous les hypothèses ci-dessus, pour tout champ de vecteurs X sur B à singularités isolées, il existe une 1-forme α sur M, induisant sur chaque fibre une 1-forme fermée dont la classe de cohomologie appartient à la demi-droite invariante $\mathbf{R}_+^*[\alpha]$ et telle que le couple (X, α) vérifie la relation $(*)$.*

Par hypothèse l'ensemble $\mathrm{sing}(X)$ des zéros de X est fini. Notons $x_1, \ldots, x_n$ les singularités de X.

Pour toute singularité $x_i \in \mathrm{sing}(X)$, on choisit un voisinage U_i de x_i et une trivialisation $\varphi_i: p^{-1}(U_i) \to U_i \times F$.

On choisit un champ de k-plans P, transverse aux fibres, tel que, pour tout $x_i \in \mathrm{sing}(X)$, le champ P coïncide, au voisinage de la fibre $F_{x_i} = p^{-1}(x_i)$, avec le champ de k-plans tangent aux horizontales $U_i \times \{y\}$, $y \in F$, de la trivialisation φ_i.

On note $\hat{X}$ le champ de vecteurs sur M, tangent à P, tel que $p_*(\hat{X}) = X$.

Par partition de l'unité, on construit facilement une application de classe C^∞ qui, à tout point $x \in B$, associe une 1-forme fermée $a(x)$ sur la fibre F_x, dont la classe de cohomologie soit non nulle et appartienne à la demi-droite invariante $\mathbf{R}_+[\alpha]$. On peut de plus supposer que, pour tout $x_i \in \mathrm{sing}(X)$ il existe un voisinage V_i de x_i tel que, dans la trivialisation $\varphi_i: p^{-1}(U_i) \tilde{\to} U_i \times F$, la forme $a(x), x \in V_i$, considérée comme 1-forme sur F, soit indépendante de x.

Notons φ_t le flot du champ $\hat{X}$. Remarquons que, pour tout $x \in B$, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\varphi_t^*(a(\varphi_t(x)))$ est une 1-forme fermée sur $p^{-1}(x)$, et que sa classe de cohomologie appartient à $\mathbf{R}_+[\alpha]$.

Pour tout $x \in B$ on note:

$$(L_{\tilde{X}}a)(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\varphi_t^*(a(\varphi_t(x)) - a(x)).$$

C'est une 1-forme fermée de F_x dépendant de façon C^∞ du point x. Notons que, pour x suffisamment proche d'une singularité x_i, $(L_{\tilde{X}}a)(x)$ est nulle. D'une façon générale, pour tout $x \in B$, la classe de cohomologie $(L_{\tilde{X}}a)(x)$ appartient à la droite $\mathbf{R}[\alpha]$. Donc il existe $\delta_x \in \mathbf{R}$ tel que $(L_{\tilde{X}}a)(x) - \delta_x a(x)$ soit une 1-forme exacte sur la fibre F_x.

Par partition de l'unité, on construit facilement une famille de fonctions $g_x : F_x \to \mathbf{R}$, $x \in B$, dépendant différentiablement du point x, telle que $dg_x = (L_{\tilde{X}}a)(x) - \delta_x a(x)$. On peut de plus supposer que, pour tout x suffisamment proche d'une singularité x_i, la fonction g_x soit la fonction nulle.

On note $g : M \to \mathbf{R}$ la fonction coïncidant avec g_x sur F_x, pour tout $x \in B$.

On note α_0 la 1-forme sur M induisant $a(x)$ sur F_x, $x \in B$, et nulle sur le champ de plans P.

Soit ω_0 une 1-forme sur $B - \mathrm{sing}(X)$ telle que $\omega_0(X) = 1$.

On note $\alpha = \alpha_0 \pm gp^*\omega_0$ (la suite déterminera le signe). C'est une 1-forme définie sur tout M car g est nulle au voisinage de $F_{x_i}, x_i \in \mathrm{sing}(X)$, et donc $gp^*\omega_0$ se prolonge différentiablement par 0 au dessus de x_i.

La 1-forme α induit sur chaque fibre F_x la 1-forme fermée $a(x)$, de classe de cohomologie non nulle. Il reste à voir que, pour toute orbite γ de X, α induit sur $p^{-1}(\gamma)$ une 1-forme intégrable.

Soit γ une orbite régulière de X. Notons encore $\alpha, \alpha_0, p^*\omega_0$ les 1-formes induites sur $p^{-1}(\gamma)$ par α, α_0 et $p^*\omega_0$. On note d_γ l'opérateur différentiel sur $p^{-1}(\gamma)$.

Soit $L_{\tilde{X}}\alpha_0 = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\varphi_t^*\alpha_0 - \alpha_0)$. C'est la 1-forme sur $p^{-1}(\gamma)$ induisant $(L_{\tilde{X}}a)(x)$ sur F_x, et qui s'annule sur $\tilde{X}$.
On a:

$d_\gamma\alpha_0 = p^*w_0 \wedge L_{\tilde{X}}\alpha_0$.

$d_\gamma p^*\omega_0 = 0$.

$d_\gamma g.p^*\omega_0 = (dg) \wedge p^*\omega_0 = (L_{\tilde{X}}\alpha_0 - \delta\alpha_0) \wedge p^*\omega_0$ (où $\delta: M \to \mathbf{R}$ est la fonction qui vaut δ_x sur la fibre $F_x, x \in B$).

Donc: $(d_\gamma\alpha)\wedge\alpha = (p^*\omega_0 \wedge L_{\tilde{X}}\alpha_0 \pm (L_{\tilde{X}}\alpha_0 - \delta\alpha_0)\wedge p^*\omega_0)\wedge(\alpha_0 \pm gp^*\omega_0)$.

On fixe le signe $\pm$ de façon que $(p^*\omega_0 \wedge L_{\tilde{X}}\alpha_0) \pm (L_{\tilde{X}}\alpha_0 \wedge p^*\omega_0)$ soit nul. On a alors:
$(d_\gamma\alpha) \wedge \alpha =$ (au signe près)$\delta \cdot \alpha_0 \wedge p^*\omega_0 \wedge (\alpha_0 \pm gp^*\omega_0) = 0$.

Ce calcul montre que α induit sur $p^{-1}(\gamma)$ une 1-forme intégrable. Donc le couple (X, α) vérifie la relation $(*)$. □

Chapitre 4

OUTILS ET MÉTHODES

Les prochains chapitres prouveront la stabilité de la fibre de certaines classes de fibrations ... le but de celui-ci est de présenter les outils qui ont permis d'obtenir ces résultats:

- les applications de premier retour d'un feuilletage proche d'une fibration,
- les propriétés des difféomorphismes C^1-proches de l'identité,
- l'utilisation du théorème de réalisation des déformations de l'holonomie, comme moyen de comparaison des déformations de deux feuilletages.

La partie 1 donne une présentation rapide de chacun de ces outils, dont les propriétés seront détaillées dans les parties suivantes.

§1 Présentation rapide

a) L'application de premier retour $H^{\gamma}_{\mathcal{F}'}$ le long d'un lacet γ sur une fibre, d'un feuilletage $\mathcal{F}'$, C^1-proche d'une fibration $p: M \to B$ de fibre F

C'est un difféomorphisme C^1-proche de l'identité défini sur un ouvert de l'espace total M. Sa définition est analogue à celle d'une holonomie du feuilletage $\mathcal{F}'$, si ce n'est qu'un champ de disques sur M, transverse à la fibration, joue le rôle de la transversale complète.

L'importance de ces applications locales de premier retour est donnée par la propriété suivante:

Soit $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, k lacets d'origine $x \in M$, sur la fibre de p passant par x, et dont les classes d'homotopie engendrent le groupe fondamental de la fibre. Soient $H_{\mathcal{F}'}^{\gamma_1}, \ldots, H_{\mathcal{F}'}^{\gamma_k}$ les applications de premier retour de $\mathcal{F}'$ le long de ces lacets: elles sont définies sur un voisinage U du point x. Alors un point $y \in U$ est sur une feuille compacte de $\mathcal{F}'$, proche d'une fibre, si et seulement s'il est un point fixe commun aux $H_{\mathcal{F}'}^{\gamma_i}$, $i = 1, \ldots, k$.

b) Propriétés locales des difféomorphismes C^1-proches de l'identité

Cette étude a son origine dans un lemme de W. Thurston [T], qui lui permettait de généraliser le théorème de stabilité de Reeb.

L'idée simple qu'il dégageait est qu'un difféomorphisme C^1-proche de l'identité se comporte localement comme une translation. Cette notion est cependant à manier avec précaution.

On en déduira, par exemple, que l'application de premier retour des lacets de la fibre homologues à zéro dans la fibre, est négligeable devant celle des lacets engendrant l'homologie de la fibre.

c) Comparaison des déformations de deux feuilletages, à partir d'une comparaison de leurs groupoïdes fondamentaux

Idée de base: Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux feuilletages de même codimension sur des variétés compactes M et M'. Supposons que les groupoïdes fondamentaux de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ soient équivalents. Alors, à tout germe de déformation du feuilletage $\mathcal{F}$ est associé naturellement un germe de déformation du feuilletage $\mathcal{F}'$ (bien défini à équivalence près). L'idée est de choisir un feuilletage $\mathcal{F}'$ dont

on comprend les déformations, pour en déduire les propriétés des déformations de $\mathcal{F}$ (par exemple les propriétés de stabilité de feuilles compactes).

§2 Applications de premier retour

Fixons $\mathcal{F}$ un feuilletage défini par une fibration de fibre F (B, F, M compactes connexes). Pour tout $x \in M$ on note F_x la fibre de p passant par x.

Soit $\{D_x\}_{x \in M}$ un champ de disques sur M transverse au feuilletage $\mathcal{F}$, tel que pour toute fibre F_x, l'union $\bigcup_{y \in F_x} D_y$ définit un voisinage tubulaire de cette fibre. (voir Chapitre 2.1).

Tout feuilletage $\mathcal{F}'$, C^0-proche de $\mathcal{F}$ (pour la C^0-topologie des champs de plans), est transverse à tous les disques D_x.

a) Projection sur $\mathcal{F}'$ des chemins tangents à $\mathcal{F}$

PROPOSITION 4.2.A-1. *Fixons $\ell > 0$. Alors, pour tout feuilletage $\mathcal{F}'$ suffisamment C^0 proche de $\mathcal{F}$, on a la propriété suivante:*

Pour tout chemin $\gamma: [0,1] \to M$, contenu dans une feuille de $\mathcal{F}$, et de longueur $\ell(\gamma) < \ell$, il existe un unique chemin $\gamma': [0,1] \to M$ contenu dans une feuille de $\mathcal{F}'$, tel que $\gamma'(0) = 0$, et que, pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma'(t)$ appartienne au disque $D_{\gamma(t)}$ (voir Figure 4.1)

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION: Le feuilletage $\mathcal{F}'$ étant transverse à tous les disques D_x, il induit un feuilletage de dimension 1 sur $\bigcup_{t \in [0,1]} D_{\gamma(t)}$, transverse à tous les disques $D_{\gamma(t)}$. Le chemin γ' sera la feuille de ce feuilletage de dimension 1 qui passe par $\gamma(0)$, avec la paramétrisation suivante: $\gamma'(t)$ sera l'intersection de cette feuille avec $D_{\gamma(t)}$. Il faut utiliser le fait que $\mathcal{F}'$ est proche de $\mathcal{F}$, pour voir que cette feuille rencontre tous les disques $D_{\gamma(t)}$, $t \in [0,1]$.

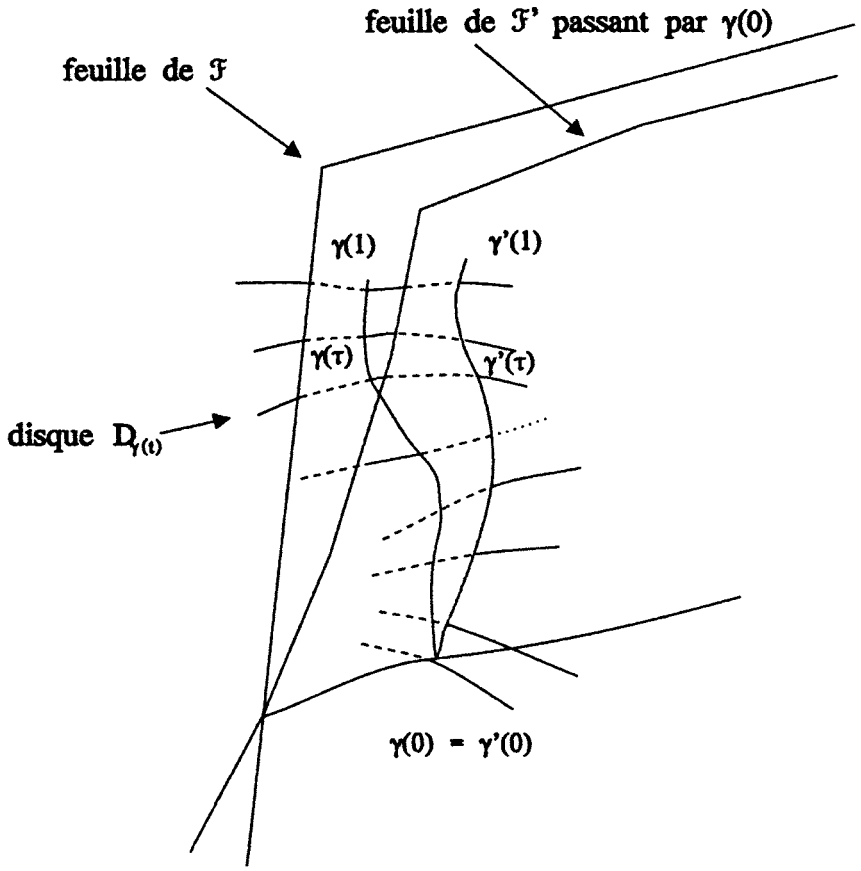


Figure 4.1.

REMARQUE 4.2.A-2. Avec les hypothèses de la Proposition a-1, si γ_1 et γ_2 sont deux chemins sur une feuille de $\mathcal{F}$, ayant les mêmes extrémités: $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)j$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Supposons que γ_1 et γ_2 soient homotopes par une homotopie $\{\gamma_s\}_{s\in[1,2]}$ dans cette feuille de $\mathcal{F}$, à extrémités fixées, telle que pour tout $s \in [1,2]$ la longueur $\ell(\gamma_s)$ soit inférieure à ℓ. Alors les chemins γ_1' et γ_2' obtenus en projetant γ_1 et γ_2 sur $\mathcal{F}'$ le long du champ de disques $\{D_x\}$ ont mêmes extrémités: $\gamma_1'(1) = \gamma_2'(1)$.

b) Applications locales de premier retour

Si U_0 est un ouvert de M assez petit, alors, pour tout couple de points $x, y \in U_0$, il y a une bijection canonique entre les groupes fondamentaux $\pi_1(F_x, x)$ et $\pi_1(F_y, y)$ où F_x et F_y sont les fibres passant par x et y.

Soit U_0' un ouvert relativement compact dans U_0.

Fixons $x_0 \in U_0'$ et $\alpha \in \pi_1(F_{x_0}, x_0)$. Pour tout $x \in U_0'$ on choisit un lacet $C_\alpha : [0,1] \to F_x$, d'origine x, représentant l'élément $\alpha_x \in \pi_1(F_x, x)$ correspondant à α, de façon à ce que la longueur des lacets C_x soit uniformément bornée.

D'après le Paragraphe a), si $\mathcal{F}'$ est un feuilletage suffisamment proche de $\mathcal{F}$, on peut projeter sur $\mathcal{F}'$ les lacets C_x, $x \in U_0'$, en des chemins C_x' sur les feuilles de $\mathcal{F}'$ tels que $C_x'(0) = x$ et, pour tout $t \in [0,1], C_x'(t) \in D_{C_x(t)}$; en particulier $C_x'(1) \in D_x$.

L'application $H^\alpha_{\mathcal{F}'} : U_0' \to M$ définie par $H^\alpha_{\mathcal{F}'}(x) = C_x'(1)$ est appelée *l'application de premier retour du feuilletage $\mathcal{F}'$ le long de α*. On montre facilement que, si $\mathcal{F}'$ est C^r-proche de $\mathcal{F}$ (pour la topologie d'Epstein) alors $H^\alpha_{\mathcal{F}}$ est un difféomorphisme C^r-proche de l'identité, de U_0' sur un ouvert de M.

c) Unicité de l'application de premier retour $H^\alpha_{\mathcal{F}'}$

Soit ℓ un majorant des longueurs des lacets C_α, $x \in U_0'$. En utilisant la compacité de la fibre F, et la compacité relative de U_0' dans U_0, on voit qu'il existe $\ell_0 > 0$ tel que la propriété suivante soit vraie:

Soit $\tilde{C}_x$ un autre lacet en un point $x \in U_0'$, sur la fibre F_x, représentant α_x, et de longueur majorée par ℓ; alors $\tilde{C}_x$ et C_x sont homotopes dans F_x par une homotopie à extrémités fixées, $\{C_{x,s}\}_{s \in [0,1]}$, telle que, pour tout s, la longueur du lacet $C_{x,s}$ soit

inférieure à ℓ_0.

Choisissons $\mathcal{F}'$ suffisamment proche de $\mathcal{F}$ pour que tout chemin tangent à $\mathcal{F}$ et de longueur majorée par ℓ_0 se projette sur $\mathcal{F}'$.

Alors, d'après la remarque a-2, l'application de premier retour $H^{\alpha}_{\mathcal{F}'}$ ne dépend pas de la famille $\{C_x\}_{x\in U'_0}$ de lacets choisis de longueur majorée par ℓ.

Par la suite, quand on choisira un feuilletage $\mathcal{F}'$, C^0-proche de $\mathcal{F}$, tel que l'application de premier retour $H^{\alpha}_{\mathcal{F}'}$ soit définie, on supposera toujours que $\mathcal{F}'$ est suffisamment C^0-proche de $\mathcal{F}$ pour que $H^{\alpha}_{\mathcal{F}'}$ soit uniquement définie.

d) Applications globales de premier retour

Soit $\alpha \in \pi_1(F_{x_0}, x_0)$. Pour que l'application de premier retour $H^{\alpha}_{\mathcal{F}'}$ soit un difféomorphisme global de M, il faut pouvoir associer continûment une classe d'homotopie, $\alpha \in \pi_1(F_x, x)$, à tout $x \in M$.

C'est le cas par exemple si p est une fibration en cercles orientés, ou si la fibre F a son groupe fondamental $\pi_1(F)$ abélien et que l'action naturelle du groupe fondamental de la base $\pi_1(B)$ sur $\pi_1(F)$ est triviale.

Plus généralement, si α appartient au centre de $\pi_1(F_{x_0}, x_0)$, et si l'action naturelle de $\pi_1(B)$ sur $H_1(F, \mathbf{Z})$ laisse la classe d'homologie de α invariante, alors α détermine canoniquement un élément $\alpha_x \in \pi_1(F_x, x)$ en tout point $x \in M$. (voir [**Sch 2**], [**D**]). Alors, pour $\mathcal{F}'$ C^r-proche de $\mathcal{F}$, l'application de premier retour $H^{\alpha}_{\mathcal{F}'}$ est un difféomorphisme de M, C^r-proche de l'identité.

e) Composition d'applications de premier retour

On a vu au Chapitre 2 (voir la Remarque 2.1.a-2 et la Figure 2.1) que le champ de disques $\{D_x\}$ n'est pas a priori porté par un feuilletage transverse à $\mathcal{F}$ c'est-à-dire que les disques D_x ne sont pas

contenus dans les feuilles d'un feuilletage transverse à $\mathcal{F}$. (Les fibrés admettant un tel feuilletage transverse s'appellent fibrés plats, et tout fibré n'est pas plat).

On montre facilement que, si le champ de disques $\{D_x\}_{x\in M}$ est porté par un feuilletage transverse à $\mathcal{F}$ alors on a: $H^{\alpha\beta}_{\mathcal{F}'}(x) = H^{\beta}_{\mathcal{F}'} \circ H^{\alpha}_{\mathcal{F}'}(x)$, pour tout feuilletage $\mathcal{F}'$ C^0-proche de $\mathcal{F}$ (là où les deux membres de l'égalité sont définis).

Ceci n'est plus vrai si le champ de disques n'est pas porté par un feuilletage: en effet $H^{\alpha\beta}_{\mathcal{F}'}(x)$ est sur le disque D_x, et $H^{\beta}_{\mathcal{F}'}(x)$ est sur le disque D_y où $y = H^{\alpha}_{\mathcal{F}}(x)$, qui ne coïncide a priori pas avec D_x (voir Figure 4.2).

Cependant, si x est un point fixe de $H^{\alpha}_{\mathcal{F}'}$, on a bien sûr $H^{\alpha\beta}_{\mathcal{F}'}(x) = H^{\beta}_{\mathcal{F}'} \circ H^{\alpha}_{\mathcal{F}'}(x) = H^{\beta}_{\mathcal{F}'}(x)$. On en déduit facilement le lemme suivant:

LEMME 4.2.E-1. *Soit $B = \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ une partie génératrice de $\pi_1(F_{x_0}, x_0)$. Pour tout $\ell \in \mathbf{N}$ on note B^ℓ, l'ensemble des produits de ℓ éléments α_i ou α_i^{-1}.*

Fixons $\ell \in \mathbf{N}^*$. Soit $\mathcal{F}'$ suffisamment C^0-proche de $\mathcal{F}$ pour que les applications de premier retour, $H^{\alpha}_{\mathcal{F}'}$, soient définies, pour $\alpha \in B^\ell$, sur un ouvert fixé U_0 de M.

Alors, si $x \in U$ est un point fixe commun à toutes les applications $H^{\alpha_i}_{\mathcal{F}'}, i = 1 \ldots, k$, alors, pour tout $\alpha \in B^\ell, H^{\alpha}_{\mathcal{F}'}(x) = x$.

f) Applications de premier retour définies sur le fibré normal

Nous allons voir que, en remontant les feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sur le fibré normal $q: N \to M$ du feuilletage $\mathcal{F}$, on peut définir des applications de premier retour $\hat{H}^{\alpha}_{\mathcal{F}'}$, telles que l'on ait:

$$\hat{H}^{\alpha}_{n} \circ \hat{H}^{\beta}_{n} = \hat{H}^{\alpha\beta}_{n}$$

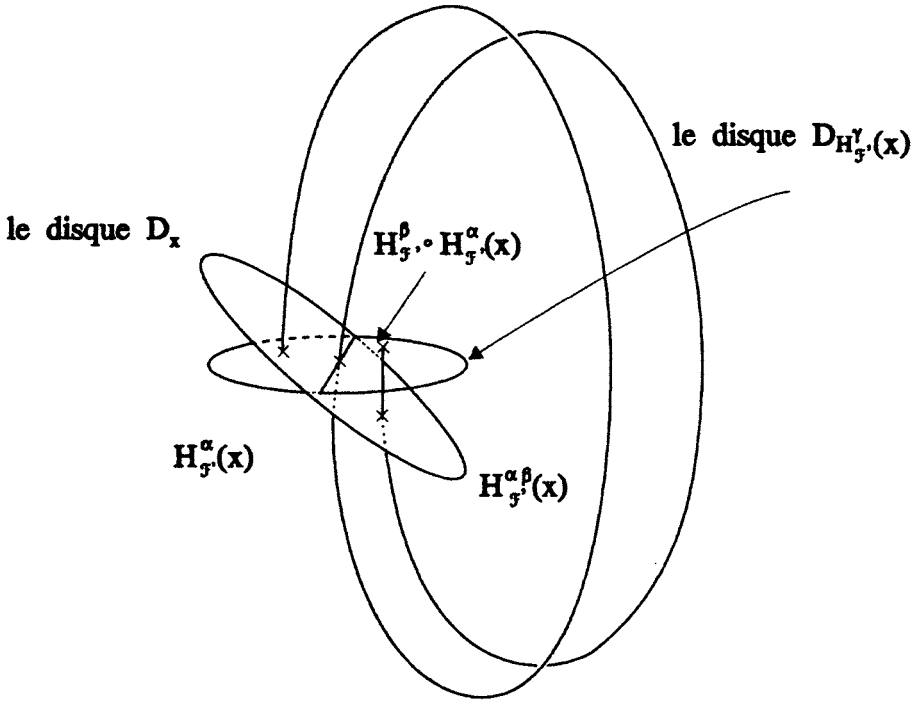


Figure 4.2.

Rappelons la construction du champ de disques $\{D_x\}_{x\in M}$:

Soit $\sigma: M \to N$ la section nulle du fibré normal. On a choisi un voisinage $\mathcal{V}$ de la section nulle $\sigma(M)$, et une submersion $\varphi: \mathcal{V} \to M$, coïncidant avec la projection q sur $\sigma(M)$, et induisant sur chaque fibre $q^{-1}(x)$ une immersion transverse à $\mathcal{F}$. On a choisi un voisinage ouvert $\mathcal{V}_0$ de $\sigma(M)$, relativement compact dans $\mathcal{V}$, tel que, pour tout $x \in M, q^{-1}(x) \cap \mathcal{V}_0$ soit un disque $\hat{D}_x$ centré en $\sigma(x)$. Pour tout $x \in M, \varphi$ induit un difféomorphisme de $\hat{D}_x$ sur le disque D_x.

Notons $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_0$ un voisinage ouvert de $\sigma(M)$, relativement com-

pact dans $\mathcal{V}_0$, tel que tout $x \in M, \varphi^{-1}(x) \cap \mathcal{V}_1$ soit difféomorphe à un disque centré en $\sigma(x)$. Notons $\hat{F}$ le feuilletage défini sur $\mathcal{V}_1$ par $\hat{F} = \varphi^{-1}(\mathcal{F})$ (ceci est possible car φ est transverse à $\mathcal{F}$). De même, pour tout feuilletage $\mathcal{F}'$, C^0-proche de $\mathcal{F}$ (pour la C^0-topologie des champs de plans) on notera $\hat{F}'$ le feuilletage $\varphi^{-1}(\mathcal{F}')$: c'est un feuilletage C^0-proche de $\hat{F}$, (si $\mathcal{F}'$ est C^r-proche de $\mathcal{F}$, $\hat{F}'$ est aussi C^r-proche de $\hat{F}$). Remarquons que les disques $\hat{D}_x$ sont transverses aux feuilletages $\hat{F}$ et $\hat{F}'$.

Soit U_0 un petit ouvert de M, choisi comme au Paragraphe b) et soit U_0' un ouvert relativement compact dans U_0. Notons $\hat{U}_0 = \varphi^{-1}(U_0) \cap \mathcal{V}_1$ et $\hat{U}_0'$ un voisinage ouvert de $\sigma(U_0')$, relativement compact dans $\hat{U}_0$.

Pour tout $z \in \hat{U}_0$, il existe une bijection canonique entre les groupes fondamentaux $\pi_1(F_{x_0}, x_0)$ et $\pi_1(\hat{F}_z, z)$ où $\hat{F}_z$ est la feuille de $\hat{F}$ passant par z.

Alors, pour tout $\alpha \in \pi_1(F_{x_0}, x_0)$, pour tout feuilletage $\mathcal{F}'$ suffisamment C^0-proche de $\mathcal{F}$, on définit (d'une façon analogue à précédemment) l'application de premier retour du feuilletage $\hat{F}'$ le long de $\sigma(\alpha)$ pour le champ de disques $\hat{D}_x$. On le notera $\hat{H}^{\alpha}_{\mathcal{F}'}$. C'est un difféomorphisme de $\hat{U}_0'$ dans $\hat{V}_0$, C^0-proche de l'identité (si $\mathcal{F}'$ est C^r-proche de $\mathcal{F}$, $\hat{H}^{\alpha}_{\mathcal{F}'}$ sera C^r-proche de l'identité).

On vérifie facilement que, pour tout $x \in U_0'$, on a:

$$H^{\alpha}_{\mathcal{F}'}(x) = \varphi \circ \hat{H}^{\alpha}_{\mathcal{F}'}(\sigma(x)).$$

Donc x est un point fixe de $H^{\alpha}_{\mathcal{F}'}$ si et seulement si $\sigma(x)$ est un point fixe de $\hat{H}^{\alpha}_{\mathcal{F}'}$.

De plus, le champ de disques $\{\hat{D}_x\}_{x \in M}$ forme sur $\mathcal{V}_0$ un feuilletage (transverse aux feuilletages $\hat{F}$ et $\hat{F}'$). On en déduit facilement

que:

$$\hat{H}^{\beta}_{\mathcal{F}'} \circ \hat{H}^{\alpha}_{\mathcal{F}'} = \hat{H}^{\alpha\beta}_{\mathcal{F}'},$$

pour tous $\alpha, \beta \in \pi_1(F_{x_0}, x_0)$, tel que $\hat{H}^{\alpha}_{\mathcal{F}'}$, $\hat{H}^{\beta}_{\mathcal{F}'}$ et $\hat{H}^{\alpha\beta}_{\mathcal{F}'}$ soient définies sur $\hat{U}'_0$.

g) Points fixes des applications de premier retour

REMARQUE 4.2.G-1. Soit $\mathcal{F}'$ un feuilletage C^0-proche de $\mathcal{F}$, et $H^{\alpha}_{\mathcal{F}'}$ une application de premier retour du feuilletage $\mathcal{F}'$, définie sur un ouvert U. Soit $x \in U$ un point fixe de $H^{\alpha}_{\mathcal{F}'}$: cela signifie qu'un lacet C_x représentant la classe d'homotopie $\alpha_x \in \pi_1(F_x, x)$ se projette en un lacet C'_x sur la feuille f' de $\mathcal{F}'$ qui passe par x. Alors, tout point de la composante connexe de $f' \cap U$ qui contient x, est un point fixe de $H^{\alpha}_{\mathcal{F}'}$.

REMARQUE 4.2.G-2. Si $\mathcal{F}'$ est un feuilletage C^0-proche de $\mathcal{F}$ et si f' est une feuille compacte de $\mathcal{F}'$ proche d'une fibre, alors tout point $x \in f'$ est point fixe commun à toutes les applications de premier retour du feuilletage $\mathcal{F}'$.

Soit U un ouvert de M, choisit comme au 2.b., et soit U' un ouvert relativement compact dans U. Soit $x_0 \in U'$ et soit $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots \alpha_k\}$ une partie génératrice de $\pi_1(F_{x_0}, x_0)$.

PROPOSITION 4.2.G-3. *Pour $\mathcal{F}'$ suffisamment C^0-proche de $\mathcal{F}$, un point $x \in U'$ est un point fixe commun aux applications de premier retour $H^{\alpha_i}_{\mathcal{F}}$, $i = 1, \ldots, k$, si et seulement si la feuille de $\mathcal{F}'$ qui passe par x est compacte et proche d'une fibre.*

DÉMONSTRATION: Soit ℓ_0 un majorant du diamètre de chaque fibre.

Soit $A \subset \pi_1(F_{x_0}, x)$, l'ensemble des classes d'homotopies $\alpha \in \pi_1(F_{x_0}, x_0)$ telles qu'il existe $x \in U$, et un lacet C_x représentant

$\alpha_x \in \pi_1(F_x, x)$ de longueur $\ell(C_x) \leq 3\ell_0$. On se convainc facilement que A est fini.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathcal{B}^n$ l'ensemble des produits de n éléments du type α_i ou $\alpha_i^{-1}, i \in \{1, \ldots, k\}$: c'est une suite croissante de parties de $\pi_1(F_{x_0}, x_0)$, dont l'union est $\pi_1(F_{x_0}, x_0)$.

On choisit n assez grand pour que A soit inclus dans $\mathcal{B}^n$.

Soit $\mathcal{F}'$ un feuilletage suffisamment C^0-proche de $\mathcal{F}$ pour que, pour tout $\alpha \in \mathcal{B}^n$, l'application de premier retour $H^{\alpha}_{\mathcal{F}'}$ soit bien définie sur U'.

Soit x un point fixe commun aux $H^{\alpha_i}_{\mathcal{F}}$, $i = 1, \ldots, k$. D'après le Lemme e-1, pour tout $\alpha \in \mathcal{B}^n$, $H^{\alpha}_{\mathcal{F}}(x) = x$. On va projeter la fibre F_x sur la feuille f' de $\mathcal{F}$ qui passe par x, de la façon suivante:

Soit $y \in F_x$. Il existe un chemin C_0 joignant x à y dans la fibre F_x, et de longueur $\ell(C_0) \leq \frac{3}{2}\ell_0$. Notons C_0' la projection de ce chemin sur la feuille f', le long du champ de disques $\{D_z\}_{z \in M}$.

LEMME 4.2.G-4. *Soit C_1 un autre chemin sur F_x joignant x à y, de longueur $\ell(C_1) \leq \frac{3}{2}\ell_0$, et soit C_1' sa projection sur f'. Alors C_0' et C_1' ont mêmes extrémités.*

En effet, $C_0 \cdot C_1^{-1}$ est un lacet sur F_x de longueur inférieure à $3\ell_0$, donc il se projette sur f' en un lacet (qui n'est autre que $C_0' \cdot (C_1')^{-1}$) puisque x est point fixe de l'application de premier retour le long de ce lacet.

Donc l'application qui à y associe l'extrémité $C_0'(1)$ ne dépend pas du chemin choisi. On voit alors facilement que cette application est un homéomorphisme de F_x sur f': la proposition est démontrée. □

§3 Difféomorphismes C^1-proches de l'identité

Les difféomorphismes C^1-proches de l'identité ont un comportement local comparable à celui d'une translation et un comportement global proche de celui du flot d'un champ de vecteurs. Leurs propriétés simples est la raison pour laquelle on considère dans ce livre des C^1-perturbations des fibrations: ils apparaîtront comme holonomies ou applications de premier retour des feuilletages C^1-proches d'une fibration.

a) Notations

Notons V une sous-variété d'un espace euclidien $(\mathbf{R}^n, \| \cdot \|)$.

Notons d la distance sur V définie par la métrique induite sur V par la métrique euclidienne $\| \cdot \|$. Pour tout $x \in V$ et $r \in [0, +\infty[$ on note $\mathcal{B}(x,r)$ la boule de centre x et de rayon r pour la distance d.

Soient $U \subset U'$ deux ouverts relativement compacts de V, tels que U' contienne l'adhérence de U. Il existe alors $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in U$, tout point y de V tel que $\| x-y \| \leq \delta$ appartienne à U'. De plus, il existe $u > 0$ tel que, pour tout couple (x,y) de points différents de U' on ait: $\frac{\|x-y\|}{d(x,y)} > \mu$.

Pour toute application différentiable $h \cdot U' \to \mathbf{R}^n$, de classe C^1, on note: $\| h \|_1 = \sup\{\| h(x) \| + \| D_x h \|, x \in V'\}$, (où $D_x h$ est la différentielle de h en x).

Soit f un difféomorphisme de U' sur un ouvert de V. Notons id l'identité de V. La différence $f - id$ est une application de classe C^1 de V dans $\mathbf{R}^N$. On dit que f est C^1-proche de l'identité si $\| f - id \|_1$ est petit.

b) Une propriété locale

Le Lemme b-1 est une simple application du théorème des accroissements finis. Il exprime qu'un difféomorphisme f, C^1-proche de l'identité, a un comportement local comparable à celui d'une translation: le vecteur $(f-id)(x)$ est pratiquement constant sur voisinage d'un point x_0.

LEMME 4.3.B-1. *Soit $\varepsilon \in]0,\delta[$ et soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $f: U' \to V$ un difféomorphisme de classe C^1 de U' sur un ouvert de V, tel que $\| f-id \|_1 < \mu \cdot \frac{\varepsilon}{n}$. Alors, pour tout $x \in U$, pour tout $y \in \mathcal{B}(x, nd(x,f(x))$, on a:*

$$\| (f-id)(y) - (f-id)(x) \| \leq \varepsilon \| (f-id)(x) \| .$$

Exemple de conséquence:

COROLLAIRE 4.3.B-2. *Si ε est plus petit que 1 et si x n'est pas un point fixe de f alors f est sans point fixe sur $\mathcal{B}(x, nd(x,f(x))$.*

DÉMONSTRATION: (du lemme et du corollaire).

Pour tout $x \in U$ le point $f(x)$ appartient à U' car $\| f(x) - x \| < \frac{\mu\varepsilon}{n} < \delta$. Donc $d(x,f(x)) < \frac{1}{\mu} \| f(x) - x \| < \frac{\varepsilon}{n}$. La boule $\mathcal{B}(x, nd(x,f(x))$ est donc incluse dans U'. Donc, pour tout $y \in \mathcal{B}(x, nd(x,f(x))$ on a:

$$\| (f-id)(y) - (f-id)(x) \| \leq \| f-id \|_1 \, d(x,y)$$
$$\leq \frac{\mu\varepsilon}{n} nd(x,f(x)) \leq \varepsilon \| f(x) - x \| .$$

Supposons que ε soit inférieur à 1 et que x n'est pas un point fixe de f. On a:

$$0 < \| f(x) - x \| < \| f(y) - y \| + \varepsilon \| f(x) - x \| .$$

Donc $\| f(y) - y \| \neq 0$. □

c) Dynamique en dimension 2

Au Chapitre 7 nous étudierons la dynamique des difféomorphismes C^1-proches de l'identité des surfaces compactes.

