SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

ENSAIOS MATEMÁTICOS
2006, Volume **11**, 1–105

Sur la cohomologie et le spectre des variétés localement symétriques

Nicolas Bergeron

Abstract. This volume is intended as an expository account of some results and problems concerning the cohomology of locally symmetric spaces (especially arithmetic ones) and the relationship with the spectral theory of automorphic forms. The discussion is divided into four chapters:

- A general introduction to arithmetic manifolds, Matsushima's formula and cohomological representations;
- Cohomology of hyperbolic manifolds;
- Isolation properties in the automorphic spectrum;
- Cohomology of arithmetic manifolds.

However this presentation will be very unbalanced: it is a slightly revised version of my habilitation thesis. It is nevertheless my hope that the reader will not be too much disappointed by the incompleteness of this acount and hopefully find it useful.

2000 Mathematics Subject Classification: 11F75, 58J50, 57M50, 53C22, 53C23, 14G35, 22E47, 22E55.

Table des matières

1 Introduction

Une variété riemannienne X est dite *symétrique* si la symétrie centrale dans les coordonnées géodésiques autour d'un point quelconque de X s'étend en une isométrie globale de X. L'importance de cette notion dégagée par Cartan provient du fait 1) qu'un espace symétrique (et donc une géométrie de Klein) est naturellement associé(e) à chaque groupe de Lie réductif réel connexe G (et notamment à tous les groupes classiques $GL(n,\mathbb{R})$, $O(p,q)$, $U(p,q)$, $\ldots$) : l'espace $X = G/ZK$, où K est un sous-groupe compact maximal de G et Z le centre de G ; et 2) que réciproquement le groupe des isométries d'un espace symétrique est toujours un groupe de Lie réductif. En dehors de ce bel exemple de pont entre la géométrie (riemannienne) et l'algèbre, la notion de variété symétrique englobe toute une série de géométries de Klein dont elle permet un traitement uniforme. Parmi ces géométries citons la géométrie hyperbolique (matrice de toutes ces géométries) associée au groupe $O(n,1)$ $(n \geq 2)$, sa généralisation complexe, la géométrie hyperbolique complexe, associée au groupe $U(n,1)$ $(n \geq 1)$, mais aussi, l'espace des formes quadratiques définies positives de déterminant 1 associé au groupe $GL(n,\mathbb{R})$ $(n \geq 2)$. La majeure partie du texte sera consacrée aux espaces symétriques associés aux groupes unitaires $U(p,q)$ et orthogonaux $O(p,q)$. Mais avant cela, commençons par placer cette étude dans son contexte historique.

Étant donné un espace symétrique X, Clifford et Klein posent la question de l'existence d'espaces compacts (ou de volumes finis) localement modelés sur cette géométrie (manière de mesurer l'"utilité" de celle-ci) : les *variétés localement symétriques*. Comme souvent face à la demande de constructions explicites, le géomètre a recours à l'arithmétique. Les premiers exemples de variétés localement symétriques sont des *variétés arithmétiques*, c'est-à-dire quotients de X par un *groupe arithmétique*.

La notion de groupe arithmétique a pour origine l'étude d'une famille spéciale d'équations diophantiennes, à savoir la recherche d'une matrice $M \in M_{n\times m}(\mathbb{Z})$ $(n, m \geq 1)$ vérifiant une équation du type :

$$^tMSM = T, \tag{1.1}$$

où S (resp. T) est une matrice symétrique à coefficients entiers de taille n (resp. m). Lorsqu'une telle solution existe on dit de T qu'elle est *représentée* par S. À titre d'exemple considérons le cas $n = 2$, $m = 1$,

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},\ T = (t) \ \text{ et } M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

L'équation (1.1) devient alors

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = t$$

dont des cas spéciaux comme

$$x^2 + y^2 = t \ \text{ ou } x^2 - Dy^2 = 1$$

sont attachés aux noms de Fermat et Pell. La théorie complète de la première de ces équations est due à Lagrange. Celle de la deuxième est quant à elle probablement déjà connu d'Archimède (*cf.* le problème des boeufs), au moins partiellement du mathématicien indien Brahmagupta (VIIème siècle) et en tout cas complètement d'un autre grand mathématicien indien (Bhaskara, XIIème siècle) : il existe une infinité de solutions $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ à l'équation dite "de Pell"

$$x^2 - Dy^2 = 1 \quad \text{avec } D \in \mathbb{N}, \sqrt{D} \notin \mathbb{N}.$$

C'est à Fermat (qui ne pouvait connaitre les solutions de ses prédécesseurs) que les mathématiques occidentales modernes doivent la résolution de l'équation de Pell. Remarquons que ce théorème est non trivial : la plus petite solution entière non triviale de l'équation $x^2 - 94y^2 = \pm 1$ est

$$(2143295, 221064) \ !$$

Dans ses *Disquisitiones Arithmeticae*, Gauss introduit une méthode pour réduire l'étude de l'équation générale (1.1) lorsque S est **définie** (positive) : le groupe $SL(n,\mathbb{Z})$ agit sur l'espace X des matrices $n \times n$, symétriques, définies positives et de déterminant 1 par $(A,S) \mapsto AS^tA$, et deux matrices dans X qui appartiennent à une même orbite du groupe $SL(n,\mathbb{Z})$ représentent les mêmes matrices. Gauss propose donc de réduire le problème à l'étude des matrices $S \in X$ appartenant à un ensemble fondamental $D \subset X$ pour l'action de $\Gamma = SL(n,\mathbb{Z})$ sur X, *i.e.* un ouvert $D \subset X$ dont l'ensemble des translatés sous Γ forme un recouvrement localement fini de X. Remarquons que cette réduction est possible car le groupe Γ agit proprement sur X, en particulier une matrice T étant fixée, il n'existe qu'un nombre fini de façons de représenter T par S.

Gauss considère plus particulièrement le cas $n = 2$ et $m = 1$, des formes quadratiques en deux variables, et montre qu'alors X est isomorphe au demi-plan

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Im} z > 0\},$$

que le groupe $SL(2,\mathbb{Z})$ agit par homographies sur $\mathbb{H}^2$ et que l'ensemble $D = \{z \in \mathbb{H}^2 \ : \ |z| \geq 1 \text{ et } |\mathrm{Re}(z)| \leq 1/2\}$ est un domaine fondamental pour cette action. Gauss appelle *réduites* les formes correspondant aux $z \in D$.

Plus généralement, lorsque $n \geq 2$, l'espace X s'identifie au quotient $SL(n,\mathbb{R})/SO(n)$ où l'on associe à une matrice $A \in SL(n,\mathbb{R})$ la matrice symétrique $S = A^tA$ de forme quadratique associée Q. Et toute forme quadratique Q définie positive en n variables s'écrit de manière unique sous la forme :

$$\begin{aligned} Q(x) \quad &= t_1(x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + \ldots + u_{1n}x_n)^2 \\ &+ t_2(x_2 + u_{23}x_3 + \ldots + u_{2n}x_n)^2 \\ &+ \ldots \\ &+ t_n x_n^2, \end{aligned} \tag{1.2}$$

où $t_1, \dots, t_n$ sont des réels positifs et $u_{ij} \in \mathbb{R}$. (C'est la décomosition $G = KAN$ du groupe $SL(n, \mathbb{R})$.) Et Hermite montre que, quitte à translater la matrice S de Q par une matrice $A \in SL(n, \mathbb{Z})$, on peut supposer que

$$|u_{ij}| \leq 1/2 \text{ quand } 1 \leq i < j < N$$

et

$$t_i \leq \frac{4}{3} t_{i+1} \text{ quand } 1 \leq i \leq N-1.$$

Le sous-ensemble $\mathfrak{S}$ de X défini par ces inégalités est appelé *sous-ensemble de Siegel*. L'étude de l'équation (1.1) est donc réduite aux cas des matrices $S \in \mathfrak{S}$, reste bien sûr à étudier ces équations, mais c'est une autre histoire.

Remarquons plutôt que le groupe $SL(n, \mathbb{Z})$ n'agit plus proprement sur l'espace des formes quadratiques indéfinies. L'espace des formes quadratiques non dégénérées de signature (p, q) et de déterminant 1 s'identifie maintenant au quotient $SL(n, \mathbb{R})/SO(p, q)$ $(n = p + q)$, où l'on associe à une matrice $A \in SL(n, \mathbb{R})$ la matrice symétrique [1] $S = AI_{p,q}{}^tA$ de forme quadratique associée Q. La théorie de la réduction de Gauss ne s'étend donc pas immédiatement à ces formes quadratiques.

Néanmoins, par un ingénieux artifice, Hermite développe une théorie analogue qui s'applique aux formes indéfinies. En termes modernes, l'artifice d'Hermite consiste à remplacer l'étude de l'action (à gauche) de $SL(n, \mathbb{Z})$ sur $SL(n, \mathbb{R})/SO(p, q)$ par l'action (à droite) de $SO(p, q)$ sur $SL(n, \mathbb{Z})\backslash SL(n, \mathbb{R})$. À une forme quadratique Q de matrice $S = AI_{p,q}{}^tA$, Hermite associe l'orbite de A sous l'action à droite de $SO(p, q)$ dans $SL(n, \mathbb{R})$:

$$A \cdot SO(p, q) = (ASO(p, q)A^{-1}) \cdot A = SO(Q) \cdot A,$$

qui coïncide avec l'orbite de A sous l'action à gauche du groupe spécial orthogonale $SO(Q)$ de la forme quadratique Q. Cette orbite se projette dans l'espace $X = SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$ des formes quadratiques définies positives en un sous-espace (totalement géodésique) :

$$X_Q = SO(Q)/(SO(Q) \cap ASO(n)A^{-1})$$

isométrique à l'espace symétrique associé au groupe orthogonal $O(p, q)$. Hermite appelle alors *réduite* la forme quadratique indéfinie Q si l'une des formes (définies positives) de la famille $X_Q \subset X$ est réduite au sens de Gauss, autrement dit si l'orbite (à droite) de $SO(p, q)$ dans $SL(n, \mathbb{R})$, associée à Q, rencontre $\mathfrak{S} \cdot SO(n)$.

---

[1] Nous notons $I_{p,q}$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 1_p & \\ & -1_q \end{pmatrix}.$$

Hermite motive immédiatement cette définition en démontrant que l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées, de signature (p,q), entières, de déterminant 1 et réduites est fini. Il en déduit que si Q est une forme quadratique entière indéfinie et à plus de 3 variables, le groupe

$$SO(Q,\mathbb{Z}) := SO(Q) \cap SL(n,\mathbb{Z})$$

est infini. Autrement dit, l'équation (1.1) avec $m = n \geq 3$ et $S = T$ indéfinie, admet une infinité de solutions.

Peu après, Poincaré donne une nouvelle ampleur à ce sujet en ouvrant la voie à une étude géométrique des *groupes arithmétiques* $SO(Q,\mathbb{Z}) = SO(Q) \cap SL(n,\mathbb{Z})$, où Q est dorénavant une forme quadratique non dégénérée, de signature (p,q) entière, de déterminant 1. Poincaré retient du résultat d'Hermite qu'il implique que la projection $SO(Q,\mathbb{Z})\backslash X_Q$ de X_Q dans $SL(n,\mathbb{Z})\backslash X$ est fermée : le sous-ensemble de Siegel $\mathfrak{S} \subset X$ est un ensemble fondamental pour l'action du groupe $SL(n,\mathbb{Z})$ sur X, l'espace des formes quadratiques définies positives. Un élément de $SL(n,\mathbb{Z})$ envoie le sous-espace X_Q de X sur le sous-espace $X_{Q'}$ associé à une forme quadratique Q' toujours entière. Puisque, d'après le théorème d'Hermite, l'ensemble des formes quadratiques entières réduites de déterminant 1 est fini, il n'y a qu'un nombre fini de translatés de X_Q par $SL(n,\mathbb{Z})$ qui intersectent $\mathfrak{S} \subset X$. En particulier, l'image $SO(Q,\mathbb{Z})\backslash X_Q$ de X_Q dans $SL(n,\mathbb{Z})\backslash X$ est fermée et on obtient un ensemble fondamental pour l'action de $SO(Q,\mathbb{Z})$ sur X_Q en formant une réunion (finie) d'intersections de X_Q avec un translaté de $\mathfrak{S}$ par un élément de $SL(n,\mathbb{Z})$. Il n'est alors pas difficile de vérifier que lorsque $n \geq 3$ (autrement dit, $\dim(X_Q) \geq 2$), le quotient $SO(Q,\mathbb{Z})\backslash X_Q$ est de volume fini et qu'en général ($n \geq 2$) ce quotient est compact si et seulement si la forme quadratique Q ne représente pas 0 sur $\mathbb{Z}$.

Dans le cas très particulier de l'équation de Pell, $Q = x^2 - Dy^2$, l'espace $X_Q = \mathbb{R}$ et le quotient $SO(Q,\mathbb{Z})\backslash X_Q$ est un cercle. Le groupe $SO(Q,\mathbb{Z})$ des solutions à l'équation de Pell est alors nécessairement infini.

Le changement de point de vue inauguré par Poincaré permettra *in fine* de répondre à la question de Clifford et Klein, elle lui fournit déjà la matière pour construire ses premiers exemples de groupes fuchsiens (*cf.* [17]). À la suite de Poincaré et plutôt que de s'intéresser au cardinal infini ou non de $SO(Q,\mathbb{Z})$, il est maintenant naturel de tenter de comprendre la forme et la géométrie des quotients arithmétiques $SO(Q,\mathbb{Z})\backslash X_Q$. De tels quotients englobent les symétries des équations du type (1.1) et l'oeuvre de Siegel nous enseigne que leur topologie et leur spectre forment en retour la clef de l'étude de l'équation générale (1.1). Nous n'aborderons pas cette dernière question, le but de ce mémoire est de survoler les résultats connus concernant la cohomologie et le spectre des variétés localement symétriques (et donc en particulier de celles d'entre elles qui sont arithmétiques).

Dans la suite de cette introduction nous faisons quelques rappels généraux : définition des variétés arithmétiques, formule de Matsushima et représentations cohomologiques, qui nous permettront de rentrer directement dans le vif du sujet.

1.1 Variétés arithmétiques et non arithmétiques

Soit G un groupe algébrique réductif et connexe sur $\mathbb{Q}$. Les adèles $\mathbb{A}$ de $\mathbb{Q}$ forment un anneau localement compact, dans lequel $\mathbb{Q}$ se plonge diagonalement comme un sous-anneau. On peut considérer le groupe $G(\mathbb{A})$ des points adèliques de G, qui contient $G(\mathbb{Q})$ comme sous-groupe discret. Nous supposerons toujours que le centre de G est compact sur $\mathbb{R}$.

Un *sous-groupe de congruence* de $G(\mathbb{Q})$ est un sous-groupe de la forme $\Gamma = G(\mathbb{Q}) \cap K_f$, où $K_f \subset G(\mathbb{A}_f)$ est un sous-groupe compact ouvert du groupe $G(\mathbb{A}_f)$ des points adèliques finis de G. [2]

Soit $X_G = G(\mathbb{R})/K_\infty$ l'espace symétrique associé au groupe G, où $K_\infty \subset G(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal. Nous noterons d_G sa dimension. D'après un théorème de Borel et Harish-Chandra [25], le quotient $\Gamma\backslash X_G$ de l'espace symétrique X_G par un sous-groupe de congruence $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ est de volume fini. C'est une variété localement modelée sur X_G dès que le groupe Γ est sans torsion, ce que l'on peut toujours supposer quitte à passer à un sous-groupe d'indice fini dans Γ. Nous appellerons *variété de congruence* un tel quotient $\Gamma\backslash X_G$. Toujours d'après Borel et Harish-Chandra, celui-ci est compact si et seulement si le groupe G est anisotrope sur $\mathbb{Q}$. Par définition une *variété arithmétique* est une variété localement symétrique qui possède un revêtement riemannien fini isométrique à un revêtement riemannien fini d'une variété de congruence.

Les quotients $SL(n,\mathbb{Z})\backslash X$ et $SO(Q,\mathbb{Z})\backslash X_Q$ considérés ci-dessus sont des exemples de variétés arithmétiques (de congruences), le théorème de Borel et Harish-Chandra est une généralisation de la démonstration esquissée ci-dessus du fait que $SO(Q,\mathbb{Z})\backslash X_Q$ est de volume fini (lorsque Q a plus de 3 variables). La construction de ces variétés arithmétiques a permis à Borel [23] de répondre positivement à la question de Clifford et Klein : étant donné un espace symétrique X, il existe toujours une variété riemannienne compacte localement modelée sur X. Deux questions naturelles se posent alors : 1) une telle variété est-elle nécessairement arithmétique ? et 2) si elle est arithmétique, est-elle nécessairement de congruence ?

La réponse à la première question est bien sûr négative en général (il existe un espace de modules des surfaces hyperboliques compactes). Mais Margulis puis Gromov et Schoen ont démontré qu'une variété localement symétrique irréductible de volume fini qui n'est ni hyperbolique (réelle) ni hyperbolique complexe est arithmétique.

En ce qui concerne les variétés hyperboliques réelles, c'est-à-dire localement modelées sur $\mathbb{H}^n$ l'espace symétrique associé au groupe $SO(n,1)$,

[2] Lorsque G est défini sur $\mathbb{Z}$, on peut préférer considérer les sous-groupes Γ de $G(\mathbb{Z})$ qui contiennent un sous-groupe de la forme $\ker(G(\mathbb{Z}) \to G(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$ pour un certain entier $N \geq 1$.

il est bien connu qu'il existe des variétes non arithmétiques en dimension 2 (espace de Teichmüller), en dimension 3 (travaux de Thurston). Mais il est plus délicat de construire de telles variétés en toute dimension. Mise à part quelques exemples, dus à Vinberg, de groupes de Coxeter non arithmétiques, la seule construction générale de variétés hyperboliques non arithmétiques est due à Gromov et Piatetski-Shapiro [55]. Nous la rappelons brièvement au §2.1.

Le cas des variétés hyperboliques complexes, c'est-à-dire celui des variétés localement modelées sur $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, l'espace symétrique associé au groupe $SU(n,1)$, est plus mystérieux. On ne sait alors construire des variétés non arithmétiques qu'en dimension (complexe) $n=2$ ou $n=3$. Les autres dimensions restent complètement ouvertes. Nous n'aurons rien de plus à dire sur les variétés hyperboliques complexes non arithmétiques.

La majeure partie du texte sera consacrée aux variétés arithmétiques. Tentons brièvement de motiver cette restriction : pour le géomètre l'arithmétique a ceci de fascinant qu'elle fournit un moyen de construire des espaces, ainsi les variétés arithmétiques fournissent-elles de nombreux exemples de variétés à courbure négative (ou nulle) [3]. Ces constructions sont d'autant plus importantes, que toutes les variétés à courbure négative de dimension ≥ 4 connues proviennent essentiellement de ces constructions arithmétiques à partir de chirurgie, modification de la métrique, ... Il nous semble donc naturel de s'attarder sur les variétés arithmétiques.

Venons en maintenant à la deuxième question ci-dessus, connue sous le nom de "Problème des sous-groupes de congruence". La réponse à cette question bien qu'avancée n'est pas encore connue en générale, nous renvoyons au livre de Platonov et Rapinchuk [94] pour plus de détails. Nous ne parlerons que très brièvement de ce problème dans le texte.

Ce texte est essentiellement consacré à l'étude des groupes de cohomologie $H^*(\Gamma\backslash X)$ (à coefficients constants complexes) des variétés localement symétriques ainsi qu'au spectre du laplacien sur celles-ci. Dans ce survol nous ne considérons que le cas (le plus riche) des quotients d'espaces symétriques simplement connexes de courbure négative et sans facteurs euclidiens. Nous insistons principalement sur le cas des quotients compacts. Un grand nombre d'aspects intéressants de la cohomologie des variétés localement symétriques n'y sont en particulier pas mentionnés (liens entre séries d'Einsenstein et cohomologie au bord, questions de rationalité et applications arithmétiques, ...). Enfin notons que ce texte est essentiellement la reproduction de mon mémoire d'habilitation (Université Paris-Sud, décembre 2005) la présentation des résultats est donc fortement déséquilibrée puisque j'y insiste sur mes propres résultats.

Du fait de l'homogénéité des espaces symétriques, les questions de cohomologie et de spectre des variétés localement symétriques, s'énoncent

[3]Un autre exemple frappant est la construction de graphes expanseurs, reliée à la partie spectrale du mémoire.

naturellement en termes de théorie des représentations. L'objet des deux sections suivantes est d'introduire ce langage et de poser les questions qui motivent la plupart des résultats de ce survols.

1.2 Formule de Matsushima

Fixons X un espace symétrique simplement connexe, de courbure négative et sans facteurs euclidiens. Soit G un groupe de Lie réductif réel qui agit transitivement sur X par isométries. Nous supposons que l'application de G vers la composante connexe de l'identité du groupe des isométries de X a une fibre compacte. Dans la suite nous supposons que la métrique riemannienne de X est identique à celle induite par la forme de Killing de G. Nous notons K le groupe d'isotropie dans G d'un point fixé p de X. Puisque X est de courbure négative, le groupe G a un centre compact et nous supposerons qu'il n'a aucun facteur (simple) compact. Notons $\mathfrak{g}_0$ l'algèbre de Lie de G et $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ la décomposition associée au choix de K. Si $\mathfrak{l}_0$ est une algèbre de Lie, nous noterons $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_0 \otimes \mathbb{C}$ sa complexification.

Soit Γ un sous-groupe discret (sans torsion) de G tel que $S(\Gamma) = \Gamma \backslash X$ soit compacte. Soit $\mathcal{E}^k(S(\Gamma))$ l'espace des formes différentielles de degré k sur $S(\Gamma)$. Puisque le fibré cotangent $T^*S(\Gamma)$ est isomorphe au fibré $\Gamma\backslash G \times_K \mathfrak{p}^* \to \Gamma\backslash G/K = S(\Gamma)$, qui est associé au K-fibré principal $K \to \Gamma\backslash G \to \Gamma\backslash G/K$ et à la représentation de K dans $\mathfrak{p}^*$, on a :

$$\mathcal{E}^k(S(\Gamma)) \simeq (C^\infty(\Gamma\backslash G) \otimes \bigwedge{}^k \mathfrak{p}^*) \simeq \mathrm{Hom}_K(\bigwedge{}^k \mathfrak{p}, C^\infty(\Gamma\backslash G)). \tag{1.3}$$

Notons Δ le laplacien de Hodge-de Rham sur la variété riemannienne (localement symétrique) $S(\Gamma)$ (où la métrique est déduite de la forme de Killing sur $\mathfrak{g}_0$). L'espace des formes harmoniques de degré k est donné par

$$\mathcal{H}^k(S(\Gamma)) := \{\omega \in \mathcal{E}^k(S(\Gamma)) \ : \ \Delta\omega = 0\}.$$

La théorie de Hodge fournit un isomorphisme naturel

$$H^*(S(\Gamma)) \simeq \mathcal{H}^*(S(\Gamma)).$$

Rappelons qu'un $(\mathfrak{g}, K)$-*module* est un espace vectoriel complexe V muni de représentations de $\mathfrak{g}$ et K, soumises aux trois conditions suivantes.