J'aimerais ici donner un avant-goût des méthodes utilisées. Rappelons d'abord un résultat dû à Brouwer:

THÉORÈME. *Soit h un homéomorphisme du plan $\mathbf{R}^2$. Supposons que h ait un point périodique. Alors possède un point fixe.*

Ce théorème n'est pas (à ma connaissance) facile. Il devient par contre presque évident si h est C^1-proche de l'identité. C'est cela que j'aimerais présenter ici.

Choisissons $\varepsilon > 0$, d'après le Lemme b-1, de façon que tout difféomorphisme f de $\mathbf{R}^2$, tel que $\| f - id \|_1 < \varepsilon$, vérifie la propriété suivante:

Pour tout $x \in \mathbf{R}^2$, et tout $y \in B(x, 2 \| f(x) - x \|)$, l'angle $\mathrm{Ang}(f(x) - x, f(y) - y)$ est inférieur en norme à $\frac{\pi}{3}$.

PROPOSITION 4.3.c-1. *Soit f un difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$ tel que: $\| f - id \|_1 < \varepsilon$. Si f possède un point périodique, alors f possède un point fixe.*

DÉMONSTRATION: Soit x un point périodique de f. Soit $\gamma: [0,1] \to \mathbf{R}^2$ la courbe fermée obtenue en mettant bout à bout les segments $[f^i(x), f^{i+1}(x)]$. Si γ n'est pas une courbe simple, on peut trouver $t_1 < t_2 \in [0,1]$ tel que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ et tels que $\gamma\,|_{[t_1,t_2]}$ soit une courbe fermée simple que nous noterons γ_0 (voir Figure 4.3). Cette courbe γ_0 borde un disque D.

Notons X le champ de vecteurs défini sur $\mathbf{R}^2$ par: $X(y) = f(y) - y$. En tout point y de γ_0, l'angle que fait le vecteur $X(y)$ avec la tangente (positivement orientée) de γ_0 (où les tangentes si y est point singulier de γ_0) est inférieur à $\frac{\pi}{3}$ (voir Figure 4.4).

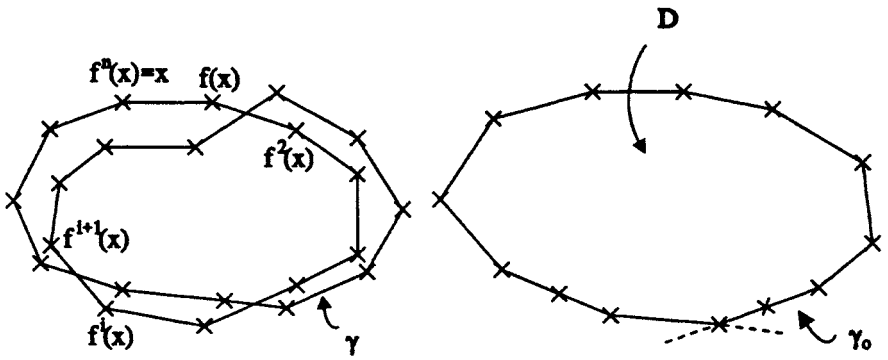


Figure 4.3.

On en déduit que l'indice des zéros de X contenus dans le disque D est égal à 1: donc X possède un zéro dans D. Ce zéro est un point fixe de f. □

La démonstration que nous venons de voir montre l'analogie

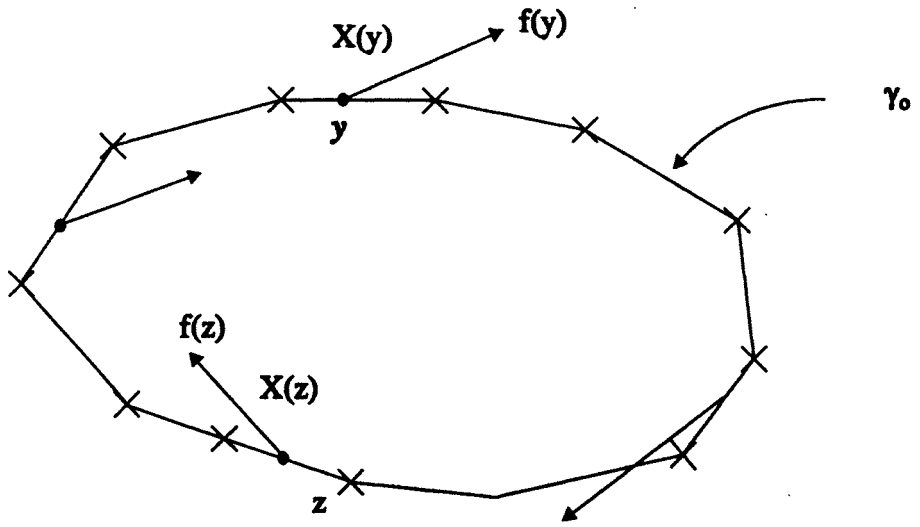


Figure 4.4.

entre les difféomorphismes C^1-proches de l'identité et les champs de vecteurs: pour un champ X, une orbite périodique γ_0 borde un disque D. Le champ X étant tangent au bord du disque D, l'indice de ses zéros contenus dans D est 1: X possède donc un zéro dans D.

Au Chapitre 7, nous exploiterons, autant que nous pourrons, cette analogie.

REMARQUE 4.3.C-2. On vient de voir une démonstration élémentaire, pour les difféomorphismes C^1-proches de l'identité, d'une petite partie du difficile théorème de translation de Brouwer pour les homéomorphismes du plan. Voici ce théorème:

THÉORÈME *(Brouwer). Soit f un homéomorphisme du plan $\mathbf{R}^2$; si f est sans point fixe, alors:*
1) Tout point $x \in \mathbf{R}^2$ est errant pour f (c'est-à-dire qu'il existe un voisinage U_x de x dont les itérés $f^i(U_x)$, $i \in \mathbf{Z}$, sont deux-à-deux disjoints).
2) Il existe une droite de translation passant par x, c'est-à-dire un plongement propre h de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$ tel que $x \in h(\mathbf{R})$, et tel que les itérés par f de $h(\mathbf{R})$ sont deux-à-deux disjoints.

De même que précédemment, ce théorème devient élémentaire si l'on se restreint aux difféomorphismes C^1-proches de l'identité.

EXERCICE 1: Soit f un difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$ sans point fixe et suffisamment C^1-proche de l'identité. Soit X un champ de vecteur sur $\mathbf{R}^2$, unitaire, et tel qu'en tout point x, $X(x)$ soit orthogonal au segment $[x, f(x)]$.

Montrer que toute orbite du champ X est une droite de translation.

EXERCICE 2: Soit M une variété compacte (de dimension quelquonque).

– montrez qu'il existe un voisinage U de l'identité dans $\mathrm{Diff}_1(M)$ muni de la C^1-topologie, tel que pour tout difféomorphisme $f \in U$, on a: $Fix(f^2) = Fix(f)$

– en déduire que, si X est un champ de vecteurs de classe C^1 sur M, il existe $\varepsilon > 0$, tel que toute orbite périodique, de période $t \in [0, \varepsilon]$, est réduite à un zéro de X.

d) Composition de difféomorphismes C^1-proches de l'identité

Localement, les difféomorphismes C^1-proches de l'identité se comportent comme des translations: la composition de tels difféomorphismes revient à faire la somme des vecteurs de translation, l'erreur commise étant petite par rapport au plus grand de ces vecteurs de translation. C'est ce qu'exprime le lemme suivant:

LEMME 4.3.D-1. *Pour tout $\eta > 0$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la propriété suivante soit vraie:*

Soient $f_1, \ldots, f_n$ n difféomorphismes de U' dans V tels que $\| f_i - id \|_1 < \varepsilon$ pour tout i. Alors, pour tout $x \in U$, on a:

$$\| (f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n - id)(x) - \sum_1^n (f_i - id)(x) \| \leq \eta \sup_i \| (f_i - id)(x) \| .$$

DÉMONSTRATION: Elle se fait par récurrence sur n. Le lemme est trivial pour $n = 1$; on le suppose vrai pour $n - 1$.

Il suffit de montrer le lemme pour $\eta < \frac{1}{4}$.

Choisissons ε_0 tel que le lemme soit vrai pour $\frac{1}{3}\eta$ et $n - 1$.

Choisissons ε_1, d'après le Lemme b-1, tel que, pour tout $f: U' \to V$ tel que $\| f - id \|_1 < \varepsilon_1$, pour tout $x \in U$, pour tout $y \in$

$B(x,(6n/\eta\mu)\cdot d(x,f(x))$ on ait:

$$\| (f-id)(y)-(f-id)(x) \| \leq \frac{1}{2}\eta \| (f-id)(x) \|$$

Posons $\varepsilon = \inf(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \frac{\delta}{n})$.

Soient $f_1,\dots,f_n$ n difféomorphismes de U' dans V tels que $\| f_i - id \|_1 < \varepsilon$.

Soit $x \in U$. D'après l'hypothèse de récurrence et le choix de ε on a:

$$\| (f_2 \circ \cdots \circ f_n - id)(x) - \sum_2^n (f_i - id)(x) \| \leq \frac{1}{3}\eta \sup_{i\geq 2} \| (f_i - id)(x) \| .$$

En particulier $\| f_2 \circ \cdots \circ f_n(x) - x \| \leq (n-1+\frac{1}{2}\eta)\varepsilon < \delta$. Donc $f_2 \circ \cdots \circ f_n(x)$ appartient à U'.

On a donc:

$$\begin{aligned}
&\| (f_1 \circ \cdots \circ f_n - id)(x) - \sum_1^n (f_i - id)(x) \| \leq \\
&\quad \leq \| (f_1 - id)(f_2 \circ \cdots \circ f_n(x)) - (f_1 - id)(x) \| \\
&\qquad + \| (f_2 \circ \cdots \circ f_n - id)(x) - \sum_2^n (f_i - id)(x) \| \leq \\
&\quad \leq \| (f_1 - id)(f_2 \circ \cdots \circ f_n(x)) - (f_1 - id)(x) \| \\
&\qquad + \frac{1}{3}\eta \sup_{i\geq 2} \| (f_i - \mathrm{id})(x) \| .
\end{aligned}$$

On distingue trois cas:

1ER CAS: Si $d(x, f_2 \circ \cdots \circ f_n(x)) < (6n/\eta\mu) d(x, f_1(x))$. Alors on a:

$$\| (f_1 - id)(f_2 \circ \cdots \circ f_n(x)) - (f_1 - id)(x) \| \leq \frac{\eta}{2} \| (f_1 - id)(x) \|$$

donc, on a:

$$\| (f_1 \circ \cdots \circ f_n - id)(x) - \sum_1^n (f_i - id)(x) \|$$

$$\leq \frac{1}{2}\eta \| (f_1 - id)(x) \| + \frac{1}{3}\eta \sup_{i\geq 2} \| (f_i - id)(x) \|$$

$$\leq \eta \sup_i \| (f_i - id)(x) \| .$$

2ÈME CAS: Si $d(x, f_2 \circ \dots f_n(x)) < (6n/\eta\mu) d(f_2 \circ \dots f_n(x), f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n(x))$. Alors on a:

$$\| (f_1 - id)(f_2 \circ \cdots \circ f_n(x)) - (f_1 - id) \| \leq$$

$$\frac{1}{2}\eta \| (f_1 - id)(f_2 \circ \cdots \circ f_n(x)) \| .$$

On en déduit:

$$\| (f_1 - id)(x) \| \geq (1 - \frac{1}{2}\eta) \| (f_1 - id)(f_2 \circ \cdots \circ f_n(x)) \| .$$

Donc on a:

$$\| (f_1 \circ \cdots \circ f_n - id)(x) - \sum_1^n (f_i - id)(x) \|$$

$$\leq \frac{1}{2}\eta \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}\eta} \right) \| (f_1 - id)(x) \| + \frac{1}{3}\eta \sup_{i\geq 2} \| (f_i - id)(x) \|$$

$$\leq \eta \sup_i \| (f_i - id)(x) \| \text{ car } \eta < \frac{1}{4}.$$

3ÈME CAS: Si $d(x, f_2 \circ \cdots \circ f_n(x)) \geq (6n/\eta\mu) \sup(d(x, f_1(x)), d(f_2 \circ \cdots \circ f_n(x), f_1 \circ \cdots \circ f_n(x)))$.

Alors on a:

$$\begin{aligned}
&\| (f_1 - id)(f_2 \circ \dots f_n(x)) - (f_1 - id)(x) \| \\
&\quad \leq \| (f_1 - id)(f_2 \circ \dots f_n(x)) \| + \| (f_1 - id)(x) \| \\
&\quad \leq 2.\frac{\eta\mu}{6n} d(x, f_2 \circ \dots \circ f_n(x)) \\
&\quad \leq (\frac{\eta}{3n}(\sum_2^n \| (f_i - id)(x) \| + \frac{\eta}{3} \sup_{i\geq 2} \| (f_i - id)(x))\\
&\quad \leq \frac{1}{3}(\eta + \eta^2) \sup_{i\geq 2} \| (f_i - id)(x) \| .
\end{aligned}$$

Donc on a:

$$\begin{aligned}
&\| (f_1 \circ \dots \circ f_n - id)(x) - \sum_1^n (f_i - id)(x) \| \\
&\quad \leq \frac{1}{3}(2\eta + \eta^2) \sup_{i\geq 2} \| (f_i - id)(x) \| \\
&\quad \leq \eta \sup_{i\geq 1} \| (f_i - id)(x) \| .
\end{aligned}$$

EXEMPLE D'APPLICATION:

EXERCICE: Soit f un difféomorphisme de $\mathbf{R}^N, N \in \mathbf{N}$, ayant 0 comme point fixe isolé. On suppose que la différentielle de f en 0 est l'identité ($D_0 f = \mathrm{id}$). Alors, pour tout $k \in \mathbf{N}$, 0 est un point fixe isolé de f^k et les indices $\mathrm{Ind}_f(0)$ et $\mathrm{Ind}_{f^k}(0)$ de 0 comme point fixe de f ou de f^k sont égaux (cela n'est plus vrai sans l'hypothèse $D_0 f = \mathrm{id}$).

Les difféomorphismes C^1-proches de l'identité apparaîtront dans ce livre comme holonomies, ou applications de premier retour, des feuilletages C^1-proches d'une fibration, le long des lacets dans les

fibres. Nous venons de voir que de tels difféomorphismes se comportent localement presque comme des translations, et que la composition revient à faire la somme des vecteurs de translation.

On obtient ainsi des presque-morphismes du groupe fondamental de la fibre, à valeurs dans l'espace vectoriel tangent à une transversale. Il est alors naturel que le vecteur de translation associé à un lacet nul en homologie soit très petit ...

Le but du Paragraphe e) est de formaliser, d'après Thurston, la notion de presque-morphisme. Nous verrons au Paragraphe f) les conséquences que l'on peut en tirer pour les applications de premier retour ou les holonomies.

e) Cocycles de Thurston

Au Paragraphe d) nous venons de voir que l'application qui, à tout difféomorphisme f, C^1-proche de l'identité, associe le vecteur $f(x) - x$ (x fixé) est presque un morphisme à valeur dans $\mathbf{R}^N$. Thurston a précisé cette notion de presque-morphismes: ce sont ses (B^ℓ, ε)-cocycles.

Soit G un groupe de génération finie, et soit $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ une famille finie de générateurs de G, invariante par passage à l'inverse et contenant l'élément neutre. Pour tout $\ell \in \mathbf{N}$, on note $\mathcal{B}^\ell$ l'ensemble des produits de l'éléments de $\mathcal{B}$. Remarquons que $G = \bigcup_1^\infty \mathcal{B}^\ell$.

DÉFINITION 4.3.E-1. Soient $\ell \in \mathbf{N}$ et $\varepsilon \geq 0$. On appelle $(\mathcal{B}^\ell, \varepsilon)$-*cocycle* à valeurs dans $\mathbf{R}^N$ une fonction $\gamma : \mathcal{B}^\ell \to \mathbf{R}^N$ telle que $\| \gamma(\alpha) + \gamma g(\beta) - \gamma(\alpha\beta) \| \leq \varepsilon$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathcal{B}^\ell$ tels que $\alpha\beta \in \mathcal{B}^\ell$.

Un tel cocycle est dit *normal* si $\max_{\alpha \in \mathcal{B}} \| \gamma(\alpha) \| = 1$.

REMARQUE 4.3.E-2. Pour tout $\ell \in \mathbf{N}$ et $\varepsilon \geq 0$ l'ensemble $K(\ell, \varepsilon)$ des $(\mathcal{B}^\ell, \varepsilon)$-cocycle normaux est compact: en effet tout $(\mathcal{B}^\ell, \varepsilon)$-co-

cycle normal $\gamma: \mathcal{B}^\ell \to \mathbf{R}^N$ est borné par $\ell(1+\varepsilon)$. Les compacts $K(\ell, \varepsilon)$ sont croissants (pour l'inclusion) en ε.

Thurston remarquait que, si l'on fait tendre ε vers 0 puis ℓ vers l'infini, ces presque-morphismes (les $(\mathcal{B}^\ell, \varepsilon)$-cocycles normaux) convergent vers des morphismes de G dans $\mathbf{R}^N$, non nuls puisqu'ils prennent une valeur de norme 1 sur $\mathcal{B}$. On en déduit, si $\mathrm{Hom}\,(G, \mathbf{R}) = 0$, pour ℓ assez grand et ε assez petit, l'ensemble $K(\ell, \varepsilon)$ des $(\mathcal{B}^\ell, \varepsilon)$-cocycle normaux est vide.

On aura besoin d'un résultat légèrement plus précis que celui de Thurston: ce sera le Lemme e-5 ci-dessous. Ce lemme utilise des notations très classiques d'algèbre, que nous rappelons brièvement:

On note $H^1(G, \mathbf{R}) = \mathrm{Hom}\,(G, \mathbf{R})$ l'ensemble des homomorphismes de G dans $\mathbf{R}$. C'est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{R}$ (car G est finîment engendré).

On note $H_1(G, \mathbf{R})$ le dual de $H^1(G, \mathbf{R})$: c'est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de même dimension que $H^1(G, \mathbf{R})$. On peut le construire de la manière suivante: $H_1(G, \mathbf{Z})$ est l'abélianisé de G. C'est un groupe abélien de type fini. L'ensemble de ses éléments d'ordre fini est un sous-groupe T appelé torsion. Le quotient $H_1(G, \mathbf{Z})/T$ est isomorphe à $\mathbf{Z}^k$, $k \in \mathbf{N}$. Alors $H_1(G, \mathbf{R})$ est l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ admettant comme base une base du groupe $H_1(G, \mathbf{Z})/T$ ($H_1(G, \mathbf{Z})/T$ est un sous-groupe de l'espace vectoriel $H_1(G, \mathbf{R})$, comme $\mathbf{Z}^k$ est un sous groupe de $\mathbf{R}^k$).

Pour tout élément $g \in G$, on appellera classe d'homologie réelle de g la projection naturelle de g sur $H_1(G, \mathbf{Z})/T \subset H_1(G, \mathbf{R})$. On la notera $[g]$.

PROPRIÉTÉ 4.3.E-3: La classe d'homologie $[g]$ de $g \in G$ est nulle si et seulement si tout morphisme φ de G dans $\mathbf{R}$ vérifie $\varphi(g) = 0$.

REMARQUE 4.3.E-4. Si F est une variété compacte on a bien sûr $H_1(F,\mathbf{R}) = H_1(\pi_1(F),\mathbf{R})$.

On peut à présent enoncer le Lemme e-5:

LEMME 4.3.E-5. *Si $\alpha_i \in \mathcal{B}$ tel que sa classe d'homologie réelle $[\alpha_i] \in H_1(G,\mathbf{R})$ soit nulle. Pour tout $\eta > 0$, il existe $\ell \in \mathbf{N}^*$ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout $(\mathcal{B}^\ell,\varepsilon)$-cocycle normal $\gamma:\mathcal{B}^\ell \to \mathbf{R}^\mathbf{N}$, on ait:* $\| \gamma(\alpha_i) \| < \eta$.

DÉMONSTRATION: Elle se fait par l'absurde:

Pour tout $\varepsilon < 0$ et tout $\ell \in \mathbf{N}^*$, notons $K^\eta(\ell,\varepsilon)$ l'ensemble de $(\mathcal{B}^\ell,\varepsilon)$ cocycles normaux γ tels que $\| \gamma(\alpha_i) \| \geq \eta$. C'est un compact, et l'on suppose qu'il est non vide pour tout ℓ et tout $\varepsilon > 0$.

Notons, pour tout $\ell \in \mathbf{N}, K^\eta(\ell) = \bigcap_{\varepsilon>0} K^\eta(\ell,\varepsilon)$. C'est un compact non vide car intersection de compacts non vides emboités. Un élément γ de $K^\eta(\ell)$ est une application $\gamma:\mathcal{B}^\ell \to \mathbf{R}^N$ ayant les trois propriétés suivantes: $\| \gamma(\alpha_i) \| \geq \eta$, $\sup_{\alpha_j \in \mathcal{B}} \| \gamma(\alpha_j) \| = 1$, et $\gamma(\alpha\beta) = \gamma(\alpha) + \gamma(\beta)$ pour tous $\alpha,\beta \in \mathcal{B}^\ell$ tels que $\alpha\beta \in \mathcal{B}^\ell$.

Notons $k^\eta(\ell)$ l'ensemble des restrictions à $\mathcal{B}$ des éléments de $K^\eta(\ell)$. C'est un compact non vide, et la famille $\{k^\eta(\ell)\}_{\ell \in \mathbf{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion.

Notons $k^\eta = \bigcap_\ell k^\eta(\ell)$: c'est un compact non vide. On vérifie facilement que tout élément $\gamma \epsilon k^\eta$ est une application $\gamma:\mathcal{B} \to \mathbf{R}^N$ telle que $\| \gamma(\alpha_i) \| \geq \eta$, $\sup_{\alpha_j \in \mathcal{B}} \| \gamma(\alpha_j) \| = 1$, et telle que γ se prolonge en un homomorphisme de G dans $\mathbf{R}^N$.

On obtient ainsi des homomorphismes de G dans $\mathbf{R}^N$ qui ne s'annulle pas en α_i, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $[\alpha_i] = 0$.

On vient de montrer par l'absurde qu'il existe $\ell \in \mathbf{N}^*$ et $\varepsilon > 0$ tels que $K^n(\ell,\varepsilon)$ soit vide: le Lemme e-5 est donc prouvé. □

f) Applications de premier retour et holonomies des feuilletages C^1 - proches d'une fibration

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage défini par une fibration $p: M \to B$ de fibre F, et soit $\{\mathcal{F}^s\}_{s\in S}$ une C^1-déformation de $\mathcal{F}$ paramètrée par un espace localement compact, pointé en 0, $(S,0)$.

Soit T une transversale du feuilletage $\mathcal{F}$ relativement compacte dans une autre transversale.

Pour s assez voisin de 0, T est une transversale du feuilletage $\mathcal{F}_s$. Quitte à restreindre S, on suppose donc que T est transverse à tous les $\mathcal{F}_s$.

Soit O un ouvert de M contenant le point x_0, assez petit pour que $\pi_1(F_y, y)$ soit canoniquement isomorphe à $\pi_1(F_{x_0}, x_0)$ pour tout $y \in O$. Notons $U \subset U'$ deux ouverts relativement compacts de T, d'adhérence contenue dans O, et tels que U' contienne l'adhérence de U.

On suppose enfin qu'il existe des coordonnées locales définies sur O: ainsi $T \cap O$ est considéré comme une sous-variété d'un $\mathbf{R}^N, N \in \mathbf{N}$.

Regardons la déformation $\{\mathcal{F}^s\}_{s\in S}$ comme un feuilletage $\mathcal{F}^S$, au dessus de S sur $M \times S$ (voir Chapitre 1,5).

Pour tout $\alpha \in \pi_1(F_{x_0}, x_0)$, il existe un voisinage S^α de 0 dans S tel que l'holonomie h^S_α du feuilletage $\mathcal{F}^S$ le long de $\alpha \times \{0\}$ est définie sur $U' \times S^\alpha$. On a vu que h^S_α est de la forme $(x,s) \to (h^s_\alpha(x), s)$ où h^s_α est un difféomorphisme de U' dans T variant continûment avec s pour la C^1-topologie. De plus h^0_α est l'identité de U' puisque $\mathcal{F}^0$ est défini par la fibration.

Enfin, pour tout $\alpha, \beta \in \pi_1(F_{x_0}, x_0)$, pour tout s assez proche de

0, h^s_α, h^s_β et $h^s_{\alpha\beta}$ sont définis sur U' et l'on a:

$$h^s_{\alpha\beta} = h^s_\beta \circ h^s_\alpha.$$

Soit $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ une famille de générateurs de $\pi_1(F_{x_0}, x_0)$ invariante par passage à l'inverse, et contenant l'élément neutre.

On note $\mathcal{B}^\ell, \ell \in \mathbf{N}$, l'ensemble des produits de l'élément de $\mathcal{B}$.

Pour tout $x \in U$ notons $m^s_x = \sup_{\alpha_i \in \mathcal{B}} \| h^s_{\alpha_i}(x) - x \|$ (où la différence $h^s_{\alpha_i}(x) - x$ est à considérer dans les coordonnées locales fixées sur O).

Pour tout $x \in U$ tel que $m_0 \neq 0$, pour tout $\alpha \in \pi_1(F_{x_0}, x_0)$ et tout $s \in S^\alpha$, on note $\gamma^s_x(\alpha) = \frac{1}{m_x}(h^s_\alpha(x) - x)$.

Donc tout $\ell \in \mathbf{N}$, pour s assez petit, pour tout x tel que $m_x \neq 0$ l'application $\alpha \to \gamma^s_x(\alpha)$ est définie sur $\mathcal{B}^\ell$.

LEMME 4.3.F-1. *Soient $\varepsilon > 0$ et $\ell \in \mathbf{N}^*$; pour s assez proche de 0, pour tout $x \in U$ tel que $m_x \neq 0$, γ^s_x est un $(\mathcal{B}^\ell, \varepsilon)$-cocycle normal.*

DÉMONSTRATION: Pour s assez petit, les $h^s_{\alpha_i}$ sont C^1-proches de l'identité. Donc, d'après le Lemme d-1, pour s assez petit, pour tout produit de 2ℓ éléments du type $\alpha_i, \alpha = \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_{2\ell}}$, on a:

$$\| (h^s_\alpha(x) - x) - \sum_1^{2\ell} (h^s_{\alpha_{i_j}}(x) - x) \| \leq \frac{\varepsilon}{3} m_x, \text{ pour tout } x \in U.$$

On en déduit facilement le Lemme f-1. □

COROLLAIRE 4.3.F-2. *Soient $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \pi_1(F_{x_0}, x_0)$ dont les classes d'homologie engendrent $H_1(F_{x_0}, \mathbf{Z})/\text{Torsion}$. Soit $\alpha \in \pi_1(F_{x_0}, x_0)$ dont la classe d'homologie réelle soit nulle. Alors, pour tout $\eta > 0$, pour s suffisamment proche de 0 on a:*

1) pour tout $x \in U$, $\| h^s_\alpha(x) - x \| \leq \eta \sup_i \| h^s_{\beta_i}(x) - x \|$, *et pour tout* j, $\| h^s_{\alpha\beta_j}(x) - h^s_{\beta_j}(x) \| \leq \eta \sup_i \| h^s_{\beta_i}(x) - x \|$.

2) il existe un voisinage S_0 *de* 0 *dans* S *tel que pour tout* $s \in S_0$, *si* $x \in U$ *est un point fixe commun aux* $h^s_{\beta_i}$, *alors la feuille de* $\mathcal{F}^s$ *qui passe par* x *est une feuille compacte proche d'une fibre.*

DÉMONSTRATION:

1) Choisissons la partie génératrice $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ de façon qu'elle contienne les β_i et α, et de façon que les seuls éléments de $\mathcal{B}$ dont la classe d'homologie réelle soit non nulle soient les β_i et les β_i^{-1}.

D'après le Lemme e-5 et le Lemme f-1, pour s assez petit, pour tout élément $\alpha' \in B$ de classe d'homologie nulle, pour tout $x \in U$ on a $\| h^s_{\alpha'}(x) - x \| \leq \frac{\eta}{2} \sup_{\alpha_i \in \mathcal{B}} \| h^s_{\alpha_i}(x) - x \|$. Donc, pour tout $x \in U$, l'élément de $\mathcal{B}$ qui réalise $\sup_{\alpha \in B} \| h^s_{\alpha_i}(x) - x \|$ est l'un des β_i ou des β_i^{-1}. Il est alors facile de conclure ce point.

2) D'après le point 1) un point fixe x commun aux $h^s_{\beta_i}$ est un point fixe commun à tous les $h^\alpha_{\alpha_i}, \alpha_i \in \mathcal{B}$. Comme la partie $\mathcal{B}$ engendre le groupe fondamental de la fibre, d'après la Proposition 2. g-3, la feuille de $\mathcal{F}^s$ qui passe par x est compacte et proche d'une fibre. □

COROLLAIRE 4.3.F-3 *(Langevin-Rosenberg* [**LR1**]). *Si la fibre* F *vérifie* $H_1(F, \mathbf{R}) = 0$, *alors tout feuilletage* $\mathcal{F}'$, C^1*-proche de* $\mathcal{F}$, *a toutes ses feuilles compactes et proches d'une fibre:* $\mathcal{F}'$ *est conjugué à* $\mathcal{F}$ *par un difféomorphisme de classe* C^1.

DÉMONSTRATION: Ce théorème est à l'origine d'une grande partie de ce livre. Le Corollaire f-2 en est une généralisation. En effet d'après le corollaire f-2, pour toute C^1-déformation $\{\mathcal{F}^s\}_{s \in S}$ de $\mathcal{F}$, pour s assez proche de 0, tout point x est point fixe de toutes les holonomies h^s_α: la feuille de $\mathcal{F}^s$ qui passe par x est donc compacte

et proche d'une fibre. Comme cela est vrai pour toute déformation de $\mathcal{F}$, cela est aussi vrai sur tout un voisinage de $\mathcal{F}$ dans $Fol^1(M)$.

□

REMARQUE 4.3.F-4.

Cette partie a été écrite dans le cadre des déformations de l'holonomie de $\mathcal{F}$ sur une transversale T.

Les résultats montrés sont encore valables pour les applications de premier retour. Les démonstrations étant identiques, on ne réécrira pas l'ensemble des lemmes et corollaires.

Le plus pratique est de considérer les applications de premier retour $\hat{H}_s^\alpha$ définies sur le fibré normal, c'est-à-dire les applications de premier retour des feuilletages $\hat{F}_s = q^{-1}(\mathcal{F}_s)$ où $q: N \to M$ est le fibré normal du feuilletage $\mathcal{F}$ (voir la Partie 2.f). En effet, on a alors:

$$\hat{H}_s^{\alpha\beta} = \hat{H}_s^\beta \circ \hat{H}_s^\alpha.$$

De plus, pour tout point z, $\hat{H}_s^\alpha(z)$ est un point sur la fibre de q passant par z. Cette fibre étant un espace vectoriel, la différence $\hat{H}_s^\alpha(z) - z$ a un sens sans qu'on ait à passer par des coordonnées locales. De même, la norme sur une fibre de q est donnée à partir d'une métrique sur M.

§4 Comparaison des déformations de deux feuilletages

On a vu, au Chapitre 3.5, comment utiliser le théorème de réalisation des déformations de l'holonomie (voir Chapitre 1.5) pour construire une déformation sans feuilles compactes d'un feuilletage défini par une fibration, et en déduire alors l'instabilité de la fibre.

Le but de cette partie est de montrer que le théorème de réalisation des déformations de l'holonomie peut servir à comparer les

déformations de deux feuilletages:

L'idée, due à A. Haefliger, est que, si deux feuilletages ont des groupoïdes fondamentaux équivalents, alors leurs ensembles de germes de déformations sont en bijection naturelle. Par exemple, pour toute fibration $p: M \to B$ dont la fibre F vérifie $\pi_1(F) = \mathbf{Z}^n$, il existe une fibration en tore T^n qui aura les mêmes déformations.

a) Comparaison des groupoïdes fondamentaux de deux feuilletages

Soient M et N deux variétés compactes, soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur M, et soit φ une application différentiable de N dans M, transverse au feuilletage $\mathcal{F}$.

Notons $\mathcal{G} = \varphi^{-1}(\mathcal{F})$: c'est un feuilletage sur N de même codimension que $\mathcal{F}$ et l'image de toute feuille de $\mathcal{G}$ est contenue dans une feuille de $\mathcal{F}$.

Soit $\tau: T \to N$ une transversale complète du feuilletage $\mathcal{G}$. Alors $\varphi \circ \tau: T \to M$ fait de T une transversale du feuilletage $\mathcal{F}$, qui n'est à priori pas complète (sauf si l'image de φ rencontre toute feuille de $\mathcal{F}$).

Soit T' une transversale complète du feuilletage $\mathcal{F}$ contenant T.

On notera $\varphi_*: \Pi(\mathcal{G}, T) \to \Pi(\mathcal{F}, T')$ l'homomorphisme qui à tout élément de $\Pi(\mathcal{G}, T)$ représenté par un chemin γ sur une feuille de $\mathcal{G}$ associe l'élément de $\Pi(\mathcal{F}, T')$ représenté par $\varphi \circ \gamma$.

Cas des fibrations:

Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage défini par une fibration $p: M \to B$ de fibre F. Notons n la dimension de $H_1(F, \mathbf{R})$. On a vu au Chapitre 3.4 qu'il existe une fibration en tores T^n, $q: E \to B$ et une application différentiable φ, transverse au feuilletage $\mathcal{G}$ défini par la fibration q, telle que $\mathcal{F} = \varphi^{-1}(\mathcal{G})$. De plus φ induit sur chaque fibre un

isomorphisme φ_* de $H_1(F, \mathbf{Z})/\text{Torsion}$ sur.$H_1(T^n, \mathbf{Z})$.

Soit T une transversale complète du feuilletage $\mathcal{F}$. Le fait que T soit complète signifie que $p(T) = B$. Donc $\varphi(T)$ est une transversale complète du feuilletage $\mathcal{G}$.

Considérons l'homomorphisme $\varphi_*: \Pi(\mathcal{F}, T) \to \Pi(\mathcal{G}, \varphi(T))$ construit ci-dessus. On voit facilement qu'il est surjectif.

Soit γ_1 et γ_2 deux éléments de $\Pi(\mathcal{F}, T)$. Alors $\varphi_*(\gamma_1) = \varphi_*(\gamma_2)$, si et seulement si γ_1 et γ_2 ont même source x et même but y, et que $\gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}$ appartient au noyau de la projection de $\pi_1(F_x, x)$ sur $H_1(F_x, \mathbf{Z})/\text{Torsion}$.

EXEMPLE:

Si $\pi_1(F) = \mathbf{Z}^n$, alors φ_* est un isomorphisme de $\Pi(\mathcal{F}, T)$ sur $\Pi(\mathcal{G}, T)$.

b) Fibrations se comportant comme des fibrations en tores

Gardons les notations ci-dessus ($\mathcal{F}$ défini par la fibration p: $M \to B$ de fibre F, $\mathcal{G}$ défini par la fibration $q: E \to B$, de fibre le tore T^n, et $\varphi: M \to E, \varphi^{-1}(\mathcal{G}) = \mathcal{F}$).

HYPOTHÈSE: *On suppose le noyau N de la projection de $\pi_1(F)$ sur $H_1(F, \mathbf{Z})/\text{Torsion}$ est finîment engendré et que $H_1(N, \mathbf{R}) = 0$.*

Choisissons une transversale complète T du feuilletage $\mathcal{F}$, relativement compacte dans une autre transversale plongée dans M.

Soit $\mathcal{F}^S = \{\mathcal{F}^s\}_{s \in S}$ une C^1-déformation du feuilletage $\mathcal{F}$, et soit $H^S: \Pi(\mathcal{F}, T) \to \text{Diff}^{(S,0)}(T)$ la déformation de l'holonomie de $\mathcal{F}$ induite par $\mathcal{F}^S$.

LEMME 4.4.B-1. *Soit $\gamma \in \Pi(\mathcal{F}, T)$ un élément de source et but x, dans le noya N_x de la projection de $\pi_1(F_x, x)$ sur $H_1(F_x, \mathbf{Z})/\text{Torsion}$. Alors $H^S(\gamma)$ est le germe en $(x, 0)$ de l'identité de $T \times S$.*

DEMONSTRATION: C'est exactement le Lemme 3.f-1 et les Corollaires 3.f-2 et 3.f-3, en prenant pour $\mathcal{B}$ une partie génératrice de N_x au lieu de $\pi_1(F_x, x)$. □

COROLLAIRE 4.4.B-2. *Si γ_1 et γ_2 sont deux éléments de $\Pi(\mathcal{F}, T)$ tels que $\varphi_*(\gamma_1) = \varphi_*(\gamma_2)$ alors les germes d'holonomie déformée $H^S(\gamma_1)$ et $H^S(\gamma_2)$ sont égaux.*

COROLLAIRE 4.4.B-3. *Il existe une C^1- déformation $\mathcal{G}^S$ du feuilletage $\mathcal{G}$ telle que le germe de déformation de $\mathcal{F}$ représenté par $\mathcal{F}^S$ soit équivalent à celui représenté par $\varphi^{-1}(\mathcal{G}^S)$.*

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE B-3: D'après le Corollaire b-2, l'homomorphisme $H^S: \Pi(\mathcal{F}, T) \to \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ passe au quotient en un homomorphisme $H'^S: \Pi(\mathcal{G}, T) \to \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ qui est un germe de déformation de l'holonomie de $\mathcal{F}$.

D'après le théorème de réalisation des déformations de l'holonomie, il existe une déformation $\mathcal{G}^S = \{\mathcal{G}^s\}_{s \in S}$ du feuilletage $\mathcal{G}$, telle que la déformation de l'holonomie de $\mathcal{G}$ induite par $\mathcal{G}^S$ soit le morphisme représenté par H'^S.

Pour s proche de 0, φ est transverse à $\mathcal{G}^s$; donc $\varphi^{-1}(\mathcal{G}^S)$ définit un germe de déformation de $\mathcal{F}$ et le germe de l'holonomie de $\mathcal{F}$ induite par $\varphi^{-1}(\mathcal{G}^S)$ est le morphisme représenté par H^S. Donc les germes de déformation de $\mathcal{F}$ représenté par $\mathcal{F}^S$ et par $\varphi^{-1}(\mathcal{G}^S)$ sont équivalents.

COROLLAIRE 4.4.B-4. *La fibre F de la fibration $p: M \to B$ est C^1-stable, si et seulement si la fibre T^n de la fibration $q: E \to B$ est C^1-stable.*

DÉMONSTRATION: Si la fibre T^n de $q: E \to B$ est instable, il existe une C^1-déformation $\{\mathcal{G}^s\}_{s \in S}$ du feuilletage $\mathcal{G}$ telle que, pour s

proche de 0, $\varphi^{-1}(\mathcal{G}^s)$ n'a pas de feuilles compactes proches f'une fibre: la fibre F est donc C^1-instable.

Réciproquement, si F est C^1-instable, on peut choisir une C^1-déformation $\{\mathcal{F}^s\}_{s\in S}$ de $\mathcal{F}$, telle que, pour s proche de 0, $\mathcal{F}^s$ n'ait pas de feuille compacte proche d'une fibre. La déformation $\{\mathcal{F}^s\}_{s\in S}$ est équivalente à une déformation $\{\varphi^{-1}(\mathcal{G}^s)\}_{s\in S}$ où $\{\mathcal{G}^s\}_{s\in S}$ est une C^1-déformation de $\mathcal{G}$. On montre facilement que, pour s proche de 0, $\mathcal{G}^s$ n'a pas de feuilles compactes proches d'une fibre: la fibre T^n est donc C^1-instable. □

c) Fibrations telles que $H_1(F,\mathbf{R}) = \mathbf{R}$

(On garde les notations précédentes).

En général, sans l'hypothèse faite au b), une déformation de l'holonomie de $\mathcal{F}$ ne passe pas au quotient en une déformation de l'holonomie de $\mathcal{G}$.

Cependant, supposons $H_1(F,\mathbf{R}) = \mathbf{R}$. Le feuilletage $\mathcal{G}$ est donc défini par une fibration en cercles. Soit H^S une déformation de l'holonomie de $\mathcal{F}$. Soient α et β deux éléments de $\Pi(\mathcal{F},T)$ de même source et but x. On suppose que la classe d'homologie $[\beta] \in H_1(F_x,\mathbf{R})$ est non nulle, et que celle de α est nulle. D'après le Corollaire $3\cdot f$-2, le germe $H^S(\alpha)$ est très petit devant $H^S(\beta)$.

Nous verrons au Chapitre 6 comment on peut négliger les germes de déformation de l'holonomie des lacets nuls dans l'homologie de la fibre. Ainsi, la déformation H^S de l'holonomie de $\mathcal{F}$ va presque passer au quotient en une déformation de l'holonomie de $\mathcal{G}$.

Les résultats sur la C^1-stabilité de la fibre F des fibrations telles que $H_1(F,\mathbf{R}) = \mathbf{R}$, vont donc se déduire des résultats de stabilité de la fibre des fibrations en cercles.

C'est donc par les fibrations en cercles que nous allons commencer cette étude.

Chapitre 5

LES FIBRATIONS EN CERCLES

Le Chapitre 3.1 présentait un type de déformations des fibrations en cercles à partir d'un champ de vecteurs sur la base B ou sur un revêtement $\pi: \tilde{B} \to B$ à deux feuillets de la base. On en déduisait des conditions simples ($\chi(B) = 0$ ou $\chi(\pi) = 0$) pour que la fibre S^1 soit C^∞-instable.

Il existe bien sûr de nombreuses déformations des fibrations en cercles ne provenant pas d'un champ de vecteurs sur B ou sur $\tilde{B}$. Cependant, si les conditions ci-dessus ne sont pas remplies, alors la fibre est C^0-stable. C'est ce qu'exprime le Théorème A, dont la démonstration est le but de ce chapitre:

THÉORÈME A. *Soit B une variété compacte.*

a) (Seifert, Fuller) Supposons que la dimension de B soit paire, et que la caractéristique d'Euler $\chi(B)$ soit non nulle. Alors, pour toute fibration en cercles de base B, la fibre est C^0-stable.

b) Supposons que la dimension de B soit impaire. Soit $p: M \to B$ une fibration en cercles, et soit $\pi: \tilde{B} \to B$ le revêtement des orientations des fibres de p. Si $\chi(\pi)$ est non nul, alors la fibre est C^0 stable.

(On rappelle que $\chi(\pi) \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ a été défini au Chapitre 3.b).

Seifert a montré le Théorème A en 1950, dans le cas où la base est de dimension 2 (voir [Sei]). Il s'intéressait en fait aux champs de vecteurs de la sphère S^3, proches de la fibration de Hopf.

Dans le cas où la fibration est orientée, et la base de dimension paire, le théorème découle simplement d'un résultat de Fuller (1968): Fuller montre que l'on peut associer un indice à tout compact isolé K d'orbites périodiques d'un champ de vecteurs X. Si cet indice est non nul, tout champ proche de X aura une orbite fermée proche d'une orbite de K.

Dans le cas d'un champ de vecteurs X non nul, tangent aux fibres de la fibration en cercles $p: M \to B$, on choisit comme compact K l'ensemble des fibres (parcourues une seule fois). L'indice de K est égal à la caractéristique d'Euler $\chi(B)$.

Ce chapitre présente la démonstration de Seifert (cas où $\dim B = 2$), puis celle de Fuller (adaptée au cas des fibrations non orientées).

S. Druck et S. Firmo ont trouvé une simplification importante de la preuve de Seifert, dans le cadre d'une C^1-stabilité (voir [**DF**]. Je présente de façon détaillée cette démonstration, relativement simple, qui fait appel à des outils que l'on retrouvera à de nombreuses reprises: applications de premier retour, difféomorphismes C^1-proches de l'identité. C'est aussi un choix esthétique: je trouve cette démonstration très jolie. (une autre démonstration dans le cadre de la C^1-stabilité avait déjà été donnée par G.Reeb [**Re2**]).

La démonstration du Théorème A utilisant le Théorème de Fuller ne s'appliquait qu'aux fibrations orientées. Je présente ici une démonstration personnelle, dans le cadre de la C^0-stabilité de la fibre d'une fibration, orientée ou pas. Cette démonstration fait appel à des moyens élémentaires, le principal outil étant la notion d'indice pour un compact isolé de points fixes d'une fonction.

En appendice, nous verrons comment adapter cette démonstration pour montrer le Théorème de Fuller pour les champs de vecteurs (non tangents à une fibration). Il faut signaler que, outre la démonstration initiale de Fuller [F], il existe déjà une démonstration du Théorème de Fuller, faite par Chow et Mallet-Paret [CM-P], utilisant la théorie des bifurcations.

§1 La démonstration de Seifert (base de dimension 2)

Le but de cette partie est de présenter la démonstration de Seifert du Théorème A, quand la base de la fibration en cercles est une surface S de caractéristique d'Euler $\chi(S)$ non nulle (on présente en fait la version simplifiée due à Druck et Firmo).

a) Notations

Soit S une surface compacte de caractéristique d'Euler $\chi(S) \neq 0$.

Soit $p: M \to S$ une fibration de fibre le cercle S^1. On suppose que p est orientée, et on choisit continûment une orientation de chaque fibre (le cas où p n'est pas orientée est traité en fin de cette partie). On note $\mathcal{F}$ le feuilletage défini par cette fibration.

Choisissons deux disques compacts D et D' sur S, D contenu dans l'intérieur de D', et on se fixe une trivialisation $\psi: p^{-1}(D') \xrightarrow{\sim} D' \times S^1$.

On note $q: N \to M$ le fibré normal, $\sigma: M \to N$ la section nulle, et $\varphi: N \to M$ une submersion définie au voisinage de la section nulle, $\varphi \circ \sigma = \mathrm{id}_M$, définissant sur M un champ de disques $\{D_x\}_{x \in M}$ transverse au feuilletage $\mathcal{F}$ (voir Chapitre 2.1.a). On suppose de plus que, si $p(x)$ appartient au disque D alors le disque D_x est inclus dans le facteur horizontal passant par x, $D' \times \{x\}$, de la trivialisation ψ.

On rappelle que pour tout $x \in M$, il existe un disque $\hat{D}_x$ de la fibre $q^{-1}(x)$, centré en $\sigma(x)$, tel que la restriction de φ à $\hat{D}_x$ soit un difféomorphisme de $\hat{D}_x$ sur D_x.

Tout feuilletage $\mathcal{F}'$ suffisamment C^1-proche de $\mathcal{F}$ est transverse au champ de disques $\{D_x\}$. Comme la fibration est orientée, on peut définir l'application globale de premier retour de $\mathcal{F}'$ sur le champ de disque $\{D_x\}$ (voir le Chapitre 4.2.d).

On note $f: M \to M$ l'application de premier retour de $\mathcal{F}'$ sur $\{D_x\}$. C'est un difféomorphisme C^1-proche de l'identité, et pour tout $x \in M$, on a:
$f(x) = x \Leftrightarrow$ *la feuille de* $\mathcal{F}'$ *passant par* x *est une feuille compacte proche d'une fibre.*

b) Démonstration du théorème

La démonstration se fait par l'absurde: on suppose qu'il existe un feuilletage $\mathcal{F}'$, aussi C^1-proche que l'on veut de $\mathcal{F}$, sans feuille compacte proche d'une fibre: son application de premier retour f est donc sans point fixe.

Pour tout x, $f(x)$ appartient au disque D_x. Notons $\hat{f}(x)$ le point du disque $\hat{D}_x$ (dans la fibre $q^{-1}(x)$ du fibré normal) tel que $\varphi(\hat{f}(x)) = f(x)$. L'application $\hat{f}: M \to N$ ainsi définie est une section différentiable du fibré normal. De plus, comme f est sans point fixe, $\hat{f}$ est disjointe de la section nulle.

Rappelons que, pour tout $x \in M, p_*: T_xM \to T_{p(x)}S$ induit un isomorphisme de la fibre $q^{-1}(x)$ du fibré normal sur $T_{p(x)}(S)$.

Notons $g(x) = \frac{\hat{f}(x)}{\|\hat{f}(x)\|}$ (où $\|\cdot\|$ est une métrique riemannienne sur S): g est une application différentiable à valeurs dans le fibré unitaire tangent $(TS)_1$ de S. Rappelons que $(TS)_1$ est un fibré en cercles sur S, puisque S est de dimension 2.

Pour tout $y \in S$ notons $g_y: p^{-1}(y) \to (T_y S)_1$ la restriction de g à la fibre $p^{-1}(y)$. Remarquons que $(T_y S)_1$ est un cercle muni de la métrique induite de celle de S.

Comme l'application g_y dépend continûment de y, sa classe d'homotopie ne dépend pas du point y.

LEMMA 5.1.B-1. *Pour tout $y \in S$, l'application $g_y: p^{-1}(y) \to (T_y S)_1$ est homotope à zéro.*

Ce lemme représente la principale difficulté du Théorème de Seifert. Il fera l'objet du Paragraphe c). Voyons comment en déduire le théorème:

REMARQUE 5.1.B-2. A toute application h, homotope à zéro, d'une variété compacte E dans un cercle S^1 (muni d'une métrique) on peut associer canoniquement un élément du cercle.

En effet, soit $\Pi: \mathbf{R} \to S^1$ le revêtement universel de S^1. L'application $h: E \to S^1$ se relève en une application $\hat{h}: E \to \mathbf{R}$, car h est homotope à zéro. L'image de E par $\hat{h}$ est un segment I. On associe à h la projection par Π du milieu du segment I (le milieu au sens de la métrique sur $\mathbf{R}$ relevée de celle de S^1). C'est un point de S^1 ne dépendant pas du relevé $\hat{h}$ choisi.

D'après la remarque ci-dessus, à tout point $y \in S$ on associe le vecteur unitaire $v_y \in (T_y S)_1$ canoniquement associé à l'application g_y. On a ainsi construit sur S un champ de vecteurs unitaires, donc non singulier, ce qui est contraire à l'hypothèse $\chi(S) \neq 0$. Cette contradiction conclut la preuve du théorème. □

REMARQUE 5.1.B-3. La raison essentielle, pour laquelle la démonstration de Seifert ne se généralise pas pour des bases B de dimension $\dim B > 2$, est la suivante:

Le fibré unitaire tangent $(TB)_1$ est un fibré en sphères. Les applications $g_y: p^{-1}(y) \to (T_yB)_1$ sont des applications d'un cercle (la fibre) dans une sphère. Le problème est qu'on ne sait pas associer canoniquement un point de la sphère à une telle application.

c) Démonstration du Lemme b-1

C'est ce point qu'ont simplifié S. Druck et S. Firmo. C'est ici qu'est utilisée l'hypothèse: $\mathcal{F}'$ est C^1-proche de $\mathcal{F}$.

Comme on l'a remarqué, il suffit de montrer qu'il existe $y \in S$ tel que g_y soit homotope à zéro. Choisissons y dans l'intérieur du disque D. En utilisant la trivialisation φ, on se ramène au problème suivant:

Soit D_1 et D_2 les disques de rayon 1 et 2, centré en $0 = (0,0)$ de $\mathbf{R}^2$.

Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage défini par la fibration triviale $D_2 \times S^1 \to D_2$.

Soit $\mathcal{F}'$ un feuilletage C^1-proche de $\mathcal{F}$, sans feuille compacte proche d'une fibre. Soit $f: D_1 \times S^1 \to D_2 \times S^1$ l'application de premier retour de $\mathcal{F}'$ sur le champ de disques $D_2 \times \{\alpha\}$, $\alpha \in S^1$. Elle est de la forme $f(x,\alpha) = (f_\alpha(x), \alpha)$. De plus, elle est sans point fixe puisque $\mathcal{F}'$ n'a pas de feuille compacte proche d'une fibre.

Dans ces notations, le Lemme b-1 s'exprime de la façon suivante:

LEMMA 5.1.C-1. *Soit $x \in D_1$. L'application $g_x: S^1 \to \mathbf{R}^2 - \{0\}$ définie par $g_x(\alpha) = f_\alpha(x) - x$ est homotope à zéro dans $\mathbf{R}^2 - \{0\}$.*

La démonstration de ce lemme est le but de tout le Paragraphe c.

REMARQUE 5.1.C-2. Soit $\gamma: S^1 \to D_1 \times S^1$ un lacet. On note $\gamma(\theta) = (x(\theta), \alpha(\theta))$. Notons $g_\gamma: S^1 \to \mathbf{R}^2 - \{0\}$ l'application définie par $g_\gamma(\theta) = f_{\alpha(\theta)}(x(\theta)) - x(\theta)$. Alors la classe d'homotopie de l'application g_γ dans $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ ne dépend que de la classe d'homotopie du lacet γ dans $D_1 \times S^1$.

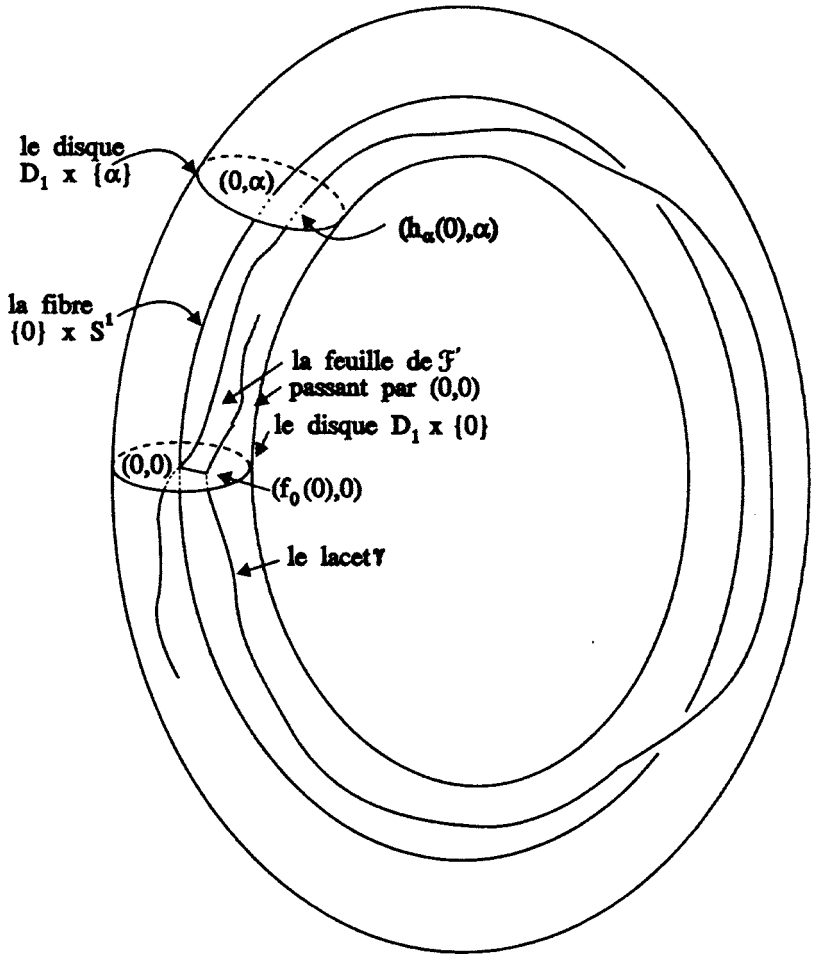


Figure 5.1.

On considère S^1 comme étant $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$.

Notons γ le lacet obtenu en mettant bout à bout le segment de feuille de $\mathcal{F}'$, joignant le point $(0,0) \in D_1 \times S^1$ au point $f((0,0)) = (f_0(0),0)$, et le segment $[0, f_0(0)] \times \{0\}$ du disque $D_1 \times \{0\}$ (voir Figure 5.1). Ce lacet est homotope à une fibre.

On va montrer que, pour $\mathcal{F}'$ C^1-proche de $\mathcal{F}$, le vecteur $f_\alpha(x)-x$ reste dans un petit secteur angulaire de $\mathbf{R}^2-\{0\}$ quand (x,α) parcourt le lacet γ. Alors l'application g_γ sera homotope à zéro, ce qui prouve le Lemme c-1, d'après la Remarque c-2.

Pour tout $\alpha \in [0,2\pi]$ on note $H_\alpha\colon (x,0) \to (h_\alpha(x),\alpha)$ l'holonomie du feuilletage $\mathcal{F}'$ de $D_2 \times \{0\}$ sur $D_2 \times \{\alpha\}$.

On vérifie facilement que l'on a:

- $f_0 = h_{2\pi}$.
- $f_\alpha = h_\alpha \circ f_o \circ h_\alpha^{-1}$ (là où les 2 membres sont définis).
- Le segment de feuille de $\mathcal{F}'$ joignant $(0,0)$ à $(f_0(0),0)$ est l'ensemble des points $(h_\alpha(0),0)$, $\alpha \in [0,2\pi]$.

REMARQUE 5.1.C-3. Le feuilletage $\mathcal{F}'$ étant C^1-proche de $\mathcal{F}$ les applications h_α, $\alpha \in [0,2\pi]$ seront C^1-proche de l'identité. On peut donc supposer que, pour tout $\alpha \in [0,2\pi]$, pour tout vecteur v tangent à D_2 en un point où h_α est définie, on a:

$$| \, Ang((h_\alpha)_*(v), v) \, | < \frac{\pi}{10}$$

CONSÉQUENCE: *Soient x et $y \in D_2$ tel que h_α soit définie sur le segment $[x,y]$. Alors on a:*

$$| \, Ang(h_\alpha(y) - h_\alpha(x), y - x) \, | < \frac{\pi}{10}$$

D'après la Remarque c-3 on a l'inégalité suivante:

$$| \, Ang(f_\alpha(h_\alpha(0)) - h_\alpha(0), f_0(0) - 0) \, | = | \, Ang(h_\alpha(f_0(0)) - h_\alpha(0), f_0(0) - 0) \, | < \frac{\pi}{10}$$

La variation angulaire du vecteur $f_\alpha(x)-x$ est donc inférieure à $\frac{2\pi}{10}$ quand (x,α) parcourt le segment de feuille de $\mathcal{F}'$ qui joint $(0,0)$ à $(f_0(0),0)$.

De plus, d'après la Remarque c-3, l'image par $f_0 = h_{2\pi}$ du segment $[0, f_0(0)]$ est un chemin différentiable joignant $f_0(0)$ à $f_0^2(0)$, tel qu'en tout point le vecteur tangent positivement orienté fait un angle inférieur (en module) à $\frac{\pi}{10}$ avec le vecteur $f_0(0) - 0$. On en déduit facilement que, pour tout point $x \in [0, f_0(0)]$ on a (voir Figure 5.2):

$$Ang(f_0(x) - x, f_0(0) - 0) < \frac{\pi}{10}$$

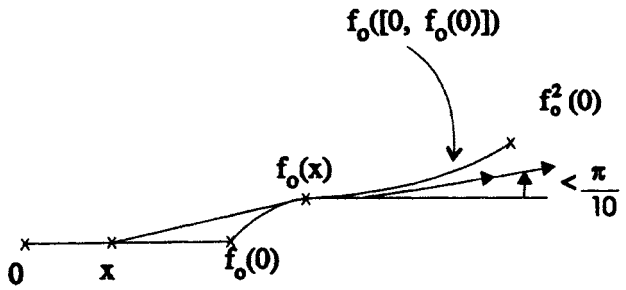


Figure 5.2.

Donc pour tout $(x, \alpha) \in \gamma$, on a:

$$Ang(f_\alpha(x) - x, f_0(0) - 0) < \frac{\pi}{10}$$

L'application g_γ est donc homotope à zéro dans $\mathbf{R}^2 - \{0\}$, ce qui prouve le Lemme c-1, d'après la Remarque c-2.

d) Cas des fibrations en cercles non orientées

Soit $p: M \to S$ une fibration en cercles telle que les fibres ne puissent pas être orientées continûment. Autrement dit, l'action du groupe fondamental $\pi_1(B)$ sur $H_1(S^1, \mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}$ n'est pas triviale.

Notons $\Pi: \tilde{M} \to M$ et $\pi: \tilde{S} \to S$ les revêtements à deux feuillets de M et S définis par les orientations possibles de la fibre: un point $\tilde{x}$ de $\tilde{S}$ est la donnée d'un point x de S et d'une orientation de $p^{-1}(x)$, un point $\tilde{y}$ de $\tilde{M}$ correspond à un point y de M et une orientation de la fibre de p passant par y.

On note $\tilde{p}: \tilde{M} \to \tilde{S}$ la fibration en cercles rendant commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\Pi} & M \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \tilde{p}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p} \\ \tilde{S} & \xrightarrow[\pi]{} & S \end{array}$$

On voit facilement que $\tilde{p}$ est une fibration en cercles orientée.

Supposons à présent que la caractéristique d'Euler $\chi(S)$ soit non nulle. Alors, $\chi(\tilde{S}) = 2\chi(S) \neq 0$.

D'après le théorème pour les fibrations en cercles orientées la fibre de la fibration $\tilde{p}$ est C^1-stable. On en déduit facilement que la fibre de la fibration p est C^1-stable: en effet, supposons qu'il existe $\mathcal{F}'$, C^1-proche du feuilletage défini par la fibration p, et sans feuilles compactes proches d'une fibre; alors $\Pi^{-1}(\mathcal{F}')$ est une C^1-petite perturbation de la fibration $\tilde{p}$, sans feuille compacte proche d'une fibre, ce qui contredit la C^1-stabilité de la fibre de $\tilde{p}$.

§2 La démonstration de Fuller: un indice pour les fibrations en cercles

Le but de cette partie est de donner une démonstration du Théorème A, dans le cas général

La démonstration proposée est très fortement inspirée du travail de Fuller: nous allons associer un indice aux feuilles compactes proches d'une fibre, d'un feuilletage $\mathcal{F}'$ proche d'une fibration en

cercles, et nous montrerons que la somme des indices des feuilles compactes proches d'une fibre d'un tel feuilletage $\mathcal{F}'$, ne dépend pas du feuilletage $\mathcal{F}'$ considéré: on a ainsi associé un indice à la fibration en cercles, et la nullité de cet indice sera équivalente à l'instabilité de la fibre.

a) Construction de l'indice

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage défini par une fibration en cercles $p: M \to B, B$ compacte connexe.

Soit $\mathcal{F}'$ un feuilletage C^0-proche de $\mathcal{F}$ (au sens de la topologie des champs de droites) n'ayant qu'un nombre fini de feuilles compactes proches d'une fibre.

Soit γ l'une de ces feuilles compactes; notons-la γ^+ ou γ^- selon qu'elle est munie de l'une ou l'autre des deux orientations possibles. Soit T une transversale de $\mathcal{F}$ coupant γ en un point x, et soit H_{γ^+} l'holonomie de $\mathcal{F}'$ sur T le long de γ^+. Le point x est un point fixe isolé de H_{γ^+}. L'indice de ce point fixe isolé ne dépend pas du choix de la transversale T, ni du point x: nous l'appellerons l'indice de γ^+ et nous le noterons $i(\gamma^+)$.

Si B est de dimension paire, alors $i(\gamma^+) = i(\gamma^-)$, et on notera $i(\gamma)$ cet indice. Si B est de dimension impaire, alors $i(\gamma^+) = -i(\gamma^-)$; ces deux nombres ayant même classe modulo 2, nous noterons $\bar{\imath}(\gamma) \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ la classe de $i(\gamma^+)$ et de $i(\gamma^-)$.

Soient $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ les feuilles compactes de $\mathcal{F}'$ proches d'une fibre.

- si B est de dimension paire, nous noterons $i(\mathcal{F}') = \sum_{j=i}^{n} i(\gamma_j) \in \mathbf{Z}$.
- si B est de dimension impaire, mais que $\mathcal{F}$ (et donc aussi $\mathcal{F}'$) est orienté, on notera $i(\mathcal{F}') = \sum_{j=1}^{n} i(\gamma_j^+) \in \mathbf{Z}$, où γ_j^+ est la feuille γ_j munie de son orientation.

– si B est de dimension impaire, et que $\mathcal{F}$ n'est pas orienté, on notera $\bar{\imath}(\mathcal{F}') = \sum_{j=1}^{n} \bar{\imath}(\gamma_j) \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

THÉORÈME 5.2.A-1 *(Fuller). Avec les notations, $i(\mathcal{F}')$ (resp. $\bar{\imath}(\mathcal{F}')$), ne dépend pas du feuilletage $\mathcal{F}'$ choisi C^0-proche de $\mathcal{F}$. On note donc $i(\mathcal{F}) = i(\mathcal{F}')(resp. \bar{\imath}(\mathcal{F}) = \bar{\imath}(\mathcal{F}'))$.*

La démonstration de ce théorème est l'objet des autres paragraphes de cette partie.

On calcule alors facilement $i(\mathcal{F})$ ou $\bar{\imath}(\mathcal{F})$: on a vu (Chapitre 3.2) des déformations $\mathcal{F}_t(X), t \in \mathbf{R}$, du feuilletage $\mathcal{F}$ à partir d'un champ de vecteurs X sur B (si $\mathcal{F}$ est orienté) ou sur le revêtement $\tilde{B}$ de B. Choisissons X n'ayant qu'un nombre fini de singularités: alors les feuilles compactes proches d'une fibre de $\mathcal{F}_t(X), t \neq 0$, sont les fibres au-dessus des singularités de X, et l'indice de ces feuilles compactes est égal à l'indice des singularités: la somme de tous les indices est donc $\chi(B)$ (si $\dim B$ est paire) ou $\chi(\pi)$ (si $\dim B$ est impaire).

Le Théorème A en découle facilement. □

b) Préliminaires, notations

On s'intéresse aux feuilletages C^0-proches de $\mathcal{F}$, pour la topologie des champs de droites; précisons le sens de "C^0-proche": considérons une métrique sur M, et notons N le champ d'hyperplans sur M, orthogonal à $\mathcal{F}$. Soit $\mathcal{F}'$ un feuilletage transverse à N. Alors vecteur u tangent à $\mathcal{F}'$ s'écrit de façon unique $u = u_v + u_h$ où u_v est la composante verticale (tangente à $\mathcal{F}$) et u_h la composante horizontale (tangente à N).

On dira que $\mathcal{F}'$ est ε-proche de $\mathcal{F}$ si, pour tout vecteur u non nul tangent à $\mathcal{F}'$ on a: $\frac{\|u_h\|}{\|u_v\|} < \varepsilon$.

REMARQUE 5.2.B-1. Il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout ouvert U de B, de diamètre inférieur à δ, il existe une section $\sigma: U \to M$ de la fibration p, telle qu'en tout point le plan tangent à $\sigma(U)$ fasse un angle inférieur à $\frac{\pi}{10}$ avec N. En particulier, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, σ sera transverse à tout feuilletage ε-proche de $\mathcal{F}$.

NOTATION: Soit $\mu > 0$; pour tout ouvert U de B on notera $U_{-\mu}$ l'ensemble des points dont la distance à $B - U$ est supérieure à μ, et $U_{+\mu}$ l'ensemble des points de B dont la distance à U est inférieure à μ. Bien sûr $U_{-\mu}$ est un ouvert relativement compact dans U qui est lui-même relativement compact dans $U_{+\mu}$.

REMARQUE 5.2.B-2. Pour tout $\mu > 0$, il existe $\varepsilon(\mu) \in]0,1[$ tel que, pour tout feuilletage $\mathcal{F}_0$ $\varepsilon(\mu)$-proche de $\mathcal{F}$, les propriétés suivantes soient vraies:

– la projection par p sur B de toute feuille compacte de $\mathcal{F}_0$, proche d'une fibre, a un diamètre inférieur à $\frac{1}{3}\mu$. En particulier, pour tout ouvert V de B, si une telle feuille rencontre $p^{-1}(V_{-\mu})$, elle est contenue dans $p^{-1}(V_{-\frac{2}{3}\mu})$.

– soit U un ouvert de B de diamètre inférieur à δ, et soit $\sigma: U \to M$ une section choisie comme dans la Remarque b-1. Si la fibration p n'est pas orientée, choisissons une orientation (locale) de $\mathcal{F}$ au-dessus de U.

Alors l'application de premier retour de $\mathcal{F}_0$ sur $\sigma(U)$ est définie en tout point de $U_{\frac{1}{3}\mu}$, et est à valeurs dans U.

c) Démonstration du Théorème

LEMMA 5.2.C-1. *Soit $\mu > 0$, soit $\varepsilon \in]0, \varepsilon(\mu)[$ et soit U un ouvert de B de diamètre inférieur à δ.*

Soient $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}_1$, deux feuilletages ε-proches de $\mathcal{F}$, coïncidant hors de $p^{-1}(U_{-\mu})$, et n'ayant qu'un nombre fini de feuilles compactes proches d'une fibre. Notons $i(\mathcal{F}_0)$ et $i(\mathcal{F}_1)$ (resp. $\bar{\imath}(\mathcal{F}_0)$ et $\bar{\imath}(\mathcal{F}_1)$) la somme des indices de leurs feuilles compactes proches d'une fibre. Alors on a:

$$i(\mathcal{F}_0) = i(\mathcal{F}_1) \quad (\textit{resp. } \bar{\imath}(\mathcal{F}_0) = \bar{\imath}(\mathcal{F}_1)).$$

DÉMONSTRATION:

Pour tout $t \in [0,1]$ on note $\mathcal{F}_t$ le feuilletage de M défini de la façon suivante:

Soit $x \in M$, et soit u un vecteur non nul tangent en x au feuilletage $\mathcal{F}$; il existe des vecteurs v_0 et v_1 tangents en x au champ d'hyperplans N, tels que $u+v_0$ dirige $\mathcal{F}_0$ et $u+v_1$ dirige $\mathcal{F}_t$. Alors $u+(1-t)v_0+tv$, dirige en x le feuilletage $\mathcal{F}_t$.

On a ainsi construit un chemin continu reliant $\mathcal{F}_0$ à $\mathcal{F}_1$, parmi les feuilletages ε-proches de $\mathcal{F}$ et coïncidant avec $\mathcal{F}_0$ hors de $p^{-1}(U_\mu)$.

Choisissons une section $\sigma: U \Rightarrow M$ de p, comme dans la Remarque b-1. D'après la Remarque b-2, pour tout t l'application de premier retour de $\mathcal{F}_t$ sur $\sigma(U)$ est définie sur $U_{-\frac{1}{3}\mu}$. On la note $f_t: U_{-\frac{1}{3}\mu} \to U$.

Les points fixes de f_t sont les intersections de $\sigma(U_{-\frac{1}{3}\mu})$ avec les feuilles compactes de $\mathcal{F}_t$ proches d'une fibre. Remarquons que, si une telle feuille rencontre $\sigma(U_{-\frac{1}{3}\mu} - U_{-\frac{2}{3}\mu})$ alors elle est disjointe de $U_{-\mu}$, d'après la Remarque b-2; donc $\mathcal{F}_t$ et $\mathcal{F}_0$ coïncident au voisinage de cette feuille. Comme $\mathcal{F}_0$ n'a qu'un nombre fini de feuilles compactes, on en déduit que:

- les points fixes de f_t contenus dans $U_{-\frac{1}{3}\mu} - U_{-\frac{2}{3}\mu}$ ne dépendent pas de t,

– ils sont en nombre fini.

Il existe donc $s \in]\frac{1}{3}\mu, \frac{2}{3}\mu[$ tel que, pour tout t, f_t soit sans point fixe sur le bord de U_{-s}.

Donc l'ensemble des points fixes de f_t contenus dans U_{-s} est un compact isolé de points fixes; on le note K_t. Considérons son indice (de Lefschetz) $i(K_t)$: c'est un entier variant continûment avec t, donc il est constant (voir par exemple Leray [Le], qui rappelle la théorie de l'indice d'un compact isolé de point fixe d'un difféomorphisme local).

Comme $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}_1$ n'ont qu'un nombre fini de feuilles compactes, f_0 et f_1 ont un nombre fini de points fixes et donc $i(K_0)$ et $i(K_1)$ sont égaux à la somme des indices des points fixes de f_0 et f_1. □

REMARQUE 5.C–1. Soit $x \in U_s$ un point fixe de f_0 (resp. f_1) l'indice de x comme point fixe isolé de f_0 (resp. f_1) est égal à l'indice de la feuille compacte proche d'une fibre de $\mathcal{F}_0$ (resp. $\mathcal{F}_1$) passant par σ (si la fibration n'est pas orientée et que B est de dimension impaire, il faut prendre la classe modulo 2 de l'indice de x).

Considérons les feuilles compactes, de $\mathcal{F}_0$ ou de $\mathcal{F}_1$, proches d'une fibre et rencontrant $\sigma(U_{-s})$. Nous venons de montrer que les sommes (pour $\mathcal{F}_0$ ou pour $\mathcal{F}_1$) de leurs indices sont égales.

De plus $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}_1$ coïncident au voisinage de leurs feuilles compactes proches d'une fibre ne rencontrant pas $\sigma(U_{-s})$: en effet une telle feuille ne rencontre pas $\pi^{-1}(U_\mu)$.

On conclut facilement: $i(\mathcal{F}_0) = i(\mathcal{F}_1)$ (ou $\bar{\imath}(\mathcal{F}_0) = \bar{\imath}(\mathcal{F}_1)$).

LEMMA 5.2.C-2. *Soient U et V deux ouverts de B; on suppose que le diamètre de U est inférieur à δ. Fixons $\mu > 0$ et $\varepsilon \in]0, \varepsilon(\mu)[$. Soient $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{G}$ deux feuilletages ε-proches de $\mathcal{F}$, coïncidant sur*

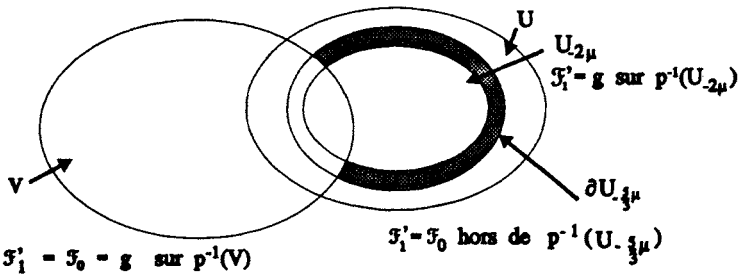
$p^{-1}(V)$, et n'ayant qu'un nombre fini de feuilles compactes proches d'une fibre.