1. L'action de K sur V est *localement finie*, *i.e.* tout vecteur $v \in V$ appartient à un sous-espace K-invariant $V_1 \subset V$ de dimension finie, et la représentation de K dans V_1 est lisse.
2. La différentielle de l'action de K (qui est bien définie d'après 1.) est égale à la restriction à $\mathfrak{k}$ de l'action de $\mathfrak{g}$.
3. Si $X \in \mathfrak{g}$, $k \in K$ et $v \in V$, alors $k \cdot (X \cdot v) = (\mathrm{Ad}(k)X) \cdot (k \cdot v)$.

Si $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ est une représentation continue de G dans un espace de Hilbert, l'espace des vecteurs lisses et K-finis de π est un $(\mathfrak{g}, K)$-module appelé *module de Harish-Chandra de* π.

Soit maintenant (π, V_π) un $(\mathfrak{g}, K)$-module irréductible. À l'aide de (1.3) on définit naturellement une application linéaire

$$T_\pi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_K(\bigwedge^* \mathfrak{p}, \pi) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},K}(\pi, C^\infty(\Gamma\backslash G)) & \rightarrow & \mathcal{E}^*(S(\Gamma)), \\ \psi \otimes \varphi & \mapsto & \varphi \circ \psi. \end{array} \right. \tag{1.4}$$

Soit $\widehat{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence des $(\mathfrak{g}, K)$-modules irréductibles qui sont unitarisables. Rappelons qu'Harish-Chandra a démontré que $\widehat{G}$ s'identifie naturellement au dual unitaire de la composante connexe de l'identité G_0 de G (le sens trivial consiste à considérer le module d'Harish-Chandra de chaque représentation unitaire irréductible de G_0). D'un autre côté, un résultat dû à Gel'fand et Piatetski-Shapiro [53] affirme que la représentation régulière droite dans $L^2(\Gamma\backslash G_0)$ admet une décomposition en somme directe de Hilbert discrète

$$L^2(\Gamma\backslash G_0) \simeq \sum{}^{\oplus} \mathrm{Hom}_G(\pi, L^2(\Gamma\backslash G_0)) \otimes \pi = \sum{}^{\oplus} n_\Gamma(\pi)\pi,$$

où π parcourt cette fois le dual unitaire de G_0 et la multiplicité

$$n_\Gamma(\pi) := \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(\pi, L^2(\Gamma\backslash G_0)) < \infty.$$

On voit ainsi se dessiner une correspondance entre certaines représentations de G et l'espace des formes différentielles λ-propres pour le laplacien. Avant de donner un énoncé précis, rappelons que l'*opérateur de Casimir* est

$$\Omega = \sum_{1 \leq s \leq n} y_s . y'_s$$

où (y_s) est une base de $\mathfrak{g}$ et (y'_s) la base duale de $\mathfrak{g}$ par rapport à sa forme de Killing.

La (très) légère modification du théorème de Matsushima [86] qui suit est démontrée dans [16].

Théorème 1.1. *Soit E^k_λ l'espace des k-formes différentielles sur $S(\Gamma)$ qui sont λ-propres pour le laplacien Δ. Alors :*

$$\dim(E^k_\lambda) = \sum_{\substack{\pi \in \widehat{G} \\ \pi(\Omega) = -\lambda}} n_\Gamma(\pi) \dim(\mathrm{Hom}_K(\bigwedge{}^* \mathfrak{p}, \pi)),$$

la somme étant finie.

Le Théorème 1.1 s'applique en particulier au calcul de la dimension de $E^k_0 = \mathcal{H}^k(S(\Gamma))$ et implique que l'image

$$\mathrm{Image}(T_\pi) \subset \mathcal{H}^*(S(\Gamma)) \simeq H^*(S(\Gamma)) \tag{1.5}$$

si et seulement si $\pi(\Omega) = 0$. On dit dans ce cas que le sous-espace de $H^*(S(\Gamma))$ correspondant à l'image de T_π est *la π-composante*, on note celle-ci $H^*(\pi : \Gamma)$. Autrement dit,

$$H^k(\pi : \Gamma) := \mathrm{Image}(T_\pi) \cap H^k(S(\Gamma)) \ \ (k \in \mathbb{N}), \tag{1.6}$$

via l'isomorphisme (1.5). On a alors

$$H^*(\pi : \Gamma) \simeq n_\Gamma(\pi) H^*(\mathfrak{g}, K; \pi), \tag{1.7}$$

$$H^*(S(\Gamma)) = \bigoplus_\pi H^*(\pi : \Gamma). \tag{1.8}$$

Ici $H^*(\mathfrak{g}, K; \pi)$ désigne la $(\mathfrak{g}, K)$*-cohomologie de* π, c'est-à-dire la cohomologie du complexe

$$C^*(\mathfrak{g}, K; \pi) := \mathrm{Hom}_K(\bigwedge{}^*\mathfrak{p}, \pi),$$

muni de la différentielle définie pour $\omega \in C^p(\mathfrak{g}, K; \pi)$ par la formule :

$$d\omega(X_0, \ldots, X_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i X_i \cdot \omega(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_p).$$

1.3 Représentations cohomologiques

Une représentation $\pi \in \widehat{G}$ dont la $(\mathfrak{g}, K)$-cohomologie est non triviale est dite *cohomologique*. D'après Parthasarathy [93], Kumaresan [72] et Vogan-Zuckerman [116], les représentations cohomologiques peuvent être décrites comme suit. Notons $\mathfrak{t}_0 = \mathrm{Lie}(T)$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{k}_0$. On considère les sous-algèbres paraboliques θ-stable $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g} : \mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ [116], où $\mathfrak{l}$ est le centralisateur d'un élément $X \in i\mathfrak{t}_0$ et $\mathfrak{u}$ est le sous-espace engendré par les racines positives de X dans $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{q}$ est stable sous θ ; on en déduit une décomposition $\mathfrak{u} = (\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$. Soit $R = \dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$.

Associé à $\mathfrak{q}$, se trouve un $(\mathfrak{g}, K)$-module irréductible bien défini $A_\mathfrak{q}$ que nous caractérisons maintenant. Supposons effectué un choix de racines positives pour $(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ de façon compatible avec $\mathfrak{u}$. Soit $e(\mathfrak{q})$ un générateur de la droite $\bigwedge^R(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$. Alors $e(\mathfrak{q})$ est le vecteur de plus haut poids d'une représentation irréductible $V(\mathfrak{q})$ de K contenue dans $\bigwedge^R \mathfrak{p}$; et dont le plus haut poids est donc nécessairement $2\rho(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$. La classe d'équivalence du $(\mathfrak{g}, K)$-module $A_\mathfrak{q}$ est alors uniquement caractérisée par les deux propriétés suivantes.

$A_\mathfrak{q}$ est unitarisable avec le même caractère infinitésimal que la représentation triviale (1.9)

$$\mathrm{Hom}_K(V(\mathfrak{q}), A_\mathfrak{q}) \neq 0. \tag{1.10}$$

Remarquons que la classe du module $A_{\mathfrak{q}}$ ne dépend que de l'intersection $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$, autrement dit deux sous-algèbres paraboliques $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ et $\mathfrak{q}' = \mathfrak{l}' \oplus \mathfrak{u}'$ vérifiant $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{u}' \cap \mathfrak{p}$ donnent lieu à une même classe de module cohomologique.

De plus, $V(\mathfrak{q})$ intervient avec multiplicité 1 dans $A_{\mathfrak{q}}$ et $\bigwedge^R(\mathfrak{p})$, et

$$H^i(\mathfrak{g}, K, A_{\mathfrak{q}}) \cong \mathrm{Hom}_{L\cap K}(\bigwedge{}^{i-R}(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}), \mathbb{C}). \tag{1.11}$$

Ici L est un sous-groupe de K d'algèbre de Lie $\mathfrak{l}$.

Si Γ est un sous-groupe discret (et sans torsion) de G, la $A_{\mathfrak{q}}$-composante $H^R(A_{\mathfrak{q}} : \Gamma)$ de $H^R(S(\Gamma))$ est dite *fortement primitive*. Nous notons $H^*_{\mathrm{prim}+}(S(\Gamma))$ la partie fortement primitive de la cohomologie.

Remarquons que la représentation triviale 1_G du groupe G est (l'unique représentation) cohomologique de degré (fortement primitif) 0. Elle intervient toujours avec multiplicité $n_\Gamma(1_G) = 1$ dans la représentation régulière droite $L^2(\Gamma\backslash G)$. La formule de Matsushima (1.7)+(1.8) et le calcul (1.11) impliquent alors l'injection :

$$H^*(\widehat{X}_G) \cong \mathrm{Hom}_K(\bigwedge{}^*\mathfrak{p}, \mathbb{C}) \hookrightarrow H^*(S(\Gamma)), \tag{1.12}$$

où $\widehat{X}_G$ désigne le dual compact de X_G. Cette injection, due à Hirzebruch, force déjà un certain nombre de restrictions cohomologiques sur la topologie des variétés localement symétriques compactes. D'autres restrictions découlent de la classification des représentations cohomologiques : des conditions d'annulation. Il est en effet immédiat que si X est irréductible,

$$H^i(S(\Gamma)) = 0, \quad \text{pour tout } 0 < i < r_G, \tag{1.13}$$

où r_G est l'infimum des $\dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$ sur toutes les sous-algèbres paraboliques θ-stable $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ de $\mathfrak{g}$. On peut trouver une table des valeurs possibles de r_G dans [116, Table 8.2]. Retenons simplement que r_G est toujours inférieur au rang réel de G.

Toutes ces restrictions cohomologiques sont des restrictions *locales*, le groupe Γ n'intervient pas réellement, seule intervient l'algèbre linéaire du groupe G. Comme nous venons de le rappeler, celle-ci est bien comprise. On peut alors se poser des questions globales :

Question 1.1. *Soient Γ un sous-groupe discret cocompact de G et $\pi \in \widehat{G}$ une représentation cohomologique. Existe-t-il un sous-groupe d'indice fini Γ' de Γ tel que $n_{\Gamma'}(\pi) \neq 0$?*

Ou plus faiblement :

Question 1.2. *Soit $\pi \in \widehat{G}$ une représentation cohomologique. Existe-t-il un sous-groupe Γ discret et cocompact de G tel que $n_\Gamma(\pi) \neq 0$?*

L'objectif (pour l'instant hors de portée) est de comprendre la topologie d'une variété localement symétrique donnée $S(\Gamma)$ et donc de déterminer les représentations cohomologiques $\pi \in \widehat{G}$ telles que $n_\Gamma(\pi) \neq 0$.

Un cas particulier important de la Question 1.1 est la célèbre conjecture suivante généralement attribuée à Thurston.

Conjecture 1.1. *Soit M une variété hyperbolique compacte. Alors M possède un revêtement fini dont le premier nombre de Betti est non nul.*

Cette conjecture est encore largement ouverte, ce qui est particulièrement frustrant en dimension 3. En admettant la conjecture de géométrisation démontrée, c'est sûrement le trou le plus béant dans notre compréhension de la topologie des variétés de dimension 3 compacte. Celle-ci implique en particulier la Conjecture de Waldhausen selon laquelle toute variété de dimension 3 compacte irréductible admet un revêtement fini Haken, c'est-à-dire contenant une surface plongée incompressible (π_1-injective). Remarquons qu'inversement on ne sait même pas démontrer qu'une variété hyperbolique compacte Haken vérifie la Conjecture 1.1.

Nous pouvons maintenant commencer le survol des résultats connus concernant la cohomologie des variétés localement symétriques et notamment les Questions 1.1 et 1.2. Nous commençons par le cas des espaces hyperboliques réels et complexes. Ceux-ci ont en effet des caractéristiques particulières (comme l'existence de variétés non arithmétiques) qui les isolent du reste des espaces symétriques et jouent par ailleurs un rôle central dans ces questions. Remarquons enfin qu'il n'est en général pas nécessaire de se restreindre à étudier la cohomologie à coefficients constants ou les variétés compactes. Le cas des coefficients tordus ne présente essentiellement aucune difficulté nouvelle, nous n'en discuterons que très brièvement dans la suite du texte. Le cas des variétés localement symétriques non compactes de volumes finis est par contre très intéressant et présente des problèmes profonds nouveaux. Nous aborderons quelques uns de ceux-ci à la fin du mémoire.

2 Cohomologie des variétés hyperboliques

Dans cette section $X = \mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ est un espace hyperbolique réel ou complexe. Le groupe G est donc du type $O(n,1)$ ou $U(n,1)$. Explicitons la classification des représentations cohomologiques de ces groupes.

Le cas $G = O(2n,1)$. L'ensemble des classes d'équivalences de représentations cohomologiques de G est alors

$$\{\pi_0 = 1_G, \pi_1, \dots, \pi_{n-1}\} \cup \{\pi_n^+, \pi_n^-\},$$

où pour $j = 0, \dots, n-1$, la représentation π_j vérifie

$$H^k(\mathfrak{g}, K, \pi_j) \cong \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{C} & \text{si } k = j,\ 2n-j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{array} \right. \quad (k \in \mathbb{N})$$

et

$$H^k(\mathfrak{g}, K, \pi_n^{\pm}) \cong \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{C} & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{sinon,} \end{array} \right. \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Si Γ est un sous-groupe discret cocompact de G et j un entier compris entre 0 et $n-1$, les nombres de Betti

$$b_j(S(\Gamma)) = b_{2n-j}(S(\Gamma)) = n_\Gamma(\pi_j).$$

Et pour $j = n$,

$$b_n(S(\Gamma)) = n_\Gamma(\pi_n^+) + n_\Gamma(\pi_n^-).$$

Le cas $G = O(2n+1, 1)$**.** L'ensemble des classes d'équivalences de représentations cohomologiques de G est alors

$$\{\pi_0 = 1_G, \pi_1, \dots, \pi_n\},$$

où pour $j = 0, \dots, n$, la représentation π_j vérifie

$$H^k(\mathfrak{g}, K, \pi_j) \cong \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{C} & \text{si } k = j,\ 2n+1-j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{array} \right. \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Si Γ est un sous-groupe discret cocompact de G et j un entier compris entre 0 et n, les nombres de Betti

$$b_j(S(\Gamma)) = b_{2n+1-j}(S(\Gamma)) = n_\Gamma(\pi_j).$$

Le cas $G = U(n, 1)$**.** L'ensemble des classes d'équivalences de représentations cohomologiques de G est alors

$$\{\pi_{i,j} \ : \ i, j \in \mathbb{N},\ i + j \leq n\},$$

où pour $i, j \in \mathbb{N}$, $i + j \leq n$, la représentation $\pi_{i,j}$ vérifie

$$H^k(\mathfrak{g}, K, \pi_{i,j}) \cong \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{C} & \text{si } k = i + j + 2l \ \ (0 \leq l \leq n - i - j), \\ 0 & \text{sinon,} \end{array} \right. \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Si Γ est un sous-groupe discret cocompact de G, la variété $S(\Gamma)$ est kaehlérienne. La dimension de l'espace des formes harmoniques primitives de bidegré (i, j), avec $i, j \in \mathbb{N}$, $i + j \leq n$, est égale à $n_\Gamma(\pi_{i,j}) = n_\Gamma(\pi_{j,i})$. Si $i, j \in \mathbb{N}$, $i + j \leq n$, alors les nombres de Hodge

$$\begin{aligned} h_{i,j}(S(\Gamma)) &= h_{j,i}(S(\Gamma)) = h_{n-i,n-j}(S(\Gamma)) = h_{n-j,n-i}(S(\Gamma)) \\ &= \sum_{l=0}^{\min(i,j)} n_\Gamma(\pi_{i-l,j-l}). \end{aligned}$$

Enfin, si p est un entier compris entre 0 et $2n$, les nombres de Betti

$$\begin{aligned} b_p(S(\Gamma)) &= b_{2n-p}(S(\Gamma)) \\ &= \sum_{i+j=p} h_{i,j}(S(\Gamma)) \\ &= \sum_{l=0}^{[p/2]} \sum_{i+j\leq p-2l} n_\Gamma(\pi_{i,j}). \end{aligned}$$

2.1 Un bref survol de la littérature

Les premières réponses partielles aux Questions 1.1 et 1.2 ont d'abord concerné les variétés hyperboliques réelles et donc le groupe $G = O(n,1)$. Si $n = 2$, les sous-groupes discrets cocompacts de G sont des groupes fondamentaux de surfaces de genre ≥ 2, donc de premier nombre de Betti non nul. Pour $3 \leq n \leq 5$, les premiers exemples de $S(\Gamma)$ avec un premier nombre de Betti non nul ont été donnés par Vinberg (*cf.* [1]). Au milieu des années 70, Millson [88] et Thurston (non publié) ont construit pour tout $n \geq 2$ des variétés hyperboliques compactes arithmétiques $S(\Gamma)$ de premier nombre de Betti non nul.

Esquissons la construction de ces variétés arithmétiques. Soit K un corps de nombre totalement réel de degré m sur $\mathbb{Q}$ et soient $\sigma_1 = id, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ les différents plongements de K dans $\mathbb{R}$. Soit

$$q(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2 - a_{n+1}x_{n+1}^2$$

une forme quadratique diagonale avec chaque $a_i \in K$. Supposons que ${}^{\sigma_1}q$ a pour signature $(n,1)$ et que ${}^{\sigma_i}q$ est définie positive pour $i = 2, 3, \ldots, m$. Le groupe G obtenu à partir du groupe orthogonal $O(q)$ par restriction des scalaires de K à $\mathbb{Q}$ est un groupe réductif algébrique sur $\mathbb{Q}$ dont l'ensemble des points réels est isomorphe au produit $O(n,1) \times O(n+1)^{m-1}$. Soit Γ un sous-groupe de congruence sans torsion dans G. Le groupe Γ agit alors librement sur l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ (l'espace symétrique associé au groupe G) et le quotient $\Gamma\backslash\mathbb{H}^n$ est une variété hyperbolique de volume fini. Celle-ci est compacte sauf si $K = \mathbb{Q}$ et q représente 0 sur $\mathbb{Q}$. Nous dirons d'une variété hyperbolique qu'elle est *arithmétique standard* si et seulement si elle admet un revêtement (riemannien) fini qui est un revêtement fini d'une variété $\Gamma\backslash\mathbb{H}^n$ comme ci-dessus. Nous pouvons alors énoncer plus précisemment le théorème de Millson (et Thurston).

Théorème 2.1. *Toute variété hyperbolique arithmétique standard admet un revêtement fini dont le premier nombre de Betti est non nul.*

L'argument principal de la démonstration de ce Théorème est géométrique, il repose de manière essentielle sur l'existence d'hypersurfaces totalement géodésiques. Celle-ci provenant du fait que le groupe $O(q)$ contient le groupe orthogonale d'une forme en n variables de signature $(n-1,1)$ en la place σ_1. Dans [80], en utilisant la théorie de Bass-Serre d'actions de groupes sur les arbres, Lubotzky simplifie la démonstration du Théorème 2.1 en le déduisant du théorème plus général suivant.

Théorème 2.2. *Soit M une variété hyperbolique de volume fini. Supposons que M contienne une hypersurface (plongée) totalement géodésique. Alors M admet un revêtement fini dont le groupe fondamental se surjecte sur un groupe libre de rang 2. (Ce revêtement fini a, en particulier, un premier nombre de Betti non nul.)*

Nous verrons comment déduire ce Théorème d'un résultat plus précis (et de preuve élémentaire) démontré dans [7] sur lequel nous revenons au §2.2. Remarquons pour l'instant que le Théorème 2.1 répond positivement à la Question 1.2 dans le cas du groupe $O(n,1)$ et pour la représentation π_1 : pour tout $n \geq 2$, il existe un sous-groupe discret cocompact $\Gamma \subset G$ tel que $n_\Gamma(\pi_1) \neq 0$. On l'a dit la Question 1.1 semble bien plus délicate. Le Théorème 2.2 permet néanmoins de démontrer quelques résultats intéressants dans cette direction.

Nous avons en effet rappelé qu'il existe des variétés hyperboliques non arithmétiques en toute dimension $n \geq 2$. En dimension $n = 3$, il en existe plein et la Conjecture de Thurston est très largement ouverte. À partir de la dimension 4 on ne connait que très peu de variétés hyperboliques non arithmétiques, ce sont soit des variétés hybrides construites par Gromov et Piatetski-Shapiro [55] soit des variétés obtenues comme quotient de $\mathbb{H}^n$ par un groupe Γ commensurable à un groupe engendré par des réflexions (*cf.* [1]), que nous appelons *variétés de Poincaré-Vinberg*. À indice fini près, on peut supposer que Γ est normalisé par une réflexion. Cette réflexion agit alors sur la variété $\Gamma\backslash\mathbb{H}^n$ et l'ensemble de ses points fixes forme une hypersurface totalement géodésique. Le corollaire suivant découle donc du Théorème 2.2.

Corollaire 2.1. *Les variétés hyperboliques de Poincaré-Vinberg admettent un revêtement fini avec un premier nombre de Betti non nul.*

Esquissons maintenant la construction des variétés hybrides de Gromov et Piatetski-Shapiro. Soient M_1 et M_2 deux variétés hyperboliques arithmétiques standard de dimension n. Soient $F_1 \subset M_1$ et $F_2 \subset M_2$ deux hypersurfaces, plongées, totalement géodésiques et isométriques. Fixons une isométrie $\varphi : F_1 \to F_2$. On appelle *variété hybride* la variété hyperbolique obtenue en découpant M_1 et M_2 suivant F_1 et F_2 et en recollant $F_1^{\pm}$ avec $F_2^{\mp}$ par φ, où $F_i^{\pm}$ sont les copies de F_i dans la variété M_i découpée suivant F_i. Par construction une variété hybride contient une hypersurface totalement géodésique et le Théorème 2.2 implique le corollaire suivant.

Corollaire 2.2. *Les variétés hyperboliques hybrides admettent un revêtement fini avec un premier nombre de Betti non nul.*

Concernant les autres nombres de Betti (ou les autres représentations cohomologiques), en développant les idées de [88] Millson et Raghunathan répondent complètement et positivement dans [89] à la Question 1.2 pour le groupe $O(n,1)$. Ils montrent plus précisemment le théorème suivant.

Théorème 2.3. *Toute variété hyperbolique arithmétique standard compacte admet un revêtement fini dont tous les nombres de Betti sont non nuls.*

Ces techniques géométriques reposent de manière essentielle sur l'existence d'hypersurfaces totalement géodésiques. Ce qui n'a plus lieu dans le cas des variétés hyperboliques arithmétiques non standard ou dans le cas des variétés hyperboliques complexes. En ce qui concerne ces dernières il est naturel de commencer par considérer les *variétés hyperboliques complexes standard* obtenues, comme dans le cas réel, en considérant des groupes unitaires sur des extensions quadratiques imaginaires de corps de nombres totalement réels. Dans [65] Kazhdan étudie la Question 1.2 dans le cas du groupe $U(2,1)$ (et pour les variétés arithmétiques standard) à l'aide du "relevé thêta" à partir du groupe $U(1)$. À la suite de ce travail et en développant la même technique, Shimura [105] puis Borel et Wallach [26] montrent finalement le théorème suivant.

Théorème 2.4. *Toute variété hyperbolique complexe arithmétique standard admet un revêtement fini dont le premier nombre de Betti est non nul.*

Dans une direction opposée Rogawski [100] montre qu'une variété hyperbolique complexe de congruence de dimension (réelle) 4 a un premier nombre de Betti nul sauf si elle est arithmétique standard. Plus généralement, Clozel [38] montre le théorème suivant (*cf.* [16] pour une autre démonstration).