Alors il existe un feuilletage $\mathcal{F}_1$ ε-proche de $\mathcal{F}$, n'ayant qu'un nombre fini de feuilles compactes proches d'une fibre, coïncidant avec $\mathcal{F}_0$ hors de $p^{-1}(U_{-\mu})$ et coïncidant avec $\mathcal{G}$ sur $p^{-1}(V_{-\mu} \cup U_{-3\mu})$.

DÉMONSTRATION: Choisissons une fonction différentiable $\varphi: B \to [0,1]$, égale à zéro sur $B - U_{-\frac{5}{3}\mu}$ et égale à 1 sur $U_{-2\mu}$.

Notons $\mathcal{F}_1'$ le feuilletage défini de la façon suivante: pour tout $x \in M$ soit u un vecteur non nul dirigeant le feuilletage de $\mathcal{F}$. Soient v_0 et w les vecteurs tangents en x à N, tels que $u + v_0$ dirige $\mathcal{F}_0$ et que $u + w$ dirige $\mathcal{G}$. Alors, $u + \varphi \circ p(x)w + (1 - \varphi \circ p(x))v_0$ dirige en x le feuilletage $\mathcal{F}_1'$.

Le feuilletage $\mathcal{F}_1'$ coïncide avec $\mathcal{G}$ sur $p^{-1}(V \cup U_{-2\mu})$ et avec $\mathcal{F}_0$ hors de $p^{-1}(U_{-\frac{5}{3}\mu})$ (voir Figure 5.3), il est de plus ε-proche de $\mathcal{F}$.



Au dessus du domaine achuré ($U_{-\frac{5}{3}\mu}$ – ($V \cup U_{-2\mu}$)), et seulement là, le feuilletage $\mathcal{F}_1'$ peut être différent à la fois de $\mathcal{F}_0$ et de g.

Figure 5.3.

Le feuilletage $\mathcal{F}_1'$ peut avoir un nombre infini de feuilles com-

pactes proches d'une fibre. Cependant, comme $\mathcal{F}'_1$ coïncide avec $\mathcal{F}_0$ hors de $p^{-1}(U_{-\frac{5}{3}\mu})$, ses feuilles compactes proches d'une fibre et rencontrant $p^{-1}(B - U_{-\frac{4}{3}\mu})$ coïncident avec celles de $\mathcal{F}_0$ (car elles ne rencontrent pas $p^{-1}(U_{-\frac{5}{3}\mu})$ d'après la Remarque b-2); elles sont donc en nombre fini.

De même les feuilles compactes de $\mathcal{F}'_1$, proches d'une fibre et rencontrant $p^{-1}(V_{-\frac{1}{3}\mu} \cup U_{-\frac{7}{3}\mu})$ coïncident avec celles de $\mathcal{G}$, et sont donc en nombre fini.

Notons $W = U_{-\frac{4}{3}\mu} - (V_{-\frac{1}{3}\mu} \cup U_{-\frac{7}{3}\mu})$ (voir figure 5.4).

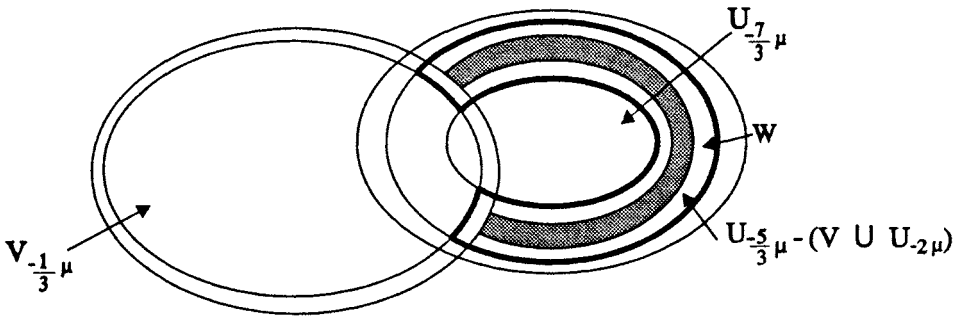


Figure 5.4.

Alors $p^{-1}(W)$ contient toutes les feuilles compactes de $\mathcal{F}'_1$ proches d'une fibre, sauf un nombre fini.

On peut alors construire un feuilletage $\mathcal{F}_1$, coïncidant avec $\mathcal{F}'_1$ hors d'un voisinage aussi petit que l'on veut des feuilles compactes de $\mathcal{F}'_1$, proches d'une fibre et contenues dans $p^{-1}(W)$ tel que $\mathcal{F}_1$ soit aussi proche que l'on veut de $\mathcal{F}'_1$, et qu'il n'ait qu'un nombre

fini de feuilles compactes proches d'une fibre; on peut donc choisir $\mathcal{F}_1$ ε-proche de $\mathcal{F}$ et coïncidant avec $\mathcal{F}'_1$ hors de $p^{-1}(W_{+\frac{1}{3}\mu})$.

Un tel feuilletage $\mathcal{F}_1$ coïncide avec $\mathcal{F}_0$ hors de $p^{-1}(U_{-\mu})$ et avec $\mathcal{G}$ sur $p^{-1}(V_{-\mu} \cup U_{3\mu})$, de plus il est ε-proche de $\mathcal{F}$ et n'a qu'un nombre fini de feuilles compactes proches d'une fibre, ce qui achève la preuve du lemme. □

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME:

On choisit deux recouvrements finis, $\{U^i\}$ et $\{U'^i\}, i \in \{1, \ldots, k\}$, de B par des ouverts de diamètre inférieur à δ, tels que U'^i soit relativement compact dans U_i.

Notons $m > 0$ un minorant strict de la distance séparant tout point de U'^i de $B - U^i_i$, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Notons $\mu = \frac{m}{k+3}$.

Notons $V^0 = \emptyset, V^1 = U^1_{-3\mu}$, et on définit par itération: $V^{i+1} = V^i_{-\mu} \cup U^{i+1}_{-3\mu}$. Remarquons que $V^k = B$.

Notons $\varepsilon = \varepsilon(\mu)$.

Soient $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{G}$ deux feuilletages ε-proches de $\mathcal{F}$. D'après le Lemme c-2 on construit facilement par récurrence une suite $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1, \ldots \mathcal{F}_k$ de feuilletages ε-proches de $\mathcal{F}$, n'ayant qu'un nombre fini de feuilles compactes proches d'une fibre, et tels que:

- $\mathcal{F}_{i+1}$ coïncide avec $\mathcal{F}_i$ hors de $p^{-1}(U^{i+1}_{-\mu})$.
- $\mathcal{F}_{i+1}$ coïncide avec $\mathcal{G}$ sur $p^{-1}(V^{i+1})$. (En particulier $\mathcal{F}_k = \mathcal{G}$).

D'après le Lemme c-1 pour tout j, $i(\mathcal{F}_j) = i(\mathcal{F}_{j+1})$. En particulier $i(\mathcal{F}_0) = i(\mathcal{G})$, ce qui achève la preuve du Théorème A. □

Appendice 1

LE THÉORÈME DE FULLER

La Partie 2 a présenté le Théorème de Fuller dans le cadre des fibrations en cercles: cela ne représente qu'un exemple simple, celui qui est utile (et nécessaire) aux autres chapitres.

Je me propose maintenant d'exposer en détail le Théorème de Fuller dans son cadre général. Sous cette forme, il ne sera pas utilisé dans les autres chapitres, et n'est présenté qu'à titre de complément.

§1 Introduction

Les orbites fermées d'un champ de vecteurs jouent un rôle comparable à celui des points fixes, ou périodiques, d'un difféomorphisme. Il est facile d'associer un indice à une orbite fermée isolée d'un champ de vecteurs: l'holonomie (ou application de Poincaré) de cette orbite a un point fixe isolé; par définition, l'indice de l'orbite sera égal à l'indice du point fixe isolé de son holonomie divisé par la multiplicité de l'orbite.

Il est connu que l'on peut associer un entier appelé indice à tout compact isolé de points fixes d'un difféomorphisme. Fuller a généralisé cette théorie au cas des orbites fermées d'un champ de vecteurs: il associe de façon naturelle un nombre rationnel appelé indice à tout compact isolé d'orbites fermées K d'un champ de

vecteurs X. Cet indice est invariant par petites déformations du champ X et représente donc un critère de stabilité du compact K: si l'indice $i(K)$ est non nul, tout champ de vecteurs proche de X possèdera des orbites fermées proches de K.

Le calcul de cet indice se fait simplement: on choisit un champ de vecteurs X' proche de X, et n'ayant qu'un nombre fini d'orbites fermées proches de K: la somme des indices de ces orbites de X' sera égale à $i(K)$.

§2 Définitions. Construction de l'indice

Dans tout cet appendice, M sera une variété différentiable, pas forcément compacte, munie d'une métrique riemannienne. On note X un champ de vecteurs de classe C^1 sur M (il suffit en fait que X soit continu, mais définisse un flot) et l'on note X_t le flot de X.

a) Compact isolé d'orbites périodiques.

Même si M est compacte, l'ensemble des points de M dont l'orbite par X est fermée n'est en général pas fermé dans M, et donc pas compact. Cela rappelle ce qui se passe pour les points périodiques d'un difféomorphisme.

EXEMPLE: Les points périodiques du difféomorphisme d'Anosov (défini par la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbf{Z})$) sur le tore T^2 sont denses. Par suspension de ce difféomorphisme, on construit un champ de vecteurs sur une variété compacte M, ayant ses orbites fermées denses dans M. De plus, ce champ est structurellement stable: tout champ voisin aura donc cette même propriété.

Soit φ un difféomorphisme de M. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ fixé, l'ensemble des points de période k est un fermé de M (donc un compact si M est compacte).

De même que ci-dessus, pour parler de compact d'orbites fermées d'un champ de vecteurs X, nous allons considérer les orbites avec leurs périodes.

Considérons le produit $M\times]0;+\infty[$; on notera $\pi = M\times]0,+\infty[\to M$ la projection. Le flot X_t, $t \in \mathbf{R}$, définit une application $(x,t) \to X_t(x)$ définie sur un ouvert de $M\times]0, +\infty[$.

On dira qu'un point $(x,t) \in M\times]0, \infty[$ est *périodique* si $X_t(x)$ est défini et que $X_t(x) = x$. Soit γ l'orbite de x. Si (x,t) est périodique, alors pour tout $y \in \gamma$, (y,t) est périodique. On dira que (γ,t) est une *orbite périodique* de *période* t. Si x n'est pas une singularité de X, la *plus petite période* de x, $t_0 = inf\{t \in]0, \mathbf{R}[, (x,t)$ périodique $\}$, est non nulle; de plus $\frac{t}{t_0}$ est un entier m, appelé *multiplicité* de l'orbite (γ,t).

REMARQUE 5.A.2.A-1. L'ensemble des points périodiques est fermé dans $M\times]0,+\infty[$. Si U est un ouvert relativement compact dans le domaine de définition du flot de X, et si le bord ∂U ne contient pas de points périodiques, alors l'ensemble des points périodiques contenus dans U est compact.

DÉFINITION 5.A.2.A-2. On appelle *compact isolé d'orbites périodiques* du champ de vecteurs X tout compact $K \subset M\times]0, +\infty[$, tel que K soit l'ensemble des points périodiques contenus dans un ouvert U.

DÉFINITION 5.A.2.A-3. Si K est un tel compact, on peut choisir l'ouvert U relativement compact dans le domaine de définition du flot de X et sans points périodiques sur son bord ∂U. On dit alors que U est un *ouvert isolant* pour K.

Soit $K \subset M\times]0, +\infty[$ un compact isolé d'orbites périodiques de X, et notons $k = \pi(K)$ sa projection sur M. C'est un com-

pact, stable par le flot de X, et ne contenant pas de singularités du champ X.

b) Perturbations d'un compact isolé d'orbites périodiques

On s'intéresse aux champs de vecteurs Y, C^0-proches de X. Si la variété M est compacte, $||Y||_0 = \sup_{x\in M} ||Y(x)||$ est une norme définissant la C^0-topologie sur l'espace des champs de vecteurs sur M.

Si M n'est pas compacte on ne dispose pas d'une telle norme. Cependant, pour tout compact C de M, on dispose d'une semi-norme, $||Y||_C = \sup_{x\in C} ||Y(x)||$. Si l'on considère une suite croissante de compacts C_n dont l'union est M, l'ensemble des semi-normes $||\ \ ||_{C_n}$ définit la C^0-topologie de l'ensemble des champs de vecteurs sur M.

Soit $K \subset M\times]0,\infty[$ un compact isolé d'orbites périodiques du champ X, et soit U un ouvert isolant pour K.

LEMMA 5.A.2.B-1. *Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de X pour la C^0-topologie tel que, pour tout $Y \in \mathcal{V}$, le flot de Y soit défini sur un voisinage de l'adhérence de U, et que Y soit sans point périodique sur le bord de U.*

Ce lemme est très facile, et sa démonstration est laissée au lecteur. On donne les indications suivantes:

– si M n'est pas compacte, on considère un compact $C \subset M$, contenant dans son intérieur le compact $\{X_t(x)/\exists t_1, (x_1,t_1) \in \bar{U}, t \in [0,t_1]\}$. Il suffit alors que $||X-Y||_C$ soit assez petit pour que le lemme soit vrai.

– X est sans point périodique sur le bord ∂U qui est compact. On en déduit:

$$\inf_{(x,t)\in\partial U} d(X_t(x),x) > 0$$

LEMMA 5.A.2.B-2. *Dans tout voisinage de X pour la C^0-topologie, il existe un champ Y n'ayant qu'un nombre fini d'orbites périodiques contenues dans U.*

Ce lemme est un lemme classique de système dynamique (voir, par exemple, la démonstration du théorème de Kupka-Smale dans [PM]).

Soit Y un champ défini par le Lemme b-2. Notons $Y_t = (1-t)X + tY, t \in [0,1]$. La famille $Y_t, t \in [0,1]$ réalise une isotopie entre les champs X et Y. Si Y a été choisi suffisamment C^0-proche de X, alors pour tout t, le flot de Y_t sera défini sur l'adhérence de U, et Y_t sera sans point fixe sur ∂U.

§3 Indice d'un compact isolé d'orbites périodiques (Théorème de Fuller)

Soit Y un champ de vecteurs sur M, et soit (γ, p) une orbite périodique isolée de Y, de multiplicité m.

Soit T une transversale du champ Y en un point $y \in \gamma$, et soit P l'application de premier retour de Y sur T: alors y est un point fixe isolé de P^m. L'indice $i_m(y)$ de ce point fixe isolé de P^m ne dépend ni du point y choisi, ni de la transversale T.

On note $i(\gamma, p) = \frac{1}{m} \cdot i_m(y) \in \mathbf{Q}$; c'est par définition, *l'indice de l'orbite périodique* (γ, p).

Soit k un compact isolé d'orbites périodiques du champ X et soit U un ouvert isolant de K. Soit Y un champ C^0-proche de X, n'ayant qu'un nombre fini d'orbites fermées $(\gamma_j, p_j), j \in \{1, \ldots, n\}$, contenues dans U. Notons $i_U(Y) = \sum_j i(\gamma_j, P_j) \in \mathbf{Q}$.

THÉORÈME *(Fuller). Avec les notations qui précèdent, $i_U(Y)$ ne dépend pas du champ de vecteurs Y, n'ayant qu'un nombre fini*

d'orbites périodiques contenues dans U, et choisi suffisamment C^0-proche de X. On note $i_U(X) = i_U(Y)$; de plus $i_U(X)$ ne dépend pas de l'ouvert isolant U de K choisi. On appelle donc indice $i_X(K)$, du champ X sur K, le nombre $i_U(Y)$.

On déduit facilement du Théorème de Fuller que l'indice $i_X(K)$ est invariant par les déformations du champ X ne créant pas d'orbite périodique sur le bord de U. C'est ce qu'exprime la proposition suivante:

PROPOSITION 5.A.3.-1. *Soit $\{U_t\}_{t\in[0,1]}$ une famille d'ouverts de $M\times$*
$]0,+\infty[$ tel que l'union $\bigcup_{t\in[0,1]} U_t \times \{t\}$ soit un ouvert de $M\times]0,+\infty[\times[0,1]$.

Soit $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ une famille de champs de vecteurs sur M, continue pour la C^0-topologie, et telle que pour tout t, U_t soit relativement compact dans le domaine de définition du flot de X_t, et que le bord ∂U_t ne contienne pas de points périodiques de X_t. Alors l'ensemble des points périodiques de X_t contenus dans U_t, est un compact isolé d'orbites périodiques que l'on note K_t.

Alors, pour tout $t \in [0,1]$ $i_{X_0}(K_0) = i_{X_t}(K_t) = i_{X_1}(K_1)$.

§4 Remarque sur la définition

Cette partie est destinée au lecteur qui, comme moi, aura été surpris du fait que l'indice $i(\gamma, p)$, d'une orbite périodique isolée de multiplicité m, soit égal à l'indice du point fixe isolé de l'application de $n^{ème}$ retour, *divisé par m.*

Voici d'abord, de façon très informelle l'idée intuitive:

On veut associer un indice à toute orbite périodique isolée, de façon que la somme des indices des orbites contenues dans un ouvert

fixé soit invariante par petites perturbations.

On a déja vu que la notion même d'orbites périodiques isolées oblige à les considérer avec leur période, et leur multiplicité... il parait naturel que l'indice d'une orbite périodique γ de multiplicité 1 soit égal à l'indice du point fixe de son application de premier retour.

Cependant, si l'application de premier retour possède des points périodiques de périodes k, les orbites correspondantes, de multiplicité 1, rencontrent chacune k fois la transversale: leur indice est donc compté k fois dans l'indice des points fixes de l'application de $k^{ème}$ retour, alors que l'orbite γ, prise avec multiplicité k, ne correspond qu'à un seul point fixe.

Faire la somme des indices des orbites périodiques de multiplicité 1 revient, dans ce cas, à ne considérer que 1 point fixe sur k: d'où l'idée de prendre pour indice de γ (avec multiplicité k) l'indice divisé par k du point fixe correspondant de l'application de $k^{ème}$ retour. La somme des indices des orbites périodiques est alors égale à l'indice, divisé par k, de l'ensemble des points fixes de l'application de $k^{ème}$ retour: on en déduit facilement l'invariance par petites pertubations.

Pour voir de façon un peu plus rigoureuse cette idée, je propose de regarder un exemple simple: celui des champs de vecteurs définis par suspension d'un difféomorphisme.

Soit V une variété compacte et soit $M = V \times S^1$. On considère le cercle S^1 comme $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, on en déduit la coordonnée $t \in S^1$, et le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial t}$ sur M.

On considère les champs de vecteurs de la forme $X(x,t) = v(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}$, où $v(x,t)$ est un champ de vecteurs sur M tangents aux facteurs $V \times \{t\}$.

On considère $V \times \{0\}$. On note f_X la restriction à $V \times \{0\}$ du

temps 1 du flot du champ X: c'est un difféomorphisme de V isotope à l'identité. Le champ X peut être vu comme la suspension de f_X.

Toutes les orbites périodiques de X ont des périodes entières.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons $K_n(X) \subset M \times [0,\infty[$ l'ensemble des points périodiques de la forme (x,n). C'est un compact isolé d'orbites périodiques, admettant $U_n = M \times]n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}[$ comme ouvert isolant.

Les orbites γ telles que (γ,n) soit inclus dans $K_n(X)$ sont les orbites des points fixes de l'application $f_X^n : V \times \{0\} \to V \times \{0\}$.

Remarquons qu'à une orbite $(\gamma,n) \subset K_n(x)$ correspond exactement $\frac{n}{m}$ points fixes de f_X^n, où m est la multiplicité de (γ,n).

Soit $(\gamma,n) \subset K_n(X)$ une orbite périodique de multiplicité m, et soient: $x_1, \ldots, x_{\frac{n}{m}}$ l'ensemble des intersections de γ avec $V \times \{0\}$. Ce sont des points fixes isolés de f_X^n. Notons $i(f_X^n, x_j)$ leur indice: ils sont tous égaux à $i(f_X^n, x_1)$.

La définition de l'indice de Fuller $i(\gamma,n)$ est:

$$i(\gamma,n) = \frac{1}{m} i(f_X^n, x_1) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n/m} i(f_X^n, x_j)$$

Si X est tel que $K_n(X)$ est composé d'un nombre fini d'orbites (c'est-à-dire que f_X^n a un nombre fini de points fixes) alors on a:

$$\begin{aligned} i_{U_n}(X) &= \Sigma\{i(\gamma,n)/(\gamma,n) \subset K_n(X)\} \\ &= \frac{1}{n}\Sigma\{i(f_X^n,x)/x \in \mathrm{Fix}(f_X^n)\} \\ &= \frac{1}{n}\chi(V) \end{aligned}$$

Le Théorème de Fuller est donc évident dans ce cas. Pour tout champ $(X(x,t) = v(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}$, pour tout champ Y, C^0-proche de X,

tel que $K_n(Y)$ est composé d'un nombre fini d'orbites périodiques, $i_{U_n}(Y)$ est égal à $\frac{1}{n}\chi(V)$ donc est indépendant de Y.

§5 Démonstration du Théorème de Fuller

a) Notations.

Soit X un champ de vecteurs d'une variété M.

Soit $K \subset M\times]0,\infty[$ un compact isolé d'orbites périodiques de X, et soit U un ouvert isolant de K. Notons $T = \sup\{t/\exists x, (x,t) \in U\}$.

D'après le Lemme 2.b-1), il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de X pour la C^0-topologie tel que, pour tout $Y \in \mathcal{V}$ le flot de Y soit défini sur l'adhérence de U, et que Y soit sans point périodique sur le bord ∂U. On notera K_Y l'ensemble des points périodiques du flot de Y, contenus dans U.

On note K_X et k_Y les projections de K et de K_Y sur M par $\pi: M\times]0,\infty[\to M$.

Si K_Y est formé d'un nombre fini d'orbites périodiques on note $i_U(Y) = \sum_{(\gamma,p)\subset K_Y} i(\gamma,p)$.

On a vu que, si M n'est pas compacte, la C^0-topologie sur l'ensemble des champs de vecteurs sur M est donnée par un suite de semi-normes $||Y||_{C_n} = \sup_{x\in C_n} ||Y(x)||$ où les C_n forment une suite croissante de compacts recouvrant M (si M est compacte, une seule norme suffit).

On dira que Y est ε-proche de X, $\varepsilon > 0$, si pour tout $n \leq \frac{1}{\varepsilon}$, $||X-Y||_{C_n} < \varepsilon$. Les ε-voisinages de X ainsi construits forment une base de voisinages de X.

De plus, si Y_1 et Y_2 sont ε-proches de X, et si $\varphi: M \to [0,1]$ est une fonction différentiable, alors le champ $(1-\varphi)Y_1 + \varphi Y_2$ est

ε-proche de X.

Enfin, pour tout ouvert $O \subset M$, pour tout $\mu > 0$ on notera:

$$O_{-\mu} = \{x \in O / d(x, M - O) > \mu\}$$
$$O_{+\mu} = \{x \in M / d(x, O) < \mu\}$$

où d est la distance sur M.

b) Quelques lemmes

La démonstration repose sur le lemme local suivant:

LEMMA 5.A.5.B-1. *Pour toute orbite $\gamma \subset k_X$, il existe un voisinage O de γ dans M, et il existe $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout couple (Y_1, Y_2) de champs de vecteurs ε-proches de X tel que k_{Y_1} et k_{Y_2} soient composés d'un nombre fini d'orbites, et tel que Y_1 et Y_2 coïncident hors de O, on a:*

$$i_U(Y_1) = i_U(Y_2).$$

La démonstration du Lemme 5.b-1 est l'objet de la Partie 6).

DÉFINITION 5.A.5.B-2. Un ouvert O de M est dit *adapté à K* si $k_X \cap \partial O$ est stable pour le flot de X.

LEMMA 5.A.5.B-3. *Toute orbite $\gamma \subset k_X$ possède une base de voisinage par des ouverts adaptés à K.*

DÉMONSTRATION: Notons $T = \sup\{t / \exists x, (x,t) \in U\}$.

Il suffit de remarquer que, pour tout ouvert E relativement compact dans M, tel que $\bar{E} \times [-2T, 2T]$ est inclus dans le domaine de définition du flot de X, alors l'ensemble $E_1 = \bigcup_{-T \leq t \leq T} X_t(E)$ est un ouvert adapté à K. (On montre facilement que E_1 est ouvert, et que $E_1 \cap k_X$ et $\bar{E}_1 \cap k_X$ sont stables par le flot de X). □

REMARQUE 5.A.5.B-4. Le Lemme 5.b-1 est encore valable si l'on remplace O par un autre voisinage $O' \subset O$ de γ. En particulier, d'après le Lemme 5.b-3, on peut supposer que O est adapté à K.

LEMMA 5.A.5.B-5. *Soient A et B deux ouverts de M. On suppose que B est adapté à K. Fixons $\mu > 0$.*

Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'on ait la propriété suivante:

Soient Y et Z deux champs de vecteurs ε-proches de X, coïncidant sur A, et tels que k_Y et k_Z soient composés d'un nombre fini d'orbites périodiques.

Alors il existe un champ de vecteurs Y_1 vérifiant les propriétés suivantes:

- *Y_1 est ε-proche de X.*
- *k_{Y_1} est composé d'un nombre fini d'orbites.*
- *Y_1 coïncide avec Y hors de $B_{+\mu}$.*
- *Y_1 coïncide avec Z sur $A_{-\mu} \cup B_{-2\mu}$.*

DÉMONSTRATION:

Soit $\psi: M \to [0,1]$ une fonction de classe C^∞ égale à 0 hors de B et égale à 1 si $B_{-\mu}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout couple (Y, Z) de champs ε-proches de X, tels que k_Y et k_Z soient composés d'un nombre fini d'orbites, et tels que Y coïncide avec Z sur A, on pose $Y_0 = (1-\psi)Y + \psi Z$. C'est un champ ε-proche de X, qui coïncide avec Y hors de B et avec Z sur $A \cup B_{-\mu}$. Mais rien n'assure que k_{Y_0} soit composé d'un nombre fini d'orbites périodiques.

Notons $C = \bar{B} - B_{-\mu} - A$ (voir Figure 5.5).

AFFIRMATION: *Si ε est assez petit, pour tout couple (Y, Z) toute orbite $\gamma \subset k_{Y_0}$, $\gamma \not\subset k_Y \cup k_Z$, rencontre C.*

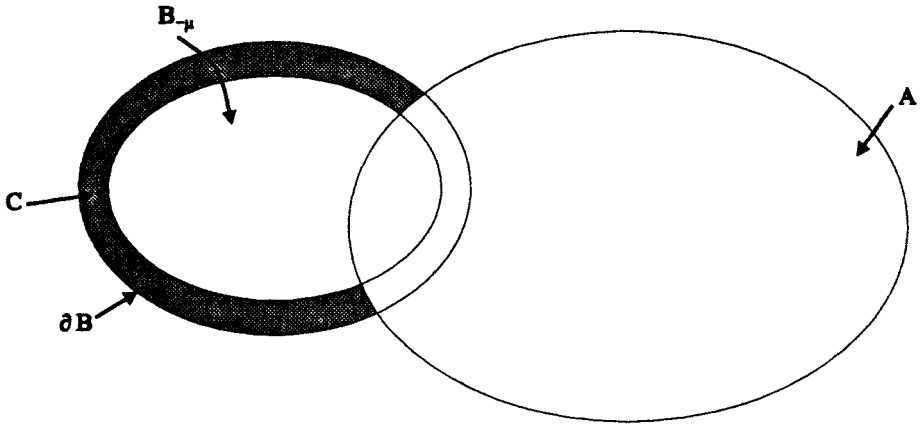


Figure A.1.

DÉMONSTRATION: Soit $\gamma \subset k_{Y_0}$ telle que $\gamma \not\subset k_Y \cup k_Z$, et telle que γ ne rencontre pas C. Alors on a:

- γ n'est pas incluse dans $A \cup B_{-\mu}$ (sinon $\gamma \subset k_Z$).
- γ rencontre $B - A$ (sinon $\gamma \subset k_Y$).
- γ ne rencontre pas $\bar{B} - (B_{-\mu} \cup A)$ (par hypothèse).

On en déduit que γ rencontre $M - B$ et rencontre $B_{-\mu}$.

Si, pour tout $\varepsilon > 0$ on pouvait trouver (Y, Z) tel que k_{Y_0} contienne une telle orbite γ_0, on en déduirait l'existence d'une orbite $\gamma \subset k_X$ rencontrant $M - B$ et $B_{-\mu}$. Ceci est contraire à l'hypothèse: B adapté à K.

Donc, si ε est assez petit, toute orbite $\gamma \subset k_{Y_0}$, sauf un nombre fini, rencontre C. Donc par une C^∞-perturbation de Y_0, on construit Y_1 coïncidant avec Y_0 hors de $C_{+\mu}, \varepsilon$-proche de X, et tel que k_{Y_1} soit composé d'un nombre fini d'orbites. Le champ Y_1 vérifie toutes les propriétés annoncées. □

REMARQUE 5.A.5.B-6. Soit $\gamma \subset k_X$ une orbite de X, et O un voisinage de γ dont le Lemme b-1 assure l'existence. Soit B un voisinage de γ, adapté à K et relativement compact dans O. Alors, pour tout $\mu > 0$ assez petit, $B_{+\mu}$ est inclus dans O. Reprenons les notations du Lemme b-5; on a alors:

$$i(Y) = i(Y_1).$$

c) Démontration du théorème

On choisit deux recouvrements finis $\{O^i\}$ et $\{B^i\}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, de k_X par des ouverts de M tels que les ouverts B^i soient adaptés à K et relativement compacts dans O^i, et que les ouverts O^i soient définis par le Lemme b-1.

On choisi $\mu > 0$ tel que, pour tout i, $B^i_{+\mu}$ soit inclus dans O^i, et que k_X soit inclus dans l'union des $B^i_{-2n\mu}$.

On choisit $\varepsilon > 0$ tel que l'on ait les propriétés suivantes:

- pour tout Y ε-proche de X, k_Y est inclus dans $\bigcup_{i=1}^n B^i_{-2n\mu}$.
- pour tout i, pour tout couple (Y, Z) de champs de vecteurs ε-proches de X, tel que k_Y et k_Z soient formés d'un nombre fini d'orbites, et que Y et Z coïncident hors de O^i, on a: $i_U(Y) = i_U(Z)$.

On pose $A^o = \emptyset$, et on définit par itération $A^i = A^{i-1}_{-\mu} \cup B^i_{-2\mu}$. Alors A^n contient $\bigcup_{i=1}^n B^i_{-2n.\mu}$. Donc pour tout couple (Y, Z) de champs ε-proches de X, coïncidant sur A^n, et tel que k_Y et k_Z soient formés d'un nombre fini d'orbites, on a: $i_U(Y) = i_U(Z)$.

Avec ces notations, soient Y et Z deux champs de vecteurs ε-proches de X, tels que k_Y et k_Z soient formés d'un nombre fini d'orbites périodiques.

Alors, grâce au Lemme b-5, on construit facilement par itération une suite $Y = Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ de champs vérifiant les propriétés suivantes:

- Y_i est ε-proche de X.
- k_{Y_i} est composé d'un nombre fini d'orbites périodiques.
- Y_i coïncide avec Y_{i-1} hors $B^i_{+\mu}$.
- Y_i coïncide avec Z sur A^i.

Donc d'après la Remarque b-6, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ on a: $i_U(Y_{j-1}) = i_U(Y_j)$.

De plus, comme Y_n et Z coïncident sur A^n, on a: $i_U(Y_n) = i_U(Z)$.

On vient de montrer que $i_U(Y)$ est égal à $i_U(Z)$.

Donc l'indice $i_U(Y)$ est indépendant du champ Y choisi ε-proche de X, et tel que k_Y se compose d'un nombre fini d'orbites. On note donc $i_U(X)$ cet indice.

Il reste à voir que $i_U(X)$ ne dépend pas de l'ouvert isolant U de K choisi: soit $V \subset U$ un ouvert isolant de K. On voit facilement que pour tout Y suffisamment C^0-proche de X, l'ensemble $K_U(Y)$ des points périodiques de Y contenus dans U est inclus dans V. On en déduit que $i_U(Y) = i_V(Y)$ et donc que $i_U(X) = i_V(X)$. □

On notera donc $i_X(K)$ cet indice.

Le Théorème de Fuller est démontré: il reste cependant à prouver le Lemme 5.b-1.

§6 Démonstration du Lemme 5.b-1

Soit $\gamma \subset k_X$ une orbite périodique, et soit p sa plus petite période. Notons $I \subset \mathbf{N}^*$ l'ensemble des entiers i tels que l'orbite périodique $(\gamma, i.p)$ soit incluse dans K. L'ensemble I est fini.

Le Théorème de Fuller

Soit O un voisinage tubulaire de γ dans M, de la forme $O \simeq D \times S^1$, où D est un disque compact de $\mathbf{R}^{\dim M-1}$. On choisit ce voisinage tubulaire de façon que le champ X soit transverse à tous les $D \times \{\alpha\}, \alpha \in S^1$. Donc, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, tout champ Y ε-proche de X est transverse aux disques $D \times \{\alpha\}$.

Fixons un point 0 du cercle S^1. Pour tout champ Y ε-proche de X, on définit l'application de premier retour f_Y du flot de Y, restreint à O, sur $D \times \{0\}$. Un point $x \in D \times \{0\}$ est dans le domaine de définition de f_Y si son orbite, pour les temps positifs, coupe à nouveau $D \times \{0\}$ avant de sortir de O.

Pour tout point $x \in D \times \{0\}$ tel que f_Y soit définie, on note $t_Y(x)$ le temps de ce premier retour: l'orbite de x pour le champ Y est définie sur le segment $[0, t_Y(x)]$, et $Y_{[0,t_Y(x)]}(x)$ est contenu dans O et ne rencontre $D \times \{0\}$ qu'aux temps 0 et $t_Y(x)$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit de même l'application de $n^{ème}$ retour, f_Y^n, du flot de Y sur $D \times \{0\}$, et le temps de $n^{ème}$ retour $t_{n,Y}$.

LEMMA 5.A.6-1. *On peut choisir le voisinage tubulaire O et $\varepsilon > 0$ de façon que, pour tout champ Y ε-proche de X, pour tout $x \in D \times \{0\}$, pour tout $t \in]0, +\infty[$, les propriétés suivantes soient équivalentes:*

i) l'orbite γ de x pour Y est contenue dans O, périodique de période t, et (γ, t) est inclus dans U (donc dans K_Y).

ii) il existe $i \in I$ tel que $f_Y^i(x)$ soit défini et égal à x, et que $t_{i,Y}(x)$ soit égal à t.

DÉMONSTRATION: Raisonnons par l'absurde:

Fixons $O \simeq D \times S^1$. Choisissons une suite décroissante de disques $D_n, n \in \mathbf{N}$, et notons $O_n \simeq D_n \times S^1$. On choisit cette

suite de façon que $\bigcap_n O_n$ soit égal à γ.

Choisissons une suite $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbf{N}}, \varepsilon_n > 0, \lim \varepsilon_n = 0$.

On suppose que, pour tout n, il existe un champ Y_n, ε_n-proche de X, vérifiant les propriétés suivantes:

- il existe $x_n \in D_n \times \{0\}$ tel que l'orbite γ_n de x_n pour Y_n soit périodique et contenue dans 0_n, et il existe une période t_n telle que $(\gamma_n, t_n) \subset U$.
- pour tout $i \in I, t_{i,Y_n}(x_n) \neq t_n$.

Alors, comme (γ_n, t_n) est contenu dans U, on a: $t_n \leq T$ (voir Paragraphe 5.a: notations). Donc, quitte à prendre une sous-suite, la suite t_n converge vers $t \in [0, T]$. Alors la suite (γ_n, t_n) converge vers une orbite périodique (γ, t) de X, contenue dans l'adhérence de U. Or, par hypothèse, le bord ∂U ne contient pas de point périodique, donc (γ, t) est incluse dans U, et il existe $i \in I$ tel que $t = t_{i,X}(x)$, où x est le point d'intersection de γ avec $D \times \{0\}$. On en déduit facilement que pour n assez grand, $t_n = t_{i,Y_n}(x_n)$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

On vient de montrer par l'absurde que, pour n assez grand, si l'on choisit $O = O_n$ et $\varepsilon = \varepsilon_n$, alors, pour tout Y ε_n-proche de X, on a: i) $\Rightarrow$ ii).

La réciproque se fait de façon analogue, en utilisant le fait que toute orbite périodique (γ, t) contenue dans l'adhérence de U est contenue dans U.

Fixons un voisinage tubulaire O de γ d'après le Lemme 6-1.

On choisit $t_0 > 0$ ayant les propriétés suivantes:

- soit $x \in D \times \{0\}$ hors du domaine de définition de f_X. Alors l'orbite de x pour X sort de O en un temps inférieur à t_0.
- soit $x \in D \times \{0\}$ tel que $f_X(x)$ soit défini; alors $t_X(x) < t_0$.

Notons $T_0 = 4t_0 \cdot \sup I$.

L'intersection $\bigcap_{-T_0 \leq t \leq T_0} X_t(O)$ est un ouvert contenant γ. Notons O_0 un voisinage ouvert de γ, relativement compact dans $\bigcap_{-T_0 \leq t \leq T_0} X_t(O)$, et de la forme $O_0 \simeq D_0 \times S^1$.

Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout champ Y ε_0-proche de X, on ait les propriétés suivantes:

1) toute orbite $\gamma \subset k_Y$ rencontrant O_0 est incluse dans O.
2) Pour tout $i \leq 2 \sup I$, $D_0 \times \{O\}$ est inclus dans le domaine de définition de f_Y^i.

Pour tout Y ε_0-proche de X, on note $D_Y = \bigcap_{i=0}^{\sup I} f_Y^i(D_0 \times \{0\})$. Alors pour tout $i \leq \sup I$, f_Y^i est définie sur D_Y.

Remarquons que si aucune orbite $\gamma \subset k_Y$ ne rencontre le bord $\partial D_0 \times \{0\}$, alors, pour tout $i \in I$, f_Y^i est sans point fixe sur le bord ∂Y.

LEMMA 5.A.6-2. *Soit Y ε-proche de X, tel que k_Y soit composé d'un nombre fini d'orbites, et tel que k_X ne rencontre pas le bord $\partial D_0 \times \{0\}$. Alors la somme des indices $i(\gamma, p)$ où $(\gamma, p) \subset K_Y$ et γ rencontre $D_0 \times \{0\}$, est égale à $\sum_{i \in I} \frac{1}{i} ind(f_Y^i, D_Y)$, où $ind(f_Y^i, D_Y)$ est l'indice de la fonction f_Y^i sur D_Y.*

DÉMONSTRATION:

L'indice de f_Y^i sur D_Y est la somme des indices des points fixes de f_Y^i. D'après le Lemme 6-1, l'orbite γ de chacun de ces points x est périodique et $(\gamma, t_{i,Y}(x)) \in K_Y$. Soit m la multiplicité de γ. Alors γ rencontre $D \times \{0\}$ en exactement $\frac{i}{m}$ points, tous appartenant à K_Y. De plus, l'indice de chacun de ces points comme point fixe de f_Y^i est égal à $\frac{1}{m} i(\gamma)$.

Enfin, si $x \in D_Y$ est un point fixe de f_Y^i alors $(x, t_{i,Y}(x)) \in K_Y$ (d'après le Lemme 6-1), et l'orbite de Y passant par x rencontre $D_0 \times \{0\}$.

Donc ind (f_Y^i, D_Y) est égal à i fois la somme des indices $i(\gamma, t)$, où (γ, t) est une orbite qui rencontre $D_0 \times \{0\}$ en un point x, et telle que $t = t_{i,Y}(x)$.

On en déduit facilement le Lemme 6-2. □

Choisissons $O_1 \simeq D_1 \times S \subset D \times S^1$ un voisinage de γ relativement compact dans $\bigcap_{-T_0 \leq t \leq T_0} X_t(O_0)$.

Alors il existe $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon_0[$ tel que, pour tout champ Y ε_1-proche de X, on ait les deux propriétés suivantes:

1) toute orbite $\gamma \subset k_Y$, rencontrant O_1, est incluse dans O_0. En particulier γ rencontre $D_0 \times \{0\}$.
2) il existe un voisinage du bord $\partial D_0 \times \{0\}$ tel que, pour tout $i \leq 2 \sup I$, pour tout x appartenant à ce voisinage, le segment $Y_{[0, t_{i,Y}(x)]}(x)$ ne rencontre pas O_1.

LEMMA 5.A.6-3. *Soient Y et Z deux champs ε_1-proches de X coïncidant hors de O_1. Alors, D_Y est égal à D_Z, de plus, pour tout i, les applications f_Y^i et f_Z^i coïncident sur un voisinage du bord ∂D_Y.*

Si de plus k_Y et k_Z sont composés d'un nombre fini d'orbites, alors $i_U(Y) = i_U(Z)$.

DÉMONSTRATION:

La première partie du lemme est évidente, d'après la seconde propriété vérifiée par les champs ε_1-proche de X.

Si k_Y et k_Z sont composés d'un nombre fini d'orbites, on peut supposer (quitte à modifier très légèrement Y et Z par un difféomorphisme C^∞-proche de l'identité, et égal à l'identité sur 0_1), que k_Y et k_Z ne rencontre pas $\partial D_0 \times \{0\}$.

Alors pour tout $i \in I$, les indices de points fixes des applications f_Y^i et f_Z^i sur $D_Y = D_Z$ sont égaux.

Donc, d'après le Lemme 6-2, les sommes

$$\Sigma\{i(\gamma,p)/(\gamma,p) \subset K_Y, \gamma \cap D_0 \times \{0\} \neq \emptyset\}$$

et

$$\Sigma\{i(\gamma,p)/(\gamma,p) \subset K_Z, \gamma \cap D_0 \times \{0\} \neq \emptyset\}$$

sont égales.

On en déduit $i(Y) = i(Z)$.

La démonstration du Lemme 5.b-1 est achevée: le Lemme 6-3 vient de montrer que O_1 est le voisinage de γ dont on avait annoncé l'existence. □

Chapitre 6

FIBRES F TELLES QUE $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$

Le but de ce chapitre est de démontrer le Théorème B qui donne une condition nécessaire et suffisante à la C^1-stabilité de la fibre F d'une fibration, telle que $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$. Deux démonstrations en sont données.

La Partie 3 généralise aux fibrations de fibre F, vérifiant $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$, la démonstration de Seifert de la C^1-stabilité des fibres des fibrations en cercles, dont la base est une surface.

La Partie 4 démontre le Théorème B dans le cas général, en utilisant le Théorème A (sur les fibrations en cercles) et le théorème de réalisation des déformations de l'holonomie.

La Partie 2 présente un contre-exemple au Théorème B où l'on aurait remplacé C^1-stabilité par C^0-stabilité.

§1 Introduction

On a vu au Chapitre 3.4 que les déformations d'une fibration de fibre F, $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$, peuvent se comparer avec les déformations d'une fibration en cercles.

Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage défini par une fibration $p: M \to B$ de fibre $F, H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$. Il existe une fibration en cercles $q: E \to B$ et une

application $f: M \to E$ rendant commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & E \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ B & \xrightarrow[id]{} & B \end{array}$$

De plus f induit sur chaque fibre un isomorphisme f_*:

$$f_*: H_1(F,\ \mathbf{Z})/\text{Torsion} \to H_1(S^1, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$$

Si $\mathcal{G}'$ est un feuilletage, C^r-proche ($r \geq 1$) de la fibration q, et sans feuilles compactes proches d'une fibre, alors $f^{-1}(\mathcal{G}')$ est un feuilletage C^r-proche du feuilletage $\mathcal{F}$, et sans feuilles compactes proches d'une fibre: les théorèmes de C^∞-instabilité des fibrations en cercles se généralisent donc aux fibrations de fibre $F, H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$. On a donc:

PROPOSITION 6.1.1. *Soient M, B et F des variétés compactes connexes, telles que $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$. Soit $p: M \to B$ une fibration de fibre F.*
i) si B est de dimension paire et si la caractéristique d'Euler $\chi(B)$ est nulle, alors la fibre F est C^∞-instable.
ii) supposons que B soit de dimension impaire. Notons $\pi: \tilde{B} \to B$ le revêtement à deux feuillets associés à l'action de $\pi_1(B)$ sur $H_1(F, \mathbf{R})$.

Alors, si $\chi(\pi)$ est nul, la fibre F est C^∞-instable.

Dans ce chapitre, on va exploiter plus à fond l'analogie entre les fibrations de fibre $F, H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$, et les fibrations en cercles, afin de généraliser les résultats de stabilité de la fibre obtenus au Chapitre 5.

L'idée est que, pour tout feuilletage $\mathcal{F}'$ C^1-proche de la fibration, la déformation de l'holonomie d'un lacet nul en homologie dans une fibre, est négligeable devant la déformation de l'holonomie d'un lacet générateur de $H_1(F, \mathbf{R})$ (voir le Chapitre 4.3).

On appliquera cette idée à deux méthodes différentes.

Dans le cas où la base B est de dimension 2, nous allons généraliser la démonstration de Seifert (voir la Partie 3).

THÉORÈME. *Soit S une surface compacte de caractéristique d'Euler $\chi(S) \neq 0$. Alors, pour toute fibration $p: M \to S$ de fibre F telle que $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$, la fibre F est C^1-stable.*

Ce théorème est un cas particulier du Théorème B: sa démonstration directe, et beaucoup plus simple que celle du cas général, justifie qu'il soit présenté séparément.

Dans le cas général (voir la Partie 4), on verra que toute C^1-déformation du feuilletage $\mathcal{F}$ défini par la fibration $p: M \to B$, induit une C^1-déformation de la fibration en cercles associée à p.

On en déduit:

THÉORÈME B. *Soit $p: M \to B$ une fibration de fibre F, telle que $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$, et soit $q: E \to B$ la fibration en cercles naturellement associée à p. Alors:*

a) la fibre F de p est C^1-stable si et seulement si la fibre S^1 de q est C^1-stable.

b) si B est de dimension paire, et que la caractéristique d'Euler $\chi(B)$ est non nulle, alors la fibre F est C^1-stable.

c) si B est de dimension impaire: soit $\pi: \tilde{B} \to B$ le revêtement à deux feuillets associé à l'action de $\pi_1(B)$ sur $H_1(F, \mathbf{R})$; alors, si $\chi(\pi)$ est non nul, la fibre F est C^1-stable.

Ces résultats utilisent les propriétés des difféomorphismes C^1-proches de l'identité, présentées au Chapitre 4. C'est pour cela qu'ils sont exprimés en termes de C^1-stabilité.

De plus, *ils sont faux pour la C^0-stabilité.* Afin de bien insister sur ce point, on montrera dans la Partie 2 que la fibre K, de la fibration triviale $S^2 \times K \to S^2$ (K = bouteille de Klein), est C^0-instable.

§2 C^0-instabilité de la fibration $p: S^2 \times K \to S^2$

Notons K la bouteille de Klein. Le groupe fondamental $\pi_1(K)$ est engendré par deux générateurs, a et b, avec comme seule relation: $aba^{-1} = b^{-1}$. Le premier groupe d'homologie $H_1(K, \mathbf{R})$ est $\mathbf{R}$, et est engendré par la classe $[a]$ de $a \in \pi_1(K)$. L'élément $b \in \pi_1(K)$ est nul en homologie ($[b] = 0$).

D'après le Théorème B (qui est l'objet des autres Parties de ce chapitre), la fibre K de la fibration triviale $S^2 \times K \to S^2$ est C^1-stable. Elle est cependant C^0-instable, comme le montre la proposition suivante:

PROPOSITION 6.2-1. *Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage défini par la fibration triviale $p: S^2 \times K \to S^2$. Il existe une suite $\{\mathcal{F}_n\}$ de feuilletages de classe C^∞, convergeant vers $\mathcal{F}$ pour la C^0-topologie des champs de plans, tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{F}_n$ ne possède aucune feuille compacte difféomorphe à K (cependant les feuilletages $\mathcal{F}_n$ possèdent des feuilles compactes difféomorphes au tore T^2).*

La démonstration de cette proposition est le but de cette Partie.

Nous allons construire le feuilletage $\mathcal{F}_n$ par suspension (voir Chapitre 3.3) d'une représentation $\rho_n: \pi_1(K) \to \mathrm{Diff}(S^2)$, telle que $\rho_n(a)$ et $\rho_n(b)$ soient C^0-proches de l'identité et n'aient aucun point

fixe commun. On verra que le feuilletage $\mathcal{F}_n$ ainsi obtenu est un feuilletage sur $S^2 \times K$, C^0-proche du feuilletage $\mathcal{F}$.

LEMME 6.2-2. *Il existe une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de difféomorphismes de classe C^∞ de la sphère S^2, convergeant vers l'identité pour la topologie C^0, telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un champ de vecteurs X_n de classe C^∞ sur S^2, avec les propriétés suivantes:*
i) $(f_n)_*(X_n) = -X_n$.
ii) Pour tout n, tout point récurrent du flot de X_n est une singularité de X_n.
iii) Pour tout n, Fix $(f_n) \cap$ Sing $(X_n) = \emptyset$, où Fix (f_n) est l'ensemble des points fixes de f_n et Sing (X_n) est l'ensemble des singularités de X_n.

DÉMONSTRATION:

Considérons S^2 comme étant la sphère standard de $\mathbf{R}^3$ muni des coordonnées (x, y, z).

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n > 2$, on choisit une fonction $\alpha_n = [-1, 1] \to]0, \pi[$, de classe C^∞, telle que α_n soit constante égale à π sur $[-1, \frac{1}{n} - 1] \cup [1 - \frac{1}{n}, 1]$, et soit inférieure à $\frac{1}{n}$ sur $[\frac{2}{n} - 1, 1 - \frac{2}{n}]$.

Notons f_n le difféomorphisme de S^2 défini de la façon suivante (voir Figure 6.1):

– f_n a deux points fixes: $(0, 0, 1)$ et $(0, 0, -1)$.

– pour tout $z \in]-1, 1[$, l'ensemble des points de S^2 dont la troisième coordonnée est égale à z est un cercle C_z. Alors f_n laisse invariant chacun des cercles C_z et sa restriction à C_z est la rotation d'angle $\alpha_n(z) > 0$.

On voit facilement que l'on a ainsi construit une suite de difféomorphismes f_n de classe C^∞ convergeant vers l'identité pour la topologie C^0.

Fibres F telles que $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$

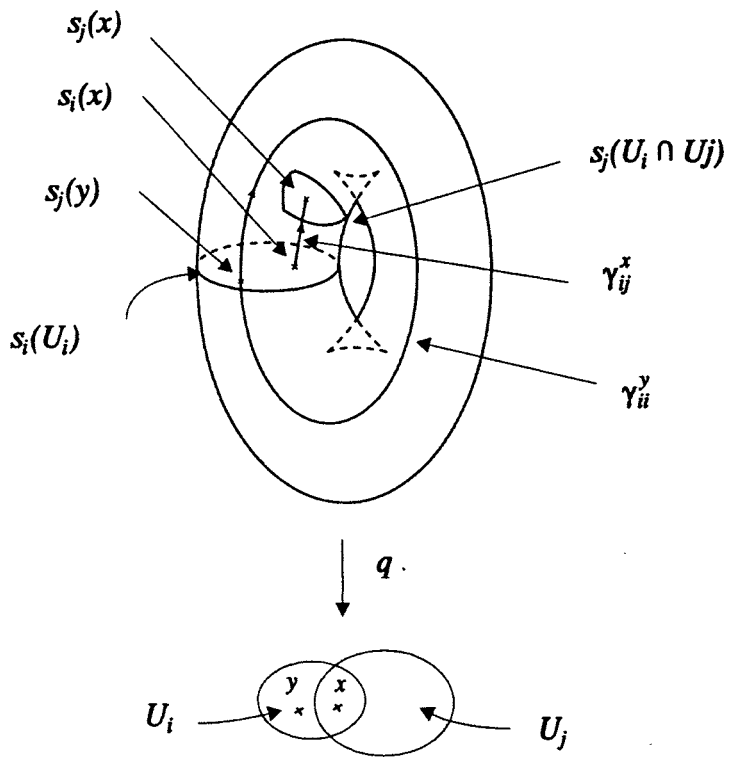


Figure 6.1.

Considérons les hémisphères ouverts $(z > 0)$ et $(z < 0)$ munis des coordonnées (x, y). Alors f_n coïncide avec l'application $(x, y) \to (-x, -y)$ sur le disque $x^2 + y^2 \leq 1 - \frac{1}{n^2}$ de chacun des hémisphères.

Notons $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ les champs de vecteurs tangents à la sphère S^2, définis sur les hémisphères $(z > 0)$ et $(z < 0)$, correspondant aux coordonnées (x, y). Alors $(f_n)_*(\frac{\partial}{\partial_n})$ et $(f_n)_*(\frac{\partial}{\partial y})$ coïncident avec $-\frac{\partial}{\partial x}$ et $-\frac{\partial}{\partial y}$ sur le disque $x^2 + y^2 \leq 1 - \frac{1}{n^2}$.

Notons $\varphi_n : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}_+$ une fonction de classe C^∞ ayant les propriétés suivantes:

- $\varphi_n(-x,-y) = \varphi_n(x,y)$.
- $\varphi_n(x,y) > 0$ si $x^2+y^2 < 1-\frac{1}{n^2}$.
- $\varphi_n(x,y) = 0$ si $x^2+y^2 \geq 1-\frac{1}{n^2}$.

Notons X_n le champ de vecteurs de la sphère S^2, défini sur chacun des hémisphères $(z > 0)$ et $(z < 0)$ par $X_n(x,y,z) = \varphi_n(x,y)\frac{\partial}{\partial x}$. Ce champ se prolonge de façon C^∞ par le champ nul sur le cercle $(z = 0)$.

Le champ X_n vérifie immédiatement toutes les propriétés annoncées.

Pour tout $n \in \mathbf{N}, n > 2$, et tout $t \in \mathbf{R}$, on note $g_{n,t}$ le temps t du flot du champ X_n construit au Lemme 2-2. C'est un difféomorphisme de classe C^∞. De plus $g_{n,t}$ converge vers l'identité pour la topologie C^0 quand n tend vers l'infini, (et uniformément en $t \in \mathbf{R}$): en effet $g_{n,t}$ coïncide avec l'identité en dehors de deux disques de S^2 dont les rayons (indépendants de t) tendent vers 0 quand n tend vers l'infini.

De plus, pour tout $n > 2$ et tout $t \in \mathbf{R}^*$, $g_{n,t}$ vérifie les deux propriétés suivantes:

- $f_n^{-1} \circ g_{n,t} \circ f_n = g_{n,t}^{-1}$.
- f_n et $g_{n,t}$ n'ont aucun point fixe commun.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n > 2$, $t \in \mathbf{R}$, il existe une unique représentation contravariante $\rho_{n,t}: \pi^1(K) \to \mathrm{Diff}(S^2)$ telle que $\rho_{n,t}(a) = f_n$ et $\rho_{n,t} = g^{n,t}$. Notons $\mathcal{F}_{n,t}$ le feuilletage obtenu par suspension de la représentation $\rho_{n,t}$.

LEMME 6.2-3. *Pour tout $n > 2, t \in \mathbf{R}$, la représentation $\rho_{n,t}$ est isotope à la représentation triviale.*

COROLLAIRE 6.2-4. *Pour tout $n > 2, t \in \mathbf{R}$, le feuilletage $\mathcal{F}_{n,t}$ est défini sur $S^2 \times K$, et est transverse à la fibration $S^2 \times K \to K$.*

De plus, pour $t \neq 0$, $\mathcal{F}_{n,t}$ est sans feuilles compactes proches d'une fibre.

DÉMONSTRATION: La famille $\{\rho_{n,s}\}_{s\in[0,t]}$ est une isotopie joignant $\rho_{n,t}$ à la représentation $\rho_{n,0}$ définie par $\rho_{n,0}(a) = f_n$, $\rho_{n,0}(b) = id$. Il suffit alors de remarquer que f_n est isotope à l'identité. Voir les Propositions 3.3.a-2 et 3.3.b-4, pour le corollaire. □

LEMME 6.2-5. *Quand n est grand, le feuilletage $\mathcal{F}_{n,0}$ peut être choisi C^0-proche de $\mathcal{F}$.*

DÉMONSTRATION: En effet $\mathcal{F}_{n,0}$ peut être construit de la façon suivante:

Faisons la suspension du difféomorphisme f_n. Comme f_n est C^0-proche de l'identité (et isotope à l'identité par un chemin C^0 -proche de l'identité) on obtient ainsi un feuilletage (de dimension 1) sur $S^2 \times S^1$, C^0-proche de la fibration triviale $S^2 \times S^1 \to S^1$ (pour la topologie des champs de droite). Rappelons que K est un fibré en cercles au-dessus de S^1. Donc $S^2 \times K$ est un fibré en cercles au dessus de $S^2 \times S^1$. Le feuilletage $\mathcal{F}_{n,0}$ est le pull-back par cette fibration, du feuilletage sur $S^2 \times S^1$ obtenu par suspension de f_n. En effet la famille de représentations $\rho_{n,t}$ varie différentiablement avec t (voir Chapitre 3.3).

LEMME 6.2-6. *Pour tout n, quand t est assez petit $\mathcal{F}_{n,t}$ est C^∞-proche de $\mathcal{F}_{n,0}$.*

COROLLAIRE 6.2-7. *Pour tout $n > 2$, il existe $t_n > 0$, tel que la suite $\{\mathcal{F}_{n,t_n}\}_{n>2}$ converge vers $\mathcal{F}$ pour la C^0-topologie des champs de plans.*

Comme t_n est non nul, $\mathcal{F}_{n,t_n}$ est sans feuilles compactes proches d'une fibre. La Proposition 2-1 est donc démontrée. □

REMARQUE 6.2-8. Pour tout $n > 2$ et tout t, f_n a des points périodiques de période 2 qui sont des points fixes de $g_{n,t}$. Il est facile de voir que ces points correspondent à des feuilles compactes de $\mathcal{F}_{n,t}$ difféomorphes au tore T^2.

§3 Si la base est de dimension 2: la démonstration de Seifert

Le but de cette Partie est de reprendre la démonstration de Seifert pour la stabilité des fibrations en cercles (voir le Chapitre 5.1) et de la généraliser pour montrer le théorème suivant (Théorème B, dans le cas où la base est une surface):

THÉORÈME 6.3-2. *Soit S une surface compacte de caractéristique d'Euler $\chi(S)$ non nulle. Soit $p: M \to S$ une fibration de fibre F, telle que $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$. Alors la fibre de p est C^1-stable.*

a) Préliminaires, idée générale

Voyons d'abord que l'on peut supposer (sans perte de généralité) que l'action du groupe fondamental $\pi_1(S)$ sur l'homologie de la fibre $H_1(F, \mathbf{R})$ est triviale (ce qui, dans le cas des fibrations en cercles, correspond aux fibrations orientées):

L'action de $\pi_1(S)$ sur $H_1(F, \mathbf{R})$ définit une représentation de $\pi_1(S)$ dans le groupe $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Cette représentation détermine des revêtements à deux feuillets $\Pi: \tilde{M} \to M$ et $\pi: \tilde{S} \to S$. De plus, il existe une fibration de fibre F, $\tilde{p}: \tilde{M} \to \tilde{S}$, rendant commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\Pi} & M \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{p}} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \tilde{S} & \xrightarrow[\pi]{} & S \end{array}$$

Fibres F telles que $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$

La caractéristique d'Euler $\chi(\tilde{S})$ est égale à $2\chi(S) \neq 0$.

On voit facilement que, si la fibre de $\tilde{p}$ est C^1-stable alors la fibre de p l'est aussi (voir Chapitre 5.1.d).

On suppose désormais que l'action de $\pi_1(S)$ sur $H_1(F, \mathbf{R})$ est triviale. Donc le fibré de base M, dont la fibre au dessus d'un point x est $H_1(F_x, \mathbf{R})$ est trivial.

Choisissons un isomorphisme de $H_1(F, \mathbf{R})$ avec $\mathbf{R}$, de façon que $1 \in \mathbf{R}$ engendre $H_1(F, \mathbf{Z})/\text{Torsion} \subset H_1(F, \mathbf{R})$.

Ainsi, en tout point $x \in M$, on pourra choisir un lacet γ, la fibre F_x, dont la classe d'homologie $[\gamma] \in H_1(F_x, \mathbf{R})$ soit égale à 1.

Soit $\mathcal{F}'$ un feuilletage C^1-proche de la fibration. On veut associer à $\mathcal{F}'$ une application qui joue le rôle d'application de premier retour de $\mathcal{F}'$ le long d'un générateur de l'homologie de la fibre. L'idée est la suivante:

On recouvre l'espace total M par des petits ouverts U_i, et pour chaque i on peut choisir continûment un lacet $\beta_i^x, x \in U_i$, dans la fibre, dont la classe d'homologie soit égale à 1. On dispose ainsi d'applications locales de premier retour $H_{\mathcal{F}'}^{\beta_i}$ correspondant au choix de ces lacets. Remarquons que, si $x \in U_i \cap U_j$, les lacets β_i^x et β_j^x sont dans la même classe d'homologie. Alors, comme les $H_{\mathcal{F}'}^{\beta_i}$ sont C^1-proches de l'identité, d'après le Chapitre 4.3.f la différence $H_{\mathcal{F}'}^{\beta_i} - H_{\mathcal{F}'}^{\beta_j}$ sera très petite devant $H_{\mathcal{F}'}^{\beta_i} - id$.

On construit alors un difféomorphisme global $H_{\mathcal{F}'}$ de M, en faisant une moyenne des applications locales de premier retour en utilisant une partition de l'unité adaptée au recouvrement $\{U_i\}$. Un point $x \in M$ sera un point fixe de $H_{\mathcal{F}'}$ si et seulement si la feuille de $\mathcal{F}'$ passant par x est compacte et proche d'une fibre.

La démonstration du théorème est alors exactement la démons-

tration de Seifert: si l'application $H_{\mathcal{F}'}$ est sans point fixe, on construit sur S un champ de vecteurs unitaire, ce qui est contraire à l'hypothèse $\chi(S) \neq 0$.

Voyons maintenant en détail la construction de l'application $H_{\mathcal{F}'}$ ainsi que la démonstration du théorème. Pour des raisons techniques, il est plus commode de considérer les applications de premier retour $\hat{H}^{\beta_i}_{\mathcal{F}'}$ des feuilletages relevés sur le fibré normal N de la fibration (voir Chapitre 4.2.f): on profite ainsi de la structure vectorielle des fibres du fibré normal. Cela introduit malheureusement des notations assez lourdes qui, j'espère, ne cachent pas complètement l'argument.

b) Notations

On note $\mathcal{F}$ le feuilletage défini par la fibration $p: M \to S$, de fibre F.

On choisit deux disques compacts D et D' sur S, D contenu dans l'intérieur de D', et on se fixe une trivialisation $\psi: p^{-1}(D') \to D' \times F$. On choisit un point $x_0 \in D$, et un lacet simple γ_0 sur la fibre $F_{x_0} = p^{-1}(x_0)$, tel que la classe d'homologie $[\gamma_0]$ soit égale 1.

On note $q: N \to M$ le fibré normal du feuilletage $\mathcal{F}$ et $\sigma: M \to N$ la section nulle de ce fibré vectoriel. Soit φ une submersion d'un voisinage v de $\sigma(M)$ sur M, telle que $\varphi \circ \sigma = id_M$, et définissant sur M un champ de disques $\{D_x\}_{x \in M}$ transverse à $\mathcal{F}$. On suppose de plus que, si $p(x)$ appartient au disque D, alors le disque D_x est inclus dans le facteur horizontal de la trivialisation $\varphi, D' \times \{\alpha\}$, qui passe par x.

Pour tout $x \in M$, on note $\hat{D}_x$ le disque centré en $\sigma(x)$ sur la fibre $q^{-1}(x)$, tel que la restriction de φ à $\hat{D}_x$ soit un difféomorphisme de $\hat{D}_x$ sur D_x.

Fibres F telles que $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$

On note $\hat{F}$ le feuilletage $\varphi^{-1}(\mathcal{F})$, défini sur N au voisinage de la section nulle. Si $\mathcal{F}'$ est un feuilletage C^1-proche de $\mathcal{F}$, on notera $\hat{F}' = \varphi^{-1}(\mathcal{F}')$. C'est un feuilletage sur N, C^1-proche de $\hat{F}$.

On choisit deux recouvrements finis $\{U_i\}$ et $\{U_i'\}$ de M par des ouverts, de façon que pour tout i, U_i' soit relativement compact dans U_i. On suppose de plus les ouverts U_i assez petits pour que, pour tout $x, y \in U_i$, il y ait un isomorphisme canonique de $\pi_1(F_x, x)$ sur $\pi_1(F_y, y)$.

Pour tout i, on choisit un point $x_i \in U_i$. Si U_i rencontre la courbe γ_0, on choisit x_i sur cette courbe.

Alors, pour tout $\alpha \in \pi_1(F_{x_i}, x_i)$, pour tout feuilletage suffisamment C^1-proche de $\mathcal{F}$, on peut définir l'application de premier retour $H^{\alpha}_{\mathcal{F}'}: U_i' \to U_i$ du feuilletage $\mathcal{F}'$ le long de α sur le champ de disques $\{D_x\}$ (voir Chapitre 4.2.b).

Pour tout i on choisit des voisinages ouverts $\hat{U}_i$ et $\hat{U}_i'$ de $\sigma(U_i)$ et $\sigma(U_i')$ dans N, $\hat{U}_i'$ relativement compact dans $\hat{U}_i$, de façon que, pour tout $\alpha \in \pi_1(F_{x_i}, x_i)$, pour tout feuilletage $\mathcal{F}'$ suffisamment C^1-proche de $\mathcal{F}$, on puisse définir l'application de premier retour $\hat{H}^{\alpha}_{\mathcal{F}'}: \hat{U}_i' \to \hat{U}_i$ du feuilletage $\hat{F}'$ sur le champ de disques $\{\hat{D}_x\}$ (voir Chapitre 4.2.f).

Rappelons que, pour tout $x \in U_i'$ on a:

$$\varphi \circ \hat{H}^{\alpha}_{\mathcal{F}'}(\sigma(x)) = H^{\alpha}_{\mathcal{F}'}(x).$$

De plus, là où les deux membres sont définis, on a:

$$\hat{H}^{\alpha\beta}_{\mathcal{F}'} = \hat{H}^{\beta}_{\mathcal{F}'} \circ \hat{H}^{\alpha}_{\mathcal{F}'}$$

Pour tout i, on choisit $\beta_i \in \pi_1(F_{x_i}, x_i)$ dont la classe d'homologie β_i soit égale à 1. Si $U_i \cap \gamma_0$ est non vide, on a choisi x_i sur γ_0. On choisit alors pour β_i la classe d'homotopie de γ_0.

Enfin, on choisit une partition de l'unité $\{\varphi_i\}$ associée au recouvrement $\{U_i'\}$.

c) Une approximation globale des applications locales de premier retour

Pour tout feuilletage $\mathcal{F}'$ suffisamment C^1-proche de $\mathcal{F}$, toutes les applications de premier retour $\hat{H}_{\mathcal{F}'}^{\beta_i}$ sont définies.

Notons $\hat{H}_{\mathcal{F}'}: M \to N$ l'application définie par:

$$\hat{H}_{\mathcal{F}'}(x) = \sum_i \varphi_i(x) \cdot \hat{H}_{\mathcal{F}'}^{\beta_i}(\sigma(x)).$$

Cette somme a un sens car les $\hat{H}_{\mathcal{F}'}^{\beta_i}(\sigma(x))$ sont éléments de l'espace vectoriel $q^{-1}(x)$.

Notons $H_{\mathcal{F}'} = \varphi \circ \hat{H}_{\mathcal{F}'}$. C'est une application différentiable de M dans M, et pour tout x, $H_{\mathcal{F}'}(x)$ apPartient au disque D_x.

Si $\mathcal{F}'$ est suffisamment C^1-proche de $\mathcal{F}$, les applications $\hat{H}_{\mathcal{F}'}^{\beta_i}$ sont C^1-proches de l'identité. On en déduit facilement que $H_{\mathcal{F}'}$ est C^1-proche de l'identité, et en particulier est un difféomorphisme de M. C'est une application qui va nous servir *d'application de premier retour du feuilletage $\mathcal{F}'$ le long d'un générérateur de $H_1(F, \mathbf{R})$.*

REMARQUE 6.3.C-1. Il existe un voisinage Γ_0 de la courbe γ_0 tel que, pour tout $x \in \Gamma_0$ on ait la propriété suivante:

Soient i, j tels que $x \in U_i \cap U_j$; alors $\beta_i^x = \beta_j^x$, où β_i^x et β_j^x sont les éléments de $\pi_1(F_x, x)$ correspondant au choix de β_i et β_j.

CONSÉQUENCE: *Pour tout $x \in \Gamma_0$ pour tout i, j tels que $x \in U_i' \cap U_j'$, on a: $H_{\mathcal{F}'}^{\beta_i}(x) = H_{\mathcal{F}'}^{\beta_j}(x) = H_{\mathcal{F}'}(x)$.*

d) Points fixes de $H_{\mathcal{F}'}$, et feuilles compactes proches d'une fibre

LEMME 6.3.D-1. *Pour tout feuilletage $\mathcal{F}'$, suffisamment C^1-proche de $\mathcal{F}$, on a:*

Un point $x \in M$ est un point fixe de $H_{\mathcal{F}'}$ si et seulement si la feuille de $\mathcal{F}'$, qui passe par x, est compacte et proche d'une fibre.

DÉMONSTRATION:

Notons que x est un point fixe de $H_{\mathcal{F}'}$ si et seulement si $\hat{H}_{\mathcal{F}'}(x) = \sigma(x)$.

Dans un sens le Lemme est évident: si la feuille de $\mathcal{F}'$ qui passe par x est compacte et proche d'une fibre alors pour tout i tel que $x \in U_i'$, $H_{\mathcal{F}'}^{\beta_i}(x) = \sigma(x)$. Donc $H_{\mathcal{F}'}(x) = x$.

Voyons la réciproque:

D'après le Corollaire 4.3.f-2, pour tout $\eta > 0$, pour tout feuilletage $\mathcal{F}'$ suffisamment C^1-proche de $\mathcal{F}$, pour tout $x \in M$, pour tout (i, j) tel que $x \in U_j \cap U_j$, on a:

$$\| \hat{H}_{\mathcal{F}'}^{\beta_i}(x) - \hat{H}_{\mathcal{F}'}^{\beta_j}(x) \| \leq \eta \, \| \hat{H}_{\mathcal{F}'}^{\beta_i}(x) - \sigma(x) \|$$

On en déduit facilement:

$$\| \hat{H}_{\mathcal{F}'}(x) \doteq \hat{H}_{\mathcal{F}'}^{\beta_i}(x) \| \leq \eta \, \| \hat{H}_{\mathcal{F}'}^{\beta_i}(x) - \sigma(x) \| \, .$$

En choisissant η inférieur à 1, on en déduit facilement que, pour $\mathcal{F}'$ suffisamment C^1-proche de $\mathcal{F}$, tout point fixe de $H_{\mathcal{F}'}$ est un point fixe de tous les H^{β_i}.

Enfin, d'après ce même Corollaire 4.3.f-2, pour $\mathcal{F}'$ suffisamment C^1-proche, de $\mathcal{F}$ tout point fixe de $H_{\mathcal{F}'}^{\beta_i}$ est sur une feuille compacte proche d'une fibre (car la classe d'homologie de β_i engendre $H_1(F, \mathbf{R})$).

Donc tout point fixe de $H_{\mathcal{F}'}$ est sur une feuille compacte proche d'une fibre. □

e) Démonstration du théorème

Elle reprend exactement la démonstration de Seifert (voir Chapitre 5.1.b). On raisonne par l'absurde: on suppose qu'il existe des feuilletages $\mathcal{F}'$, aussi C^1-proches de $\mathcal{F}$ que l'on veut, et n'ayant aucune feuille compacte proche d'une fibre.

L'application $\hat{H}_{\mathcal{F}'}$ est alors une section non nulle du fibré normal N du feuilletage $\mathcal{F}$. Notons $\hat{g} = p_* \circ \hat{H}_{\mathcal{F}'}$. Pour tout x, $\hat{g}(x)$ est un vecteur non nul tangent à S en $p(x)$. Notons $g(x) = \frac{\hat{g}(x)}{\|\hat{g}(x)\|}$: c'est un vecteur unitaire de $T_{p(x)}S$.

L'application $g: M \to (TS)_1$ ainsi définie est différentiable (où $(TS)_1$ est le fibré unitaire tangent à S). Pour tout $y \in S$, on note $g_y: F_y \to (T_yS)_1$ la restriction de g à la fibre $p^{-1}(y) = F_y$. Rappelons que le fibré unitaire tangent à S est un fibré en cercles: $(T_yS)_1$ est un cercle.

LEMME 6.3.E-1. *Si $\mathcal{F}'$ est suffisamment C^1-proche de $\mathcal{F}$, pour tout $y \in S$ l'application g_y est homotope à zéro.*

En admettant ce Lemme, on conclut facilement la démonstration du théorème: la Remarque 5.1.b-2 assure qu'à chaque application g_y on peut associer canoniquement un point de $(T_yS)_1$. On construit ainsi un champ de vecteurs unitaire sur S, ce qui est contraire à l'hypothèse $\chi(S) \neq 0$. □

f) Démonstration du Lemme e-1

On cherche à se ramener au cas des fibrations en cercles afin de pouvoir appliquer le Lemme 5.1.c-1.

Fibres F telles que $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$

Notons d'abord que, l'application g_y variant continûment avec le point y, il suffit, pour prouver le Lemme e-1, de montrer qu'il existe y tel que g_y soit homotope à zéro.

REMARQUE 6.3.F-1. Soit V une variété compacte, et soit $f: V \to S^1$ une application continue. Pour montrer que f est homotope à zéro, il suffit de montrer que l'application $f_*: H_1(V, \mathbf{R}) \to H_1(S^1, \mathbf{R})$ est nulle.