Théorème 2.5. *Soit G un groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ obtenu par restriction des scalaires à partir du groupe des unités d'une algèbre à division sur une extension quadratique imaginaire d'un corps de nombre totalement réel isomorphe à toute l'algèbre des matrices en chaque ramification et tel que $G(\mathbb{R}) \cong U(n,1) \times (\text{compact})$, avec $n+1 \geq 3$. Soit Γ un sous-groupe de congruence $\subset G(\mathbb{Q})$. Alors,*

$$H^1(S(\Gamma)) = 0.$$

À la suite de Kazhdan, Shimura et Borel et Wallach, la technique du "relevé thêta" est notamment développée par Wallach [117], Anderson [3] et Li [76]. Nous y reviendrons plus loin dans une plus grande généralité. En ce qui concerne les variétés hyperboliques complexes, cette méthode permet de démontrer le théorème suivant.

Théorème 2.6. *Toute variété hyperbolique complexe arithmétique standard admet un revêtement fini dont tous les nombres de Betti sont non nuls. Plus précisément, si* π *est une représentation cohomologique du groupe* $G = U(n,1)$ *de la forme* $\pi_{i,0}$*, pour* $i = 0, \dots, n$*, ou* $\pi_{i,j}$*, pour* $i + j < (n+1)/2$*, et si* Γ *est un sous-groupe arithmétique standard de* G*, il existe un sous-groupe d'indice fini (de congruence si* Γ *est de congruence)* $\Gamma' \subset \Gamma$ *tel que* $n_{\Gamma'}(\pi) \neq 0$*.*

Le Théorème 2.6 répond donc positivement à la Question 1.2 pour un grand nombre de représentations cohomologiques. La Question 1.1 reste quant à elle grande ouverte. Néanmoins, le Théorème 2.5 semble aller dans le sens négatif : pour répondre positivement à la Question 1.1 il faudra sortir du monde des variétés de congruence, ce qui n'est pas nécessaire dans le cas du Théorème 2.6.

La technique du "relevé thêta" s'applique également aux variétés hyperboliques réelles arithmétiques (même non standard). Li [76] montre notamment le théorème suivant.

Théorème 2.7. *Toute variété hyperbolique arithmétique de dimension* $n \neq 7$ *admet un revêtement fini dont tous les nombres de Betti* b_i *pour* $0 \leq i < (n-1)/4$ *sont non nuls.*

La restriction $n \neq 7$ sur la dimension provient de l'existence en dimension 7 de variétés arithmétiques spéciales peu comprises.

En ce qui concerne plus particulièrement le premier nombre de Betti (et donc la Conjecture de Thurston) Li et Millson [77] et indépendamment Raghunathan et Venkataramana [96] étendent le Théorème 2.7 par des méthodes complètement différentes.

Théorème 2.8. *Toute variété hyperbolique arithmétique de dimension* $\neq 3, 7$ *admet un revêtement fini dont le premier nombre de Betti non nul.*

La restriction $n \neq 7$ sur la dimension dans les deux théorèmes précédents provient de l'existence en dimension 7 de variétés arithmétiques spéciales peu comprises, associées aux formes ${}^3D_4$ et ${}^6D_4$ du groupe $SO(8)$. À propos de ces variétés nous motivons dans [20] la conjecture suivante.

Conjecture 2.1. *Soit* G *un groupe semi-simple algébrique sur* $\mathbb{Q}$ *provenant (par restriction des scalaires) d'un groupe de type* ${}^3D_4$ *ou* ${}^6D_4$ *sur un corps de nombre totalement réel et tel que* $G(\mathbb{R}) = O(7,1) \times (\text{compact})$*, alors pour tout sous-groupe de congruence* $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$*, on a :*

$$b_1(\Gamma) = 0.$$

Si vraie, la Conjecture de Thurston devrait donc nécessiter de sortir du monde des sous-groupes de congruence ce qui n'est le cas d'aucun des résultats connus pour l'instant.

La dimension 3 est encore une fois la plus délicate, le groupe $SO(3,1) \cong SL(2,\mathbb{C})$ étant également un groupe complexe, il y a plus de constructions arithmétiques. Dans ce cas et en ce qui concerne les variétés arithmétiques les réponses les plus complètes à la Conjecture de Thurston sont dues à Labesse et Schwermer [73], Clozel [33] et, plus récemment, Rajan [97].

Remarquons finalement que dans [79], Lubotzky donne une démonstration plus élémentaire du Théorème 2.8 en le ramenant au Théorème 2.6 : suivant une remarque de Raghunathan et Venkataramana, Lubotzky plonge les variétés hyperboliques arithmétques considérées dans des variétés hyperboliques complexes arithmétiques standard et considère la restriction des classes de cohomologie non triviales obtenues par le Théorème 2.6. Une partie de notre approche de ces problèmes est une généralisation de la méthode de Lubotzky. Nous y revenons plus loin.

2.2 Effeuillage des variétés hyperboliques

Commençons par énoncer un lemme général, *cf.* [9], qui découle essentiellement de la démonstration du célèbre Lemme de Mal'cev [85] affirmant que tout groupe linéaire de type fini est résiduellement fini.

Lemme 2.1. *Soient H un sous-ensemble algébrique de $GL(n)$ et Γ un sous-groupe de type fini de $GL(n)$. Il existe alors un suite décroissante $\{N_m\}$ de sous-groupes d'indices finis et distingués dans Γ telle que :*

1. *l'intersection $\cap_m N_m$ est réduite à l'élément neutre, et*
2. *si $\gamma \in \Gamma$ vérifie que pour une infinité de m, il existe un élément $h_m \in H \cap \Gamma$ tel que $\gamma \cong h_m \pmod{N_m}$, alors $\gamma \in H$.*

Remarquons que la démonstration de [7, Théorème 1] implique immédiatement le théorème suivant.

Théorème 2.9. *Soient $M = \Gamma\backslash X$ une variété localement symétrique de volume fini et F une sous-variété totalement géodésique proprement immergée dans M. Il existe alors un revêtement fini de M auquel F se relève en une sous-variété plongée.*

La démonstration repose essentiellement sur le Lemme 2.1 appliqué au sous-groupe H des isométries de X qui préserve une composante connexe Y de la préimage de F dans X. Notons $\Lambda = \Gamma \cap H$, alors la variété $F = \Lambda\backslash Y$. Soit $\{N_m\}$ une suite de sous-groupes distingués dans Γ donnée par le Lemme 2.1, notons $\Gamma_m = N_m\Lambda$. La suite de sous-groupe $\Gamma_m \subset \Gamma$ vérifie que $\cap_m\Gamma_m = \Lambda$ et les variétés $M_m = \Gamma_m\backslash X$ forment une *tour d'effeuillage* autour de $F \subset X$. Autrement dit la suite $\{M_m\}$ est une suite de revêtements finis de M qui converge sur tout compact vers la variété $M_\infty = \Lambda\backslash X$. La variété F se plonge dans le revêtement limite M_∞, il n'est alors pas difficile de vérifier qu'elle se plonge dans l'un des revêtements intermédiaires M_m.

Lorsque M est une surface hyperbolique et F une géodésique, le Théorème 2.9 est dû à Scott [103] et lorsque M est une variété hyperbolique de dimension 3 et F une surface, il est dû à Long [78].

Revenons au cas des variétés hyperboliques. La considération d'une tour d'effeuillage autour d'une sous-variété totalement géodésique nous permet dans [7] de démontrer le théorème suivant.

Théorème 2.10. *Soient M une variété hyperbolique de volume fini et F une sous-variété totalement géodésique proprement immergée de codimension 1 dans M. Il existe alors un revêtement fini $\widehat{M}$ de M et deux composantes connexes $\widehat{F}_1$ et $\widehat{F}_2$ de la préimage de F dans $\widehat{M}$ telles que $\widehat{F}_1$ et $\widehat{F}_2$ soient plongées, totalement géodésiques dans $\widehat{M}$ et $\widehat{M} \setminus \{\widehat{F}_1, \widehat{F}_2\}$ connexe.*

Le Théorème 2.10 implique en particulier le Théorème 2.2 (et donc le Théorème 2.1 et les Corollaires 2.1 et 2.2). Il permet de découper les variétés hyperboliques obtenues suivant les sous-variétés totalement géodésiques de codimension 1 et de construire des revêtements finis en les recollant suivant des graphes réguliers. Ainsi le Théorème 2.10 permet-il de jouer avec certaines variétés hyperboliques comme on joue avec les pantalons dans le cas des surfaces.

Quelques applications spectrales. On peut notamment appliquer ces résultats à des problèmes spectraux. Dans [7] nous construisons ainsi des triplets (M, M_1, M_2) de variétés hyperboliques telles que

1. M_1 et M_2 sont deux variétés hyperboliques non isométriques revêtant finiment M, et
2. les groupes fondamentaux de M, M_1 et M_2 se surjectent sur un triplet de Sunada (*cf.* [30] ou [19]).

D'où l'on déduit immédiatement le théorème et le corollaire suivant.

Théorème 2.11. *Soit M une variété hyperbolique compacte contenant une sous-variété totalement géodésique proprement immergée de codimension 1. Alors, M admet deux revêtements finis isospectraux mais non isométriques.*

Corollaire 2.3. *Pour tout entier $n \geq 2$, il existe des variétés hyperboliques (arithmétiques ou non) isospectrales non isométriques de dimension n.*

Les premiers exemples de variétés hyperboliques isospectrales non isométriques ont été construits par Vignéras [114] en dimension 2 et 3 ; ce sont des variétés arithmétiques. Dans [106], Spatzier montre que pour $n > 26$, toute variété hyperbolique vérifie les conclusions du Théorème 2.11. Enfin Reid construit dans [99] des exemples de variétés hyperboliques de dimension 3 non arithmétiques, isospectrales et non isométriques.

Dans [41], Colbois et Matei étudient les liens entre la constante isopérimétrique de Cheeger $h(M, g)$ d'une variété riemannienne compacte de dimension n (M, g) et la plus petite valeur propre $\lambda_1(M, g) > 0$ du laplacien.

Deux inégalités classiques respectivement dues à Cheeger [31] et Buser [29] affirment que si (M_i, g_i) est une famille de variétés riemanniennes de courbure de Ricci uniformément minorée telle que $h(M_i, g_i) \to 0$ as $i \to \infty$, alors $\lambda_1(M_i, g_i) = h(M_i, g_i)^{\alpha_i}$, avec $\alpha_i \in [1, 2]$ pour i suffisamment grand. Colbois et Matei étudient le problème de déterminer si tous les $\alpha \in [1, 2]$ peuvent être obtenus comme points limites de la suite α_i. Leurs théorèmes principaux sont des réponses positives à ces questions dans les deux cas suivants :

– quand la topologie de la variété sous-jacente est fixée (*i.e.* $M_i \cong M$) et la métrique varie ;
– quand chaque (M_i, g_i) est hyperbolique (mais sans fixer la topologie !).

La démonstration de chacun de ces résultats consiste à modeler la famille de varétés M_i sur une famille de graphes avec la propriété recherchée (en considérant le laplacien discret). Une telle famille de graphes est facile à construire : l'idée est de coller ensemble un graphe linéaire (avec λ_1 de l'ordre de h^2) et un arbre (pour lequel le λ_1 est de l'ordre de h) et d'ajuster le nombre de sommets. Colbois et Matei utilise finalement le Théorème 2.10 pour modeler une variété hyperbolique de dimension arbitraire sur un graphe.

Revenons à la cohomologie des variétés localement symétriques. On peut en effet appliquer le Théorème 2.10 à certaines variétés hyperboliques de dimension 3 ne contenant pas d'hypersurface totalement géodésique. La littérature autour de la Conjecture de Thurston en dimension 3 est vaste, trop vaste pour être recencée ici. Citons néanmoins deux articles classiques sur le sujet. Dans le premier [68] Kojima et Long construisent une famille infinie de variétés de dimension 3 vérifiant la Conjecture de Thurston. Ils montrent plus précisemment que chaque membre de cette famille admet des revêtements finis avec des premiers nombre de Betti arbitrairement grands et conjecturent que cette propriété devrait être vérifiée par toute variété hyperbolique compacte de dimension 3. Remarquons par ailleurs que si M est une variété fermée orientable de dimension 3, M peut être réalisée comme un revêtement ramifié de $\mathbb{S}^3$, ramifié sur le noeud de huit, *cf.* [57]. Dans [6], Baker étudie la Conjecture de Thurston pour certains revêtements ramifiés au-dessus du noeud de huit dans $\mathbb{S}^3$ et montre que si M est une variété compacte orientable qui est un revêtement ramifié au-dessus du noeud de huit dans $\mathbb{S}^3$ et dont tous les indices de ramification sont divisibles par un même entier $n \geq 5$ alors M vérifie la Conjecture de Thurston.

Le complèmentaire du noeud de huit dans $\mathbb{S}^3$ est une variété hyperbolique (*cf.* [108]) qui est associée à un pavage en nids d'abeilles (c'est-à-dire par des polyèdres réguliers tous congruents) de $\mathbb{H}^3$. (C'est également le cas de l'entrelacs de Whitehead, des anneaux borroméens ou des noeuds dodécaèdraux construits dans [2] dans $\mathbb{S}^3$.) Il n'est alors pas difficile de vérifier que chacune de ces variétés hyperboliques (de volumes finis) contient une sous-variété (immergée) compacte totalement géodésique. En appliquant le Théorème 2.10 à ces variétés avant d'obturer les tores à l'aide de chirurgies de Dehn, nous montrons dans [8] le théorème suivant.

Théorème 2.12. *Soit K le noeud de huit (ou l'un des noeuds dodécaèdraux construits dans [2], l'entrelacs de Whitehead ou encore les anneaux borroméens). Soit M un revêtement ramifié compact orientable de $\mathbb{S}^3$, ramifié au-dessus de K. Il existe alors un entier p_0 tel que si tous les indices de ramification sont divisibles par un même entier premier $p \geq p_0$ alors M est finiment revêtue par une variété contenant deux surfaces plongées disjointes dont la réunion est non séparante. En particulier, le groupe fondamental de M contient un sous-groupe d'indice fini qui se surjecte sur le groupe libre de rang deux.*

Il est naturel de chercher à éliminer l'hypothèse de codimension 1 dans le Théorème 2.10. La particularité de la codimension 1 tient à ce que la non trivialité en homologie de la classe d'une hypersurface est équivalente au fait que cette hypersurface ne disconnecte pas la variété ambiante. Ceci se détermine facilement en calculant le nombre d'intersection de courbes fermées (que l'on peut toujours homotoper à des géodésiques) avec l'hypersurface. Dans [9] nous nous passons de cette spécificité de la codimension 1 en considérant des paires de sous-variétés totalement géodésiques s'intersectant transversalement en au moins un point. Nous montrons plus précisemment le théorème suivant.

Théorème 2.13. *Fixons deux sous-espaces totalement géodésiques $\mathbb{H}^k$ et $\mathbb{H}^{n-k}$ ($0 \leq k \leq n$) dans l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ et supposons qu'ils s'intersectent transversalement en un point. Notons $O(k,1) = O(k,1) \times \{1\}$ et $O(n-k,1) = O(n-k-1) \times \{1\}$ les sous-groupes correspondant du groupe $O(n,1)$. Soit Γ un sous-groupe de type fini, discret et sans torsion du groupe des isométries de $\mathbb{H}^n$ tel que le groupe $\Lambda_1 = \Gamma \cap O(k,1)$ (resp. $\Lambda_2 = \Gamma \cap O(n-k,1)$) soit cocompact dans $O(k,1)$ (resp. $O(n-k,1)$). La variété hyperbolique $M = \Gamma \backslash \mathbb{H}^n$ contient alors deux sous-variétés totalement géodésiques compactes $F_1 = \Lambda_1 \backslash \mathbb{H}^k$ et $F_2 = \Lambda_2 \backslash \mathbb{H}^{n-k}$ qui s'intersectent transversalement en au moins un point. Et il existe un revêtement fini $\widehat{M}$ de M et deux composantes connexes $\widehat{F}_1$ et $\widehat{F}_2$ des préimages respectives de F_1 et F_2 dans $\widehat{M}$ telles que le cup-produit*

$$[\widehat{F}_1] \cdot [\widehat{F}_2] \neq 0.$$

On a déjà rappelé que la plupart des exemples connus de variétés hyperboliques compactes de dimension ≥ 4 vérifient les hypothèses du Théorème 2.13. Le Théorème 2.3 est un corollaire immédiat du Théorème 2.13. De la même manière nous montrons dans [9] le corollaire suivant.

Corollaire 2.4. *Toute variété hyperbolique hybride ou de Poincaré-Vinberg admet un revêtement fini dont tous les nombres de Betti sont non nuls.*

La démonstration du Théorème 2.13 repose sur les idées développées dans [89] par Millson et Raghunathan, elle utilise également le Lemme 2.1. En voici le plan : commençons par supposer F_1 et F_2 plongées dans M (*cf.* Théorème 2.9). On construit une suite $\{M_m\}$ de revêtements finis de M contenant deux relevés $F_1^m, F_2^m \subset M_m$ de F_1 et F_2 telle que si un point $a \in F_1 \cap F_2$ admet une préimage dans $F_1^m \cap F_2^m$ pour une infinité de m, alors le nombre d'intersection local $[F_1] \cdot [F_2]_{|a}$ vaut 1. L'ensemble $F_1 \cap F_2$ étant fini, une telle construction implique bien le Théorème 2.13.

Pour garantir le signe du nombre d'intersection en a, remarquons que si $a \in F_1 \cap F_2$, alors il existe un élément $\gamma \in \Gamma$, un point $a_1 \in \mathbb{H}^k$ et un point $a_2 \in \mathbb{H}^{n-k}$ tels que $\gamma a_1 = a_2$. Or si $\gamma = \beta\alpha$ où β (resp. α) est une isométrie préservant $\mathbb{H}^{n-k}$ (resp. $\mathbb{H}^k$) et son orientation, alors :

$$[F_1] \cdot [F_2]_{|a} = [\alpha\mathbb{H}^k] \cdot [\beta^{-1}\mathbb{H}^{n-k}] = +1.$$

Notons $\mathcal{E} = SO_0(n-k,1)SO_0(k,1)$ l'ensemble des isométries de $\mathbb{H}^n$ de la forme ci-dessus. D'après ce que l'on vient de voir, on veut construire la suite $\{M_m\}$ de manière à ce que si $a \in F_1 \cap F_2$ admet une préimage dans $F_1^m \cap F_2^m$ pour une infinité de m, alors $\gamma \in \mathcal{E}$. On construit une telle tour de revêtements finis à l'aide du Lemme 2.1 et en utilisant que l'ensemble $\mathcal{E}$ est presque algébrique.

En s'inspirant de la démonstration de [118, Theorem 3] nous montrons de plus (toujours dans [9]) la proposition suivante.

Proposition 2.1. *Sous les hypothèses du Théorème 2.13, supposons que F_1 et F_2 sont plongées dans M et vérifient :*

$$[F_1] \cdot [F_2] \neq 0.$$

Il existe alors une suite $\{M_m\}$ de revêtements finis de M telle que les préimages de F_1 (resp. F_2) dans M_m engendrent (en cohomologie) un espace dont la dimension tend vers l'infini avec m.

Pour intéressant que soit le Théorème 2.13, on aimerait pouvoir se contenter de l'existence d'une seule sous-variété totalement géodésique. Dans l'esprit de la démonstration du Théorème 2.9 on peut chercher à exploiter la tour d'effeuillage dans l'étude de la cohomologie. La cohomologie L^2 de la variété limite intervient alors naturellement.

2.3 Cohomologie L^2

Représentations de la série discrète. Considérons ici le cas général d'un groupe de Lie réel, réductif et connexe. Supposons de plus que le rang complexe de G soit égal au rang complexe de K (c'est par exemple le cas lorsque $G = U(n,1)$ ou $G = O(2n,1)$). Dans ce cas et d'après Harish-Chandra le groupe G_0 admet une série discrète. Notons $\widehat{G}_d$ l'ensemble $\subset \widehat{G}$ des classes d'équivalence de représentations irréductibles de G_0 appartenant à la série discrète, *i.e.* intervenant comme sous-représentation de $L^2(G_0)$. L'ensemble des représentations cohomologiques $\in \widehat{G}_d$ est d'ordre $|W_G/W_K|$ où W_G (resp. W_K) désigne le groupe de Weyl de G (resp. K), et pour une telle représentation π on a (*cf.* [26]) :

$$H^q(\mathfrak{g}, K, \pi) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } q = d_G/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, la $(\mathfrak{g}, K)$-cohomologie d'une telle représentation est concentrée en degré médian.

En formant des séries de Poincaré on peut montrer qu'étant donné un groupe Γ discret cocompact dans G, toute représentation de la série discrète π **intégrable** intervient avec une multiplicité $n_{\Gamma'}(\pi) \neq 0$ dans la représentation $L^2(\Gamma' \backslash G_0)$ pour un sous-groupe d'indice fini $\Gamma' \subset \Gamma$. En effet, la série de Poincaré

$$P_f(g) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma g)$$

associée à une fonction f dans l'espace $\mathcal{H}_\pi$ de la représentation π et engendrant son K-type minimal, converge alors absolument et localement uniformément et représente donc une forme automorphe $\in L^2(\Gamma \backslash G)$. Si $f \neq 0$, il est de plus immédiat que quitte à remplacer Γ par un sous-groupe d'indice fini suffisamment profond $\Gamma' \subset \Gamma$, la série P_f ne s'annule pas et que l'orbite de P_f sous l'action de G est contenu dans un nombre fini de copies de $\mathcal{H}_\pi$ dans $L^2(\Gamma' \backslash G)$.

Plus généralement, l'analyse de la croissance des multiplicités dans $L^2(\Gamma_m \backslash G)$, avec $\{\Gamma_m\}$ suite décroissante de sous-groupes distingués d'indices finis dans un réseau Γ donné et d'intersection $\bigcap \Gamma_m = \{1\}$, a joué un rôle important dans la théorie. De George et Wallach [43] montrent en particulier que si l'on suppose Γ cocompact dans G, toute représentation de la série discrète de G intervient pour m suffisamment grand avec une multiplicité $n_{\Gamma_m}(\pi) \neq 0$ dans la représentation $L^2(\Gamma_m \backslash G)$. Clozel [35] étend ce résultat au cas d'un groupe de congruence Γ non nécessairement cocompact. Enfin, notons que Delorme [44] montre que la suite des mesures spectrales (sur $\widehat{G}$) des $L^2(\Gamma_m \backslash G)$, pondérées par $[\Gamma : \Gamma_m]$, tend vers celle de $L^2(G)$. Ces résultats ont immédiatement des conséquences en cohomologie.

Théorème 2.14. *La réponse à la Question 1.1 (et donc 1.2) est positive lorsque la représentation cohomologique π appartient à la série discrète de G. C'est en particulier le cas dans chacun des cas suivants :*
- $G = O(2n,1)$ *et* $\pi = \pi_n^+$ *ou* π_n^- *;*
- $G = U(n,1)$ *et* $\pi = \pi_{i,j}$ *pour tout couple* $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ *tel que* $i + j = n$.

De plus, la multiplicité $n_\Gamma(\pi)$ de π dans $L^2(\Gamma\backslash G)$ croît comme le covolume de Γ dans G lorsque Γ tend vers le groupe trivial.

Dans chacun des cas particuliers du Théorème 2.14 et si l'on considère une suite décroissante $\{\Gamma_m\}$ de sous-groupes distingués d'indices finis dans un réseau Γ donné d'intersection $\bigcap \Gamma_m = \{1\}$, la suite des nombres de Betti normalisés $b_n(S(\Gamma_m))/[\Gamma : \Gamma_m]$ tend vers un nombre réel non nul. Pour étudier de telles suites, il est naturel de se placer dans le cadre général des complexes simpliciaux que nous détaillons maintenant.