Donc, pour montrer qu'une application g_y est homotope à zéro, il suffit de trouver un lacet γ sur la fibre F_y, dont la classe d'homologie $[\gamma]$ est égale à 1, et tel que la restriction de g_y à γ soit homotope à zéro.

Il suffit donc de regarder la restriction de l'application g_{x_0} à γ_0 (voir le Paragraphe b: notations, où sont définis x_0 et γ_0).

On utilise la trivialisation $\psi: p^{-1}(D') \xrightarrow{\sim} D' \times F$. Dans cette trivialisation on considère le cylindre $D' \times S^1$. Il est transverse à tout feuilletage C^1-proche de $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{F}'$ est suffisamment C^1-proche de $\mathcal{F}$, il induit sur $D' \times S^1$ un feuilletage de dimension 1, C^1-proche de la fibration en cercles $D' \times S^1 \to S^1$.

Notons f l'application de premier retour le long de γ_0, sur les horizontales $D' \times \{\alpha\}, \alpha \in S^1$, de ce 1-feuilletage induit par $\mathcal{F}'$ sur $D' \times S^1$.

Remarquons que, par le choix du champ de disques $\{D_x\}$, par le choix des β_i pour les ouverts U_i rencontrant γ_0, l'application $H_{\mathcal{F}'}$ coïncide avec f au voisinage de g_0.

Il suffit donc d'appliquer le Lemme 5.1.c-1 pour voir que la restriction de g_{x_0} à γ_0 est homotope à zéro, ce qui conclut la démonstration du Lemme c-1. □

§4 Cas général

a) Introduction

La Partie 3 a montré comment adapter, à toutes les fibres F vérifiant $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$, la démonstration de Seifert de la stabilité de la fibre des fibrations en cercles. Mais cette démonstration est spécifique aux bases de dimension 2, avec peu d'espoir de généralisation aux bases de dimension plus grande.

Les démonstrations que je connais du théorème de Fuller me semblent difficiles à généraliser pour des feuilletages de dimension plus grande que 1: le principe de ces démonstrations repose sur l'existence de petit chemin, dans l'espace des feuilletages, joignant deux feuilletages voisins, c'est-à-dire sur la connexité locale de l'espace des feuilletages: c'est un problème qui est loin d'être résolu.

Plutôt que de généraliser les démonstrations de stabilité des fibrations en cercles, on va en utiliser les résultats: l'idée (due à A. Haefliger) est de comparer les déformations des fibrations de fibre $F, H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$, avec celles des fibrations en cercles.

Soient M, B, F trois variétés compactes connexes, telles que $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$. Soit $p: M \to B$ une fibration de fibre F. Au Chapitre 3.4, on a construit une fibration en cercles $q: E \to B$ et une application différentiable $f: M \to E$ rendant commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & E \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ B & \xrightarrow[id]{} & B \end{array}$$

De plus f induit sur chaque fibre un isomorphisme:

$$f_*: H_1(F, \mathbf{Z})/\text{Torsion} \to H_1((S^1, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$$

Fibres F telles que $H_1(F,\mathbf{R}) = \mathbf{R}$

Le but de cette partie est de prouver le théorème suivant:

THÉORÈME 6.4.A-1. *Soit $p: M \to B$ une fibration de fibre F, $H_1(F,\mathbf{R})=R$, et soit $q: E \to B$ la fibration en cercles naturellement associée à p.*

Alors la fibre F de p est C^1-stable si et seulement si la fibre S^1 de q est C^1-stable.

(Le Théorème B est alors un corollaire facile du Théorème 6.4.a-1 et du Théorème A).

On a déjà vu que, si la fibre de q est C^r-instable, $r \geq 1$, il en va de même pour la fibre de p. Il reste à prouver la réciproque.

Notons $\mathcal{F}$ le feuilletage défini par la fibration p et $\mathcal{G}$ le feuilletage défini par la fibration q. A toute C^1-déformation $\{\mathcal{F}^s\}_{s\in S}$ du feuilletage $\mathcal{F}$, nous allons associer une C^1-déformation $\{\mathcal{G}^s\}_{s\in S}$ du feuilletage $\mathcal{G}$ de façon que, si pour tout s suffisamment proche de 0, $\mathcal{F}^s$ ne possède pas de feuille compacte proche d'une fibre, alors il en va de même pour $\mathcal{G}^s$.

Pour construire la déformation $\{\mathcal{G}^s\}_{s\in S}$ du feuilletage $\mathcal{G}$, nous allons construire une déformation de l'holonomie du feuilletage $\mathcal{G}$, et utiliser le théorème de réalisation des déformations d'holonomie (voir Chapitre 1.5.b):

On a vu (Chapitre 4.4.a) que l'application f induit un homomorphisme surjectif f_* du groupoïde fondamental $\Pi(\mathcal{F},T)$ de $\mathcal{F}$ sur celui $\Pi(\mathcal{G},T)$ de $\mathcal{G}$. De plus, deux éléments $\gamma_1,\gamma_2 \in \Pi(\mathcal{F},T)$ ont même image par f_* si et seulement s'ils ont mêmes extrémités et que $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ est représenté par un lacet nul en homologie dans la fibre.

Il y a deux cas où il est facile de construire une déformation $\hat{H}^S$ de l'holonomie de $\mathcal{G}$ à partir d'une déformation $H^S: \Pi(\mathcal{F},T) \to \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ de l'holonomie de $\mathcal{F}$:

i) si, pour tout $\gamma \in \Pi(\mathcal{F}, T)$ représenté par un lacet nul en homologie dans la fibre, $H^S(\gamma)$ est le germe de l'identité de $T \times S$. Alors H^S passe au quotient par f_* en une déformation $\hat{H}^S : \Pi(\mathcal{G}, T) \to \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$. On a vu au Chapitre 4.4 une condition sur $\pi_1(F)$ pour que cela soit réalisé.

ii) s'il existe un homomorphisme différentiable $\sigma : \Pi(\mathcal{G}, T) \to \Pi(\mathcal{F}, T)$ qui soit une section de f_* (c'est-à-dire: $f_* \circ \sigma = \mathrm{id}_{\Pi(\mathcal{G},T)}$). On pose alors $\hat{H}^S = H^S \circ \sigma$.

En général, les déformations de l'holonomie de $\mathcal{F}$ ne passent pas au quotient par f_*, et il n'existe pas de section globale σ de f_*.

Cependant, en utilisant un recouvrement fini $\{U_i\}$ de B par des ouverts trivialisant les fibrations p et q, on va construire des sections locales de f_* au dessus des U_i. Ainsi, pour tout $\gamma \in \Pi(\mathcal{G}, T)$, on aura choisi un nombre fini d'éléments γ_i de $\Pi(\mathcal{F}, T)$ tels que $f_*(\gamma_i) = \gamma$.

Les germes $H^S(\gamma_i)$ ne sont pas a priori égaux. Cependant, pour tout i, j, γ_i, γ_j^{-1} est représenté par un lacet nul en homologie dans la fibre. Donc, d'après le Corollaire 4.3.f-2, le germe $H^S(\gamma_j)^{-1} \circ H^S(\gamma_i)$ est négligeable (en un sens que nous préciserons): tous les germes $H^S(\gamma_i)$ sont équivalents. L'idée est alors de définir le germe d'holonomie déformée $\tilde{H}^S(\gamma)$ comme étant une moyenne des germes $H^S(\gamma_i)$. La difficulté est de faire cette moyenne de façon que l'application $\gamma \to \tilde{H}^S(\gamma)$ définisse un homomorphisme différentiable de $\Pi(\mathcal{G}, T)$ dans $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$, c'est-à-dire que $\tilde{H}^S$ soit un germe de déformation de l'holonomie de $\mathcal{G}$.

On comparera alors les déformations d'holonomie H^S et $\tilde{H}^S$ des feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$: on verra que, pour tout $\gamma \in \Pi(\mathcal{F}, T)$, le germe $H^S(\gamma)$ est équivalent au germe $\tilde{H}^S(f_*(\gamma))$. On en déduira que, si $\mathcal{F}^S$ et $\mathcal{G}^S$ sont des déformations de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ qui induisent H^S et

$\tilde{H}^S$, alors, pour s assez voisin de 0, les feuilles compactes proches d'une fibre de $\mathcal{F}^s$ correspondent à celles de $\mathcal{G}^s$: cela conclura la démonstration du théorème.

b) Germes négligeables, germes équivalents

Soit T une variété différentiable (éventuellement ouverte et non connexe), munie d'une métrique riemannienne. Notons d la distance induite par cette métrique sur chaque composante connexe.

Soit $(S, 0)$ un espace localement compact pointé en 0.

Rappelons que $\mathrm{Diff}^S(T)$ est l'ensemble des homéomorphismes définis sur des ouverts de $T \times S$, et de la forme $(x, s) \to (h^s(x), s)$ où h^s est un difféomorphisme défini sur un ouvert de T et variant continûment avec s pour la topologie C^1.

On note $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ le groupoïde dont les éléments sont les germes, aux points de $T \times \{0\}$, des éléments de $\mathrm{Diff}^S(T)$.

DÉFINITION 6.4.B-1. Soient $f, g \in \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ deux germes de source et but $(x, 0) \in T \times S$.

On dit que g est *négligeable devant* f si, pour toute réalisation $\hat{f}, \hat{g} \in \mathrm{Diff}^S(T)$ des germes f, g, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_\varepsilon$ de $(x, 0)$ dans $T \times S$ tel que:

$$\forall y \in \mathcal{V}_\varepsilon, \quad d(y, \hat{g}(y)) \leq \varepsilon d(y, \hat{f}(y)).$$

DÉFINITION 6.4.B-2. Soient $f, g, h \in \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ trois germes de sources $(x, 0)$, tels que f ait pour but $(x, 0)$ et que g et h aient même but; on dit que g est *équivalent* à h modulo f, et l'on note $g \simeq h[f]$, si $h^{-1} \circ g$ est négligeable devant f.

PROPOSITION 6.4.B-3. *Soient $f, g, h \in \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ trois germes de source $(x, 0)$ tels que f ait pour but $(x, 0)$, et que g et h aient même*

but. Alors g est équivalent à h modulo f si et seulement si, pour toute réalisation $\hat{f}, \hat{g}, \hat{h} \in \mathrm{Diff}^S(T)$ de f, g, h, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_\varepsilon$ de $(x,0)$ dans $T \times S$ tel que:

$$\forall y \in \mathcal{V}_\varepsilon, \quad d(\hat{g}(y), \hat{h}(y)) \leq \varepsilon d(y, \hat{f}(y)).$$

DÉMONSTRATION: L'application $\hat{h}$ est de la forme $(z,0) \to (\hat{h}^s(z), s)$, et $\hat{h}^s$ converge vers $\hat{h}^0$ pour la topologie C^1, quand s tend vers 0. Notons m_0 la norme de la différentielle de $\hat{h}^0$ en $(x,0)$ et m_1 la norme de la différentielle de $(\hat{h}^0)^{-1}$ en $\hat{h}^0(x,0)$.

Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $(x,0)$ dans $T \times S$ tel que, si (y,s) et (z,s) sont deux points de $\mathcal{V}$, on a:

$$\frac{1}{2} m_1 d(y,z) \leq d(\hat{h}^s(y), \hat{h}^s(z)) \leq 2 m_0 d(y,z).$$

On en déduit qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}'$ de $(x,0)$ tel que pour tout $(y,s) \in \mathcal{V}'$ on a:

$$\frac{1}{2} m_1 d(y, (\hat{h}^{-1} \circ \hat{g})) \leq d(\hat{h}^s(y), \hat{g}^s(y)) \leq 2 m_0 d(y, (\hat{h}^{-1} \circ \hat{g})^s(y))$$

On conclut très facilement la démonstration de la Proposition. □

COROLLAIRE 6.4.B-4. *Soient $f, g \in \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$, deux éléments de source et but $(x,0)$ tels que $f \simeq g[f]$.*

Alors, pour toute réalisation $\hat{f} \in \mathrm{Diff}^S(T)$ du germe f, et toute réalisation $\hat{g}$ du germe g, il existe un voisinage U de $(x,0)$ dans $T \times S$ tel que les restrictions de $\hat{f}$ et $\hat{g}$ à U aient les mêmes points fixes.

Immédiat d'après la Proposition b-3.

Voici maintenant une liste de propriétés simples de cette notion d'équivalence de germes:

PROPRIÉTÉS: *Soient* $f, g, h \in \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ *tels que:* $g \simeq h[f]$. *Alors:*

6.4.B-5: *pour tout* $f' \in \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ *tel que* $f \simeq f'[f]$ *on a:*

$$g \simeq h[f'].$$

Il suffit d'appliquer la proposition, et l'inégalité triangulaire.

6.4.B-6: *pour tout* $\ell \in \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ *dont la source est le but de* g *et de* h, *on a:*

$$\ell \circ g \simeq \ell \circ h[f].$$

En effet $(\ell \circ h)^{-1} \circ (\ell \circ g) = h^{-1} \circ g$ négligeable devant f.

6.4.B-7: *pour tout* $\ell \in \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ *dont le but est la source de* f, g *et* h, *on a:*

$$g \circ \ell \simeq h \circ \ell[\ell^{-1} \circ f \circ \ell].$$

Il faut voir que $\ell^{-1} \circ (h^{-1} \circ g) \circ \ell$ est négligeable devant $\ell^{-1} \circ f \circ \ell$, sachant que $h^{-1} \circ g$ est négligeable devant f.

Pour cela, prenons une réalisation $\hat{\ell}: (x, s) \to (\ell^s(x), s)$ de ℓ. Comme ℓ^s varie continûment avec s pour la topologie C^1, on construit deux constantes m_0 et m_1 et un voisinage U du but de ℓ tel que, si (x, s) et (y, s) sont deux points de U, on a:

$$m_1 d(x, y) \leq d((\ell^s)^{-1}(x), (\ell^s)^{-1}(y)) \leq m_0 d(x, y).$$

On en déduit immédiatement la Propriété b-7.

6.4.B-8: *soient* $\ell, k \in \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$, *dont le but est la source de* f *et tel* $\ell \simeq k[\ell^{-1} \circ f \circ \ell]$. *Alors:*

$$g \circ \ell \simeq h \circ k[\ell^{-1} \circ f \circ \ell].$$

D'après b-7 on a: $g \circ \ell \simeq h \circ \ell[\ell^{-1} \circ f \circ \ell]$.

D'après b-6 on a: $h \circ \ell \simeq h \circ k[\ell^{-1} \circ f \circ \ell]$.

Donc, d'après la Proposition b-3, $g \circ \ell \simeq h \circ k[\ell^{-1} \circ f \circ \ell]$.

6.4.B-9: *on a*: $g^{-1} \simeq h^{-1}[g \circ f \circ g^{-1}]$.

Il faut voir que $h \circ g^{-1} = g \circ (g^{-1} \circ h) \circ g^{-1}$ est négligeable devant $[g \circ f \circ g^{-1}]$ sachant que $g^{-1} \circ h$ est négligeable devant f. Il suffit d'appliquer b-6 et b-7 à la relation: $g^{-1} \circ h \simeq id[f]$.

REMARQUE 6.4.B-10. ces notions de germes négligeables et de germes équivalents ne dépendent pas de la métrique choisie sur T.

c) Moyenne de deux germes

Soient x et y deux points de T, tels que la distance $d(x, y)$ soit inférieure au rayon d'injectivité de l'exponentielle: on note $[x, y]$ le segment géodésique joignant x à y, et soit $\gamma: [0, 1] \to [x, y]$ le paramètrage à vitesse constante, tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

NOTATION: Avec les notations ci-dessus, pour tout $t \in [0, 1]$, on notera $(1 - t)x + ty$ le point $\gamma(t) \in T$.

Soient $g_1, g_2 \in \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ deux germes induisant, par restriction à $T \times \{0\}$, le même germe $g^0 \in \mathrm{Diff}^S(T)$: en particulier, g_1 et g_2 ont même source $(x_0, 0)$ et même but.

Soient $\hat{g}_1, \hat{g}_2 \in \mathrm{Diff}^S(T)$ deux homéomorphismes locaux de $T \times S$, réalisant les germes g_1, g_2. Ils sont de la forme: $\hat{g}_i(x, s) = (g_i^s(x), s), i = 1, 2$.

Soit ψ une application de classe C^∞, à valeurs dans $[0, 1]$, définie sur un voisinage de x_0 dans T.

Notons $(1 - \psi) \cdot \hat{g}_1 + \psi \cdot \hat{g}_2$ l'application définie au voisinage de $(x, 0)$:

$$(x, s) \to ((1 - \psi(x))g_1^s(x) + \psi(x)g_2^s(x), s).$$

Par hypothèse, g_1^0 coïncide avec g_2^0 au voisinage de x_0, donc l'application $(1-\psi)g_1^0 + \psi g_2^0$ coïncide avec g_1^0 sur ce voisinage, donc est un difféomorphisme (sur ce voisinage). De plus, pour tout, $s \in S, (1-\psi)g_1^s + \psi g_2^s$ est une application différentiable variant continûment avec s.

On en déduit qu'il existe un voisinage de $(x_0, 0)$ tel que la restriction à ce voisinage de l'application $(1-\psi)\hat{g}_1 + \psi\hat{g}_2$ appartienne à $\mathrm{Diff}^S(T)$.

NOTATION: Soient $g_1, g_2 \in \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ deux germes de même source $(x_0, 0)$ et induisant par restriction à $T \times \{0\}$ le même germe $g^0 \in \mathrm{Diff}(T)$. Soit ψ une application de classe C^∞, à valeurs dans $[0, 1]$, définie au voisinage de x_0.

On notera $(1-\psi)\cdot g_1 + \psi \cdot g_2$ le germe en $(x_0, 0)$ de l'application $(1-\psi)\cdot\hat{g}_1 + \psi\cdot\hat{g}_2$ définie ci-dessus. C'est un élément de $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ induisant sur $T \times \{0\}$ le germe g^0.

Cette moyenne de g_1 et g_2 par l'application ψ a de bonnes propriétés de continuité pour la topologie des germes:

LEMME 6.4.C-1. *Soit U un ouvert de T; considérons deux familles continues $\{g_1^x\}_{x\in U}$ et $\{g_2^x\}_{x\in U}$ d'éléments de $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$, telles que, pour tout x, g_1^x et g_2^x soient deux germes de source $(x, 0)$, et induisant le même élément de $\mathrm{Diff}(T)$ par restriction à $T \times \{0\}$.*

Soit $\psi: U \to [0, 1]$ une application de classe C^∞.

Alors, l'application qui à $x \in U$ associe le germe $(1-\psi)g_1^x + \psi g_2^x \in \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ est continue (et même différentiable).

DÉMONSTRATION:

Les familles $\{g_1^x\}_{x\in U}$ et $\{g_2^x\}_{x\in U}$ étant continues, il existe des homéomorphismes locaux de $T \times S, \hat{g}_1, \hat{g}_2 \in \mathrm{Diff}^S(T)$ définis sur un voisinage de $U \times \{0\}$, tels que pour tout x, g_1^x et g_2^x soient les germes

en $(x,0)$ de $\hat{g}_1$ et $\hat{g}_2$. Alors $(1-\psi)g_1^x + \psi g_2^x$ est le germe en $(x,0)$ de l'application $(1-\psi)\hat{g}_1 + \psi\hat{g}_2$, ce qui conclut. □

Cette notion de moyenne des germes g_1 et g_2 par une application ψ est aussi compatible avec les notions de germes équivalents et germes négligeables:

LEMME 6.4.C-2. *Soient $f,g,h \in \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$, de même source $(x,0)$, tels que f soit de but $(x,0)$, que g et h aient même but. Supposons que l'on ait: $g \simeq h[f]$. Soit ψ une application à valeurs dans $[0,1]$, définie au voisinage de x. Alors on a: $(1-\psi)g + \psi h \simeq g[f]$.*

La démonstration est évidente, d'après la Proposition b-3.

d) Choix d'une transversale commune aux feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$

Rappelons que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont les feuilletages définis par les fibrations $p: M \to B$ et $q: E \to B$, de fibres respectives F, telle que $H_1(F,\mathbf{R}) = \mathbf{R}$, et S^1; de plus $f: M \to E$ est une application différentiable telle que $p = q \circ f$ et qui induit sur chaque fibre un isomorphisme de $H_1(F,\mathbf{Z})/\text{Torsion}$ sur $H_1(S^1,\mathbf{Z})$.

Soient $\{U_i\}_{1\le i\le n}, \{U_i'\}_{1\le i\le n}$ deux recouvrements finis de B par n ouverts trivialisant la fibration p. On suppose que, pour tout i, U_i' est relativement compact dans U_i.

Pour tout i, soit $\sigma_i: U_i \to M$ une section locale de la fibration p. Notons $s_i = f \circ \sigma_i: U_i \to E$; c'est une section locale de la fibration q.

Notons T l'union disjointe $\coprod_1^n U_i$, et $T' = \coprod_1^n U_i'$. Notons $\sigma = \coprod \sigma_i$, l'application de T dans M dont la restriction à chacun des U_i est σ_i. l'application σ fait de T une transversale complète de $\mathcal{F}$, et sa restriction à T' fait de T' une transversale complète de $\mathcal{F}$ relativement compacte dans T. Notons $s = f \circ \sigma = \amalg s_i$. L'application

s fait de T' une transversale complète de $\mathcal{G}$, relativement compacte dans la transversale T.

LEMME 6.4.D-1. *On peut choisir les ouverts U_i et les sections σ_i de façon que $\sigma: T \to M$ et $s: T \to E$ soient des plongements. Ainsi, T est une transversale plongée des feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.*

Voici l'idée de la démonstration du Lemme. Partons d'un recouvrement $\{U_i\}$ de B. On construit les sections locales σ_i par itération sur i. Supposons que l'on ait déjà construit des sections locales $\sigma_1, \ldots, \sigma_i$ de façon que $\coprod_1^i \sigma_j: \coprod_1^i U_j \to M$ et $\coprod_1^i s_j: \coprod_1^i U_j \to E$ soient des plongements. Alors, quitte à diminuer très légèrement les ouverts $U_j, j = 1, \ldots i$, on peut recouvrir U_{i+1} par un nombre fini d'ouverts, et choisir des sections locales de p au-dessus de chacun de ces petits ouverts de façon que l'union disjointe de toutes ces sections soit un plongement, ainsi que sa composée avec f. L'idée est donc que, à chaque étape, il suffit de réduire très légèrement le domaine de définition des sections déjà construites (afin que ces domaines soient compacts) et de morceler l'ouvert suivant.

On note $f_*: \Pi(\mathcal{F}, T) \to \Pi(\mathcal{G}, T)$ l'homomorphisme surjectif induit par f. Rappelons que deux éléments de $\Pi(\mathcal{F}, T)$ ont même image par f_* si et seulement s'ils diffèrent par un lacet nul en homologie dans la fibre. Pour tout $\gamma \in \Pi(\mathcal{G}, T)$ on appellera relevé par f_* de γ tout élément $\gamma' \in \Pi(\mathcal{F}, T)$ tel que $f_*(\gamma') = \gamma$.

e) Sections locales de l'homomorphisme f_*

Pour tout ouvert U de B, on note Π_U le sous groupoïde de $\Pi(\mathcal{G}, T)$ dont les éléments ont leurs extrémités sur $\coprod_i (U_i \cap U)$. Autrement dit, Π_U est le groupoïde fondamental du feuilletage $\mathcal{G}$ restreint à $q^{-1}(U)$, pour la transversale $\coprod_i (U_i \cap U) \subset T$.

Regardons les groupoïdes $\Pi_{U_i}, i \in \{1, \ldots, n\}$.

La fibration q est une fibration en cercles triviale au dessus de U_i: on peut donc orienter la fibre.

Pour tout $x \in U_i$, on note $\gamma_{ii}^x \in \Pi_{U_i}$ l'élément représenté par le lacet d'origine $s_i(x)$ sur $q^{-1}(x) \simeq S^1$, faisant un tour dans le sens positif.

Pour tout $x \in U_i \cap U_j$ on note $\gamma_{ij}^x \in \Pi_{U_i}$ l'élément représenté par le segment de $p^{-1}(x)$ joignant $s_i(x)$ à $s_j(x)$ dans le sens positif. (voir Figure 6.2).

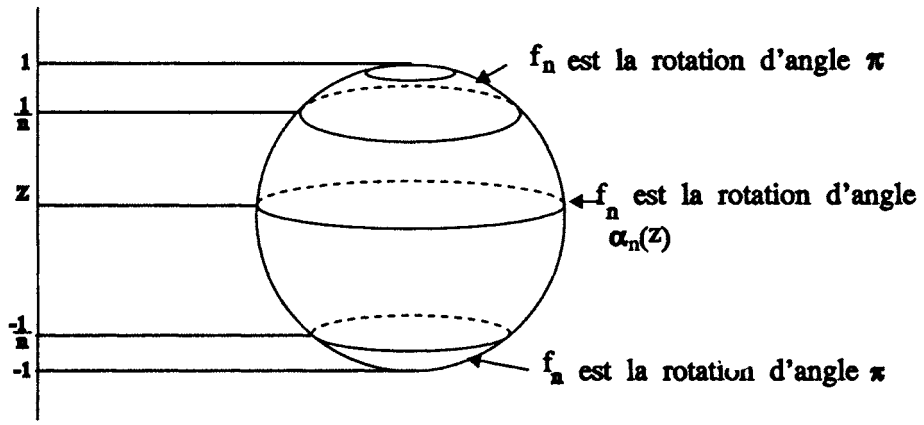


Figure 6.2.

On a ainsi construit des familles différentiables $\{\gamma_{ij}^x\}_{x \in U_i \cap U_j}$ d'éléments de Π_{U_i}. Elles vont nous servir de bases de Π_{U_i}: en effet, elles engendrent Π_{U_i}, et il n'existe aucune relation entre leurs éléments.

Tout élément $\gamma \in \Pi_{U_i}$, d'origine $s_k(x)$ et d'extrêmité $\sigma_\ell(x)$

s'écrit d'une façon unique:

$$\gamma = (\gamma_{ik}^x)^{-1}.(\gamma_{ii}^x)^m.\gamma_{il}^x, m \in \mathbf{Z}$$

Les fibrations p et q étant triviales au-dessus de U_i, on peut choisir continûment des relevés par f_* des éléments $\gamma_{ij}^x, \gamma_{ii}^x$. On note ces relevés $\varphi_i(\gamma_{ij}^x), \varphi_i(\gamma_{ii}^x)$.

Soit $\gamma = (\gamma_{ik}^x)^{-1} \cdot (\gamma_{ii}^x)^m \cdot \gamma_{il}^x$ un élément de Π_{U_i}. On note alors:

$$\varphi_i(\gamma) = \varphi_i(\gamma_{ik}^x)^{-1} \cdot [\varphi_i(\gamma_{ii}^x)]^m \cdot \varphi_i(\gamma_{il}^x)$$

L'application $\varphi_i: \Pi_{U_i} \to \Pi(\mathcal{F}, T)$ ainsi définie est un homomorphisme différentiable, et de plus est une section de f_*.

f) Déformations de l'holonomie de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{G}'$

Notons $H: \Pi(\mathcal{F}, T) \to \mathrm{Diff}(T)$ et $\tilde{H}: \Pi(\mathcal{G}, T) \to \mathrm{Diff}(T)$ les homomorphismes d'holonomie des feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ (Chapitre 1).

Soit $H^S: \Pi(\mathcal{F}, T) \to \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ un germe de déformation de l'holonomie de $\mathcal{F}$ sur T, c'est-à-dire un homomorphisme différentiable, contravariant, et induisant H par restriction à $T \times \{0\}$ des éléments de $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$.

Le but de ce paragraphe est de construire, à partir de H^S, un germe de déformation $\tilde{H}^S$ de l'holonomie de $\mathcal{G}$. Au prochain paragraphe, nous comparerons H^S avec la déformation d'holonomie $\tilde{H}^S$ ainsi construite.

L'idée pour construire $\tilde{H}^S$ est de travailler pas à pas, successivement au-dessus de chacun des U_i. Pour cela, on a besoin d'introduire la notion de déformation de l'holonomie de $\mathcal{G}$ au-dessus d'un ouvert U de B:

DÉFINITION 6.4.F-1. On appelle (germe de) *déformation de l'holonomie* de $\mathcal{G}$ au-dessus d'un ouvert U de B, tout homomorphisme contravariant, différentiable $\tilde{H}^S_U : \Pi_U \to \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$, qui, par restriction à $T \times \{0\}$ des éléments de $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$, induit la restriction à Π_U de l'homomorphisme d'holonomie $\tilde{H}$.

Par exemple, pour tout i, nous noterons:

$$\tilde{H}^S_{U_i} = H^S \circ \varphi_i : \Pi_{U_i} \to \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$$

C'est une déformation de l'holonomie de $\mathcal{G}$ au-dessus de U_i.

Pour tout i notons $V_i = \bigcup_1^i U_i'$. Bien sur $V_n = B$. Nous allons construire pour tout i, par itération sur i, une déformation $\tilde{H}^S_{V_i}$ de l'holonomie de $\mathcal{G}$ au-dessus de V_i: l'idée est de recoller $\tilde{H}^S_{V_{i-1}}$ avec $\tilde{H}^S_{U_i}$. On posera alors $\tilde{H}^S = \tilde{H}^S_{V_n}$. Voyons cette construction:

Quand $i = 1$, on a: $V_1 = U_1' \subset U_1$, donc Π_{V_1} est un sous-groupoïde de Π_{U_1}. On prend pour $\tilde{H}^S_{V_1}$ la restriction à Π_{V_1} de $\tilde{H}^S_{U_1}$.

Supposons construit $\tilde{H}^S_{V_{i-1}} : \Pi_{V_{i-1}} \to \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$.

On choisit une fonction $\psi : U_i \to [0,1]$ de classe C^∞, nulle au voisinage du bord de U_i, et constante égale à 1 sur un voisinage de l'adhérence de U_i' (U_i' est relativement compact dans U_i).

On définit $\tilde{H}^S_{V_i}$ de la façon suivante:

- sur $\Pi_{U_i'}$ (c'est-à-dire au dessus de U_i'), $\tilde{H}^S_{V_i}$ coïncide avec $\tilde{H}^S_{U_i}$.
- sur $\Pi_{V_{i-1}} - \Pi_{U_i}$ (au-dessus de $V_{i-1} - U_i$), $\tilde{H}^S_{V_i}$ coïncide avec $\tilde{H}^S_{V_{i-1}}$.
- il reste à définir $\tilde{H}^S_{V_i}$ sur $\Pi_{U_i} \cap \Pi_{V_{i-1}} - \Pi_{U_i'}$. Pour cela on utilise les familles $\{\gamma^x_{ii}\}_{x \in U_i}, \{\gamma^x_{ij}\}_{x \in U_i}$ qui forment une base de Π_{U_i} (voir Paragraphe e):

Pour tout $x \in U_i \cap V_{i-1} - U_{i-1}$ on pose:

$$\tilde{H}^S_{V_i}(\gamma_{ii}{}^x) = (1-\psi)\tilde{H}^S_{V_{i-1}}(\gamma_{ii}{}^x) + \psi \tilde{H}^S_{U_i}(\gamma_{ii}{}^x).$$

$$\tilde{H}^S_{V_i}(\gamma^x_{ij}) = (1-\psi)\tilde{H}^S_{V_{i-1}}(\gamma^x_{ij}) + \psi \tilde{H}^S_{U_i}(\gamma^x_{ij}) \text{ (si } x \in U_j).$$

Tout élément $\gamma \in \Pi_{U_i} \cap \Pi_{V_{i-1}} - \Pi_{U'_i}$ s'écrit de façon unique

$$\gamma = (\gamma^x_{ik})^{-1}(\gamma^x_{ii})^m . \gamma_{il}, \quad m \in \mathbf{Z}, \quad x \in U_i \cap V_{i-1} - U'_i.$$

On pose alors:

$$\tilde{H}^S_{V_i}(\gamma) = \tilde{H}^S_{V_i}(\gamma_{il}) \circ [\tilde{H}^S_{V_i}(\gamma_{ii})]^m \circ [\tilde{H}^S_{V_i}(\gamma_{ik})]^{-1}$$

On vérifie facilement que l'application $\tilde{H}^S_{V_i}$ ainsi construite est bien un homomorphisme contravariant, différentiable, de Π_{V_i} dans $\mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$, et définit un germe de déformation de l'holonomie de $\mathcal{G}$ au-dessus de V_i.

On pose $\tilde{H}^S = \tilde{H}^S_{V_n}$; c'est un germe de déformation de l'holonomie de $\mathcal{G}$ sur la transversale T. Il nous reste à comparer H^S avec $\tilde{H}^S$.

g) Comparaison des déformations H^S et $\tilde{H}^S$ de l'holonomie des feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$

Le but de ce paragraphe est de montrer que, pour tout $\gamma \in \Pi(\mathcal{F}, T)$, le germe $H^S(\gamma)$ est équivalent à $\tilde{H}^S(f_*(\gamma))$ modulo $H^S(\beta)$, où β est n'importe quel élément de $\Pi(\mathcal{F}, T)$ de même source que γ et représenté par un lacet non nul en holonomie dans la fibre.

LEMME 6.4.G-1. *Soient $\gamma_1, \gamma_2, \beta \in \Pi(\mathcal{F}, T)$ trois éléments de même source, tels que γ_1 et γ_2 aient même image par f_*, et que β soit représenté par un lacet de la fibre, dont la classe d'holonomie $[\beta]$ engendre $H_1(F, \mathbf{R})$.*

Alors, pour tout germe de déformation H^S de l'holonomie de $\mathcal{F}$, on a:

$$H^S(\gamma_1) \simeq H^S(\gamma_2)[H^S(\beta)]$$

DÉMONSTRATION: Comme γ_1 et γ_2 ont même image par $f_*, \gamma_1\gamma_2^1$ est représenté par un lacet nul en holonomie dans la fibre. Alors $H^S(\gamma_2)^{-1} \circ H^S(\gamma_1) = H^S(\gamma_1\gamma_2^1)$ est négligeable devant $H^S(\beta)$ d'après le Corollaire 4.3.f-2. □

PROPOSITION 6.4.G-2. *Soit $H^S: \Pi(\mathcal{F}, T) \to \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ une déformation de l'holonomie de $\mathcal{F}$ sur T, et soit $\tilde{H}^S$ la déformation de l'holonomie de $\mathcal{G}$ construite au Paragraphe f, à partir de H^S.*

Soient $\gamma, \beta \in \Pi(\mathcal{F}, T)$ deux éléments de même source, tels que β soit représenté par un lacet dont la classe d'homologie dans la fibre est non nulle. Alors on a:

$$H^S(\gamma) \simeq \tilde{H}^S(f_*(\gamma))[H^S(\beta)]$$

DÉMONSTRATION: Remarquons d'abord que, pour tout i, pour tout choix de deux éléments $\gamma, \beta \in \Pi(\mathcal{F}, T)$ vérifiant les hypothèses de la proposition, et contenus dans une fibre $f_x, x \in U_i$, on a:

$$H^S(\gamma) \simeq \tilde{H}^S_{U_i}(f_*(\gamma))\ [H^S(\beta)].$$

En effet $\tilde{H}^S_{U_i}(f^*(\gamma)) = H^S(\varphi_i \circ f_*(\gamma))$. Or $\varphi_i \circ f_*(\gamma)$ et γ ont même image par f_*: il suffit donc d'appliquer le Lemme g-1. □

Reprenons la construction de $\tilde{H}^S$, et montrons la Proposition g-2, par itération, sur les $\tilde{H}^S_{V_i}$.

Supposons que la Proposition g-2 soit vraie pour $\tilde{H}^S_{V_{i-1}}$. Soient γ, β vérifiant les hypothéses de la proposition, et contenus dans une fibre $F_x, x \in V_i$.

- Si $x \in V_{i-1} - U_i$, alors $\tilde{H}^S_{V_i}(f^*(\gamma)) = \tilde{H}^S_{V_{i-1}}(f^*(\gamma))$, et, par hypothèse, $\tilde{H}^S_{V_{i-1}}(f^*(\gamma)) \simeq H^S(\gamma)[\beta]$.
- Si $x \in U_i'$, alors on a: $\tilde{H}^S_{V_i}(f^*(\gamma) = \tilde{H}^S_{U_i}(f^*(\gamma))$, et on conclut par la remarque ci-dessus.
- Si $x \in V_{i-1} \cap U_i - U_i'$, on va d'abord vérifier la proposition pour les éléments γ^x_{ij} de la base de Π_{U_i}:

Soit $\beta_0 \in \Pi(\mathcal{F}, t)$ un élément représenté par un lacet d'origine $\sigma_i(x)$, non nul en homologie. Alors, pour tout j tel que $x \in U_j$ on a:

$$H^S(\varphi_i(\gamma^x_{ij})) \simeq \tilde{H}^S_{V_{i-1}}(\gamma^x_{ij})[H^S(\beta_0)]$$
$$H^S(\varphi_i(\gamma^x_{ij})) \simeq \tilde{H}^S_{U_i}(\gamma^x_{ij})[H^S(\beta_0)]$$

Donc $H^S(\varphi_i(\gamma^x_{ij})) \simeq (1-\psi)\tilde{H}^S_{V_{i-1}}(\gamma^x_{ij}) + \psi\tilde{H}^S_{U_i}(\gamma^x_{ij})[H^S(\beta_0)]$ (d'aprés le Lemme c-2.)