Asymptotique des nombres de Betti et invariants l^2. Un complexe simplicial compact K possède lui aussi des nombres de Betti (usuels) $b_n(K)$, invariants topologiques qui sont les dimensions des espaces vectoriels $H_n(K)$ d'homologie en dimension n. Considèrons maintenant une **action libre cocompacte** (L, Γ) d'un groupe dénombrable discret Γ sur un complexe simplicial L. Ses nombres de Betti l^2 notés $b_n^{(2)}(L, \Gamma)$ sont les dimensions généralisées (au sens de von Neumann) des espaces hilbertiens $\overline{H}_n^{(2)}(L, \Gamma)$ d'homologie l^2 réduite en dimension n. Les nombres de Betti l^2, introduits par Atiyah dans un contexte analytique [5], ont connu un vaste développement, notamment dans le cadre des feuilletages mesurés (par Connes [42]), dans le cadre général des actions topologiques quelconques de groupes dénombrables (Cheeger et Gromov [32]), ou suivant l'approche de Lück qui fait rentrer cette théorie dans un cadre homologique classique par une extension de la notion de dimension généralisée [82, 83]. L'article de Eckmann [4] [47] constitue une excellente introduction aux nombres de Betti l^2. Une question récurrente dans le domaine consiste à établir leurs liens avec les nombres de Betti usuels.

Lorsque Γ est un groupe fini, la dimension généralisée au sens de von Neumann n'est autre que la dimension usuelle divisée par le cardinal $|\Gamma|$ de Γ. Dès lors, si le complexe simplicial L ci-dessus est lui-même compact (et donc Γ fini), alors

$$b_n^{(2)}(L, \Gamma) = \frac{b_n(L)}{|\Gamma|}.$$

D'où il résulte, si Λ est un sous-groupe **normal** d'indice fini de Γ, que les nombres de Betti l^2 de l'action du groupe fini $\Lambda\backslash\Gamma$ sur le complexe compact $\Lambda\backslash L$ coïncident avec les nombres de Betti usuels normalisés de $\Lambda\backslash L$:

$$b_n^{(2)}(\Lambda\backslash L, \Lambda\backslash\Gamma) = \frac{b_n(\Lambda\backslash L)}{[\Gamma : \Lambda]}. \tag{2.1}$$

[4] C'est d'ailleurs Eckmann qui le premier a introduit une structure euclidienne sur l'espace des chaînes d'un complexe, pour obtenir une décomposition de Hodge (voir [45]). Il est également remarquable que l'une des premières applications (voir [46]) de cette décomposition de Hodge simpliciale concerne la théorie des revêtements, application dont la preuve contient en germes les idées de Atiyah conduisant aux nombres de Betti l^2 dans le cas d'un revêtement galoisien fini.

On appellera **tour de sous-groupes d'indices finis** de Γ toute suite décroissante $(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de sous-groupes d'indices finis de Γ telle que $\Gamma_0 = \Gamma$. Il lui correspond
- la tour de revêtements $L \to \cdots \Gamma_{i+1}\backslash L \to \Gamma_i\backslash L \to \Gamma_{i-1}\backslash L \to \cdots \to \Gamma_0\backslash L$
- en chaque dimension n, la suite des nombres de Betti usuels $(b_n(\Gamma_i\backslash L))_{i\in\mathbb{N}}$.

Si les sous-groupes Γ_i sont de plus d'intersection triviale ($\cap_{i\geqslant 0}\Gamma_i = \{e\}$), alors la tour de revêtements $(\Gamma_i\backslash L)_i$ "semble converger" vers le revêtement L, et on cherche à comprendre le comportement asymptotique de la suite des nombres de Betti usuels, ou plus précisément au vu de la formule (2.1), de ces nombres normalisés : $(\frac{b_n(\Gamma_i\backslash L)}{[\Gamma:\Gamma_i]})_{i\in\mathbb{N}}$. Un argument fort en faveur de cette normalisation est que la caractéristique d'Euler, ainsi normalisée est constante dans une tour de revêtements.

Kazhdan, dans une étude sur les variétés arithmétiques [64] a essentiellement obtenu la comparaison suivante, lorsque les sous-groupes d'indices finis Γ_i sont de plus **normaux** et d'intersection triviale :
(Inégalité de Kazhdan)

$$\limsup_{i\to\infty} \frac{b_n(\Gamma_i\backslash L)}{[\Gamma:\Gamma_i]} \leqslant b_n^{(2)}(L,\Gamma). \tag{2.2}$$

Dans [43] DeGeorge et Wallach, dans le cas des revêtements d'une variété localement symétrique de type non compacte, majorent la multiplicité $n_{\Gamma_i}(\pi)$. Ils retrouvent en particulier l'inégalité de Kazhdan dans ce contexte et donc que si L est un espace symétrique de type non compact G/K, $b_n(\Gamma_i\backslash L)/[\Gamma:\Gamma_i] \to 0$ quand $i\to+\infty$ et $n \neq d_G/2$.

Gromov [54, p.13, p.153] est ensuite amené à poser la question : l'inégalité ci-dessus est-elle une égalité ? En 1994, Lück, dans un article remarqué démontre ce résultat.

Théorème 2.15 (Lück [81])**.** *Soit $(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une tour de sous-groupes d'indices finis de Γ. Si les sous-groupes Γ_i sont de plus normaux dans Γ et d'intersection triviale, alors*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{b_n(\Gamma_i\backslash L)}{[\Gamma:\Gamma_i]} = b_n^{(2)}(L,\Gamma). \tag{2.3}$$

Observons que dans l'énoncé original de l'article [81], le complexe simplicial L est supposé simplement connexe, mais que cette hypothèse est superflue. Du coup, on peut aussi supprimer l'hypothèse de trivialité de l'intersection des Γ_i, à condition de remplacer alors dans la conclusion, et seulement dans le terme de droite, le groupe Γ par le quotient $\overline{\Gamma} := \Gamma/\cap_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$ et L par $\overline{L} := \cap_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i\backslash L$.

Alors que le membre de gauche de (2.1) repose sur l'existence d'une action de $\Lambda\backslash\Gamma$ et donc sur le fait que Λ est distingué dans Γ, le membre de droite a un sens même lorsque Λ n'est pas distingué dans Γ. Une généralisation du Théorème de Lück à des revêtements non galoisiens a néanmoins été proposée par Farber, qui est amené à introduire une hypothèse d'apparence technique.

Critère de Farber. *Soit n_i le nombre de sous-groupes distincts de Γ qui sont conjugués à Γ_i et, pour chaque $g \in \Gamma$, soit $n_i(g)$ le nombre de ceux-là qui contiennent g.*

$$\forall g \in \Gamma \setminus \{e\}, \lim_{i\to\infty} \frac{n_i(g)}{n_i} = 0. \tag{2.4}$$

Théorème 2.16 (Farber [49])**.** *Soit $(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une tour de sous-groupes d'indices finis de Γ d'intersection triviale. Si le critère (2.4) est vérifié, alors*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{b_n(\Gamma_i\backslash L)}{[\Gamma : \Gamma_i]} = b_n^{(2)}(L, \Gamma).$$

Observons que ce critère entraîne que Γ est résiduellement fini.

Au vu de la construction de nos tours d'effeuillages, il est naturel de se demander si pour des tours plus générales (où le critère de Farber n'est pas satisfait) la conclusion est mise en défaut. Dans [13] avec Damien Gaboriau nous présentons de tels exemples où même l'inégalité de Kazhdan (2.2) se trouve violée. Voici par exemple une spécialisation de [13, Théorème 4.1].

Soit A un complexe simplicial compact de groupe fondamental infini et résiduellement fini. Soient K un complexe obtenu en lui attachant un cercle par un point, $\Gamma \simeq \pi_1(A) * \mathbb{Z}$ le groupe fondamental et $L = \widetilde{K}$ le revêtement universel de K.

Théorème 2.17. *Pour tout $\mu_0 \in [0, 1[$, il existe une tour $(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de sous-groupes d'indices finis de Γ, d'intersection triviale, telle que, Γ_{i+1} est normal dans Γ_i*
et pour $n \geqslant 2$, $\lim_{i\to\infty} \frac{b_n(\Gamma_i\backslash L)}{[\Gamma:\Gamma_i]} = \mu_0 b_n(\Gamma\backslash L) + (1-\mu_0) b_n^{(2)}(L,\Gamma)$,
et pour $n = 1$, $\lim_{i\to\infty} \frac{b_1(\Gamma_i\backslash L)}{[\Gamma:\Gamma_i]} = \mu_0 b_1(\Gamma\backslash L) + (1-\mu_0) b_1^{(2)}(L,\Gamma) - \mu_0$.

Rappelons que $b_1(\Gamma\backslash L) = 1 + b_1(A)$ et $b_1^{(2)}(L,\Gamma) = 1 + b_1^{(2)}(\widetilde{A}, \pi_1(A))$, et que $b_n(\Gamma\backslash L) = b_n(A)$ et $b_n^{(2)}(L,\Gamma) = b_n^{(2)}(\widetilde{A}, \pi_1(A))$, pour $n \geqslant 2$. Du coup, tout complexe A pour lequel $b_n(A) \neq b_n^{(2)}(\widetilde{A}, \pi_1(A))$ $(n \geqslant 2)$ conduit à un contre-exemple.

Par exemple, pour construire des exemples qui ne vérifient pas l'inégalité de Kazhdan, on prend pour A le tore $\mathbb{T}^p$ de dimension p, alors L est contractile, $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^p * \mathbb{Z}$, $b_1(\Gamma\backslash L) = p + 1$, $b_1^{(2)}(L,\Gamma) = 1$ et, pour $n \geqslant 2$, $b_n(\Gamma\backslash L) = C_p^n$ tandis que tous les $b_n^{(2)}(L,\Gamma)$ sont nuls.

Cet énoncé permet également de produire des exemples où cette fois l'inégalité de Kazhdan se trouve fortement vérifiée (avec une inégalité stricte). Prenons A homéomorphe à une variété M de dimension 4 compacte acyclique à $b_1(M) = 0$ et groupe fondamental résiduellement fini (on

peut penser à un *faux* $\mathbb{C}P^2$ ou $\mathbb{C}P^2$ d'homologie [90] ; $\pi_1(M)$ est alors un réseau de $SU(2,1)$). On a alors : $b_2^{(2)}(L,\Gamma) > b_2(\Gamma\backslash L)$. En effet, par dualité de Poincaré, $b_4 = b_0 = 1$, $b_1 = b_3 = 0 = b_4^{(2)} = b_0^{(2)}$ et $b_1^{(2)} = b_3^{(2)}$ et donc $b_2(A) + 2 = \chi(A) = \chi^{(2)}(\widetilde{A}, \pi_1(A)) = b_2^{(2)}(\widetilde{A}, \pi_1(A)) - 2b_1^{(2)}(\widetilde{A}, \pi_1(A))$.
Si l'on se contente d'un exemple avec n=1, une égalité $b_1(A)$=$b_1^{(2)}(\widetilde{A}, \pi_1(A))$ suffit, qu'on peut obtenir avec une sphère d'homologie A ($b_1 = 0$) de dimension 3 et hyperbolique ($b_1^{(2)} = 0$). C'est encore plus simple si l'on se satisfait d'exemples non acycliques ou avec de la torsion.

Après ces préliminaires, voici le premier résultat général que nous obtenons dans [13] avec des sous-groupes non nécessairement normaux. On ne connait pas d'autre preuve de cet énoncé. La suite considérée n'est, en général, ni monotone, ni sous-additive.

Théorème 2.18. *Soit* $(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *une tour de sous-groupes d'indices finis de* Γ*. Pour tout entier* n*, la suite des nombres de Betti usuels normalisés* $(\frac{b_n(\Gamma_i\backslash L)}{[\Gamma:\Gamma_i]})_{i\in\mathbb{N}}$ *est convergente.*

Plus précisément, nous donnons une interprétation "dynamico-géométrique" de cette limite et nous montrons en quel sens le critère Farber (2.4) est optimal, ce qui, on l'espère, clarifie sa signification. Pour cela, nous considérons une construction associée à la donnée de la tour de sous-groupes d'indices finis $(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de Γ et de l'action (L,Γ) :

Pour tout entier positif i, on introduit l'espace de probabilité (X_i, μ_i) égal à l'ensemble (fini) des classes (à droite) Γ/Γ_i de Γ modulo Γ_i, que l'on munit de la mesure de comptage normalisée. Les applications de réductions successives $X_{i+1} = \Gamma/\Gamma_{i+1} \to X_i = \Gamma/\Gamma_i$ permettent de considérer l'espace de probabilité *limite projective*

$$(X,\mu) := \mathrm{limproj}_{i\geqslant 0}(X_i,\mu_i).$$

C'est un espace borélien standard. On peut le voir comme le bord (à l'infini) d'un arbre enraciné. C'est aussi un espace topologique homéomorphe à un espace de Cantor (si la suite des indices $[\Gamma : \Gamma_i]$ tend vers l'infini). L'action naturelle de Γ sur les X_i fournit une action de Γ sur (X,μ), préservant la mesure μ. Cela ne dépend que de la tour.

L'action diagonale de Γ sur $X \times L$ donne par passage au quotient une lamination transversalement mesurée qu'on appelle une (L,Γ)-*lamination* :

$$\mathcal{L}(X,L,\Gamma) := \Gamma\backslash(X \times L).$$

Ses feuilles en sont les composantes connexes par arcs (lorsque L est connexe). Chacune est isomorphe au quotient de L par le stabilisateur d'un point de l'action (X,Γ).

Les nombres de Betti l^2 d'une telle lamination (pour la mesure transverse provenant de μ) ont été considérés par Gaboriau [52], notons-les

$\beta_n(X, L, \Gamma)$. On peut les voir comme une version simpliciale des nombres de Betti des feuilletages de Connes.

On est alors capable de donner un sens, en termes de laminations, au membre de gauche "$b_n^{(2)}(\Lambda \backslash L, \Lambda \backslash \Gamma)$" de l'égalité (2.1) même lorsque Λ n'est pas normal : $\beta_n(\Gamma/\Lambda, L, \Gamma)$. Et cette égalité reste valide. Plus généralement, nous obtenons le résultat suivant, qui est central dans [13].

Théorème 2.19. *Soit $(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une tour de sous-groupes d'indices finis de Γ. Pour tout entier n,*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{b_n(\Gamma_i \backslash L)}{[\Gamma : \Gamma_i]} = \beta_n(X, L, \Gamma).$$

où $\beta_n(X, L, \Gamma)$ est comme ci-dessus.

On dit que l'action (X, μ, Γ) est *libre* si l'élément neutre est le seul élément de Γ à avoir un ensemble de points fixes de mesure non nulle. On a alors :

Théorème 2.20. [52, Th. 3.11] *Si l'action (X, μ, Γ) est libre, alors*

$$\beta_n(X, L, \Gamma) = b_n^{(2)}(L, \Gamma).$$

Si les Γ_i sont normaux dans Γ et d'intersection triviale, alors X hérite d'une structure de groupe (profini), Γ est un sous-groupe et son action est par multiplication à gauche dans X. Elle est alors libre et le Théorème 2.19 se spécialise en le Théorème de Lück. Quant au critère de Farber (2.4), il signifie précisément que l'action est libre. En effet,

Proposition 2.2. *Dans (X, μ, Γ), l'ensemble des points fixes de $g \in \Gamma$ est de mesure exactement $\lim_{i\to\infty} \frac{n_i(g)}{n_i}$.*

On doit observer que ni le Théorème de Farber, ni notre Théorème 2.19 ne fournissent une *nouvelle* preuve du Théorème de Lück, puisque dans un cas comme dans l'autre, il s'agit d'adapter les arguments de [81].

Actions boréliennes non libres. Le Théorème 2.19 décrit les limites possibles des nombres de Betti normalisés dans les tours des revêtements finis. Un contrôle sur la combinatoire des tours de revêtements finis est donc imposé par l'action (X, Γ) et la (L, Γ)-lamination associée. Il est naturel de chercher à comprendre ces actions par exemple dans le cas de nos tours d'effeuillages. Nous ne savons pas calculer les limites possibles dans le cas des tours d'effeuillages. Dans [13] nous obtenons néanmoins des restrictions sur les stabilisateurs des points pour des actions non libres (X, μ, Γ), préservant la mesure, d'un groupe dénombrable Γ sur un borélien standard de probabilité.

Les nombres de Betti l^2 de (L, Γ) sont des invariants homotopiques, si bien que lorsque L est p-connexe, les nombres de Betti l^2 de l'action

$b_n^{(2)}(L, \Gamma)$, pour $n \leqslant p$ deviennent des invariants du groupe Γ lui-même. On les appelle alors les nombres de Betti l^2 de Γ et on les note $b_n^{(2)}(\Gamma)$. Plus généralement, J. Cheeger et M. Gromov [32] ont introduit les nombres de Betti l^2 pour tous les groupes dénombrables discrets, même ceux ne possédant pas de $K(\Gamma, 1)$ à p-squelette fini. Dans [13], nous démontrons :

Théorème 2.21. *Soit (X, μ, Γ) une action ergodique, préservant la mesure, d'un groupe dénombrable Γ sur un borélien standard de probabilité sans atome. Si $b_1^{(2)}(\Gamma) \neq 0$, alors*
- *ou bien $\Gamma(x)$, le stabilisateur de x dans Γ, est un groupe fini pour μ-presque tout $x \in X$;*
- *ou bien le premier nombre de Betti l^2, $b_1^{(2)}(\Gamma(x))$, est infini pour μ-presque tout $x \in X$.*

Si de plus, la relation induite par l'action de Γ sur X est moyennable, seul le deuxième cas est possible. Tandis que dans le premier cas, pour μ-presque tout x, les sous-groupes $\Gamma(x)$ sont conjugués deux à deux et il sont *presque normaux*, au sens où chacun n'a qu'un nombre fini de conjugués distincts dans Γ.

On l'a dit, ceci ne nous renseigne pas sur les limites possibles des nombres de Betti normalisés dans le cas des tours d'effeuillages. Nous pensons d'ailleurs que de ce point de vue la considération des tours d'effeuillages n'apporte rien et que l'on ne peut donc rien espérer de mieux que le Théorème 2.14. Plutôt que de considérer l'asymptotique des nombres de Betti normalisés, il semble plus fructueux de considérer la norme L^2 normalisée de la (classe de (co-)homologie associée à la) sous-variété totalement géodésique autour de laquelle on effeuille.

Asymptotique de la norme L^2 d'une sous-variété géodésique. Soit M une variété riemannienne complète de dimension n. On dit qu'une forme ω de degré $n-l$ et de carré intégrable est L^2-*duale* à un cycle c de dimension l dans M si pour toute forme fermée α de degré l bornée et de carré intégrable sur M,

$$\int_M \alpha \wedge \omega = \int_c \alpha.$$

On munit alors l'espace $H_l(M)$ de la seminorme suivante :

$$||[F]||_{(2)} = ||\omega||_{L^2(M)},$$

où F est une sous-variété de M représentant une classe $[F] \in H_l(M)$ et ω est la forme harmonique L^2-duale à F dans M.

On peut mesurer la contribution d'une sous-variété totalement géodésique à l'homologie d'une variété hyperbolique à l'aide de la seminorme $||.||_{(2)}$. Dans l'esprit du Théorème de Lück, on s'intéresse dans [10] à l'évolution de cette contribution dans une tour de revêtement. Nous obtenons en particulier le théorème suivant.

Théorème 2.22. *Soit $M = \Gamma \backslash \mathbb{H}^n$ une variété hyperbolique arithmétique. Soit $\{\Gamma_m\}$ la suite des sous-groupes principaux de congruence. On suppose que la variété M contient une sous-variété (immergée) totalement géodésique compacte de codimension* 1

$$F = \Lambda \backslash \mathbb{H}^{n-1} \hookrightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}^n.$$

Alors :

$$F_m = \Lambda_m \backslash \mathbb{H}^{n-1} \hookrightarrow \Gamma_m \backslash \mathbb{H}^n,$$

où $\Lambda_m = \Lambda \cap \Gamma_m$, est une sous-variété totalement géodésique de codimension un dans M_m, plongée pour m suffisamment grand et

$$\frac{||[F_m]||_{(2)}}{\sqrt{vol(F_m)}} \overset{m\infty}{\to} \sqrt{\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n-1}{2})}}.$$

On obtient en particulier une nouvelle démonstration du Théorème 2.1.

La preuve du Théorème 2.22 se déroule en deux parties. Dans la première partie, on construit la forme harmonique L^2-duale à une sous-variété totalement géodésique compacte F dans une variété hyperbolique quelconque M. Lorsque M est compacte cette construction est due à Kudla et Millson [71]. On généralise cette construction dans deux directions : 1) la variété M n'a plus besoin d'être compacte (ce qui répond à une requête de [70]) et, 2) on construit, en fait, la forme harmonique duale dans M à n'importe quel cycle dans F. Il s'agit en gros de prolonger une série de Poincaré comme dans la construction décrite dans le cas des représentations de la série discrète intégrable.

Il nous faut alors étudier la convergence de la suite des normes L^2 des formes harmoniques duales à notre cycle dans M_m. On obtient en particulier une condition spectrale sous laquelle cette suite converge vers la norme L^2 de la forme harmonique duale à notre cycle dans la variété "tube" $\Lambda \backslash \mathbb{H}^n$.

La morale de cette première partie est que l'on peut tirer de certains invariants L^2 de la variété "tube", des informations sur les revêtements finis de M. Ceci correspond un peu au théorème de Lück bien qu'il n'y ait plus dans notre cas de nombre de Betti L^2. Malheureusement, on ne sait exploiter ces informations que sous une hypothèse spectrale technique difficile à vérifier. Nous reviendrons sur celle-ci dans la partie spectrale de ce survol, précisons néanmoins que celle-ci semble avoir de bonnes chances d'être vérifiée lorsque les variétés considérées sont de congruences.

La deuxième partie est, quant à elle, consacrée à démontrer que sous les hypothèses du Théorème 2.22, l'hypothèse spectrale sus-mentionnée est satisfaite. Ceci découle d'un résultat du "type Selberg", dû à Burger et Sarnak [28] sur lequel nous revenons dans la partie spectrale du mémoire.

L'hypothèse de codimension 1 dans le Théorème 2.22 n'est utilisée que pour pouvoir appliquer le résultat de Burger et Sarnak. Nous conjecturons plus généralement le résultat suivant.

Conjecture 2.2. *Soit $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^n$ une variété hyperbolique arithmétique. Soit $\{\Gamma_m\}$ la suite des sous-groupes principaux de congruence. On suppose que la variété M contient une sous-variété (immergée) totalement géodésique compacte de dimension $l \geq n/2$*

$$F = \Lambda\backslash\mathbb{H}^l \hookrightarrow \Gamma\backslash\mathbb{H}^n.$$

Alors :

$$F_m = \Lambda_m\backslash\mathbb{H}^l \hookrightarrow \Gamma_m\backslash\mathbb{H}^n,$$

où $\Lambda_m = \Lambda \cap \Gamma_m$, est une sous-variété totalement géodésique de dimension l dans M_m, plongée pour m suffisamment grand et

$$\frac{||[F_m]||_{(2)}}{\sqrt{vol(F_m)}} \overset{m\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2}{\mathrm{vol}(\mathbb{S}^{n-(l+1)})}\frac{\Gamma(\frac{l+1}{2})}{\Gamma(\frac{n-l}{2})\Gamma(\frac{2l+1-n}{2})}}.$$

Nous verrons que cette méthode peut s'appliquer à des variétés localement symétriques plus générales. Il n'est cependant en général pas facile d'obtenir un équivalent aussi précis. Le cas du groupe $O(2,2) \approx SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$ est à ce titre intéressant, nous le traitons dans [12].

Retenons de ce paragraphe qu'il est plus fructueux de considérer l'asymptotique de la norme L^2 d'une sous-variété totalement géodésique donnée que l'asymptotique des nombres de Betti. Pour étudier ce problème on est amené à comprendre la cohomologie L^2 des variétés limites “effeuillées” M_∞ ($= \Lambda\backslash\mathbb{H}^n$ dans les notations du Théorème 2.22).

Cohomologie L^2 des variétés limites “effeuillées”. Fixons G un groupe de Lie réductif **réel** connexe de type non compact et de centre compact. Soit τ une involution sur G et soit $H \approx G^\tau$ la composante connexe de l'identité du groupe des points fixes de τ. Nous supposons que G est la forme réelle d'un groupe de Lie complexe et notons K un sous-groupe compact maximal τ-stable de G. L'espace symétrique $X_G = G/K$ est de courbure négative. Soit Λ un réseau cocompact de H. Une variété limite “effeuillée” est un quotient $\Lambda\backslash X_G$, nous nous intéressons donc à la cohomologie L^2 d'un tel quotient. Nous notons $M = \Lambda\backslash X_G$ et $F = \Lambda\backslash X_H$.

La variété M est riemannienne et complète. On note $C_0^\infty(\bigwedge^k T^*M)$ (respectivement $L^2(\bigwedge^k T^*M)$, etc...) l'ensemble des k-formes lisses à support compact (respectivement de carré intégrable, etc...) dans M. Le k-ième espace de cohomologie L^2 (réduite) de M est défini par

$$H_2^k(M) = \{\alpha \in L^2(\bigwedge{}^k T^*M) \ : \ d\alpha = 0\}/\overline{dC_0^\infty(\bigwedge{}^{k-1} T^*M)}^{L^2}.$$

Un autre espace très proche souvent considéré est l'espace de cohomologie L^2 non réduite, qui, en degré k, est le quotient de $\{\alpha \in L^2(\bigwedge^k T^*M) \ : \ d\alpha = 0\}$ par $\{d\alpha \ : \ \alpha \in L^2(\bigwedge^{k-1} T^*M),\ d\alpha \in L^2\}$, sans prendre d'adhérence. En général, cohomologie L^2 réduite et non réduite sont différentes. Il y a néanmoins égalité en degré k lorsque 0 n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien Δ sur les formes différentielles de degré k. Dans la suite, "cohomologie L^2" voudra dire "cohomologie L^2 réduite".

Il y a une interprétation de la cohomologie L^2 en termes de formes harmoniques. En effet, notons $\mathcal{H}_2^k$ l'espace des k-formes harmoniques L^2 de M :

$$\mathcal{H}_2^k(M) = \{\alpha \in L^2(\bigwedge{}^k T^*M) \ : \ d\alpha = \delta\alpha = 0\}$$

où δ est l'opérateur défini initialement sur les formes lisses à support compact comme l'adjoint de d. Comme M est complète, $\mathcal{H}_2^*(M)$ est aussi le noyau L^2 du laplacien $\Delta = d\delta + \delta d$. Un fait important est la décomposition de Hodge-de Rham-Kodaira :

$$L^2(\bigwedge{}^k T^*M) = \mathcal{H}_2^k(M) \oplus \overline{dC_0^\infty(\bigwedge{}^{k-1}T^*M)} \oplus \overline{\delta C_0^\infty(\bigwedge{}^{k+1}T^*M)},$$

et de plus,

$$\{\alpha \in L^2(\bigwedge{}^k T^*M) \ : \ d\alpha = 0\} = \mathcal{H}_2^k(M) \oplus \overline{dC_0^\infty(\bigwedge{}^{k-1}T^*M)}.$$

On en déduit que

$$H_2^k(M) \cong \mathcal{H}_2^k(M).$$

Nous noterons $C_0^\infty(\Lambda\backslash G, \bigwedge^* \mathfrak{p}^*)$ l'image de $C^\infty(M, \bigwedge^* T^*M)$ par l'application naturelle consistant à tirée en arrière les formes différentielles. Toute forme harmonique L^2 φ sur M définit donc un élément $\widetilde{\varphi}$ de

$$C_0^\infty(\Lambda\backslash G, \bigwedge{}^*\mathfrak{p}^*) \cong \mathrm{Hom}_K(\bigwedge{}^*\mathfrak{p}, C^\infty(\Lambda\backslash G; \mathbb{C})).$$

La formule de Matsushima se généralise à ce cadre (*cf.* [26]). L'espace $H_2^*(M)$ se décompose en somme directe :

$$H_2^*(M) \quad = \quad \bigoplus_{\pi\in\widehat{G}_0} H_2^*(\pi : M), \tag{2.5}$$

où nous avons noté $H_2^*(\pi : M)$ la π-composante de la cohomologie L^2 de M. Si R est le degré fortement primitif d'une représentation cohomologique $\pi \in \widehat{G}$, l'espace $H_2^R(\pi : M)$ est aussi la partie de la cohomologie L^2 de M qui est représentée par des formes harmoniques dans

$$C_0^\infty(\Lambda\backslash G, \bigwedge{}^R\mathfrak{p}^*)_\delta \tag{2.6}$$

le sous-ensemble de $C_0^\infty(\Lambda\backslash G, \bigwedge^R \mathfrak{p}^*)$ constitué des éléments de la forme $\widetilde{\varphi} = \sum_i \widetilde{\varphi}_i X_i$ avec $\widetilde{\varphi}_i$ dans la composante isotypique $C^\infty(\Lambda\backslash G)_\delta$ de type δ, l'unique K-type minimal de π. Plus généralement, nous notons $H_2^*(M)_\delta$ la partie de la cohomologie L^2 de M représentée par des formes harmoniques dans (2.6). Puisque le laplacien de Hodge-de Rham commute à la projection sur les K-types, on a alors la décomposition

$$H_2^*(M) \quad = \quad \bigoplus_\delta H_2^*(M)_\delta. \tag{2.7}$$

Nous notons δ^* le K-type dual d'un K-type donné δ. La dualité

$$H_2^*(M)_\delta \times H_2^*(M)_{\delta^*} \to \mathbb{C} \tag{2.8}$$

est alors donnée par

$$(\varphi, \psi) \mapsto \int_M \varphi \wedge \psi.$$

D'un autre côté, l'opérateur $*$ de Hodge induit un isomorphisme linéaire

$$H_2^*(M)_\delta \xrightarrow{*} H_2^{d_G - *}(M)_{\delta^*}. \tag{2.9}$$

On en déduit un produit scalaire sur $H_2^*(M)_\delta$

$$(\varphi_1, \varphi_2) \mapsto \int_M \varphi_1 \wedge *\varphi_2.$$

Il s'agit de comprendre la cohomologie L^2 de M en termes de la cohomologie (usuelle) de $F = \Lambda \backslash X_H$. Remarquons que F est naturellement plongée dans M, par dualité elle définit une classe "(L^2-)duale" $[F] \in H_2^{d_G - d_H}(M)$ (qui peut être nulle a priori). Dans [18] nous déduisons (presque immédiatement) des travaux de Tong et Wang [110] le théorème suivant.

Théorème 2.23. *La classe $[F] \in H_2^{d_G - d_H}(M)$ est non nulle si et seulement si* $\mathrm{rang}_{\mathbb{C}}(G/H) = \mathrm{rang}_{\mathbb{C}}(K/(K \cap H))$.

Lorsque M est hyperbolique réelle ou complexe, le Théorème 2.23 se spécialise en : la classe $[F] \in H_2^{d_G - d_H}(M)$ est non nulle si et seulement si $d_H \geq d_G/2$ (c'est exactement la raison de la condition $l \geq n/2$ dans la Conjecture 2.2). La topologie de ces variétés limites est toute concentrée dans le coeur F, dans le cas hyperbolique (réel ou complexe) on peut être beaucoup plus précis dans le calcul de la cohomologie L^2. Il découle ainsi des travaux [87] de Mazzeo et Philips le théorème suivant.

Théorème 2.24. *Si M est hyperbolique réelle de dimension n et F de codimension d, on a pour $0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ l'isomorphisme naturel suivant :*

$$H_2^k(M) \cong H^{k-d}(F).$$

Si de plus n est pair, l'espace $H_2^{n/2}(M)$ est de dimension infini et l'application naturelle $H^{n/2-d}(F) \to H_2^{n/2}(M)$ est injective.

Alors que dans [16] avec Clozel, nous démontrons le théorème suivant.

Théorème 2.25. *Si M et F sont hyperboliques complexes de dimensions complexes respectives n et $n-d$, on a pour $0 \leq k < n$ l'isomorphisme naturel suivant :*

$$H_2^k(M) \cong H^{k-2d}(F).$$

Alors que l'espace $H_2^n(M)$ est de dimension infini et que l'application naturelle $H^{n-2d}(F) \to H_2^n(M)$ est injective.

Dans [16] nous déduisons ce Théorème (en fait une généralisation de ce Théorème au groupe $U(p,q)$ sur laquelle nous revenons plus loin) de travaux d'Ohsawa et Takegoshi [92]. Le Théorème 2.25 peut maintenant être démontré plus directement, *cf.* Yeganefar [119].

Enfin, remarquons que Mazzeo et Philips démontrent bien plus que le Théorème 2.24 puisqu'ils identifient (en termes topologiques) la cohomologie L^2 d'une variété hyperbolique réelle géométriquement finie. Concluons d'ailleurs par une description de la cohomologie L^2 des variétés hyperboliques réelles ou complexes de volume fini qui découle donc de [87] et des travaux de Zucker [123]. (On peut maintenant lire une démonstration de ce théorème en courbure variable dans [120].)

Théorème 2.26. *Soit M une variété hyperbolique (réelle ou complexe) de dimension (réelle) n et de volume fini. Pour tout entier $0 \leq k < (n-1)/2$, on a alors l'isomorphisme naturel suivant :*

$$H_2^k(M) \cong H^k(M).$$

Si de plus M est hyperbolique réelle et $(n-1)/2 \leq k \leq (n+1)/2$, alors on a $H_2^k(M) \cong \mathrm{im}(H_c^k(M) \to H^k(M))$, où $H_c^*(M)$ désigne la cohomologie à support compact de M.

Les Théorèmes 2.24 et 2.25 décrivent les liens entre la cohomologie de F et la cohomologie (L^2) de la variété limite. On peut y penser comme à des théorèmes locaux qu'il faut maintenant globaliser pour relever des classes de cohomologie d'une sous-variété totalement géodésique à la variété ambiante. Avant de procéder à cela nous décrivons d'autres résultats locaux ayant traits à la restriction (ou au cup-produit) de classes de cohomologies.

2.4 Restriction

Le problème local mentionné ci-dessus est la possibilté pour la restriction d'une représentation cohomologique de G à un sous-groupe H de contenir (discrètement) une représentation cohomologique. Ce problème a été étudié par différents auteurs citons notamment les travaux de Kobayashi [67], Harris et Li [56] et mon article [11]. Plaçons-nous tout d'abord dans un cadre général.

Restriction et séries discrètes. Soit G un groupe de Lie (réel) réductif connexe à centre compact et avec un sous-groupe de Cartan compact. Le groupe G possède alors une série discrète. Commençons par étudier le problème de la restriction des représentations de la série discrète de G à un sous-groupe de G. Soit donc H un sous-groupe réductif connexe fermé dans G. Supposons que l'intersection $K^H = K \cap H$ d'un sous-groupe compact maximal K de G soit encore un sous-groupe compact maximal dans H. Le théorème suivant se déduit immédiatement (*cf.* [18]) des travaux de Li [75] et de Harris et Li, en particulier de [56, Proposition 1.2.3].

Théorème 2.27. *Soit ρ une représentation unitaire irréductible de la série discrète de G de plus bas K-type τ. Soit π une représentation de la série discrète de H de plus bas K^H-type σ. Supposons que le K^H-type σ intervienne dans la restriction de τ à K^H. Alors, la représentation π est équivalente à une sous-représentation irréductible de $\rho_{|H}$.*

Restriction de représentations cohomologiques. Le problème analogue dans le cas de représentations cohomologiques est en général plus délicat, il peut néanmoins être ramené au Théorème 2.27 dans un grand nombre de cas à l'aide de la correspondance thêta L^2 locale. Commençons par quelques rappels à ce sujet.

Soit (G, G') une paire réductive duale irréductible de type I dans le groupe symplectique $Sp = Sp_{2n}(\mathbb{R})$ (nous renvoyons à l'article [58] de Howe pour plus de précisions concernant cette terminologie). Soit $\widetilde{Sp}$ le revêtement métaplectique à deux feuillet de Sp. Étant donné un sous-groupe E de Sp nous notons $\widetilde{E}$ son image inverse dans $\widetilde{Sp}$. Dans [75], Li étudie la correspondance thêta locale entre les représentations de la série discrète de $\widetilde{G}'$ et les représentations cohomologiques unitaires de $\widetilde{G}$. Nous exploitons maintenant les résultats (et méthodes) de Li pour faire correspondre au Théorème 2.27 un théorème sur la restriction des représentations cohomologiques.

Rappelons (*cf.* [58]) qu'une paire duale irréductible de type I est construite comme suit. Soit D l'une des trois algèbres à division sur $\mathbb{R}$ (D est donc égal à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, l'algèbre des quaternions), munie de son involution standard $*$. (L'involution $*$ est donc triviale dans le premier cas et est la conjugaison complexe (resp. quaternionique) dans les deux derniers cas.) Soient V et V' deux espaces vectoriels de dimension finie sur D équipés de deux formes $*$-sesquilinéaires non dégénérées $(.,.)$ et $(.,.)'$, l'une $*$-hermitienne et l'autre $*$-anti-hermitienne. Soient G et G' les groupes d'isométries respectifs de $(.,.)$ et $(.,.)'$. Alors (G, G') est une paire duale irréductible dans $Sp = Sp_{2n}(\mathbb{R})$, où

$$2n = \dim_{\mathbb{R}}(D)(\dim_D V)(\dim_D V').$$

Nous supposerons toujours que la "taille" de G' est inférieure à celle de G, à savoir que

$$\dim_D V \geq \dim_D V'. \tag{2.10}$$

Nous notons enfin

$$G_1 = \begin{cases} SO(p,q) & \text{si } G = O(p,q) \\ SU(p,q) & \text{si } G = U(p,q) \\ G & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.11}$$

Considérons maintenant $A_{\mathfrak{q}}$ une représentation cohomologique de G_1 associée à une sous-algèbre parabolique θ-stable $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ du complexifié $\mathfrak{g}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ de G_1. Posons $\mathfrak{l}^0 = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{g}_0$. Nous considérons dans cette section les représentations cohomologiques $A_{\mathfrak{q}}$ vérifiant la condition

$$\mathfrak{l}^0 \cong \mathfrak{l}'_0 \oplus \mathfrak{g}_0^1, \tag{2.12}$$

où $\mathfrak{l}'_0$ est une algèbre de Lie compacte et $\mathfrak{g}_0^1$ est du "même type" que $\mathfrak{g}_0$, c'est à dire isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe des isométries de $(.,.)_{|V^1}$, où V^1 est un sous-espace non dégénéré de V.

D'après [75, Theorem 6.2], il existe une représentation π' de la série discrète de $\widetilde{G}'$ telle que π' admette un relevé thêta non trivial au groupe $\widetilde{G}$: π, dont la restriction au sous-groupe $G_1 \subset \widetilde{G}$ soit précisemment la représentation $A_{\mathfrak{q}}$.

Précisons un peu ce résultat en supposant G non compact. Soit $(\omega, \mathcal{Y})$ la représentation de Weil du groupe $\widetilde{Sp}$ munie de sa structure unitaire. L'un des deux groupes G, G' est de type hermitien nous supposerons que c'est le cas de G'. Soient K et K' deux sous-groupes compacts maximaux respectifs de G et G' et $M' \supset G'$ le centralisateur de K dans Sp. Puisque G n'est pas compact, $M' \cong G' \times G'$ et (K, M') forme une paire duale dans Sp. Et puisque K est compact, il est bien connu que comme représentation unitaire dans l'espace de Hilbert $\mathcal{Y}$, la restriction de ω à $\widetilde{K} \cdot \widetilde{M}'$ se décompose en une somme directe $\sum_i \sigma_i \otimes \rho_i$ de représentations unitaires irréductibles de $\widetilde{K} \cdot \widetilde{M}'$. La correspondance thêta est alors $\sigma_i \leftrightarrow \rho_i$. Cette correspondance est connue et explicitée dans [75], chaque ρ_i ainsi obtenue est une représentation unitaire de plus haut poids de M'. Soit σ le plus bas $\widetilde{K}$-type de la représentation π. La représentation σ intervient dans la correspondance duale avec M'. Notons $\sigma \otimes \rho'$ le facteur direct correspondant dans la décomposition en irréductibles de la restriction de ω à $\widetilde{K} \cdot \widetilde{M}'$. Soit τ' le plus bas K-type de ρ', vue comme représentation de $\widetilde{K}' \times \widetilde{K}'$, $\tau' = \sigma_1 \otimes \sigma_2$. La restriction de τ' à la diagonale $\widetilde{K}' \subset \widetilde{K}' \times \widetilde{K}'$ contient un facteur irréductible σ' dont le plus haut poids est égal à la somme des plus hauts poids de σ_1 et σ_2. La représentation σ' est précisemment le plus bas $\widetilde{K}'$-type de π'.

Suivant Kudla [69], nous dirons que deux paires réductives duales irréductibles et de type I (H, H') et (G, G') dans le groupe symplectique Sp sont en *balance* ("see-saw") si $H \subset G$ et (donc) $G' \subset H'$. Considérons deux telles paires en balance, ce que nous représentons par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & & H' \\ | & \times & | \\ H & & G' \end{array}$$

Mettons d'abord en balance la paire (G, G') et la paire (K, M'). Puisque K est compact, la correspondance de Howe L^2 est classique pour la paire (K, M'), autrement dit la représentation $\sigma \otimes \rho'$ de $\widetilde{K} \cdot \widetilde{M}'$ est équivalente à une sous-représentation irréductible de la restriction de ω à $\widetilde{K} \cdot \widetilde{M}'$. En particulier la représentation ρ' de $\widetilde{M}'$ est équivalente à une sous-représentation irréductible de la restriction de ω à $\widetilde{M}'$. Une généralisation due à Li [75, Theorem 4.1] du Théorème 2.27 implique (puisque 1) ρ' est une représentation unitaire de plus haut poids et 2) la restriction de ω à $\widetilde{G}'$ est fortement $L^{2+\varepsilon}$) que la représentation π' de $\widetilde{G}'$ est équivalente à une sous-représentation irréductible de la restriction de ρ' et donc de ω à $\widetilde{G}'$. La représentation π' intervient donc dans la correspondance de Howe L^2. D'après Howe [60, Theorem 6.1], la représentation $\pi \otimes \pi'$ de $\widetilde{G} \cdot \widetilde{G}'$ est alors équivalente à une sous-représentation irréductible de la restriction de ω à $\widetilde{G} \cdot \widetilde{G}'$ et elle intervient avec multiplicité 1. La composante π-isotypique $\mathcal{Y}(\pi)$ de la représentation unitaire $(\omega, \mathcal{Y})$ est isomorphe à $\pi \otimes \pi'$ et coïncide donc avec la composante π'-isotypique $\mathcal{Y}(\pi')$.

On peut alors appliquer dans ce contexte une idée due à Howe [59]. Étant données deux paires réductives duales irréductibles de type I (H, H') et (G, G') en balance dans le groupe symplectique Sp et $\pi \leftrightarrow \pi'$ (resp. $\sigma \leftrightarrow \sigma'$) des représentations intervenant dans la correspondance de Howe L^2 pour la paire (G, G') (resp. (H, H')). Supposons que la représentation π' de $\widetilde{G}'$ soit équivalente à une sous-représentation irréductible de la restriction de σ' à $\widetilde{G}'$. La composante π'-isotypique de $\mathcal{Y}(\sigma)$ est alors non triviale $= \mathcal{Y}(\sigma \otimes \pi')$. Mais G' et H commutent dans Sp et donc

$$\mathcal{Y}(\pi')(\sigma) = \mathcal{Y}(\sigma \otimes \pi') = \mathcal{Y}(\sigma)(\pi').$$

Puisqu'enfin $\mathcal{Y}(\pi') = \pi \otimes \pi'$, la représentation σ de $\widetilde{H}$ est nécessairement équivalente à une sous-représentation irréductible de la restriction de π à $\widetilde{H}$ et intervient avec la même multiplicité que π' dans σ'.

Revenons maintenant au cas où $G = U(n, 1)$ ou $O(n, 1)$ et supposons que G contient un sous-groupe H tel que $H = U(n-r, 1)$ ou $O(n-r, 1)$, plongé de manière usuelle (stable par l'involution de Cartan) et avec $1 \leq r < n$.

Soient π une représentation unitaire irréductible de G et π' une représentation unitaire irréductible de H. Par définition la multiplicité de π' dans $\pi_{|H}$ est le plus grand entier m tel que $\pi_{|H}$ contienne m sous-espaces irréductibles 2 à 2 orthogonaux sur chacun desquels l'action de H est équivalente à la représentation π'. Soit V l'espace de la représentation π (c'est également l'espace de la représentation $\pi_{|H}$). Soit $V' \subset V$ le plus grand sous-espace sur lequel l'action de H est équivalente à un multiple de π'. Soit $\beta : V \to V'$ la projection orthogonale correspondante. Soit K le sous-groupe compact maximal de G et $K^H = K \cap H$. Notons V_0 (resp. V'_0) le $(\mathfrak{g}, K)$-module ($(\mathfrak{h}, K^H)$-module) constitué des vecteurs K-finis de V (resp. K^H-finis de V'). On a alors une application naturelle

$$H^*(\mathfrak{g}, K; V_0) \to H^*(\mathfrak{h}, K^H; V'_0), \tag{2.13}$$

obtenue en composant

$$\begin{array}{rcl} H^*(\mathfrak{g}, K; V_0) & \to & H^*(\mathfrak{h}, K^H; V_0) \\ & \to & H^*(\mathfrak{h}, K^H; V'_0) \end{array} \tag{2.14}$$

où la première application est obtenue en restreignant de $(\mathfrak{g}, K)$ à $(\mathfrak{h}, K^H)$ et la seconde est induite par la projection $\beta : V_0 \to V'_0$.