Donc $H^S(\varphi_i(\gamma^x_{ij})) \simeq H^S_{V_i}(\gamma^x_{ij})[H^S(\beta_0)]$

Soient $\gamma, \beta \in \Pi(\mathcal{F}, T)$ contenus dans F_x, et vérifiant les hypothèses de la Proposition g-2. Notons $\tilde{\gamma} = f_*(\gamma)$. Alors γ et $\varphi_i(\tilde{\gamma})$ ont même image par f_*, donc:

$$H^S(\gamma) \simeq H^S(\varphi_i(\tilde{\gamma}))[H^S(\beta)].$$

On va utiliser l'écriture de $\tilde{\gamma}$ dans la base des $\gamma^x_{ii}, \gamma^x_{ij}$:

$$\tilde{\gamma} = (\gamma^x_{ik})^{-1}(\gamma^x_{ii})^m\gamma^x_{il}$$

On a donc: $\varphi_i(\tilde{\gamma}) = \varphi_i(\gamma^x_{ik})^{-1} \cdot \varphi_i(\gamma^x_{ii})^m \cdot \varphi_i(\gamma^x_{il})$

On en déduit facilement: $\tilde{H}^S_{V_i}(\tilde{\gamma}) \simeq H^S(\varphi_i(\tilde{\gamma}))[H^S(\beta)]$, en utilisant les propriétés de l'équivalence des germes (b-5 à b-9)).

h) Démonstration du Théorème B

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que, si la fibre F de la fibration p est C^1-instable, alors la fibre S^1 de la fibration q l'est aussi.

Prenons pour espace des paramètres $S = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbf{N}^*}$, pointé en 0.

On suppose que la fibre F est C^1-instable. Donc il existe une C^1-déformation $\{\mathcal{F}^s\}_{s \in S}$ du feuilletage $\mathcal{F}$ telle que pour tout $s \in S, \mathcal{F}^s$ soit sans feuille compacte proche d'une fibre.

Soit $H^S : \Pi(\mathcal{F}, T) \to \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$, le germe de déformation de l'holonomie de $\mathcal{F}$ sur T induit par la déformation $\{\mathcal{F}^s\}_{s \in S}$.

Notons $\tilde{H}^S : \Pi(\mathcal{G}, T) \to \mathrm{Diff}^{(S,0)}(T)$ le germe de déformation de l'holonomie de $\mathcal{G}$ construit à partir de $\tilde{H}$ au Paragraphe f.

La transversale T a été choisie plongée dans E, et T' est une transversale complète de $\mathcal{G}$ relativement compacte dans T (Paragraphe d). Donc, d'après le Corollaire 1.5.b-8, il existe une déformation $\{\mathcal{G}^s\}_{s \in S}$ telle que la restriction de $\tilde{H}^S$ à $\Pi(\mathcal{G}, T')$ soit le germe de déformation de l'holonomie de $\mathcal{G}$ sur T' induit par la déformation $\{\mathcal{G}^s\}_{s \in S}$.

Montrons, par l'absurde, que pour tout $s \neq 0$ suffisamment proche de $0, \mathcal{G}^s$ ne possède aucune feuille compacte proche d'une fibre: on suppose donc qu'il existe une suite s_i convergeant vers 0 tel que $\mathcal{G}^{s_i}$ possède une feuille compacte proche d'une fibre. Quitte à choisir une sous-suite, on peut supposer que ces feuilles compactes convergent vers une fibre $q^{-1}(x), x \in B$, quand s_i tend vers 0.

Soit $\tilde{\gamma} \in \Pi(\mathcal{G}, T')$ un élément contenu dans la fibre $q^{-1}(x)$ et représenté par un lacet non homologue à zéro dans la fibre. Notons encore x l'origine de γ: c'est un point de $T' = \amalg U'_i$. Soit $\gamma \in$

$\Pi(\mathcal{F},T')$ un relevé de $\tilde{\gamma}$ par f_* (c'est-à-dire $f^*(\gamma) = \tilde{\gamma}$). Notons $f = H^S(\gamma)$ et $g = \tilde{H}^S(\tilde{\gamma})$.

D'après la Proposition g-2, on a: $f \simeq g \quad [f]$. D'après le Corollaire b-4, pour toute réalisation $\hat{f},\hat{g} \in \mathrm{Diff}^S(T')$, il existe un voisinage U de $(x,0)$ tel que $\hat{f}$ et $\hat{g}$ aient mêmes points fixes sur U.

Cependant, γ engendre l'homologie de la fibre $F_x = p^{-1}(x)$. Donc, d'après le Corollaire 4.3 f-2, il existe un voisinage V de $(x,0)$ tel que tout point fixe $(y,s) \in V$ de $\hat{f}$ soit sur une feuille compacte proche d'une fibre de $\mathcal{F}^s$. Comme, pour $s \neq 0, \mathcal{F}^s$ est sans feuilles compactes proches d'une fibre, $\hat{f}$ est sans point fixe sur $V' - T \times \{0\}$.

Enfin, par hypothèse, la fibre $q^{-1}(x)$ est accumulée par les feuilles compactes proches d'une fibre des $\mathcal{G}^{s_i}$. Donc pour toute réalisation $\hat{g}$ de g, il existe une suite (y_i,s_i), $s_i \neq 0$, de points fixes de $\hat{g}$ convergeant vers $(x,0)$.

On arrive donc à une contradiction: on vient de montrer par l'absurde que pour s proche de 0, le feuilletage $\mathcal{G}^s$ est sans feuille compacte proche d'une fibre. La fibre S^1 de q est donc C^1-instable: le Théorème 6.4.a-1 est donc démontré, et donc aussi le Théorème B. □

Chapitre 7

FIBRATIONS EN TORES: EXEMPLES DE STABILITÉ ET D'INSTABILITÉ

§1 Introduction

Les Chapitres 5 et 6 ont achevé chacun la résolution d'un problème, pour lequel certains résultats étaient connus ainsi que la plupart des techniques employées:

– le problème de C^0-stabilité pour les fibrations en cercles était presque entièrement résolu par le Théorème de Fuller; le Chapitre 5 achève la résolution en donnant une condition nécessaire et suffisante (Théorème A).

– Langevin et Rosenberg avaient donné les deux idées principales laissant présager que les fibrations, de fibre F vérifiant $H_1(F, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$, doivent se comporter par C^1-perturbations comme les fibrations en cercles (voir [**LR 1**] et [**LR 2**]). Mettant un point final à une suite de résultats partiels utilisant ces idées, le Chapitre 6 donne une condition nécessaire et suffisante au problème de C^1-stabilité de la fibre de telles fibrations (Théorème B).

En revanche, très peu de choses étaient connues sur les perturbations des fibrations de fibre un tore $\mathbf{T}^n, n \geq 2$, et sur le problème de stabilité pour de telles fibrations (voir cependant [**P**] quand la base

est le cercle S^1, et [DM] pour certaines déformations de la fibration produit $S^2 \times T^2 \to S^2$). Le Chapitre 7 présente deux résultats qui sont loin de clore le sujet, mais qui, j'espère, permettront de mieux le comprendre:

– on prouve d'abord la C^1-stabilité de la fibre T^n des fibrations triviales $S \times T^n \to S$, quand S est une surface compacte de caractéristique d'Euler non nulle (Théorème C).

– puis, pour toute surface orientable S de genre $g(S) \geq 2$ on construit une fibration de fibre T^2 et de base S dont la fibre est C^∞-instable (Théorème D).

Je pense que les techniques utilisées pour ces deux résultats devraient permettre de répondre à la question suivante:

QUESTION: *Quelles sont les fibrations de fibre le tore T^n et de base une surface compacte S, dont la fibre soit C^1-stable?*

Les Théorèmes C et D sont en fait des résultats de systèmes dynamiques des surfaces:

–le Théorème C est un corollaire facile du Théorème C' suivant:

THÉORÈME. *Soit S une surface de caractéristique d'Euler non nulle. Il existe un voisinage U de l'identité dans $\mathrm{Diff}_1(S)$ muni de la C^1-topologie, tel que, si $f_1, \ldots, f_n \in U$ sont n difféormorphismes de S commutants deux à deux, alors ils possèdent un point fixe commun.*

La démonstration du Théorème C' utilise les propriétés simples des difféomorphismes C^1-proches de l'identité (voir Chapitre 4.3), pour généraliser le Théorème de E. Lima d'existence de zéros communs pour n champs de vecteurs commutants sur une surface S, $\chi(S) \neq 0$.

– La déformation sans feuille compacte, annoncée par le Théorème D, d'une fibration en tore T^2 de base $S, g(S) \geq 2$, se fait à l'aide

de deux champs de vecteurs commutants, sans zéro communs, sur un revêtement $\tilde{S}$ de S, et vérifiant une relation d'équivariante par une action de $\pi_1(S)$: voir Chapitre 3.2. Le Théorème D est donc un théorème d'existence de tels champs commutants.

Ces deux résultat ayant déja été publiés (voir [**B3**] et [**B4**] je donnerai ici juste une esquisse de démonstration, épurée de nombreux détails techniques.

§2 Difféomorphismes commutants des surfaces

Le but de cette partie est de donner l'idée de la démonstration du Théorème C'.

Tout difféomorphisme f d'une surface S que nous considérerons étant C^1-proche de l'identité, nous parlerons ici du vecteur $f(x)-x$, d'angle entre les vecteurs $f(x)-x$ et $f(y)-y$, ou x et y sont des points voisins, et nous noterons $\| x-y \|$ la distance entre deux points voisins, comme si S était le plan $\mathbf{R}^2$.

Ce langage aproximatif est l'essentiel de ce que je négligerai dans cette partie. La formalisation de ce langage est faite dans [**B3**] ou [**B4**].

a) deux difféomorphismes commutants de la sphère S^2

On choisit, grace au Lemme 4.3.b-1, un voisinage de l'identité de la façon suivante:

On fixe un nombre $k > 0$ assez grand (en fait $k = 4$ suffit), et $\varepsilon > 0$ assez petit pour que tout difféomorphisme f de S^2 tel que $\| f - id \|_1 < \varepsilon$ vérifie la propriété suivante:

Pour tout $x \in S^2$, pour tout $y \in S^2$ tel que la distance $d(x,y)$ soit inférieur à $k\|f(x) - x\|$, le vecteur $f(y) - y$ est de norme équivalente à celle du vecteur $f(x) - x$; de plus le vecteur $f(y) - y$

fait un angle petit avec $f(x)-x$ (inférieur à $\frac{\pi}{100}$ pour fixer les idées): ces deux propriétés sont exprimées par le fait que la différence $(f(x)-x)-(f(y)-y)$ est petite devant $\| f(x)-x \|$.

On appellera *boule de sécurité* de x pour f et on notera $B_f(x)$ la boule de centre x de rayon $k\cdot \| f(x)-x \|$; elle est bien sûr réduite au point x si et seulement si x est point fixe de f.

On montre alors:

THÉORÈME 7.1.A-1. *Soient f et g deux difféomorphismes commutants de la sphère S^2, vérifiant $\| f-id \|_1 < \varepsilon$ et $\| g-id \|_1 < \varepsilon$. Alors* $\mathrm{Fix}(f) \cap \mathrm{Fix}(g) \neq \phi$.

DÉMONSTRATION:

Pour ce théorème, la commutation de f et g sera utilisé uniquement de la façon suivante: si $x \in \mathrm{Fix}(f)$, son orbite $\mathrm{orb}_g(x)$, et son adhérence $\overline{\mathrm{orb}_g(x)}$ sont incluses dans $\mathrm{Fix}(f)$.

La démonstration se fait par l'absurde: supposons f et g sans point fixes communs. Alors $\mathrm{Fix}(f)$ et $\mathrm{Fix}(g)$ sont des compacts non vide (car $\chi(S^2) \neq 0$) disjoints. On en déduit que le minimum des distances $\| f(x)-x \|$ et $\| g(y)-y \|$, pour $x \in \mathrm{Fix}(g)$ et $y \in \mathrm{Fix}(f)$, est strictement positif: on le notera r.

Pour tout point x de $S^2 - \mathrm{Fix}(f)$, on note $\gamma_f(x)$ la courbe obtenue en mettant bout à bout les segments orientés $[f^i(x), f^{i+1}(x)]$. D'autre part, notons X le champ de vecteurs sur S^2 défini par $X(x) = f(x) - x$ (où $f(x)-x$ est assimilé à un vecteur tangent à S^2).

Alors, en tout point $z \in \gamma_f(x)$ le vecteur $X(z)$ fait un petit angle ($< \frac{\pi}{20}$) avec le vecteur tangent à $\gamma_f(x)$ au point z: on dira que le champ de vecteur X est presque tangent aux courbes $\gamma_f(x), x \in S^2 - \mathrm{Fix}(f)$.

On définit de même les courbes $\gamma_g(g), y \in S^2 - \mathrm{Fix}(g)$, et le champ de vecteur $Y(z) = g(z) - z$, presque tangent à ces courbes. Montrons d'abord le lemme suivant:

LEMME 7.1.A-2. *Soient $x \in \mathrm{Fix}(g)$ et $y \in \mathrm{Fix}(f)$. Alors pour tous points $p \in \gamma_f(x), q \in \gamma_g(y)$, on a: $\| p - q \| > r$.*

DÉMONSTRATION: (par l'absurde). On suppose $\| p - q \| \leq r$. Or p est sur l'un des segments $[f^i(x), f^{i+1}(x)]$ et q sur un segment $[g^i(y), g^{j+1}(g)]$. Un calcul simple montre que la distance $\| f^i(x) - g^j(y) \|$ est alors inférieure à $3\sup(\| f^i(x) - f^{i+1}(x) \|, \| g^j(y) - g^{f+1}(y) \|)$, c'est à dire que l'on a:

– soit $g^j(y)$ appartient à la boule de sécurité $B_f(x)$, ce qui est impossible car $g^j(y) \in \mathrm{Fix}(f)$ (car f et g commutent).

– soit $f^i(x)$ est dans la boule de sécurité $B_g(y)$ ce qui est impossible car $f^i(x) \in \mathrm{Fix}(g)$.

Cette contradiction démontre le lemme. □

Voyons maintenant comment en déduire le théorème.

Considérons $x_0 \in \mathrm{Fix}(g)$. L'adhérence $\overline{\mathrm{orb}_f(x_0)}$ de son orbite pour f est constituée de points fixes de g (f et g commutent). Par un argument classique, on trouve dans cette adhérence un point $\bar{x}_0$ (qui est donc fixe pour g) récurrent pour f.

On regarde la courbe $\gamma_f(\bar{x}_0)$: elle repasse aussi près que l'on veut de $\bar{x}_0$, une infinité de fois, car $\bar{x}_0$ est récurrent. On construit alors une courbe fermée simple γ_0, ou bien extraite de $\gamma_f(\bar{x}_0)$, en constatant que $\gamma_f(\bar{x}_0)$ possède des auto-intersections (voir **[B3]** Lemme 3.1), ou bien en créant d'abord une auto-intersection par une C^1-petite perturbation de $\gamma_f(\bar{x}_0)$ (voir **[B4]**, Lemme 3).

Notons D_0 l'un des deux disques bordés par γ_0. Le champ de vecteur X est presque tangent au bord ∂D_0 donc son indice sur D_0

est égal à 1: il possède donc un zéro $y_1 \in D_0$, qui est donc un point fixe pour f. D'après le lemme, $\gamma_g(y_1)$ ne s'approche pas du bord ∂D_0, donc $\overline{\mathrm{orb}_g(y_1)}$ est inclus dans D_0: on en déduit l'existence d'un point. $\bar{y}_1 \in D_0$, fixe pour f et récurrent pour g. On construit alors une courbe fermée simple $\gamma_1 \subset D_0$ à partir de $\gamma_g(\bar{y}_1)$ (de même qu'on avait construit γ_0 à partir de $\gamma_f(\bar{x}_0)$). La courbe γ_1 reste à une distance supérieure à r de $\gamma_0 = \partial D_0$ d'après le lemme. On note $D_1 \subset D_0$ le disque bordé par γ_0.

On peut itérer autant qu'on veut ce procédé, construisant ainsi une suite infinie de disques $D_{i+1} \subset D_i$, dont les bords sont construits à partir de courbes $\gamma_f(\bar{x}_i), \bar{x}_i \in \mathrm{Fix}(g)$, ou $\gamma_g(\bar{y}_i), \bar{y}_i \in \mathrm{Fix}(f)$, suivant la parité de i. On obtient une contradiction en remarquant que la distance entre les bords ∂D_{i+1} et ∂D_i est toujours supérieur à $r > 0$: le procédé ne peut pas s'itérer indéfiniment. □

b) deux difféomorphismes commutants sur une surface S de caractéristique d'Euler non nulle

Le fait topologique important sur S^2 était que tout lacet simple borde un disque. Sur une surface compacte S quelquonque, cette propriété sera remplacée par la suivante: il existe un entier $n_0 > 0$ (dépendant du genre $g(S)$) tel que, si $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n_0}$ sont n_0 courbes fermées simples disjointes alors il existe $i \neq j$ tel queγ_i et γ_j soient homotopes: si elles ne sont pas toutes deux homotopes à zéro, elles sont donc le bord d'une couronne.

Posons $m = 2n_0$. Si $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ sont m courbes fermées simples disjointes, alors il y en a trois, $\gamma_i, \gamma_j, \gamma_k$, dans la même classe d'homotopie. Si elles ne sont pas homotopes à zéro, il y en a une contenue dans l'intérieur d'une couronne bordée par les deux autres.

Pour pouvoir utiliser ce fait, nous allons devoir construire, à par-

tir de deux difféomorphismes commutants de S, f et g, m courbes simples distinctes, du type $\gamma_f(x)$, $x \in \mathrm{Fix}(g)$ définies au Paragraphe a). Pour cela, nous allons choisir m éléments du groupe de difféomorphismes engendré par f et g: posons $g_i = g \circ f^i, i = 1, \ldots, m$. Nous allons nous intéresser aux courbes $\gamma_f(x_i), x_i \in \mathrm{Fix}(g_i)$, et aux champs de vecteurs X_i définis par $X_i(x) = g_i(x) - x$, quand f et g sont suffisament C^1-proche de l'identité.

Précisons un peu ce "C^1-proche de l'identité": les Lemmes 4.3.d-1 et 4.3.b-1 permettent de choisir $\varepsilon > 0$ tel que, si f et g sont deux difféomorphismes commutants de la surface S, vérifiant $\| f - \mathrm{id} \|_1 < \varepsilon$ et $\| g - \mathrm{id} \|_1 < \varepsilon$, alors les propriétés suivantes sont vérifiées:

7.1.B-1: *pour tout* $i \in [-m, m] \cap \mathbf{Z}$, $\mathrm{Fix}\, f^i = \mathrm{Fix}\, f$.

On en déduit immédiatement:

7.1.B-2: *tout point fixe commun à* g_i *et* $g_j, i \neq j \in \{1, \ldots m\}$ *est point fixe commun de* f *et* g; *de même tout point fixe commun à* f *et* g_i, $i \in \{1, \ldots m\}$ *est point fixe de* g.

7.1.B-3: *il existe* $r > 0$ *tel que, pour tout* $i, j \in \{1, \ldots m\}$, $i \neq j$, *pour tout* $x_i \in \mathrm{Fix}\, g_i$, $x_j \in \mathrm{Fix}\, g_j$ *les courbes* $\gamma_f(x_i)$ *et* $\gamma_f(x_j)$ *sont disjointes, et restent une distance supérieure à* r *l'une de l'autre* (c'est-à-dire: $\forall p \in \gamma_f(x_i)\, \forall q \in \gamma_g(x_j)$, $\| p - q \| > r$).

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION: Il faut prendre $r = \inf\{\| x - f(x) \|, x \in \mathrm{Fix}(g_i), i \in \{1, \ldots, m\}$. On montre alors (comme pour le Lemme 7.1.a.2) que si $\gamma_f(x_i)$ et $\gamma_f(x_j)$ possèdent deux points distants de moins que r, alors x_i appartient à la boule de sécurité $B_f(x_j)$ ou x_j appartient à la boule de sécurité $B_f(x_i)$. Il faut alors remarquer que, x_i étant point fixe de $g_i = g \circ f^i$, on a: $g_j(x_i) = f^{j-i}(x_i)$. La boule de sécurité de x_i pour f est donc incluse dans la boule de sécurité de x_i pour g_j (car $\| g_j(x_i) - x_i \|$ est

presque égal à $|\, j-i \,|\, \| \, f(x_i)-x_i \, \|$). On obtient donc: $x_j \in B_{g_j}(x_i)$, ce qui n'est pas possible car $x_j \in \mathrm{Fix}(g_i)$ ou $x_i \in B_{g_i}(x_j)$, impossible car $x_i \in \mathrm{Fix}(g_i)$. □

7.1.B-4: *pour tout* $j \neq i \in \{1, \ldots, m\}$ *le champ de vecteurs* X_j *est presque tangent à toute courbe* $\gamma_f(x_i), x_i \in \mathrm{Fix}(g_i)$.

IDÉE DE DÉMONSTRATION: le champ X défini par $X(z) = f(z) - z$ est presque tangent aux courbes $\gamma_f(x_i)$ (voir le Paragraphe a). De plus, en tout point $f^k(x_i)$ on a:

$$g_j(f^k(x_i)) = f^{j-i}(f^k(x_i)), \text{ car } f^k(x_i) \in \mathrm{Fix}(g_i).$$

D'après le Lemme 4.3.d-1, le vecteur $X_j(f^k(x_i))$ est donc presque égal à $(j-i)X(f^k(x_i))$.

La boule de sécurité $B_f(f^k(x_i))$ est donc incluse dans la boule $B_{g_j}(f^k(x_i))$; on en déduit (Lemme 4.3.g-1) que le champ de vecteurs X_j est presque égal au champ $(j-i)$ sur $B_f(f^k(x_i))$. Les boules de sécurité $B_f(f^k(x_i)), k \in \mathbf{Z}$ recouvrant la courbe $\gamma_f(x_i)$, on en déduit que le champ X_j est presque tangent à $\gamma_f(x_i)$.

Pour rendre ces raisonnements rigoureux il faut bien-sûr faire très attention à l'ordre des choix (taille des boules de sécurités, angles entre les champs de vecteurs et les courbes). (voir [B4] Paragraphe a.2. et Lemme 4.1 et 4.2). □

Nous pouvons maintenant démontrer:

THÉORÈME 7.1.B-5. *Soit* S *une surface compacte de caractéristique d'Euler* $\chi(S) \neq 0$. *Soient* f *et* g *deux difféomorphismes commutants de* S *vérifiant* $\| \, f-id \, \|_1 < \varepsilon$ *et* $\| \, g-id \, \|_1 < \varepsilon$. *Alors* $\mathrm{Fix}\, f \cap \mathrm{Fix}\, g \neq \phi$.

DÉMONSTRATION: (par l'absurde). On suppose f et g sans point fixe commun. L'hypothèse $\chi(S) \neq 0$ entraine, pour tout i, l'existence de $x_i \in \operatorname{Fix} g_i$. Comme on l'a déjà vu pour le Théorème a-1, chaque adhérence d'orbite $\overline{\operatorname{orb}_f(x_i)}$ contient un point $\bar{x}_i$, fixe pour g_i et récurrent pour f: ceci permet de construire, pour tout $i \in \{1, \ldots m\}$, une courbe fermée simple γ_i^0, à partir de $\gamma_f(\bar{x}_i)$: on provoque une auto-intersection par une C^1-petite perturbation de $\gamma_f(\bar{x}_v)$ et on extrait de la courbe obtenue une courbe fermée simple γ_i^0.

Une courbe γ_i^0 ainsi construite ne peut être homotope à zéro dans S: sinon elle borde un disque D_0 tel que le champ de vecteurs X soit presque tangent au bord, ce qui prouve l'existence d'un point fixe de f dans l'intérieur de D_0. Le raisonnement que l'on a fait sur la sphère S^2 peut alors se répéter ici, prouvant l'existence d'un point fixé commun à f et g_i, donc à f et g, dans l'intérieur de D_0.

On dispose donc de m courbes simples disjointes γ_i^0, $i \in \{1, \ldots, m\}$ non homotopes à zéro. Il y en a 3 distinctes dans la même classe d'homotopie, par définition de m. On considère alors l'ensemble C_0, union de toutes les couronnes de S bordées par des courbes γ_i^0 (c'est-à-dire des parties de S homéomorphes à $S^1 \times [0,1]$, et dont le bord est formé de 2 courbes γ_i^0); alors C_0 est non vide, et chaque composante connexe de C_0 est une couronne. De plus C_0 contient dans son intérieur au moins une des courbes γ_i^0. On note I_0 l'ensemble des $i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que γ_i^0 soit dans l'intérieur de C_0. Le champ de vecteurs X_i est alors presque tangent au bord de C_0 (d'après 7.1.b-4), donc est d'indice nul sur C_0. Comme S est de caractéristique d'Euler non nulle, X_i possède un zéro x_i^1 dans $S - C_0$, (x_i^1 est point fixe de g_i). On utilise alors les points x_i^1, $i \in I_0$ pour construire de nouvelles courbes simples disjointes γ_i^1,

$i \in I_0$, disjointes des γ_i^0, $i \in \{1,\dots m\}$, et disjointes de C_0. On note alors $\gamma_i^1 = \gamma_i^0$ pour $i \in \{1,\dots,m\} - I_0$. On obtient ainsi une nouvelle famille $\{\gamma_i^1\}$, $i \in \{1,\dots,m\}$, de m courbes simples disjointes, telle que le bord de C_0 est composé de courbes γ_i^1, et que l'intérieur de C_0 ne contient aucune de ces courbes. On note C_1 l'union des couronnes bordées par les γ_i^1. Bien sûr $C_0 \subset C_1$. De plus par choix de m, l'une des courbes γ_i^1 est contenue dans une couronnes bordées par deux de ces courbes, donc est incluse dans l'intérieur de C_1. On en déduit:

$$\begin{array}{ccc} C_0 & \subset & C_1 \\ & \neq & \end{array}$$

En itérant le procédé, on construit une suite infinie

$$\begin{array}{ccccccc} C_0 & \subset & C_1 & \subset & \dots & \subset & C_k \dots \\ & \neq & & \neq & & \neq & \end{array}$$

D'autre part, on déduit de 7.1.b-3 que la différence $C_k - C_{k-1}$ contient une boule de rayon $\frac{r}{3}$, pour tout k. Ceci amène une contradiction avec la compacité de S.

c) n difféomorphismes

La démonstration se fait par récurrence: on a montré le Théorème C' pour 2 difféomorphismes. Supposons-le prouvé pour n difféomorphismes, montrons comment le prouver pour $n+1$... je n'ai pas trouvé de démonstration simple pour cette récurrence. Celle que j'ai trouvée consiste à recommencer la démonstration déjà faite pour deux difféomorphismes, en utilisant des courbes du types $\gamma_f(x)$ où x est point fixe commun à n difféomorphisme.

SUR LA SPHÈRE S^2: si $f_0,\dots,f_n$ soit $n+1$ difféomorphismes commutants, C^1-proches de l'identité, et supposés sans points fixes,

communs, alors on construit une suite infinie de disques D_i, $i \in N$, $D_{i+1} \subset D_i$, tel que le bord ∂D_i est une courbe fermé simple γ_i contenue dans une courbe $\gamma_f(x_i)$, où f sera alternativement f_0 ou f_n, et où x_i sera alternativement un point fixe commun de $f_1, \ldots, f_n$ ou de $f_0, \ldots, f_{n-1}$.

SUR UNE SURFACE S: (de caractéristique d'Euler $\chi(S) \neq 0$). Soient $f, g_1, \ldots, g_n$, $n+1$ difféomorphismes commutants de S, suffisamment C^1-proches de l'identité, et sans point fixes communs.

On note $h_i = g_n \circ f^i$, $i \in \{1, \ldots m\}$. Pour tout i, la famille $\{g_1, \ldots, S_{n-1}, h_i\}$ possède un point fixe commun x_i, par hypothèse de récurrence. On construit alors m courbes simples disjointes γ_i à l'aide des courbes $\gamma_j(x_i)$, et on note C_0 l'union des couronnes bordées par les γ_i, et on note $I_0 \subset \{1 \ldots m\}$ l'ensemble des i tels que $\gamma_i \subset C_0$. Pour continuer le raisonnement vu au Paragraphe b, il faut montrer que $g_1, \ldots, g_{n-1}, h_i$, $i \in I_0$, possèdent un point fixe commun dans $S - C_0$. Pour cela, on a besoin d'une "version à bord" du Théorème C' pour n difféomorphismes ... (voir le Lemme 5 de [B4]).

§3 Exemples de fibrations en tores instables

La lecture de la Partie 3.2 est indispensable pour comprendre cette partie.

Soit S une surface compacte orientable de genre $g(S) \geq 2$. Fixons $h: \pi_1(S) \to \mathbf{Z}$ un homomorphisme surjectif. Choisissons $A \in SL(2, \mathbf{Z})$ une matrice possèdant deux valeurs propres réelles positives, λ et $\frac{1}{\lambda}, \lambda \in]0, 1[$. On définit un homomorphisme $\rho: \Pi_1(S) \to SL(2, \mathbf{Z})$ défini par $\rho(\gamma) = A^{h(\gamma)}$.

Au Chapitre 3.2, on a construit, par suspension de ρ, une fibra-

tion en tore T^2, $f_\rho: M_\rho \to S$.

Nous allons montrer:

THÉORÈME D. *Avec les notations ci-dessus, la fibre de la fibrations f_ρ est C^∞-instable: il existe une C^∞-déformation $\mathcal{F}_t, t \in \mathbf{R}$ du feuilletage $\mathcal{F}_\rho$ défini par f_ρ, tel que pour tout $t \neq 0$ $\mathcal{F}_t$ n'ait aucune feuille compacte.*

Notons $\Pi: \tilde{S} \to S$ le revêtement cyclique de S associé à la représentation ρ (voir 3.2.a), et notons $\varphi: \tilde{S} \to \tilde{S}$ l'automorphisme du revêtement Π associé à un lacet γ tel que $\rho(\gamma) = A$. D'après 3.2.d.1, on peut construire une C^∞-déformation $\mathcal{F}_t$ de la fibration à partir de deux champs de vecteur X et Y de classe C^∞, commutants sur $\tilde{S}$, et vérifiant:

$$* \qquad \begin{pmatrix} \varphi_*(X) \\ \varphi_*(Y) \end{pmatrix} = t_A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

D'après 3.2.d-2, si X et Y sont de plus sans zéros communs, alors pour tout $t \neq 0$ assez petit, $\mathcal{F}_t$ sera sans feuille compacte proche d'une fibre (ce qui prouverait déja l'instabilité de la fibre de la fibration).

On peut maintenant utiliser le fait que A est diagonalisable pour simplifier la relation *. En effet, supposons que U et V soient deux champs de classe C^∞ sur $\tilde{S}$, commutants, sans zéros communs, et vérifiant:

$$** \qquad \varphi_*(U) = \lambda U \text{et} \varphi_*(V) = \frac{1}{\lambda} V.$$

Notons P une matrice diagonalisant A; alors les champs de vecteurs X et Y sur $\tilde{S}$ définis par $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ vérifient les propriétés souhaitables.

Le Théorème D est donc un corollaire du lemme suivant:

LEMME 7.2.1. *Il existe deux champs de vecteurs U et V de classe C^∞ sur $\tilde{S}$, commutants, sans zéros communs, et vérifiant **.*

La clé de la construction des champs U et V réside dans une surprenante liberté que l'on a au dessus de certaines couronnes de S:

Soit C une couronne incluse dans S, bordée par deux lacets a et b tels que $\rho(a) = \rho(b) = A$. Notons $\tilde{C} = \Pi^{-1}(C) \subset \tilde{S}$. C'est une bande bordée par deux droites $\tilde{a} = \Pi^{-1}(a)$ et $\tilde{b} = \Pi^{-1}(b)$.

LEMME 7.2-2. *Soient u et v de champs de vecteurs commutants, définis au voisinage de $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$, vérifiant **, et tel que u ou v soit transverse à $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$.*

*Alors il existe deux champs de vecteurs U et V de classe C^∞, définis sur $\tilde{C}$ vérifiant **, commutant, sans zéros communs, et coïncidants avec u et v au voisinage de $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$.*

Avant de donner la preuve du Lemme 7.2-2, voyons comment l'utiliser pour construire les champs U et V sur $\tilde{S}$.

L'idée est de découper S suivant un nombre fini de courbes simple fermées γ_i, lisses, se coupant transversalement, de façon que chaque composante connexe ainsi obtenue soit une couronne vérifiant les hypothèses du lemme. La figure suivante donne l'exemple d'une décomposition en couronnes pour $g(S) = 2$.

Pour l'exemple de la figure, on construit alors U et V au voisinage des $\Pi^{-1}(\gamma_i)$ de la façon suivante:

– d'abord on construit U et V champs commutants définis au voisinage de $\Pi^{-1}(p)$ et $\Pi^{-1}(q)$, vérifiant **, et tels que U entre dans C_0^+ et sort de C_1^-, et V entre dans C_1^+ et sort de C_0^-.

– puis on prolonge U sur un voisinage des $\Pi^{-1}(\gamma_i)$ de façon à ce qu'il soit transverse aux lignes $\Pi^{-1}(\gamma_i)$, et vérifie **.

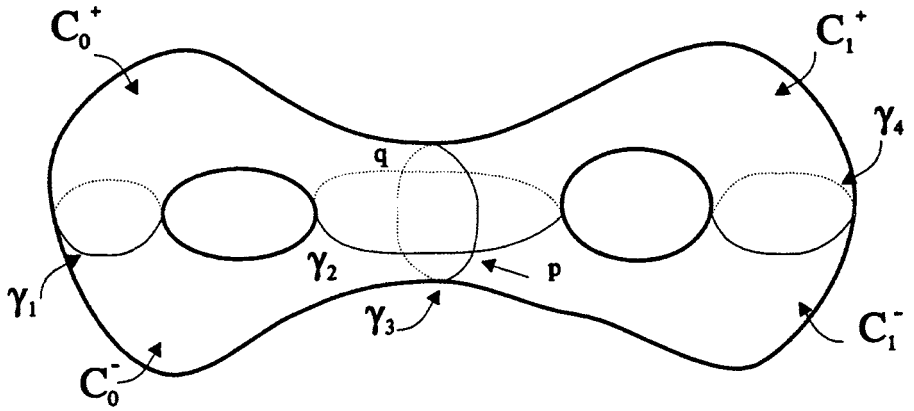


Figure 7.1.

– on prolonge alors V sur les $\Pi^{-1}(\gamma_i)$ de façon transverse au $\Pi^{-1}(\gamma_i)$, vérifiant **.

– on pousse alors V par le flot de U ce qui permet de définir U et V commutants, vérifiant ** sur un voisinage des $\Pi^{-1}(\gamma_i)$.

Il suffit alors d'appliquer le Lemme 7.2-2 dans chacune des couronnes pour obtenir des champs de vecteurs U et V sur $\tilde{S}$, vérifiant toutes les propriétés voulues.

DÉMONSTRATION DU LEMME 7.2-2:

On considère la bande $[0,1] \times \mathbf{R}$, munie de coordonnées (s,t). Notons U le champ de vecteurs sur cette bande, défini par:

$$U(s,t) = \lambda^t(-s^2 e^{-1/s}\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial t}).$$

C'est un champ de vecteurs de classe C^∞, sans zéro, transverse (rentrant) sur $\{1\}\times\mathbf{R}$, et vérifiant $\varphi_*(U) = \lambda U$ où $\varphi(s,t) = (s,t+i)$; rappelons que $\lambda \in]0,1[$ et l'une des valeurs propre de la matrice A.

LEMME 7.2-3. *Soit v un champ de vecteurs de classe C^∞ défini le long de $\{1\} \times \mathbf{R}$ et vérifiant $\varphi_*(v) = \frac{1}{\lambda} v$.*

Alors v se prolonge de façon unique en un champ de vecteurs V sur $[0,1] \times \mathbf{R}$, commutant avec U, vérifiant $\varphi_*(V) = \frac{1}{\lambda} V$, nul sur $\{0\} \times \mathbf{R}$, de classe C^∞ sur $[0,1] \times \mathbf{R}$ et C^∞-plat le long de $\{0\} \times \mathbf{R}$.

DÉMONSTRATION: La donnée du champ v sur $1 \times \mathbf{R}$ détermine un unique champ de vecteur V sur $]0,1] \times \mathbf{R}$ commutant avec U et prolongeant v: c'est le champ obtenu en poussant v par le flot de U. Il est bien sur de classe C^∞, et on montre facilement que V vérifie $\varphi_*(V) = \frac{1}{\lambda} V$. Il reste donc à voir que V se prolonge de façon C^∞ et C^∞ plate par le champ nul sur $\{1\} \times \mathbf{R}$.