Dans [11] (puis dans [18] suivant l'approche décrite ici) nous démontrons les deux théorèmes suivant concernant la restriction des représentations cohomologiques respectivement dans le cas unitaire et dans le cas orthogonal. Suivant l'approche décrite plus haut il suffit de considérer tour à tour les groupes en balance suivants :

$$\begin{array}{c} U(n,1) \\ | \\ U(r) \times U(n-r,1) \end{array} \quad \times \quad \begin{array}{c} U(i,j) \times U(i,j) \\ | \\ U(i,j) \end{array} \qquad (i,j \in \mathbb{N}, i+j \leq n-r)$$

et

$$\begin{array}{c} O(n,1) \\ | \\ O(r) \times O(n-r,1) \end{array} \quad \times \quad \begin{array}{c} Sp(2i,\mathbb{R}) \times Sp(2i,\mathbb{R}) \\ | \\ Sp(2i,\mathbb{R}) \end{array} \qquad (i \in \mathbb{N}, i \leq (n-r)/2).$$

Théorème 2.28. *Soient $H = U(n-r,1) \subset U(n,1) = G$ où l'inclusion est l'inclusion standard et $1 \leq r < n$. Soit (i,j) un couple d'entiers naturels tel que $i+j \leq n$.*

1. *La restriction à H de la représentation cohomologique $\pi_{i,j}$ de G contient (discrètement) une représentation cohomologique de degré fortement primitif $i+j$ si et seulement si $i+j \leq n-r$. Elle contient dans ce cas la représentation cohomologique $\pi^H_{i,j}$ de H avec multiplicité exactement égale à 1.*
2. *Supposons $i+j \leq n-r$. Alors, l'application naturelle en cohomologie*

$$H^{i,j}(\mathfrak{g}, K; \pi_{i,j}) \to H^{i,j}(\mathfrak{h}, K^H; \pi^H_{i,j}) \tag{2.15}$$

est un isomorphisme d'espaces de dimension 1.

Théorème 2.29. *Soient $H = O(n-r,1) \subset O(n,1) = G$ où l'inclusion est l'inclusion standard et $1 \leq r < n$. Soit i un entier naturel $\leq n/2$.*

1. *La restriction à H de la représentation cohomologique $\pi_i^{\pm}$ de G contient (discrètement) une représentation cohomologique de degré fortement primitif i si et seulement si $i \leq (n-r)/2$. Elle contient dans ce cas la représentation cohomologique $\pi_i^{\pm,H}$ de H avec multiplicité exactement égale à 1.*
2. *Supposons $i \leq (n-r)/2$. Alors, l'application naturelle en cohomologie*

$$H^i(\mathfrak{g}, K; \pi_i) \to H^i(\mathfrak{h}, K^H; \pi_i^{\pm,H}) \tag{2.16}$$

est un isomorphisme d'espaces de dimension 1.

Remarque. Le Théorème 2.28 est essentiellement dû à Harris et Li, *cf.* [56, Proposition 1.4.2], leur démonstration utilise la nature hermitienne du groupe $U(n,1)$ ainsi que le rang 1, deux hypothèses superflues. L'approche que l'on suit ici est néanmoins très fortement inspirée du §6 de [56]. D'après une communication personnelle de M. Harris peu après la fin de rédaction de leur article, Harris et Li ont d'ailleurs réalisés que l'on pouvait suivre cette approche (la correspondance thêta duale L^2) pour démontrer le Théorème 2.28.

En considérant maintenant les groupes en balance

$$\begin{array}{c} U(n,1) \\ | \\ O(n,1) \end{array} \times \begin{array}{c} Sp(2i,\mathbb{R}) \\ | \\ U(i) \end{array} \quad (i \in \mathbb{N}, i \leq n/2),$$

$$\begin{array}{c} U(n,1) \times U(n,1) \\ | \\ U(n,1) \end{array} \times \begin{array}{c} U(i+k, j+l) \\ | \\ U(i,j) \times U(k,l) \end{array} \quad (i,j,k,l \in \mathbb{N}, i+j+k+l \leq n)$$

et

$$\begin{array}{c} O(n,1) \times O(n,1) \\ | \\ O(n,1) \end{array} \times \begin{array}{c} Sp(2(k+l),\mathbb{R}) \\ | \\ Sp(2k,\mathbb{R}) \times Sp(2l,\mathbb{R}) \end{array} \quad (k,l \in \mathbb{N}, k+l \leq n/2),$$

on démontre dans [18] les théorèmes suivants.

Théorème 2.30. *Soient $H = O(n,1) \subset U(n,1) = G$ où l'inclusion est l'inclusion standard. Soit (i,j) un couple d'entiers naturels tel que $i+j \leq n$.*

1. *La restriction à H de la représentation cohomologique $\pi_{i,j}$ de G contient (discrètement) une représentation cohomologique de degré fortement primitif $i+j$ si et seulement si i ou $j = 0$ et $i+j \leq n/2$.*

2. *Supposons par exemple $j = 0$ et $i \leq n/2$, la représentation $\pi_{i,0}$ contient alors la représentation cohomologique $\pi_i^{\pm,H}$ de H avec multiplicité exactement égale à 1, et l'application naturelle en cohomologie*

$$H^{i,0}(\mathfrak{g}, K; \pi_{i,0}) \to H^i(\mathfrak{h}, K^H; \pi_i^{\pm,H}) \tag{2.17}$$

est un isomorphisme d'espaces de dimension 1.

Théorème 2.31. *Soient $G = U(n,1)$ et (i,j,k,l) un quadruplet d'entiers naturels tel que $i + j, k + l \leq n$.*

1. *Le produit tensoriel des représentations cohomologiques $\pi_{i,j}$ et $\pi_{k,l}$ de G contient (discrètement) une représentation de degré fortement primitif $i + j + k + l$ si et seulement si la somme $i + j + k + l \leq n$. Il contient dans ce cas la représentation cohomologique $\pi_{i+k,j+l}$ de G avec multiplicité exactement égale à 1.*
2. *Supposons $i + j + k + l \leq n$. Alors, l'application "cup-produit"*

$$H^{i,j}(\mathfrak{g}, K; \pi_{i,j}) \otimes H^{k,l}(\mathfrak{g}, K; \pi_{k,l}) \to H^{i+k,j+l}(\mathfrak{g}, K; \pi_{i+k,j+l}) \tag{2.18}$$

est un isomorphisme d'espaces de dimension 1.

Théorème 2.32. *Soient $G = O(n,1)$ et (k,l) un couple d'entiers naturels $\leq n/2$.*

1. *Le produit tensoriel de deux représentations cohomologiques $\pi_k^{\pm}$ et $\pi_l^{\pm}$ de G contient (discrètement) une représentation de degré fortement primitif $k+l$ si et seulement si la somme $k+l \leq n/2$. Il contient dans ce cas la représentation cohomologique $\pi_{k+l}^{\pm}$ de G avec multiplicité exactement égale à 1.*
2. *Supposons $k + l \leq n/2$. Alors, l'application "cup-produit"*

$$H^k(\mathfrak{g}, K; \pi_k^{\pm}) \otimes H^l(\mathfrak{g}, K; \pi_l^{\pm}) \to H^{k+l}(\mathfrak{g}, K; \pi_{k+l}^{\pm}) \tag{2.19}$$

est un isomorphisme d'espaces de dimension 1.

Remarque. En ce qui concerne la 1-cohomologie le Théorème 2.30 est essentiellement démontré dans [11]. Dans ce cas special A. Valette m'a indiqué la joli preuve qui figure dans cet article, il a par ailleurs de son côté détaillé cette preuve et en a tiré des développements intéressants dans [112].

Si l'on veut tirer des résultats (locaux) de cette section ou de la précédente des résultats (globaux) sur la cohomologie des variétés hyperboliques (réelles ou complexes) il faut les globaliser, c'est ce que nous détaillons dans la section suivante.

2.5 Propriétés de Lefschetz

Dans cette section nous nous intéressons aux variétés de congruence, c'est-à-dire aux quotients (que nous supposons compacts, autrement dit G anisotrope) $\Gamma \backslash X_G$, où $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ est un sous-groupe de congruence. Une fois donnés deux sous-groupes de congruence $\Gamma' \subset \Gamma \subset G(\mathbb{Q})$, on obtient un revêtement fini

$$\Gamma' \backslash X_G \to \Gamma \backslash X_G$$

qui induit un morphisme injectif

$$H^*(\Gamma \backslash X_G) \to H^*(\Gamma' \backslash X_G)$$

en cohomologie. Les groupes de cohomologies $H^*(\Gamma \backslash X_G)$ forment donc un système inductif indexé par les sous-groupes de congruence $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$. En passant à la limite (inductive) on définit

$$H^*(Sh^0 G) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ \Gamma}} H^*(\Gamma \backslash X_G). \tag{2.20}$$

La notation ci-dessus provient de ce que lorsque l'espace X_G est hermitien, on appelle *variété de Shimura* (connexe) l'espace topologique

$$Sh^0 G = \lim_{\substack{\leftarrow \\ \Gamma}} \Gamma \backslash X_G. \tag{2.21}$$

Cet espace est en tout cas toujours bien défini et est un espace topologique dont on peut considérer sa cohomologie de Cĕch et il est démontré dans [101] que celle-ci coïncide avec (2.20). Pour ce qui nous concerne, il sera suffisant de considérer que $H^*(Sh^0 G)$ n'est qu'une notation pour la limite inductive (2.20).

L'application de restriction et son application duale. Soit $H \subset G$ un sous-groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{Q}$. On suppose que

$$H(\mathbb{R}) \cap K_\infty \textit{ est un sous-groupe compact maximal de } H(\mathbb{R}). \tag{2.22}$$

Alors la restriction à H de l'involution de Cartan θ de G est une involution de Cartan de $H(\mathbb{R})$. On a une décomposition correspondante

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{k}_H \oplus \mathfrak{p}_H \tag{2.23}$$

avec $\mathfrak{p}_H = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$.

Considérons maintenant Γ un sous-groupe de congruence sans torsion de $G(\mathbb{Q})$. Le quotient $S(\Gamma) = \Gamma \backslash X_G$ est une variété compacte et quitte à passer à un sous-groupe d'indice fini de Γ, on peut supposer que l'application naturelle $j : S_H(\Gamma \cap H) \to S(\Gamma)$ est injective. En passant à la limite (inductive) sur les Γ, les applications j induisent l'application de restriction

$$\mathrm{res}_H^G : H^*(Sh^0 G) \to H^*(Sh^0 H). \tag{2.24}$$

Pour simplifier la lecture mous utiliserons la notation $Sh^0 H \subset Sh^0 G$ pour résumer que H est un sous-groupe algébrique réductif, connexe, presque simple modulo son centre compact et vérifiant la condition (2.22).

L'application duale à l'application de restriction induite par j

$$H^*(S_H(\Gamma \cap H)) \to H^*(S(\Gamma))$$

induit, en passant à la limite (inductive) sur les Γ, l'application

$$\bigwedge_H^G : H^*(Sh^0 H) \to H^{*+d_G - d_H}(Sh^0 G) \tag{2.25}$$

"cup-produit avec $[Sh^0 H]$" (duale à (2.24)).

Nous aurons besoin de considérer également une modification de l'application de restriction : l'application de restriction virtuelle. Expliquons sa construction. Soit $g \in G(\mathbb{Q})$ et considérons l'application naturelle j_g : $(H(\mathbb{R}) \cap g^{-1}\Gamma g)\backslash X_H \to \Gamma\backslash X_G$. On obtient de cette manière toute une famille, paramètrée par $g \in G(\mathbb{Q})$, de sous-variétés de $\Gamma\backslash X_G$ - les images des applications j_g. En cohomologie celles-ci induisent l'application de *restriction virtuelle*

$$H^*(S(\Gamma)) \to \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^*(S_H(g)),$$

où $S_H(g) = (H(\mathbb{R}) \cap g^{-1}\Gamma g)\backslash X_H$, et l'application de restriction virtuelle est déduite de la famille d'applications (j_g). En passant à la limite (inductive) sur les Γ, l'application de restriction virtuelle induit l'application de *restriction virtuelle* Res_H^G :

$$\mathrm{Res}_H^G : H^*(Sh^0 G) \to \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^*(Sh^0 H). \tag{2.26}$$

Une Conjecture tirée de [11]. Dans [11] nous avons énoncé la conjecture suivante et montré qu'elle pouvait être déduite de conjectures classiques sur le spectre automorphe des groupes semi-simples (Conjectures d'Arthur) sur lesquelles nous revenons dans la partie spectrale du mémoire.

Conjecture 2.3. *Supposons fixées des données $Sh^0 H \subset Sh^0 G$ avec $H = O(k, 1)$ (resp. $U(k, 1)$) et $G = O(n, 1)$ (resp. $U(n, 1)$), où $n \geq k \geq 1$ sont des entiers. Alors,*

1. *pour tout entier $i \leq d_H/2$, l'application de restriction virtuelle*

$$\mathrm{Res}_H^G : H^i(Sh^0G) \to \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^i(Sh^0H)$$

est **injective** *;*

2. *pour tout entier $i \leq d_H - d_G/2$, l'application "cup-produit avec $[Sh^0H]$"*

$$\bigwedge_H^G : H^i(Sh^0H) \to H^{i+d_G-d_H}(Sh^0G)$$

est **injective**.

Cette conjecture renvoie très clairement aux Théorèmes de Lefschetz pour les variétés projectives, le rôle des sections hyperplanes étant joué par les sous-variétés Sh^0H. Dans le cas unitaire il y a plus qu'une analogie : le premier point de la Conjecture 2.3 auparavant conjecturé par Harris et Li [56] et démontré pour $i = 1$ (Oda [91]) et pour $i = 2$ par eux-mêmes, est maintenant un théorème de Venkataramana [113].

Théorème 2.33. *Supposons fixées des données $Sh^0H \subset Sh^0G$ avec $H = U(k,1)$ et $G = U(n,1)$, où $n \geq k \geq 1$ sont des entiers. Alors, pour tout entier $i \leq k$, l'application de restriction virtuelle*

$$\mathrm{Res}_H^G : H^i(Sh^0G) \to \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^i(Sh^0H)$$

est **injective**.

La démonstration consiste à penser à la réunion $\cup_{g \in G(\mathbb{Q})} S_H(g)$ comme à un cycle diffus dans la variété kaehlérienne compacte $S(\Gamma)$ duale à une forme de Kaehler. Le Théorème de Lefschetz fort pour les variétés kaehlérienne s'applique alors et implique le Théorème 2.33.

Il est surprenant que cette propriété "à la Lefschetz" doive encore être vraie dans le cas hyperbolique réel. La raison en est pricipalement que son analogue local est le Théorème 2.29. Le passage de ce Théorème local au premier point de la Conjecture 2.3 est (conjecturalement) rendu possible par un principe général dû à Burger et Sarnak [28]. Celui-ci affirme que si une représentation irréductible unitaire π de G intervient dans la représentation régulière droite $L^2(\Gamma \backslash G)$ pour un certain sous-groupe de congruence $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ et si ρ est une sous-représentation irréductible de la restriction de π à H, alors la représentation ρ est dans l'adhérence de toutes les représentations intervenant dans les représentations régulières droites $L^2(\Lambda \backslash H)$ avec $\Lambda \subset H(\mathbb{Q})$ sous-groupe de congruence. Si de plus ρ est isolée de toutes ces représentations, elle doit nécessairement intervenir dans un $L^2(\Lambda \backslash H)$, en suivant cette remarque précisée tour à tour dans [56] (par Harris et Li) et dans [11] et grâce au Théorème 2.29, il est alors possible de réduire le premier point de la Conjecture 2.3 à une propriété d'isolation pour les représentations cohomologiques. Nous revenons sur celle-ci dans la partie spectrale du texte. Remarquons néanmoins immédiatement que cette approche et le Théorème 2.30 permettent de démontrer le théorème général suivant (*cf.* [11]) indépendamment démontré par Venkataramana.

Théorème 2.34. *Supposons fixées des données $Sh^0H \subset Sh^0G$ avec H et G quelconques. Alors, l'application de restriction virtuelle*

$$\mathrm{Res}_H^G : H^1(Sh^0G) \to \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^1(Sh^0H)$$

est **injective***.*

Des cas particuliers de ce théorème se trouvent dans [96]. Remarquons qu'une variété hyperbolique (réelle) arithmétique de dimension $\neq 3, 7$ est associée à la donnée d'un $\mathbb{Q}$-groupe qui, d'après la classification de Tits des groupes algébriques, peut être plongé (comme $\mathbb{Q}$-sous-groupe) dans un groupe G de type $U(n, 1)$ obtenu, par restriction des scalaires, à partir d'un groupe unitaire sur un corps de nombre totalement réel [5]. Il est alors facile, à l'aide du Théorème 2.34, de réduire la démonstration du Théorème 2.8 (obtenu comme conséquence des travaux de Millson, Li, Li-Millson et Raghunathan-Venkataramana) à celle du Théorème 2.4, plus facile.

En suivant la réduction de [16, §10.2], le Théorème 2.34 implique également immédiatement de nouveaux résultats d'**annulation** du H^1 à partir du Théorème 2.5 :

Corollaire 2.5. *Soit G un groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ obtenu par restriction des scalaires à partir du groupe des unités d'une algèbre centrale simple $B = M_r(D)$ sur une extension quadratique imaginaire E d'un corps de nombre totalement réel, avec D* **algèbre à division** *telle que son rang réduit d sur E ne soit pas une puissance de 2 (par exemple d impair > 1). Alors,*

$$H^1(Sh^0G) = 0.$$

Les analogues locaux du deuxième point de la Conjecture 2.3 sont évidemment les Théorèmes 2.24 et 2.25. Le passage (conjectural) de ces Théorèmes au deuxième point de la Conjecture 2.3 s'inspire de la démonstration du Théorème 2.14 : il s'agit de former des séries de Poincaré à partir des classes de cohomologie L^2 non triviale dans la variété limite effeuillée pour obtenir des classes de cohomologies sur $S(\Gamma)$ puis de montrer que quitte à monter dans la tour d'effeuillage on peut supposer que cette classe est non triviale.

Plusieurs difficultés se présentent : la série de Poincaré ne converge que si la classe de cohomologie L^2 considérée est L^1, ce qui n'arrive jamais pour

[5] Cette remarque est due à Raghunathan et Venkataramana [96].

de la cohomologie à coefficients constants [6], il faut avoir recours à un poids comme dans les travaux de Kudla et Millson [70, 71] puis de Tong et Wang [109] ; mais la série obtenue ne définit plus une forme harmonique, il faut la projeter et il n'est plus immédiat que ce projeté finira par être non nul en montant dans la tour d'effeuillage. Cette dernière difficulté est contournable lorsque l'on sait la représentation cohomologique correspondante isolée.

En suivant cette approche on peut bien évidemment redémontrer le cas le plus simple de la Conjecture 2.3 correspondant au Théorème de Millson, à savoir que quitte à passer à un revêtement fini, une sous-variété totalement géodésique de codimension 1 représente une classe de cohomologie non triviale (ce qui correspond au point 2 de la Conjecture 2.3 avec G et H orthogonaux, $k = n-1$ et $i = 0$). Avec L. Clozel nous démontrons dans [16], un premier cas non trivial de cette Conjecture dans le cas unitaire.

Théorème 2.35. *Supposons fixées des données $Sh^0H \subset Sh^0G$ avec $H = U(n-1,1)$ et $G = U(n,1)$. Alors, l'application "cup-produit avec $[Sh^0H]$"*

$$\bigwedge_H^G : H^1(Sh^0H) \to H^3(Sh^0G)$$

est **injective**.

Remarquons que dans le même esprit les Théorèmes 2.23, 2.30 et 2.32 incitent à conjecturer les résultats suivants (qui eux aussi découleraient donc d'une démonstration des Conjectures d'Arthur).

Conjecture 2.4. *Supposons fixées des données $Sh^0H \subset Sh^0G$ avec $H = O(n,1)$ et $G = U(n,1)$, où n est un entier ≥ 1.*

1. *La projection de la classe $[Sh^0H] \in H^n(Sh^0G)$ dans la partie primitive de la cohomologie est non triviale si et seulement si n est pair.*
2. *Pour tout entier $i \leq n/2$, l'application de restriction virtuelle*

$$\mathrm{Res}_H^G : H^{i,0}(Sh^0G) \to \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^i(Sh^0H)$$

est **injective**.

Conjecture 2.5. *Supposons fixée une donnée Sh^0G avec $G = O(1,n)$. Soient α et β deux classes de cohomologie de degrés respectifs k et l dans $H^*(Sh^0G)$ avec $\mathbf{k+l \leq n/2}$. Il existe alors un élément $g \in G(\mathbb{Q})$ tel que*

$$g(\alpha) \wedge \beta \neq 0.$$

[6] Ceci explique que les résultats de Tong et Wang [110] concernent la cohomologie à coefficients tordus.

Remarque. Lorsque n est pair, il est vrai comme prédit par la Conjecture 2.4, que la classe $[Sh^0H] \in H^n(Sh^0G)$ est non triviale : à un niveau fini on obtient effectivement le plongement $S_H(\Gamma \cap H) \to S(\Gamma)$ d'une variété totalement réelle dans une variété kaehlerienne compacte, la classe d'Euler du fibré normal de $S_H(\Gamma \cap H)$ dans $S(\Gamma)$ est donc envoyée par multiplication par J (structure complexe de $S(\Gamma)$) sur la classe d'Euler du fibré tangent à $S_H(\Gamma \cap H)$ qui est non triviale puisque n est pair.

Dans le cas hyperbolique complexe l'analogue de la Conjecture 2.5 est connue, c'est un théorème de Venkataramana [113] qui se démontre de la même manière que le Théorème 2.33.

Théorème 2.36. *Supposons fixée une donnée Sh^0G avec $G^{\mathrm{nc}} = U(1,n)$. Soient α et β deux classes de cohomologie de degrés respectifs k et l dans $H^*(Sh^0G)$ avec $\mathbf{k}+\mathbf{l} \leq \mathbf{n}$. Il existe alors un élément $g \in G(\mathbb{Q})$ tel que*

$$g(\alpha) \wedge \beta \neq 0.$$

Cycles géométriques et correspondance thêta. Le deuxième point de la Conjecture 2.3 (et donc aussi chaque cas particulier démontré, comme le Théorème 2.35) est une manière de relever certaines classes de cohomologies d'un cycle géométrique à la variété ambiante. Une autre façon de relever des classes de cohomologies est fournie par la théorie de la représentation de Weil et des fonctions thêta pour les paires réductives duales, c'est l'approche suivie par Li dans [76]. Dans une série de papiers Kudla et Millson (*cf.* notamment [70, 71]) d'un côté et Tong et Wang [110] d'un autre, relient dans certaines situations ces deux approches : ils interprètent en effet certains relevés thêta de formes autormorphes de manière géométrique en termes de formes harmoniques duales à des sous-variétés totalement géodésiques. Ceci conduit à des relations intéressantes entre deux types de classes de cohomologies pour les variétés hyperboliques (réelles ou complexes) arithmétiques, et plus généralement pour les variétés arithmétiques associées à des groupes unitaires ou orthogonaux. Si l'on ne s'interesse qu'aux conséquences sur la non-annulation de certaines classes de cohomologie, on peut se référer au survol de Tong [111]. Ceux-ci sont couverts par la méthode générale décrite ici.

Croissance des nombres de Betti. Le Théorème 2.15 implique qu'en degré médian les nombres de Betti des variétés hyperboliques (réelles ou complexes) croissent comme le volume. Il est naturel de chercher à déterminer la croissance de tous les nombres de Betti. Dans le cas hyperbolique réel la conjecture suivante est attribuée par Sarnak et Xue [102] à Gromov (qui était motivé par de la cohomologie L^p). Elle reste complètement ouverte en dehors des cas triviaux $n = 2$ et 3.

Conjecture 2.6. *Soit $S(\Gamma) = \Gamma\backslash\mathbb{H}^n$ une variété hyperbolique compacte de dimension n. Alors, pour tout entier naturel $i \leq (n-1)/2$ et pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une constante C_ε telle que*

$$b_i(S(\Gamma)) \leq C_\varepsilon \mathrm{vol}(S(\Gamma))^{2i/(n-1)+\varepsilon}.$$

Dans [118] Xue en rendant effectif le travail de Millson et Raghunathan montre que la Conjecture 2.6 si vraie n'est pas très loin d'être optimale.

Théorème 2.37. *Soit Γ un réseau arithmétique standard de $O(n,1)$. Pour tout sous-groupe de congruence $\Gamma(p)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que pour presque tout idéal q de p,*

$$b_i(S(\Gamma(q)) \geq C_\varepsilon \mathrm{vol}(S(\Gamma(q)))^{\delta_i - \varepsilon},$$

avec $\delta_i = \frac{(n-1)(n-i)}{(n+1)n} \frac{2i}{n-1}$, pour $i = 1, \dots, [\frac{n-1}{2}]$.

Il serait intéressant de rendre les méthodes ci-dessus effectives pour éventuellement améliorer le Théorème de Xue. D'un autre côté, il semble également intéressant de quantifier la Conjecture 2.5 pour éventuellement y ramener la Conjecture 2.6 (qui en découlerait via le Théorème de Lück si l'on n'avait pas à translater par les opérateurs de Hecke). De la même manière, il est naturel de chercher à déduire d'une quantification du Théorème 2.36 l'analogue suivant de la Conjecture 2.6.

Conjecture 2.7. *Soit $S(\Gamma) = \Gamma\backslash\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ une variété hyperbolique complexe compacte de dimension complexe n. Alors, pour tout entier naturel $i \leq n$ et pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une constante C_ε telle que*

$$b_i(S(\Gamma)) \leq C_\varepsilon \mathrm{vol}(S(\Gamma))^{i/n+\varepsilon}.$$

On renvoie également à l'article [121] de Yeung pour un certain nombre de résultats autour des Conjectures 2.6 et 2.7.

Une méthode (due à Borel et Serre [24, §3.6]) pour minorer la croissance des nombres de Betti dans les revêtements de congruence d'une variété de congruence consiste à minorer la dimension des représentations du groupe de Galois du revêtement correspondant. Plus précisemment, soit $\pi = \pi_\infty \otimes_p \pi_p$ une représentation automorphe (cuspidale) du groupe adèlique $G(\mathbb{A})$ dont la composante archimédienne est cohomologique et non triviale. Soit p tel que $G(\mathbb{Q}_p)$ ne soit pas compact. Alors un argument classique utilisant l'approximation forte montre que la représentation π_p est de dimension infinie (sinon π_∞ serait de dimension finie et donc triviale). Fixons alors $K = \prod_p K_p$ un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$ tel que l'espace des invariants π_f^K soit non nul et $K_p \subset G(\mathbb{Q}_p)$ compact ouvert. Étant donné un entier m suffisamment grand, considérons la suite de sous-groupes compacts $K_m \subset K \subset G(\mathbb{A}_f)$ donné par le produit $K_m = K^p K_p(m)$, où $K^p = K \cap \prod_{l \neq p} G(\mathbb{Q}_l)$ et $K_p(m)$ est le sous-groupe principal de congruence de niveau m, *i.e.* le noyau de la réduction modulo p^m. Soit $\Gamma_m (= \Gamma(p^m)) = G(\mathbb{Q}) \cap K_m$ le sous-groupe de congruence correspondant dans $G(\mathbb{Q})$. Il découle immédiatement de la formule de Matsushima que

$$\dim(H^R(\Gamma_m : \pi_\infty)) \geq \dim(\pi_p^{K_p(m)}).$$

Il s'agit donc de minorer la croissance de ces invariants. Ceci est réalisé par Howe et Harish-Chandra, *cf.* [95]. En utilisant ces idées on peut alors comme Rajan et Venkataramana dans [98] démontrer le théorème suivant.

Théorème 2.38. *Soit G un groupe semi-simple sur $\mathbb{Q}$ dont les points réels forment un groupe non compact. Soit π une représentation irréductible de dimension infinie de $G(\mathbb{R})$ qui intervient discrètement dans $L^2(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ pour un certain sous-groupe de congruence Γ. Fixons un entier premier p tel que $G(\mathbb{Q}_p)$ soit non compact. Soit $\Gamma(p^m)$ le sous-groupe principal de congruence de niveau m dans Γ. Alors, la multiplicité de π dans la partie discrète de $L^2(\Gamma(p^m)\backslash G(\mathbb{R}))$ est minorée par une constante fois p^{mD}, où D est la dimension moitié d'une orbite nilpotente non triviale minimale de la représentation adjointe sur l'algèbre de Lie de G.*

Dans le cas de nos groupes hyperboliques et de leurs représentations cohomologiques, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 2.6. *Soit Γ un réseau arithmétique standard de congruence dans $O(n,1)$ ou $U(n,1)$. Pour presque tout p, il existe deux constantes $c, \alpha > 0$ telles que pour tout sous-groupe principal de congruence de niveau m, $\Gamma(p^m) \subset \Gamma$,*

$$b_i(S(\Gamma(p^m)) \geq c.\mathrm{vol}(S(\Gamma(p^m)))^{\alpha/n},$$

pour $i = 1, \ldots, [\frac{d_G}{2}]$.

Remarquons qu'une minoration des nombres de Betti peut également être obtenue via la méthode du relèvement thêta (utilisée par Li [76] pour démontrer le Théorème 2.7 par exemple) : on les minore par la multiplicité de certaines représentations de la série discrète dans certains "petits groupes" comme $SL(2,\mathbb{R})$ pour le premier nombre de Betti des variétés hyperboliques réelles. Les résultats que l'on obtiendrait ainsi seraient moins bons que le Théorème 2.37, il serait néanmoins intéressant de combiner cette idée avec la démonstration du Corollaire 2.6 pour tenter d'améliorer le Théorème 2.37 et/ou d'obtenir un théorème analogue dans le cas hyperbolique complexe.

3 Spectre automorphe des variétés localement symétriques

Dans cette section nous exposons les extensions plausibles, aux groupes réductifs généraux et aux formes différentielles, de la Conjecture de Selberg relative aux valeurs propres du laplacien opérant sur les courbes modulaires.

Rappelons d'abord la Conjecture de Selberg. Soit $\Gamma(1) = SL(2,\mathbb{Z})$, et $\Gamma \subset \Gamma(1)$ un sous-groupe de congruence. Le spectre **discret** du laplacien Δ dans l'espace des fonctions L^2 sur la surface $S(\Gamma) = \Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ est formé des valeurs propres $\{0, (\lambda_n)_{n\geq 1}\}$ où les $\lambda_n > 0$ sont associées aux formes paraboliques – *cf.* Iwanieč [62, p. 76].

Conjecture 3.1 (Selberg)**.** $\lambda_n \geq \frac{1}{4}$.

Quelques remarques. Il est facile de calculer le spectre (continu !) de Δ dans $L^2(\mathbb{H}^2)$: il est égal à $[\frac{1}{4}, +\infty[$. La conjecture est donc que le spectre pour les formes paraboliques est contenu dans le spectre limite. Par ailleurs l'estimée $\lambda_n \geq \frac{1}{4}$ est en général fausse si $\Gamma \subset \Gamma(1)$ est un sous-groupe, même arithmétique, qui n'est pas de congruence.

Rappelons la minoration connue à la suite des travaux de Kim, Shahidi et Sarnak :

Théorème 3.1 ([66])**.** $\lambda_n \geq \frac{1}{4} - \left(\frac{7}{64}\right)^2$.

Dans [19] nous démontrons par des méthodes élémentaires (suivant une idée de Kazhdan, développée par Sarnak et Xue dans [102]) une minoration uniforme bien moins bonne mais suffisante pour nombre d'applications géométriques.

Considérons plus généralement un groupe simple G défini sur $\mathbb{Q}$. Soit $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ un sous-groupe de congruence. L'analogue de $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ est alors le quotient $S(\Gamma) = \Gamma\backslash X_G$. Soit toujours $\mathcal{E}^k(S(\Gamma))$ l'espace des formes différentielles différentielles lisses de degré k sur $S(\Gamma)$. On sait que

$$\mathcal{E}^k(S(\Gamma)) \cong \mathrm{Hom}_K(\bigwedge{}^k\mathfrak{p}, C^\infty(\Gamma\backslash G)).$$

Supposons d'abord G anisotrope, *i.e.*, $S(\Gamma)$ **compact**. On dispose alors sur $\mathcal{E}^k(S(\Gamma))$ du laplacien de Hodge (positif) Δ, identifié à l'opérateur de Casimir. On peut le considérer comme un opérateur non borné sur l'espace $\mathcal{E}^k_{(2)}(S(\Gamma))$ des formes L^2. Son noyau est composé des formes harmoniques.

En général (si $S(\Gamma)$ n'est pas compact), Δ définit encore un opérateur auto-adjoint dans $\mathcal{E}^k_{(2)}(S(\Gamma))$, dont le noyau est donné par les formes harmoniques [26], mais qui va posséder un spectre continu. Rappelons que l'espace $\mathcal{H}^k_{(2)}$ des formes harmoniques est de dimension finie et **a fortiori** fermé.

Question 3.1. *Fixons $G/\mathbb{Q}$, et $k \in [0, d_G]$. Si Γ parcourt l'ensemble des sous-groupes de congruence de $G(\mathbb{Q})$, existe-t-il une minoration uniforme $\varepsilon(G,k) > 0$ du spectre de Δ dans l'orthogonal de $\mathcal{H}^k_{(2)}(S(\Gamma))$?*

Dans le cas cocompact, on cherche donc une minoration uniforme

$$\lambda \geq \varepsilon(G,k) \tag{3.1}$$

sur les valeurs propres $\neq 0$ du laplacien Δ sur les k-formes. En général on veut que le spectre de Δ dans $(\mathcal{H}^k_{(2)})^\perp$ soit contenu dans $[\varepsilon(G,k), +\infty[$.

3.1 Le cas des fonctions

Nous considérons d'abord le cas où $k = 0$; on s'intéresse donc au spectre du laplacien sur l'espace $L^2_0(S(\Gamma))$ des fonctions d'intégrale nulle sur $S(\Gamma)$, Γ étant un groupe de congruence. Si $G = SL(2)$, une minoration est donnée par le Théorème 3.1 (Selberg avait déjà obtenu la minoration $\lambda_n \geq \frac{3}{16}$). Noter que dans ce cas Δ a aussi un spectre continu, mais l'on sait (inconditionnellement) que celui ci est contenu dans $[\frac{1}{4}, \infty[$: *cf.* [62, p. 112].

Pour des groupes plus généraux, nous nous contenterons en général d'obtenir des résultats qualitatifs, sans préciser la borne ε. Ceci suffit pour les applications géométriques. Néanmoins, il est important de remarquer que les Conjectures d'Arthur sur le spectre automorphe permettent (convenablement interprétées...) d'obtenir pour G donné les valeurs optimales (conjecturales) des bornes inférieures $\varepsilon(G, k)$. Nous allons les préciser, par la suite, pour les groupes associés aux variétés hyperboliques réelles et complexes.

Revenons à un groupe G arbitraire. Pour $k = 0$ et après entre autres travaux ceux de Selberg [104], Jacquet-Langlands [63] et Burger-Sarnak [28], Clozel répond positivement dans [40] à la Question 3.1 en toute généralité. Soit Γ un groupe de congruence, et soit $L^2_0(S(\Gamma))$ l'espace des fonctions d'intégrale nulle, *i.e.*, l'orthogonal de $\mathcal{H}^0_{(2)}(S(\Gamma)) = \mathbb{C}$.

Théorème 3.2. *Fixons $G/\mathbb{Q}$. Il existe alors $\varepsilon = \varepsilon(G) > 0$ tel que le spectre de Δ dans $L^2_0(S(\Gamma))$, pour* **tout** *sous-groupe de congruence Γ relatif à G, soit contenu dans $[\varepsilon, +\infty[$.*

Nous allons esquisser la démonstration [40], puisque les outils de celle-ci sont à la base des résultats que nous décrivons ci-dessous. Notons $L^2_0(\Gamma\backslash G)$ l'espace des fonctions L^2 d'intégrale nulle sur $\Gamma\backslash G$. C'est une représentation de G ; un argument évident montre qu'elle ne contient aucun sous-espace isomorphe à la représentation triviale.

L'action triviale de G sur les constantes correspond à la valeur propre $\lambda = 0$ de Δ. Nous voulons montrer qu'il existe un voisinage fixe ($|\lambda| < \varepsilon$) de 0 ne rencontrant pas le spectre de Δ – même pour Γ variable. En termes de représentations unitaires de G, le Théorème 3.2 se reformule alors de la manière suivante (*cf.* Théorème 1.1) : il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de la représentation triviale dans $\widehat{G}$ tel que, pour tout sous-groupe de congruence Γ, le support de $L^2_0(\Gamma\backslash X)$ soit disjoint de $\mathcal{V}$.

Principe de restriction et démonstration du Théorème 3.2. La démonstration du Théorème 3.2 repose sur une méthode introduite par Burger et Sarnak qui permet de démontrer, pour un groupe G, une propriété telle que le Théorème 3.2 par réduction à un sous-groupe plus petit pour lequel le Théorème est déjà connu.

Nous supposerons le groupe G simple (comme $\mathbb{Q}$-groupe) dans ce paragraphe. On suppose que G n'est pas compact. Si $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ est un sous-groupe de congruence, on peut considérer dans $\widehat{G}$ le support de la représentation $L^2(\Gamma\backslash G)$. On note $\widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$ la clôture dans $\widehat{G}$ de la réunion des supports de $L^2(\Gamma\backslash G)$ quand Γ parcourt tous les sous-groupes de congruence de $G(\mathbb{Q})$. Noter que $\widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$ **dépend donc de la $\mathbb{Q}$-forme** de G.

Soit $H \subset G$ un sous-groupe, défini sur $\mathbb{Q}$, et semi-simple. Les mêmes notions s'appliquent alors à H.

Par ailleurs, si π est une représentation irréductible de G, on peut la restreindre à H et le **support** de $\pi_{|_H}$ dans $\widehat{H}$ est bien défini. Burger et Sarnak [28] démontrent le théorème suivant :

Théorème 3.3 (Burger-Sarnak)**.** *Soient $\pi \in \widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$ et $\tau \in \widehat{H}$. Si τ appartient au support de $\pi_{|_H}$, $\tau \in \widehat{H}_{\mathrm{Aut}}$.*

Puisque la représentation triviale 1_G de G n'apparaît pas dans $L^2_0(\Gamma\backslash X)$, la reformulation du Théorème 3.2 en termes de théorie des représentations équivaut par définition de $\widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$ à :

$$1_G \textbf{ est isolée dans } \widehat{G}_{\mathrm{Aut}}. \tag{3.2}$$

La démonstration du Théorème 3.2 va reposer sur la méthode de Burger et Sarnak. Nous utilisons la forme (3.2) du Théorème. Supposons donné un sous-groupe simple H de G tel que $H(= H(\mathbb{R}))$ soit non compact et que le Théorème soit vrai pour H. Si celui-ci est faux pour G, on peut trouver une suite $\pi_n \in \widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$ $(\pi_n \ncong 1_G)$ telle que $\pi_n \to 1_G$. Alors la représentation triviale 1_H appartient à l'adhérence de $\bigcup_n \mathrm{Supp}(\pi_{n|_H})$. Mais si la représentation triviale 1_H est isolée dans $\widehat{H}_{\mathrm{Aut}}$, elle est nécessairement contenue discrètement dans $\pi_{n_{|_H}}$ pour $n >> 0$. Ceci est impossible d'après un théorème classique de Howe et Moore [61] si H n'est pas compact.

Nous devons enfin trouver – dans tout groupe $\mathbb{Q}$-simple G – un sous-groupe H pour lequel le Théorème soit déjà connu (et H non compact).

Nous renvoyons le lecteur à [40], puisque cette partie de l'argument n'a rien à voir avec les questions abordées dans ce mémoire.

3.2 Représentations non isolées et réponses négatives à la Question 3.1

Dans ce paragraphe et le suivant nous montrons en quoi les groupes $SU(n,1)$ et $SO(n,1)$ jouent un rôle particulier relativement à ces questions. Nous voulons tout d'abord expliquer que la réponse à la Question 3.1 est négative en général.

Considérons un groupe simple G anisotrope. Soit $\mathcal{H}^i(S(\Gamma))$ l'espace des i-formes harmoniques. D'après le Théorème 1.1, $\mathcal{H}^i(S(\Gamma))$ se décompose en sous-espaces relatifs aux représentations irréductibles cohomologiques π de G telles que $\pi \subset L^2(\Gamma\backslash G)$. Soit $\pi \in \widehat{G}$ une telle représentation. Supposons de plus que π n'est pas isolée dans $\widehat{G}$. Soit donc $\pi_n \in \widehat{G}$ une suite tendant vers π. De manière presque immédiate (*cf.* [16]) on obtient le théorème suivant.

Théorème 3.4. *Soient $\Gamma \subset G$ un sous-groupe de congruence, π une représentation cohomologique de G contenue dans $L^2(\Gamma\backslash G)$ et $\pi_n \to \pi$ dans $\widehat{G}$. Si les représentations π_n appartiennent à $\widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$, la réponse à la Question 3.1 est négative pour les degrés i tels que $H^i(\mathfrak{g}, K; \pi) \neq 0$.*

Pour un groupe donné, l'étude de la Question 3.1 se divise donc en deux questions :

Question 3.2. *Décrire les représentations isolées dans $\widehat{G}$ parmi les représentations cohomologiques.*

Question 3.3. *Pour $G/\mathbb{Q}$ donné, soit $\pi \in \widehat{G}$ une représentation cohomologique non triviale et non isolée. La représentation π est-elle isolée* **dans** *$\widehat{G}_{\mathrm{Aut}} \cup \{\pi\}$?*

Il existe une classe simple de représentations pour lesquelles les deux questions ont une solution négative.

Rappelons que parmi nos groupes "hyperboliques", $SU(n, 1)$ a toujours une série discrète et $SO(n, 1)$ a une série discrète si et seulement si n est **pair** – ainsi, $SO(2, 1) \approx SL(2, \mathbb{R})$ a une série discrète alors que $SO(3, 1) \approx SL(2, \mathbb{C})$ n'en a pas. Une représentation π appartient à la série discrète si, et seulement si, elle apparaît comme sous-module **discret** dans $L^2(G)$. Plus généralement, $\pi \in \widehat{G}$ est **tempérée** si elle appartient au support de $L^2(G)$.

Théorème 3.5 (Borel-Wallach)**.** *Soit $\pi \in \widehat{G}$ une représentation tempérée et supposons que $H^*(\mathfrak{g}, K; \pi) \neq 0$. Alors la cohomologie de π est concentrée dans l'intervalle $]q-e, q+e]$ où $q = d_G/2$ et $e = \frac{1}{2}(\mathrm{rang}_{\mathbb{C}}(G) - \mathrm{rang}_{\mathbb{C}}(K))$. Et réciproquement, chacun des degrés contenus dans $]q-e, q+e]$ apparaît dans $H^*(\mathfrak{g}, K; \pi)$, où π est une représentation cohomologique tempérée.*

Soit maintenant π une représentation vérifiant les conditions du Théorème 3.5 telle que $H^i(\mathfrak{g}, K, V(\pi)) \neq 0$. Alors π est tempérée **et appartient donc au "dual automorphe"** (cela découle du Théorème de Delorme mentionné au §2.3) $\widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$. Si $\pi_n \to \pi$ et π_n apparaît dans la décomposition (continue si G est isotrope) de $L^2(\Gamma_n\backslash G)$ pour un groupe de congruence, la valeur propre associée λ_n de Ω vérifie $\lambda_n \to 0$, et apparaît dans le spectre (peut-être continu) du laplacien Δ. On obtient donc le théorème suivant.

Théorème 3.6. *Soit G arbitraire, et supposons que G n'a pas de série discrète. Alors la réponse à la Question 3.1 est négative pour $i \in]q-e, q+e]$.*

La démonstration a utilisé le Théorème de Delorme mentionné au §2.3. Une autre approche est due à Burger, Li et Sarnak [27] qui montrent que si $H \subset G$ sont deux $\mathbb{Q}$-groupes semi-simples et $\rho \in \widehat{H}_{\mathrm{Aut}}$ alors le support de l'induite $\mathrm{ind}_H^G \rho$ est contenu dans $\widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$. Cet article ne donne pas la démonstration, qui est exposée dans [37]. Pour G isotrope (et $H = \{e\}$, $\rho = 1$), elle implique que π est limite de représentations dans le support de $L^2(\Gamma_n \backslash G)$.

Exemple. Si $G = SO(n,1)$ avec n impair $= 2m+1$, on a $q = \frac{n}{2} = m + \frac{1}{2}$, $e = \frac{1}{2}$, et la cohomologie de π apparaît en degrés $\{m, m+1\}$.

3.3 Contraintes locales et contraintes automorphes

Nous revenons aux deux Questions (3.2 et 3.3) énoncées dans la section précédente et nous allons décrire, en utilisant toute la force de la théorie des représentations, deux cas opposés où elles peuvent être résolues.

La Question 3.2 a en fait été complètement résolue par Vogan, dans un article longtemps clandestin [115]. Sa solution est difficile, dans [20] nous en donnons une démonstration “élémentaire” dans le sens que nous n'utilisons rien de plus que la classification par Vogan et Zuckerman des représentations cohomologiques. La Question 3.3 est encore plus profonde : l'un des buts du livre [16] avec Clozel est d'expliquer comment, pour les groupes associés aux espaces hyperboliques, sa solution est implicitement donnée par les Conjectures d'Arthur.

Voici tout d'abord l'énoncé précis de la solution à la Question 3.2 qui est donc un cas particulier d'un théorème [115, Theorem A.10] de Vogan.

Théorème 3.7. *Soit π une représentation cohomologique comme au §1.3. La représentation π est* **isolée** *dans le dual unitaire de G si et seulement si le couple $(G, \mathfrak{q})$ a les propriétés suivantes.*

1. *Le groupe L n'a aucun facteur simple localement isomorphe à $SO(n,1)$ ou $SU(n,1)$ $(n \geq 1)$.*
2. *Il n'y a pas de racine imaginaire non compacte dans Π orthogonale à $\Pi(\mathfrak{l})$.*

Énonçons simplement deux corollaires (*cf.* [16, 18]) de ce Théorème.

Corollaire 3.1. *Si $G = O(2,n)$ avec $n \geq 3$, et si une représentation cohomologique $A_{\mathfrak{q}}$ n'est pas isolée, la cohomologie de $A_{\mathfrak{q}}$ n'apparaît qu'en degrés $k \geq \left[\frac{n}{2}\right]$. Et si $G = O(p,q)$ avec $p, q \geq 3$, et si une représentation cohomologique $A_{\mathfrak{q}}$ n'est pas isolée, la cohomologie de $A_{\mathfrak{q}}$ n'apparaît qu'en degrés $k \geq p+q-3$.*

Corollaire 3.2. *Si $G = U(p,q)$ avec $p, q \geq 2$, et si $A_{\mathfrak{q}}$ n'est pas isolée, la cohomologie de $A_{\mathfrak{q}}$ n'apparaît qu'en degrés $i \geq p+q-2$.*

Il est clair que ces résultats ne laissent aucun espoir quant à la Question **local** 3.2 pour nos groupes (de rang 1) hyperboliques. En revanche nous allons voir que la Question globale 3.3 devrait dans ce cas admettre une solution positive, d'après les Conjectures d'Arthur.

Paramètres d'Arthur. Soit G un groupe réductif réel, nous noterons ${}^LG$ le groupe dual et $W_{\mathbb{R}}$ le groupe de Weil de $\mathbb{R}$, *cf.* [74, 22, 16].