Dans [**B4**], j'avais vérifié cela pour un champ U plus général, de la forme $\lambda^t(g(s)\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial t})$ où g est une fonction C^∞-plate en 0. Cette vérification était assez laborieuse. Le fait d'avoir pris pour g la fonction $-s^2$ e $^{-1/s}$ permet ici de faire des calculs explicites, ce qui s'avère plus simple. Voici l'idée du calcul:

On constate d'abord que les champs $\lambda^t(-s^2 \text{ e}^{-1/s})\frac{\partial}{\partial s}$ et $-\lambda^t \frac{\partial}{\partial t}$ commutent avec U, et forment une base de $\mathbf{R}^2$ en tout point de $]0,1] \times \mathbf{R}$. On écrit V dans cette base:

$$V(s,t) = \alpha(s,t) \cdot \lambda^t(-s^2 e^{-1/s})\frac{\partial}{\partial s} + \beta(s,t)(-\lambda^t \frac{\partial}{\partial t})$$

Pour prouver que V se prolonge de façon C^∞-plate en 0, il suffit de montrer que α et β se prolongent de façon C^∞-plate en 0.

Le fait que V commute avec U entraine que α et β sont constantes le long des orbites de U: ceci permet de calculer α et β en fonction de leurs restrictions a et b à $\{1\} \times \mathbf{R}$ (c'est à dire $a(t) = \alpha(1,t)$ et $b(t) = \beta(1,t)$).

On vérifie:

$$\alpha(s,t) = a(t - e^{1/s} + e)$$

$$\beta(s,t) = b(t - e^{1/s} + e)$$

(il faut vérifier que $(1, t - e^{1/s} + e)$ et (s,t) sont sur la même orbite de U).

D'autre part, du fait que $\varphi_*(v) = \frac{1}{\lambda}v$ on déduit:

$$a(t+1) = \lambda^{-2}a(t) \text{ et } b(t+1) = \lambda^{-2}b(t),$$

c'est à dire qu'on peut écrire $a(t) = \lambda^{-2t}\bar{a}(t)$ et $b(t) = \lambda^{-2t}\bar{b}(t)$ où $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont des fonctions C^∞, périodiques de période 1.
On a alors:

$$\begin{cases} \alpha(s,t) = \lambda^{2(e^{1/s}-e-t)}\bar{a}(t - e^{1/s} + e) \\ \beta(s,t) = \lambda^{2(e^{1/s}-e-t)}\bar{b}(t - e^{1/s} + e) \end{cases}$$

On en déduit que α et β se prolongent façon $\mathbf{C}^\infty$-plates sur $\{0\} \times \mathbf{R}$, ce qui achève la démonstration du Lemme 7.2.3. □

Voyons comment en déduire le Lemme 7.2.2:

Si C est une couronne vérifiant les hypothèses du Lemme, on peut prendre des coordonnées sur $\tilde{C} = \Pi^{-1}(C)$ de façon que $\tilde{C} = [-z, z] \times \mathbf{R}$, et que l'automorphisme de revêtement φ soit $(s,t) \to (s, t+1)$.

– si u est un champ de vecteur transverse, entrant, sur le bord $\partial\tilde{C}$, et vérifiant $\varphi_*(u) = \lambda u$, alors on peut le prolonger sur $\tilde{C}$ en un champ U de classe C^∞ vérifiant $\varphi_*(U) = \lambda U$ et coïncidant avec $\lambda^t(-s \mid s \mid \mathrm{e}^{-1/|s|}\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial t})$ sur $[-1,1] \times \mathbf{R}$. Le lemme 7.2.3 appliqué aux bandes $[-1,0] \times \mathbf{R}$ et $[0,1] \times R$ montre que tout champ de vecteur v défini sur $\partial\tilde{C}$, vérifiant $\varphi_*(v) = \frac{1}{\lambda}v$, s'étant de façon unique en

un champ V sur C^∞, de classe C^∞, commutant avec U, vérifiant $\varphi_*(V) = \frac{1}{\lambda}V$, et nul et C^∞ plat sur $\{0\} \times \mathbf{R}$.

– si u est transverse sortant sur $\partial\tilde{C}$, il suffit d'appliquer le raisonnement précédent avec $-u$.

– si u entre par un bord, et sort par l'autre, il suffit de découper $\tilde{C}$ en deux bandes, et définir u sur le nouveau bord de façon à ce qu'il entre dans l'une des bandes, et sorte de l'autre: on peut appliquer le raisonnement précédant à chacune des bandes. □

FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME D: Les champs de vecteurs U et V dons nous venons d'assurer l'existence permettent de construire (d'après 3.2.d.1 et 3.2.d.2) une C^∞-déformation $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ du feuilletage $\mathcal{F}_0$ défini par la fibration f_p, telle que, pour $t \neq 0$ assez petit, $\mathcal{F}_t$ soit sans feuille compacte proche d'une fibre: la fibre de la fibration est donc C^∞-instable. Le Théorème D annonce un peu plus: nous allons voir que, pour tout $t \neq 0, \mathcal{F}_t$ est sans feuille compacte.

Nous avons vu au Paragraphe 3.2.e que les champs commutants U et V (ou X et Y) engendrent une action locale de $\mathbf{R}^2$ sur $\tilde{S}$ et que les orbites de cette action locale passe au quotient par Π en une partition de S. De plus pour tout $t \neq 0$, chaque feuille de $\mathcal{F}_t$ se projette sur S par f_p en une partie de cette partition; si $\mathcal{F}_t$ possède une feuille compacte, sa projection sur S sera compacte.

On en déduit que, si l est une feuille compacte de $\mathcal{F}_t, t \neq 0, \Pi(l)$ est une courbe simple fermée γ telle que $p(\gamma) = A$, et telle que U ou V est nul sur $\Pi^{-1}(\gamma)$, l'autre champ étant non nul et tangent à $\Pi^{-1}(\gamma)$; on supposera, pour fixer les idées que V est nul sur $\Pi^{-1}(\gamma)$.

Remarquons qu'alors, $f^{-1}(\gamma)$ est une sous variété de M_p saturée pour le feuilletage $\mathcal{F}_t$. Pour conclure le Théorème D nous montrons:

LEMME 7.2.4. *Toute feuille de $\mathcal{F}_t, t \neq 0$, contenue dans $f_p^{-1}(\gamma)$, est dense dans $f_p^{-1}(\gamma)$.*

DÉMONSTRATION: En identifiant S a la section canonique de la fibration f_p, on peut considérer S, et donc $\tilde{S}$ comme une transversale complète du feuilletage $\mathcal{F}_t$. Le pseudogroupe d'holonomie de $\mathcal{F}_t$ sur la transversale $\tilde{S}$ est alors engendré par le temps t, X_t et Y_t, des flots de X et Y (rappelons que $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ où P est la matrice de passage de A a sa forme diagonale), et par l'automorphisme de revêtement φ.

Sur $\Pi^{-1}(\gamma)$ on a $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} U \\ O \end{pmatrix}$. On en déduit l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^*$ tels que $X = \alpha U$ et $Y = \beta U$ sur $\Pi^{-1}(\gamma)$. Un calcul simple des coefficients de P montre que $\frac{\alpha}{\beta}$ est irrationnel. On en déduit facilement que, pour tout point $x \in \Pi^{-1}(\gamma)$, l'orbite de x par le pseudogroupe d'holonomie de $\mathcal{F}_t$ est dense dans $\Pi^{-1}(\gamma)$ (ce qui conclut le lemme): la seule difficulté provient de ce que le flot de U n'est pas complet: il est cependant défini pour tout temps $t \geq 0$, (car U vérifie $\varphi_*(U) = \lambda U, \lambda < 1$), ce qui permet de conclure. □

CONCLUSION

Les Chapitres 3, 5, 6 et 7 ont donné quelques réponses au problème de la stabilité de la fibre d'une fibration. Ce problème (global) est l'un des pôles du problème de stabilité des feuilles compactes d'un feuilletage, l'autre pôle étant le problème (local) de la stabilité d'une feuille compacte isolée. On rêve bien sûr à une théorie d'indice, type indice de Poincaré-Hopf d'un zéro isolé d'un champ de vecteur, qui relie le problème global d'existence de zéro, pour un champ de vecteur d'une variété compacte, au problème local de stabilité d'un zéro isolé. J'aimerais, en conclusion de ce travail, donner quelques idées sur:

- le problème de la stabilité d'une feuille compacte isolée.
- comment relier le problème local au problème global.

Cette conclusion est divisée en deux parties:

Dans la première je donne quelques idées sur le probléme général de la stabilité d'une feuille compacte isolée, en mettant l'accent sur les difficultés encore non comprises.

La seconde partie présente le cas, beaucoup mieux compris, des feuilles compactes dont le groupe fondamental est commutatif: j'y propose un critère de stabilité locale, et je montre qu'en codimension 1, ce critère permet de résoudre des problèmes globaux de stabilité.

Conclusion

§1 Stabilité de feuilles compactes isolées

Ce sujet comporte actuellement de très nombreuses questions. Je presente ici, de façon informelle, quelques idées sur ce problème, sans prétendre en faire le tour.

Le mathématicien qui étudie aujourd'hui les systèmes dynamiques, définis par des flots ou des difféomorphismes, sait que l'on peut en simplifier la dynamique par une petite perturbation du système. Par exemple:

– génériquement, tous les points fixes et toutes les orbites périodiques sont hyperboliques, et leurs variétés stables et instables se coupent transversalement (Théorème de Kupka-Smale).

– par une C^1-perturbation, on peut fermer une orbite récurrente (closing lemma de Pugh).

Pour les feuilletages, la situation est tout autre: étant donné un feuilletage, on ne sait pas a priori comment le perturber, et on sait donc encore moins s'il est possible d'en simplifier la dynamique par une petite perturbation. La notion de feuilletage générique n'est pas définie. Les feuilles compactes étant la généralisation directe des points fixes ou des orbites périodiques, le premier pas serait de comprendre à quelles conditions une feuille compacte est stable: on aimerait pouvoir définir ce qu'est une feuille compacte hyperbolique, et définir les variétés invariantes d'une telle feuille.

QUESTION 1: *Quel est l'équivalent, pour les feuilletages, des difféomorphismes Morse-Smale?*

Le mathématicien qui s'attaque au problème de la stabilité des feuilles compactes est bien démuni. Les difficultés commencent dès la définition.

a) La stabilité d'une feuille est-elle un problème local ou global?

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage d'une variété compacte M, et soit C une feuille compacte de $\mathcal{F}$.

DÉFINITION 1 *(Stabilité par perturbation du germe de feuilletage)*: La feuille compacte C sera dite *C^r-stable* si, pour tout voisinage U de C, et tout feuilletage $\mathcal{G}$ sur U, C^r-proche de la restriction de $\mathcal{F}$ à U, le feuilletage $\mathcal{G}$ possède une feuille compacte difféomorphe à C et proche de C.

DÉFINITION 2. *(Stabilité par perturbations globales)*: La feuille compacte C sera dite *C^r-stable si* tout feuilletage C^r-proche de $\mathcal{F}$ possède une feuille compacte difféomorphe à C et proche de C.

DÉFINITION 3. *(Stabilité par perturbations globales à support local)*: La feuille compacte C sera dite *C^r-stable* s'il existe un voisinage tubulaire U de C tel que tout feuilletage C^r- proche de $\mathcal{F}$ et coïncidant avec $\mathcal{F}$ hors de U, possède une feuille compacte difféomorphe à C et proche de C.

Bien sûr, la C^r-stabilité par perturbations du germe de feuilletage implique la C^r-stabilité par perturbations globales, qui implique la C^1-stabilité par perturbations globales à support local. Mais, à ma connaissance, on ne sait rien sur la réciproque (qui me paraît improbable) alors que pour les difféomorphismes ou les flots, ces trois notions de stabilité sont équivalentes.

Ces trois définitions sont d'usages différents: en effet, la Définition 2 (par perturbations globales) est sans doute la notionqui nous intéresse réellement, mais elle est pratiquement inutilisable puisqu'on ne sait pas, a priori, perturber globalement un feuilletage.

Il faut donc utiliser la Définition 1 si l'on veut prouver la stabilité d'une feuille (voir ci-dessous les résultats de Hirsch), et la Définition 3 si c'est l'instabilité que l'on veut démontrer (par exemple, on utilise la Définition 3 pour prouver que toute feuille compacte, dont le groupe fondamental est isomorphe au groupe libre à k générateurs ($k \geq 2$), est C^∞-instable en toute codimension).

Une autre difficulté vient du fait que l'on ne sait pas si l'espace des feuilletages est localement connexe: perturber un feuilletage (c'est-à-dire prendre un feuilletage proche) ou le déformer (choisir un petit chemin dans l'ensemble des feuilletages) peuvent être des choses très différentes. On peut donc donner trois autres définitions de la stabilité d'une feuille compacte, cette fois par déformations du feuilletage.

b) Quelques résultats, et leurs commentaires

Malgré ces inconnues, on dispose de quelques résultats de stabilité (par perturbation du germe de feuilletage).

THÉORÈME *(Hirsch 1971). Soit C une feuille compacte d'un feuilletage $\mathcal{F}$. On suppose qu'il existe un élément α du centre du groupe fondamental $\pi_1(C)$ tel que l'holonomie de $\mathcal{F}$ le long de α ait un unique point fixe, et qu'il est hyperbolique.*

Alors C est C^1-stable.

THÉORÈME *(Hirsch 1971). Soit C une feuille compacte d'un feuilletage de codimension 1. On suppose qu'il existe α dans le centre de $\pi_1(C)$, tel que l'holonomie de $\mathcal{F}$ le long de α a un point fixe isolé d'indice non nul.*

Alors C est C^0-stable.

Le Théorème B de ce livre utilise un lemme de Thurston (sous une forme légèrement généralisée), qui permet de négliger le rôle,

pour les C^1-perturbations, des lacets homologues à zéro dans les feuilles. Voici d'autres conséquences de cette même idée:

THÉORÈME *(Schweitzer 1986). Soit C une feuille compacte d'un feuilletage $\mathcal{F}$, telle que $H_1(F,\mathbf{R}) = \mathbf{R}$. On fait les deux hypothèses suivantes:*

– l'holonomie linéaire de C est triviale.

– il existe $\alpha \in \pi_1(C)$ dont la classe d'holonomie engendre $H_1(F,\mathbf{R})$, tel que l'holonomie de $\mathcal{F}$ le long de α possède un point fixe isolé d'indice non nul.

Alors C est C^1-stable.

THÉORÈME *(Stowe 1980). Soit C une feuille compacte d'un feuilletage de codimension k, et soit $L : \pi_1(C) \to GL(\mathbf{R}^k)$ l'holonomie linéaire de C.*

Si C est C^1-instable, il existe un homomorphisme $A : \pi_1(C) \to \mathrm{Aff}(\mathbf{R}^k)$ (où $\mathrm{Aff}(\mathbf{R}^k)$ est le groupe des transformations affines de $\mathbf{R}^k$), tel que la partie linéaire de A soit égale à L, et que le groupe $A(\pi_1(C))$ n'ait pas de point fixe.

Autrement dit, la feuille C est C^1-stable si on ne peut pas perturber la représentation d'holonomie linéaire par des translations.

Analysons à présent ces résultats. Tout d'abord, je préconise beaucoup de prudence contre des généralisations hâtives: le théorème de Hirsch semble introduire la notion de feuille hyperbolique comme une feuille qui possède une holonomie hyperbolique; celui de Schweitzer semble proposer l'indice du point fixe de l'holonomie associée à un lacet engendrant l'honologie, comme indice d'une feuille compacte C vérifiant $H_1(C,\mathbf{R}) = \mathbf{R}$.

Voici donc quelques exemples, pour se convaincre que la réalité n'est pas si facile:

Conclusion

EXEMPLE 1: L'hyperbolicité de l'holonomie n'est pas générique: par exemple, tout feuilletage sur la sphère S^3 possède une feuille T^2 ayant ses holonomies C^∞-tangentes à l'identité (voir Rosenberg-Roussarie [**RR**]). C'est une propriété locale: considérons par exemple un petit voisinage U de la feuille compacte T^2, du feuilletage de Reeb $\mathcal{F}$ sur la sphére S^3. Alors tout feuilletage sur U, C^o-proche de $\mathcal{F}/U$, possède une feuille difféomorphe à T^2 et ayant toutes ses holonomies C^∞-tangentes à l'identité.

EXEMPLE 2: Une famille C possédant une holonomie hyperbolique (ou même toutes ses holonomies hyperboliques) n'est pas forcément stable: si par exemple le groupe fondamental $\pi_1(C)$ est le groupe libre à 2 générateurs, alors C est C^∞-instable, par perturbations globales à support local.

EXEMPLE 3: Il est remarquable que le théorème de stabilité de Schweitzer nécessite que l'holonomie linéaire soit triviale. Je me suis posé la question de ce qui arrive, en codimension 1, si on enlève cette hypothèse, et j'ai trouvé un phénomène assez étonnant:

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension $1, C$ une feuille compacte telle que $H_1(C, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$. Pour simplifier l'étude, on supposera que $\pi_1(C)$ possède un système générateur à deux éléments $\{a, b\}$, tel que la classe d'homologie de b soit nulle, et que donc celle de a engendre $H_1(C, \mathbf{R})$. On suppose que la dérivée, au point fixe, de l'holonomie de $\mathcal{F}$ le long de a est égale à $\alpha \in]0, 1[$. L'holonomie linéaire de la feuille C est donc l'homomorphisme $L : \pi_1(C) \to GL(\mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}$, défini par $L(a) = \alpha, L(b) = 1$.

Supposons que la feuille C soit C^1-instable. D'après le Théorème de Stowe, il existe un homomorphisme φ de $\pi_1(C)$ dans le groupe des homothéties-translations de $\mathbf{R}$, tel que $\varphi(a) = h_\alpha$ (homothétie de rapport α) et $\varphi(b)$ est une translation τ_t (défini par $x \to x + t$,

$t \neq 0$). Nous allons voir que α ne peut pas être quelconque:

La classe d'homologie de b étant nulle, et pas celle de a, il existe un mot, $a^{m_1}b^{n_1}...a^{m_k}b^{n_k}$, égal à l'élément neutre dans $\pi_1(C)$, tel que $\sum_{i=1}^{k} n_i$ soit non nul, et que $\sum_{i=1}^{k} m_i = 0$. On notera $p_i = \sum_j^i m_j$. Le mot peut alors s'écrire $\prod_1^k a^{p_i}b^{n_i}a^{-p_i}$.

Alors, $\varphi(\prod_1^k a^{p_i}b^{n_i}a^{-p_i})$ est la translation définie par: $x \mapsto x + \sum_1^k \alpha^{p_i}n_i t$.

Comme $\prod_1^k a^{p_i}b^{n_i}a^{-p_i}$ est l'élément neutre de $\pi_1(C)$ on obtient l'équation:

$$\sum_1^k \alpha^{p_i} n_i = 0$$

Notons $q = \inf_i p_i$; alors α est une racine du polynôme $\Sigma n_i X^{p_i - q}$, qui n'est pas le polynôme nul puisque $\Sigma n_i \neq 0$. On a donc montré:

La feuille C est C^1-stable, sauf si la dérivée α de l'holonomie de a est égale à l'une des racines du polynôme $\Sigma n_i X^{p_i - q}$, ou est égale à 1 (auquel cas on peut appliquer le Théorème de Schweitzer).

Réciproquement, si α est racine d'un polynôme à coefficients entiers dont la somme est non nulle, il est facile de voir que, pour tout$t \in \mathbf{R}$, le groupe G engendré par h_α et τ_t vérifie $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$. On peut alors choisir une variété compacte C dont le groupe fondamental est G: on a donc $H_1(C, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$. On peut alors réaliser C comme feuille compacte C^1-instable d'un feuilletage de codimension 1 tel que l'holonomie linéaire de C soit engendrée par l'homothétie h_α.

c) Feuilles compactes à groupe fondamental commutatif

Pour les feuilles compactes dont le groupe fondamental est commutatif, la situation est beaucoup plus simple:

Conclusion

Remarquons d'abord que: l'existence d'une holonomie hyperbolique implique la C^1-stabilité (Théorème de Hirsch cité au Paragraphe b). De plus les variétés invariantes (stable ou instable) d'une holonomie sont alors invariantes par toutes les holonomies: on pourrait donc définir les variétés invariantes d'une feuille compacte de groupe fondamental commutatif. Rappelons cependant que même dans le cadre commutatif, l'hyperbolicité n'est pas générique (Paragraphe b, Exemple 1):

d) Vers un critère local de stabilité

Le théorème de Hirsch (voir paragraphe 1.b) entraine que, en codimension 1, une feuille compacte de groupe fondamental commutatif est C^0-stable dès qu'elle possède une holonomie d'indice de Lefschetz non nul.

Cette situation se généralise en codimension 2: par une légère modification du théorème (difféomorphismes commutants sur S^2), on obtient le résultat suivant:

Soit C une feuille compacte d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension 2. On suppose que $\pi_1(C)$ est commutatif, et qu'il existe $\alpha \in \pi_1(C)$ tel que l'holonomie de $\mathcal{F}$ le long de α ait un unique point fixe, et que ce point fixe soit d'indice non nul.

Alors C et C^1-stable.

(Dans le cas où l'holonomie linéaire de C est triviale, la démonstration est identique à celle du Théorème 7.1.a.1. Si au contraire C possède une holonomie hyperbolique, le Théorème de Hirsch s'applique. On continue la démonstration cas par cas, suivant l'holonomie linéaire de C).

D'autre part, le Théorème de Handel (voir [**Ha**] au Chapitre 2.2.e.3) laisse présager que le résultat ci-dessus est vrai pour la C^0-

stabilité (si, du moins, $\pi_1(C) = \mathbf{Z}^2$).

QUESTION 4: *Soit C une feuille compacte de groupe fondamental commutatif d'un feuilletage de codimension 2. On suppose que C possède une holonomie d'indice de Lefschetz non nul.*

Ces hypothèses impliquent-elles: C est C^0-stable?

Il serait très interessant de comprendre si l'existence d'une holonomie dont le point fixe est d'indice non nul reste un critère de stabilité en codimension plus grande que 2. Voici cette question en termes de points fixes de difféomorphismes commutants:

QUESTION 5: *Soient $f_1 .... f_n$ n difféomorphismes commutants de $\mathbf{R}^n$, tels que 0 soit fixe pour tous les f_i. Supposons de plus que l'indice de 0 pour f_1 soit non nul.*

Ces hypothèses impliquent-elles que 0 est stable (comme point fixe commun à n difféomorphismes commutants)?

L'exemple de la dimension 2 laisse penser que le premier pas pour résoudre la question 5 serait de généraliser en dimension plus grande que 2 le Théorème de Lima sur les champs de vecteurs commutants des surfaces.

QUESTION 6: *Soit B une variété compacte de caractéristique d'Euler $\chi(B) \neq 0$. Soient X et Y deux champs de vecteurs commutants sur B. Les champs X et Y possèdent-ils un zéro commun?*

Voici une version à bord de la Question 6, (qui est non vide en dimension impaire):

QUESTION 7: *Soit U un ouvert relativement compact d'une variété. Soient X et Y deux champs de vecteurs définis et commutants sur un voisinage de l'adhérence de U, tels que X soit non nul sur le bord ∂U et que l'indice de X sur U soit non nul.*

Les champs X et Y possèdent-ils un zéro commun dans U?

Conclusion

Dans le cadre C^∞, ou $C^r r \in \mathbf{N}$, on ne sait répondre aux questions 6 et 7 sur aucune variété de dimension plus grande que 2; par exemple on ne sait pas si deux champs commutants sur $S^2 \times S^2$ ou sur S^4 possèdent un zéro commun.

Voici d'abord un résultat partiel, en toute dimension et pour des champs de classe C^∞, du à P. Molino et F.J. Turiel [**MT**].

THÉORÈME. *Soit M une variété compacte de dimension $2n$ et de caractéristique d'Euler $\chi(M) \neq 0$. Soit $k \in \mathbf{N}$ et soient $X_1, ..., X_k$ le champs de vecteurs de classe C^∞, commutants deux à deux sur M: ils engendrent une action C^∞ de $\mathbf{R}^k$ sur M. Alors cette action possède au moins une orbite de dimension $n - 1 = \frac{\dim M}{2} - 1$.*

Si M est de dimension 4 Molino et Turiel assurent donc l'existence d'une orbite de dimension 1.

Signalons enfin une source récente d'optimisme: dans un travail en cours de rédaction, je donne une réponse positive aux questions 6 et 7 pour les champs de vecteurs analytiques réels (et commutants deux à deux) sur une variété analytique réelle de dimension 3 ou 4.

e) du local au global

Quand Fuller a construit l'indice (qui porte son nom) pour les orbites périodiques des flots, le problème de stabilité des orbites périodiques isolées (au sens de persistance par perturbations du flot) était déjà compris: l'application de Poicaré, ou holonomie, d'une telle orbite possède un point fixe isolé; si l'indice de ce point fixe est non nul, l'orbite est stable par C^0-perturbations du flot. Le travail de Fuller a consisté à passer du local au semi-local: il a introduit la notion de compact isolé d'orbites périodiques, et a compris que la proximité d'orbites périodiques de périodes très différentes

obligeait à diviser, pour chaque orbite, l'indice de l'application de m$^{\text{éme}}$ retour par la multiplicité m de l'orbite.

Cet exemple illustre bien la difficulté qu'il y a à passer de la résolution du problème local à celle des problèmes semi-local et global.

Pour les feuilles compactes de groupe fondamental commutatif des feuilletages de codimension 1, le problème de stabilité d'une feuille compacte isolée est résolu par le Théorème de Hirsch (cité au Paragraphe a) et celui de la stabilité de la fibre d'une fibration (de base le cercle S^1) est résolu par le Théorème de Plante (voir [P] et Chapitre 2.2.d). En conclusion de ma thèse, je posais comme problème de relier ces deux résultats: ce serait le début d'une Théorie d'indice.

Depuis, avec S. Firmo, nous proposons une manière de réunir ces deux résultats dans une même théorie qui ressemble à une théorie d'indice (article [BF] en cours de rédaction). Voici en quelques mots cette nouvelle présentation:

Soit C une feuille compacte isolée du groupe fondamental $\pi_1(C)$ commutatif, d'un feuilletage de codimension 1.

Notons $\gamma_0, ..., \gamma_n$ un système générateur de $\pi_1(C)$. Les holonomies h_{γ_i} sont des difféomorphismes commutants de $\mathbf{R}$, définis au voisinage de 0 et admettant 0 comme unique point fixe commun.

La commutation des h_{γ_i} permet de définir, en dehors de 0, des nombres de translations relatifs d'une holonomie par rapport à une autre. Ces nombres de translations peuvent être considérés comme le rapport entre ces difféomorphismes. La donnée de tous ces nombres de translation, et des signes $h_{\gamma_i}(x) - x$, permet de définir une $\frac{1}{2}$-droite de $\mathbf{R}^{n+1}$, soit un point $\theta_{\gamma_1 ... \gamma_n}(x)$ de la sphère S^n. On vérifie facilement que ce point est constant tant que x ne

franchit pas un point fixe commun aux h_{γ_i}. Ceci permet de définir $\theta_+(C)$ et $\theta_-(C)$ qui sont les valeurs de $\theta_{\gamma_1 \ldots \gamma_n}(x)$ pour $x > 0$ et $x < 0$ petit.

Les nombres de translations entre deux difféomorphismes commutants varient continûment avec ces difféomorphismes; on en déduit:

$$\theta_+(C) \neq \theta_-(C) \quad \Rightarrow C \text{ est } C^0\text{-stable}$$

D'autre part on vérifie facilement

$$\theta_+(C) \neq \theta_-(C) \Leftrightarrow C \text{ posséde une holonomie d'indice non nul.}$$

On a donc retrouvé le Théorème de Hirsch.

Le couple $(\theta_+(C), \theta_-(C))$ joue le rôle d'indice de la feuille compacte C; c'est un élément du produit $S^n \times S^n$ considéré comme groupoïde pour la loi $(a,b).(b,c) = (a,c)$.

Dans [**BF**] nous définissons une notion de paquets de feuilles parallèles et nous voyons que la notion d'indice s'adapte à ces paquets: l'indice d'un paquet de feuilles est égal au produit dans le groupoïde des indices de chacune des feuilles, et cet indice est un critère semi-local de stabilité.

On retrouve également le Théorème de Plante: à tout feuilletage $\mathcal{F}$ proche d'une fibration de base S^1 et de fibre C (de groupe fondamental commutatif) on associe, par holonomie, n difféomorphismes commutants $f_1, ..., f_n$ de $\mathbf{R}$ vérifiant les relations:

$$f_i(x + 2\pi) = \prod_{j=1}^{n} f_j^{a_{ij}}$$

où les a_{ij} sont les coefficients de la matrice $A \in GL(n, \mathbf{Z})$ de monodromie de la fibration.

De cette relation on déduit que l'application $\theta = \theta_{f_1 \ldots f_n}$ (définie en dehors des points fixes communs des f_i) vérifie la relation:

$$\theta(x + 2\pi) = A\theta(x)$$

L'hypothèse du Théorème de Plante: A n'a pas de valeur propre réelle positive, implique donc:

$$\theta(x + 2\pi) \neq \theta(x)$$

Ce qui implique l'existence d'un point fixe commun aux f_i, et donc l'existence d'une feuille compacte proche d'une fibre: on a bien redémontré le Théorème de Plante (dans le cas où la fibre a son groupe fondamental commutatif).

En codimension 2 on dispose à présent de quelques résultats globaux (sur la stabilité de la fibre de fibrations dont le groupe fondamental de la fibre est commutatif; voir le Chapitre 7 (ou [**B3**] et [**B4**] et [**Han**]). Au Paragraphe 2.a de cette conclusion, j'ai signalé un critère local de C^1-stabilité, en codimension 2, pour des feuilles compactes isolées. Remarquons que ces résultats d'existence sont qualitatif et non pas quantitatif: leurs démonstrations sont faites par l'absurde.

QUESTION 8: *Réunir les résultats locaux et globaux, sur la stabilité des feuilles compactes de groupe fondamental commutatif en codimension 2, dans une même théorie si possible quantitative.*
(*Une telle théorie devrait permettre de résoudre complétement le problème de stabilité de la fibre d'une fibration dont la base est une surface compacte et dont le groupe fondamental de la fibre est commutatif*).

Le même problème se pose pour les champs de vecteurs commutants des surfaces: la démonstration du Théorème de Lima (dont est

issue [**B3**] et [**B4**]) est une démonstration dynamique par l'absurde. J'ose me permettre une comparaison: pour 1 champ de vecteurs sur la sphère S^2, on peut prouver l'existence de zéros par une démonstration dynamique par l'absurde, avec comme seuls ingrédients le Théorème de Jordan et le Théorème de Poincaré-Bendixson. Cette démonstration se généralise à toute surface. C'est une démonstration qualitative, très esthétique, mais qui est indéniablement moins puissante que la théorie (homologique) d'indice de Poincaré-Hopf qui est quantitative et se généralise en toute dimension. La démonstration de Lima est (à mon avis) la généralisation de la démonstration dynamique cité ci-dessus, et n'a aucune chance d'être généralisée en dimension plus grande.

QUESTION 9: *Trouver une démonstration quantitative au Théorème de Lima.*

BIBLIOGRAPHIE

[B1] C. Bonatti, *Existence de feuilles compactes pour les feuilletages proches d'une fibration.* C. R. Acad. Sci. Paris. 305 (1987), 199–202.

[B2] C. Bonatti, *Stabilité de feuilles compactes pour les feuilletages définis par des fibrations.* Topology 29 (1990), 231–245.

[B3] C. Bonatti, *Un point fixe commun pour des difféomorphismes commutants de* S^2. Annals of Math. 129 (1989), 61–69.

[B4] C. Bonatti, *Diffémorphismes commutants des surfaces et stabilité des fibrations en tores.* Topology 29 (1990), 101–126.

[B5] C. Bonatti, *Sur l'existence de feuilles compactes pour les feuilletages proches d'une fibration.* Thèse de doctorat d'état, Paris VII (1989).

[BF] C. Bonatti et S. Firmo, *Feuilles compactes des feuilletages génériques en codimension 1.* Preprint (1991).

[BH] C. Bonatti et A. Haefliger, *Déformations de feuilletages.* Topology 29 (1990), 205–229.

[CC1] J. Cantwell and L. Conlon, *Every surface is a leaf.* Topology 26 (1987), 265–285.

[CC2] J. Cantwell and L. Conlon, *Poincaré — Bendixson theory for*

leaves of codimension one. Trans. Am. Math. Soc. 265 (1981), 181–209.

[CMP] S. N. Chow and J. Mallet-Paret, *The Fuller index and global Hopf Bifurcation.* J. of Diff. Equations 29 (1978), 66–85.

[D] S. Druck, *Stabilité de feuilles compactes dans les feuilletages donnés par des fibrés.* C. R. Acad. Sci. Paris, 303 (1986), 471–474.

[DF] S. Druck and S. Firmo, *Fixed points of maps preserving perturbations of fibrations.* Preprint (1987).

[DM] N. Désolneux-Moulis, *Sur certaines familles à un paramètre de feilletages de $T^2 \times S^2$.* C. R. Acad. Sci. Paris 287 (1978), 1043–1046.

[E] D. B. A. Epstein, *A topology for the space of foliations.* Springer Lect. Notes in Math. 597 (1977), 151–160.

[Fu] K. Fukui, *Stability and instability of certains foliations of 4-Manifolds by closed orientable surfaces.* Publ. RIMS, Kyoto Univ. 22 (1986), 1155–1171.

[F] F. B. Fuller, *An index of fixed point type for periodic orbits.* Amer. J. of Math. 89 (1967), 133–148.

[G] E. Ghys, *Une variété qui n'est pas une feuille.* Topology 24 (1985), 57–73.

[Hae1] A. Haefliger, *Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes.* Comment. Math. Hev. 32 (1958), 248–329.

[Hae2] A. Haefliger, *Groupoïdes d'holonomie et classifiants.* Astérisque 116 (1984), 70–97.

[Han] M. Handel, *Commuting diffeomorphisms of S^2.* Preprint

(1988).

[Har] J. Harrison. *C^2-counterexamples to the Seifert Conjecture.* Topology 27 (1988), 249–278.

[He] G. Hector, *Architecture des feuilletages de classe C^2.* Astérisque 107–108 (1983), 243–258.

[Hi] M. W. Hirsh, *Stability of compact leaves of foliations.* In "Dynamical Systems", ed. M. Peixoto, Academic Press (1973), 135-153.

[LR1] R. Langevin and H. Rosenberg. *On stability of compact leaves and fibrations.* Topology 16 (1977), 107–111.

[LR2] R. Langevin and H. Rosenberg, *Integrable perturbations and a theorem of Seifert.* Springer Lect. Notes in Math. 652 (1978), 122–127.

[La] H. B. Lawson, Jr., *Quantitative theory of foliations.* CBMS 27, Amer. Math. Soc. (1977).

[Le] J. Leray, *La théorie des points fixes et ses applications en analyse.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass. (1950) 202–208.

[Li1] E. Lima, *Commuting vector fields on S^3.* Ann. of Math. (2) 81 (1965), 70–81.

[Li2] E. Lima, *Common singularities of commuting vector fields on 2-manifolds.* Comment. Math. Helvet. 39 (1964), 97–110.

[MT] P. Molino et F. J. Turiel, *Dimension des orbites d'une action de $\mathbf{R}^p$ sur une variété compacte.* Comment. Math. Helvet. 63 (1988), 253–258.

[P] J. F. Plante, *Stability of codimension one foliations by compact leaves.* Topology 22 (1983), 173–177.

Bibliographie

[PM] J. Palis and W. de Melo, *Geometric Theory of Dynamical Systems.* Springer Verlag (1982).

[Re1] G. Reeb, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées.* Herman (1952).

[Re2] G. Reeb, *Sur un théorème de Seifert sur les trajectoires fermées de certains champs de vecteurs.* In "Non linear differential equations and non linear mechanics", ed. J. P. La Salle et S. Lefschetz , Academic Press (1963), 16–21.

[Ro] H. Rosenberg, *Un contre-exemple à la conjecture de Seifert.* Springer Lect. Notes in Math. 383 (1974), 294–306.

[RR] H. Rosenberg and R. Roussarie, *Some remarks on stability of foliations.* J. of Diff. Geometry 10 (1975), 207–219.

[RRW] H. Rosenberg, R. Roussarie and D. Weil, *A classification of closed orientable 3-Manifolds of rank two.* Annals of Math. 91 (1970), 449-464.

[Sa] R. Sacksteder, *Foliations and pseudo-groups.* Amer. J. Math. 91 (1970), 1–24.

[Sch1] P. Schweitzer, *Counterexamples to the Seifert conjecture and opening closed leaves of foliations.* Annals of Math. 100 (1974), 386-400.

[Sch2] P. Schweitzer, *Stability of compact leaves with trivial linear holonomy.* Topology 27 (1988), 37–56.

[Sei] H. Seifert, *Closed integral curves in 3-space and isotopic two dimensional deformations.* Proc. A.M.S. 1 (1950), 287–302

[St] D. Stowe, *The stationary set of a group action.* Proc. A.M.S. 79 (1980), 139-146.

[T] W. Thurston, *A generalisation of the Reeb stability theorem.* To-

pology 13 (1974), 347–352.

[W] F. W. Wilson, *On the minimal sets of non-singular vector fields.* Annals of Math. 84 (1966), 529–536.