Un *paramètre d'Arthur* pour G est un homomorphisme

$$\psi : W_{\mathbb{R}} \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to {}^LG \tag{3.3}$$

tel que

(i) Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} W_{\mathbb{R}} & \rightarrow & {}^LG \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) & \end{array}$$

est commutatif.

(ii) La restriction $\psi|_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}$ est holomorphe ($\equiv$ algébrique).

(iii) L'image de $\psi|_{W_{\mathbb{R}}}$ est d'adhérence compacte.

On déduit de ψ un "paramètre de Langlands"

$$\begin{aligned} \varphi_\psi : \quad & W_{\mathbb{R}} \to {}^LG \\ & w \mapsto \psi\left(w, \begin{pmatrix} |w|^{1/2} & 0 \\ 0 & |w|^{-1/2} \end{pmatrix}\right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

où, pour $w \in W_{\mathbb{R}}$, $|w|$ est la valeur absolue de l'image de w dans $\mathbb{R}^\times$.

D'après Langlands [74], le paramètre φ_ψ définit une représentation de la forme intérieure quasi-déployée G^* du groupe G. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Rappelons que le centre de $\mathfrak{Z}$ de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ s'identifie à $S(\mathfrak{h})^W$, W étant le groupe de Weyl $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Puisque les groupes G et G^* ont la même complexification, le paramètre φ_ψ définit un caractère infinitésimal, *i.e.* un élément de $\mathfrak{h}^*/W$ (pour tout choix de $\mathfrak{h}$). Dans [16], nous utilisons alors la formulation très faible suivante des Conjectures d'Arthur :

Conjecture 3.2. *Si une représentation irréductible π de G apparaît (faiblement) dans $L^2(\Gamma\backslash G)$ pour un sous-groupe de congruence, son caractère infinitésimal λ_π est associé à un paramètre d'Arthur φ_ψ.*

Dans le cas de nos groupes hyperboliques, nous montrons dans [16] les deux propositions suivantes.

Proposition 3.1. *Soit π une représentation unitaire irréductible de $G = U(n,1)$ telle que $Hom_K(\bigwedge^p \mathfrak{p}^+ \otimes \bigwedge^q \mathfrak{p}^-, \pi) \neq 0$ dont le caractère infinitésimal est associé à un paramètre d'Arthur. Alors soit la valeur propre λ de l'opérateur de Casimir dans $\mathcal{H}_\pi$ vérifie :*

$$\lambda = [n-a-b]^2 - [n-a-b-2k]^2,$$

pour $a \leq p$, $b \leq q$, $(p-q)-(a-b) \in \{-1,0,1\}$ et $0 \leq k \leq \left[\frac{n-(a+b)}{2}\right]$, soit elle est $> [n-p-q]^2$.

Proposition 3.2. *Soit π une représentation unitaire irréductible de $G = O(n,1)$ telle que $Hom_K(\bigwedge^p \mathfrak{p}, \pi) \neq 0$ dont le caractère infinitésimal est associé à un paramètre d'Arthur. Alors soit la valeur propre λ de l'opérateur de Casimir dans $\mathcal{H}_\pi$ vérifie :*

$$\lambda = \left[\frac{n-1}{2} - p\right]^2 - \left[\frac{n-1}{2} - p - k\right]^2,$$

pour un entier $0 \leq k \leq \left[\frac{n-1}{2} - p\right]$, soit elle est $> \left[\frac{n-1}{2} - p\right]^2$.

La Conjecture 3.2 implique donc en particulier la conjecture suivante.

Conjecture 3.3. *Soit G un groupe $\mathbb{Q}$-algébrique de type hyperbolique.*

1. *Si $G = O(2n,1)$, alors pour tout entier naturel $i \leq n$,*

$$\lambda_1^i(\Gamma \backslash X_G) \geq \max(2n - 2i - 2, \frac{1}{4}) > 0.$$

2. *Si $G = O(2n+1,1)$, alors pour tout entier naturel $i \leq n-1$,*

$$\lambda_1^i(\Gamma \backslash X_G) \geq 2n - 2i - 1 > 0.$$

3. *Si $G = U(n,1)$, alors pour tout entier naturel $i \leq n$,*

$$\lambda_1^i(\Gamma \backslash X_G) \geq \max(4(n-i-1), 1) > 0.$$

Ici λ_1^i désigne la première valeur propre non nulle du laplacien de Hodge sur les formes différentielles de degré i et Γ est un sous-groupe de congruence quelconque de G.

Une version "géométrique" affaiblie de la Conjecture 3.3 fournie une réponse (conjecturale) optimale (d'après le Théorème 3.6) à la Question 3.1 :

Conjecture 3.4. *Soit G comme dans la Conjecture 3.3. Alors, pour tout entier naturel $i \leq \frac{d_G}{2} - 1$ il existe une constante strictement positive $\varepsilon(G,i)$ telle que pour tout sous-groupe de congruence Γ dans G,*

$$\lambda_1^i(\Gamma \backslash X_G) \geq \varepsilon(G,i).$$

La Conjecture 3.3 est bien sûr beaucoup plus précise, elle joue un rôle analogue par rapport à la Conjecture 3.4 à celui que joue la Conjecture de Selberg par rapport à la Conjecture τ (démontrée par Clozel). Nous pensons que la Proposition 3.1 est optimale, a contrario la Proposition 3.2 ne l'est pas, dans [16] nous précisons d'ailleurs celle-ci dans le cas $p = 0$ (spectre sur les fonctions) ce qui nous permet de ramener à la Conjecture 3.2 la conjecture suivante due à Burger et Sarnak.

Conjecture 3.5. *Soit M une variété hyperbolique de congruence de dimension n. Les valeurs propres du laplacien sur les fonctions de M appartiennent à l'ensemble :*

$$\{0, n-2, 2n-6, 3n-12, \dots, (n-1)^2/4\} \cup [(n-1)^2/4, +\infty[.$$

Au vu du Théorème 3.7 nos groupes hyperboliques jouent un rôle particulier par rapport à ces questions, dans [20] nous précisons ce rôle. Nous commençons par énoncer une réponse conjecturale complète à la Question 3.1 :

Conjecture 3.6. *Soit G un groupe semi-simple algébrique sur $\mathbb{Q}$. Soit π une représentation cohomologique comme au §1.3. La représentation π est* **isolée** *dans*

$$\{\pi\} \cup \widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$$

dès que le sous-groupe de Levi $L \subset G$, associé à la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{q}$, a un centre compact. C'est en particulier toujours le cas lorsque $\mathrm{rang}_{\mathbb{C}}(G) = \mathrm{rang}_{\mathbb{C}}(K)$*, autrement dit lorsque G possède une série discrète.*

Nous conjecturons de plus que la Conjecture 3.6 est optimale au sens faible suivant : le type réel de G étant fixé, il devrait exister une $\mathbb{Q}$-forme de G telle que la représentation cohomologique π soit contenue et non-isolée dans $\widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$.

Dans [20], nous ramenons la Conjecture 3.6 aux Conjectures d'Arthur (une version plus générale que la Conjecture 3.3). Nous en réduisons également une grande partie à l'étude des groupes $O(n,1)$ et $U(n,1)$. L'idée est là encore d'utiliser un principe de restriction à la Burger et Sarnak. En ce qui concerne nos groupes hyperboliques un tel principe était déjà démontré dans [16]. Commençons par introduire pour chaque réel strictement positif ε, l'hypothèse H_ε^p sur le groupe G :

$$\mathrm{H}_\varepsilon^p \ : \ \begin{cases} \text{si } \lambda \text{ est dans le } p-\text{spectre automorphe de } G, \text{ alors :} \\ 1. \text{ soit } \lambda = (\rho_G - k)^2 - (\rho_G - i)^2 \text{ avec } k = 0, \dots, p \text{ et } i = \\ k, \dots, [\rho_G], \\ 2. \text{ soit } \lambda \geq (\rho_G - p)^2 - \varepsilon^2. \end{cases}$$

Ici $\rho_G = \frac{d_G - 2 + d}{2}$ avec $d = 1$ dans le cas réel et $d = 2$ dans le cas complexe. Remarquons que les Conjectures d'Arthur prévoient que, pour un groupe G comme ci-dessus, chaque hypothèse H_0^p est vraie pour $p \leq [\rho_G]$. Les hypothèses H_ε^p sont donc des approximations aux Conjectures d'Arthur pour le groupe G. Lorsque ε est suffisamment petit, ces approximations sont en général plus précises que la Conjecture 3.3. Le principe de restriction est alors le suivant :

Théorème 3.8. *Soient $H \subset G$ deux groupes $\mathbb{Q}$-algébriques comme dans la Conjecture 3.3 et du même type. Supposons que H vérifie l'hypothèse H_ε^p pour un certain réel $\varepsilon > 0$ et pour tout entier naturel $p \leq [\rho_H]$.*

Alors le groupe G vérifie les hypothèses $H^p_{\rho_G-\rho_H+\varepsilon}$ pour tout entier naturel $p \leq [\rho_H]$.

Ce principe et le théorème suivant nous permettent dans [16] d'obtenir une première réponse (positive) générale à la Question 3.1 dans le cas $k = 1$ et lorsque $G \approx U(n, 1)$ (*cf.* Théorème 3.10 plus bas).

Théorème 3.9. *Si G est un groupe comme dans la Conjecture 3.3 avec $G = U(2, 1)$, alors la Conjecture 3.4 est vraie pour G, avec $\varepsilon(G, 0) = \frac{84}{25}$ et $\varepsilon(G, 1) = \frac{9}{25}$.*

En fait ce résultat est essentiellement contenu dans l'article [56] de Harris et Li. On en donne une preuve complète dans [16]. Celle-ci utilise la théorie des représentations, il s'agit d'abord d'exploiter les résultats de Rogawski pour relever certaines représentations automorphes de G à des représentations automorphes de $GL(3)$ auxquelles on peut ensuite appliquer une estimée vers la Conjecture de Ramanujan démontrée par Luo, Rudnick et Sarnak [84].

Les Théorèmes 3.8 et 3.9 nous permettent de démontrer dans [16] le théorème suivant.

Théorème 3.10. *Si G est un groupe comme dans la Conjecture A avec $G = U(n, 1)$ (et quelques conditions techniques supplémentaires si $n+1$ est une puissances de 2), alors la Conjecture 3.4 est vérifiée par le groupe G pour $i = 0$ et 1, avec $\varepsilon(G, 0) = 2n - 1$ et $\varepsilon(G, 1) = \frac{10n-11}{25}$.*

Remarquons enfin (*cf.* [11, 18]) que la Conjecture 3.4 (et donc les Conjectures d'Arthur) impliquent les Conjectures 2.3, 2.4 et 2.5.

Existence de valeurs propres exceptionnelles. Nous avons rappelé au §3.2 que, dans [27], Burger, Li et Sarnak montrent que l'induction préserve les duaux automorphes. En particulier le support de la représentation $L^2(H\backslash G)$ (égale à l'induite de H à G de la représentation triviale de G) est contenu dans le dual automorphe de G. À l'aide de la formule de Plancherel pour les espaces hyperboliques, *cf.* Faraut [48], Burger et Sarnak [28] montrent qu'en la supposant vraie, la Conjecture 3.5 est optimale.

Nous exploitons cette même idée dans [7] pour donner un critère géométrique d'existence de petites valeurs propres du laplacien sur les fonctions dans un revêtement fini d'une variété hyperbolique donnée.

Remarquons enfin que la Proposition 3.1 et la Conjecture 3.2 impliquent une conjecture beaucoup plus forte que la Conjecture 3.3 pour tout groupe G du type $U(n, 1)$. Nous pensons que cette conjecture est optimale dans le même sens que la Conjecture de Burger et Sarnak est optimale. La grande différence est que nous considérons cette fois tout le spectre automorphe et non seulement le spectre sur les fonctions. Bien que nous ne sachions pas montrer que cette conjecture est optimale, nous montrons dans [16] le résultat suivant. [7]

Théorème 3.11. *Soit G un groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ obtenu par restriction des scalaires à partir d'un groupe unitaire sur un corps de nombres et tel que $G = U(n,1)$. Soient a, p, q, k des entiers vérifiant*
- $0 \leq a \leq p, q \leq n$;
- $p - q \in \{-1, 0, 1\}$;
- $0 \leq k \leq \left[\frac{n-2a}{2}\right]$.

Alors, le dual automorphe $\widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$ de G contient une représentation unitaire irréductible π de G telle que $\mathrm{Hom}_K(\bigwedge^p \mathfrak{p}^+ \otimes \bigwedge^q \mathfrak{p}^-, \pi) \neq 0$ et dont la valeur propre de l'opérateur de Casimir dans $\mathcal{H}_\pi$ est égale à

$$(n-2a)^2 - (n-2a-2k)^2.$$

Notre Conjecture 3.6 est la réponse (conjecturale) appropriée à la Question 3.1 générale, elle semble à lors actuelle assez inaccessible. Remarquons néanmoins que dans le cas des groupes unitaires $U(p,q)$ nous ramenons celle-ci dans [16] à une conjecture de changement de base – généralisation naturelle du travail de Rogawski [100] pour $U(2,1)$ aux groupes $U(p,q)$. Au vu des récentes avancées de Laumon et Ngô concernant le lemme fondamental pour les groupes unitaires, on peut donc espérer voir la conjecture suivante démontrée dans un futur pas trop éloigné.

Conjecture 3.7. *Si $G = U(p,q)$, la réponse à la Question 3.1 est toujours positive.*

4 Cohomologie des variétés arithmétiques

Les variétés arithmétiques qui nous préoccupent ici sont principalement celles associées à l'un des groupes classiques $O(p,q)$, $U(p,q)$, $Sp(p,q)$, GSp_p ou $O^*(2n)$. Commençons par décrire leurs représentations cohomologiques.

Le cas $G = U(p,q)$. Soient p et q des entiers strictement positifs avec $p \leq q$ et

$$G = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \; : \; {}^t\overline{g} \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix} \right\}, \quad (4.1)$$

où $A \in M_{p\times p}(\mathbb{C})$, $B \in M_{p\times q}(\mathbb{C})$, $C \in M_{q\times p}(\mathbb{C})$ et $D \in M_{q\times q}(\mathbb{C})$. Le rang réel de G est alors p et le sous-groupe

$$K = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \in G \; : \; A \in U(p), \; D \in U(q) \right\}$$

[7] Il est certainement posssible d'obenir un résultat optimal par relèvement thêta à partir de groupes unitaires plus petits.

est un sous-groupe compact maximal dans G.

Rappelons que la multiplication par $i = \sqrt{-1}$ induit une décomposition

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-.$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est bien évidemment $M_{(p+q)\times(p+q)}(\mathbb{C})$, et l'on voit ses éléments sous forme de blocs comme dans (4.1). On a alors,

$$\mathfrak{p}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } B \in M_{p\times q}(\mathbb{C}) \right\}$$

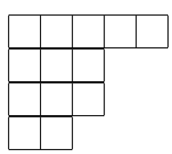
et

$$\mathfrak{p}^- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } C \in M_{q\times p}(\mathbb{C}) \right\}.$$

Soit $E = \mathbb{C}^p$ (resp. $F = \mathbb{C}^q$) la représentation standard de $U(p)$ (resp. $U(q)$). Alors, comme représentation de $K_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{p}^+ = E \otimes F^*$.

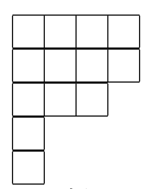
Dans [14] nous avons paramétré les représentations cohomologiques de G par certains couple de partitions. Rappelons qu'une *partition* est une suite décroissante λ d'entiers naturels $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_l \geq 0$. Les entiers $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ sont des *parts*. La *longueur* $l(\lambda)$ désigne le nombre de parts non nulles, et le *poids* $|\lambda|$, la somme des parts. On se soucie peu, d'ordinaire, des parts nulles : on se permet en particulier, le cas échéant, d'en rajouter ou d'en ôter. Le *diagramme de Young* de λ, que l'on notera également λ, s'obtient en superposant, de haut en bas, des lignes dont l'extrémité gauche est sur une même colonne, et de longueurs données par les parts de λ. Par symétrie diagonale, on obtient le diagramme de Young de la *partition conjuguée*, que l'on notera λ^*.

Le diagramme de Young de la partition $\lambda = (5, 3, 3, 2)$ et de sa conjuguée sont donc :



λ

et



λ^*

Soient λ et μ deux partitions telles que le diagramme de μ contienne λ, ce que nous noterons $\lambda \subset \mu$. Notons μ/λ le complémentaire du diagramme de λ dans celui de μ : c'est une *partition gauche* son diagramme est un *diagramme gauche*. Dans la pratique les partitions λ que nous rencontrerons seront incluses dans la *partition rectangulaire* $p \times q = (\underbrace{q, \ldots, q}_{p \text{ fois}}) = (q^p)$, le diagramme gauche $p \times q/\lambda$ est alors le diagramme de Young d'une partition auquel on a appliqué une rotation d'angle π ; nous noterons $\hat{\lambda}$ cette partition, la *partition complémentaire* de λ dans $p \times q$. Par exemple, la partition $\lambda = (5,3,3,2)$ est incluse dans le rectangle 5×5, et dans ce rectangle, $\hat{\lambda} = (5,3,2,2)$.

Nous dirons d'un couple de partitions (λ, μ) qu'il est *compatible* (*compatible dans* $p \times q$ en cas d'ambiguité) si

1. on a la suite d'inclusion $\lambda \subset \mu \subset p \times q$, et
2. le diagramme gauche μ/λ est une réunion de diagrammes rectangulaires $p_i \times q_i$, $i = 1, \dots, m$ ne s'intersectant qu'en des sommets.

Les résultats de Parthasarathy, Kumaresan et Vogan-Zuckerman mentionnés plus haut affirment alors que l'ensemble des classes d'équivalences de représentations cohomologiques de G est

$$\{A(\lambda, \mu) \ : \ (\lambda, \mu) \text{ est un couple compatible de partitions}\},$$

où

$$H^k(\mathfrak{g}, K, A(\lambda, \mu)) \cong \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } k = R := |\lambda| + |\hat{\mu}| = pq - \sum_{i=1}^m p_i q_i, \\ 0 & \text{si } k < R, \end{cases}$$

et plus généralement

$$H^k(\mathfrak{g}, K, A(\lambda, \mu)) \cong H^{k-R}\left(\prod_{i=1}^m U(p_i + q_i)/(U(p_i) \times U(q_i)), \mathbb{C} \right).$$

Ici $U(p_i + q_i)/(U(p_i) \times U(q_i))$ est la grassmannienne des p_i-plans dans $\mathbb{C}^{p_i+q_i}$.

La représentation triviale correspond au couple $(0, p \times q)$ et le degré R correspondant est évidemment égal à 0. On retrouve que la cohomologie qui lui correspond est la cohomologie du dual compact $\widehat{X}_G = U(p+q)/(U(p) \times U(q))$ de X_G. Il est bien connu (*cf.* [51] par exemple) qu'une base de celle-ci est paramétrée par les partitions $\nu \subset p \times q$. Notons $\{C_\nu \ : \ \nu \subset p \times q\}$ une telle base avec $C_{(1^k)}$ (resp. $C_{(k)}$) correspondant à la k-ième classe de Chern du fibré tautologique (resp. quotient) au-dessus de la grassmannienne $\widehat{X}_G$.

Les représentations cohomologiques appartenant à la série discrète sont celles qui vérifient $\mu = \lambda$. Enfin, remarquons que le "type de Hodge" de la classe de cohomologie fortement primitive de $A(\lambda, \mu)$ est $(R^+, R^-) = (|\lambda|, |\hat{\mu}|)$. Nous noterons $H^{\lambda,\mu}$ la $A(\lambda, \mu)$-composante de la cohomologie de degré R (composante fortement primitive).

Le Théorème 3.7 implique qu'un certain nombre de ces représentations sont isolées dans le dual unitaire de G. Il implique plus précisemment le corollaire suivant (*cf.* [16]).

Corollaire 4.1. *Soit (λ, μ) un couple compatible de partitions dans $p \times q$ avec $\mu/\lambda = (p_1 \times q_1) * \dots * (p_m \times q_m)$. Alors la représentation $A(\lambda, \mu)$ est isolée dans le dual unitaire de G si et seulement si*

1. *$\min_i(p_i, q_i) \geq 2$, et*
2. *si $\lambda_i = \mu_i > \lambda_{i+1}$ $(i = 1, \dots, p)$ alors $\mu_{i+1} = \mu_i$ (où nous adoptons exceptionnellement ici la convention que $\lambda_{p+1} = \mu_{p+1} = -1$).*

On peut visualiser le point 2. : il signifie que λ et μ n'ont aucun angle $\lrcorner$ ou $\ulcorner$ en commun. En particulier, les représentations $A(\lambda, \mu)$ telles que $\lambda = \mu$ (qui sont exactement les représentations cohomologique de la série discrète) ne sont **jamais isolées**.

Le cas $G = O(p,q)$. Dans ce paragraphe $G = O(p,q)$ et $G_0 = SO(p,q)_0$, où p et q sont des entiers strictement positifs. Le rang réel de G est donc $\min(p,q)$. On a

$$G = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \ : \ {}^t g \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix} \right\}, \tag{4.2}$$

où $A \in M_{p\times p}(\mathbb{R})$, $B \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$, $C \in M_{q\times p}(\mathbb{R})$ et $D \in M_{q\times q}(\mathbb{R})$. Et,

$$K = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \in G \ : \ A \in O(p), D \in O(q) \right\},$$

avec $K_0 = SO(p) \times SO(q)$ la composante connexe de l'identité dans K. L'involution de Cartan θ est donnée par $x \mapsto -{}^t x$. On a alors,

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^t B & 0 \end{pmatrix} \ : \ B \in M_{p\times q}(\mathbb{C}) \right\}.$$

Soit $E = \mathbb{C}^p$ (resp. $F = \mathbb{C}^q$) la représentation standard de $O(p, \mathbb{C})$ (resp. $O(q, \mathbb{C})$). Alors, comme représentation de $K_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{p} = E \otimes F^*$.

Dans [18], et toujours à partir des résultats de Parthasarathy, Kumaresan et Vogan-Zuckerman, nous montrons que l'ensemble des classes d'équivalences de représentations cohomologiques de G est alors

$$\{A(\lambda)^{\pm_1}_{\pm_2} \ : \ (\lambda, \hat{\lambda}) \text{ est un couple compatible de partitions [8]}\},$$

où les signes $\pm_1$ et $\pm_2$ correspondent au fait que pour nous une classe d'équivalence de représentations cohomologiques correspond à une représentation du groupe G_0 et que certaines représentations $A(\lambda)$ du groupe G se restreignent au groupe G_0 en une somme de 2 ou 4 représentations (cohomologiques) irréductibles. On peut oublier tout ceci dans le reste du texte.

Remarquons qu'une partition orthogonale λ vérifie que son diagramme gauche associé $\hat{\lambda}/\lambda$ s'écrit comme une réunion de diagrammes rectangulaires : $(a_1 \times b_1) * \dots * (a_m \times b_m) * (p_0 \times q_0) * (a_m \times b_m) * \dots * (a_1 \times b_1)$. Les

[8] Nous dirons dorénavant d'une partition λ telle que le couple $(\lambda, \hat{\lambda})$ soit compatible, qu'elle est *orthogonale*.

groupes de $(\mathfrak{g}, K)$-cohomologie de $A(\lambda)^{\pm_1}_{\pm_2}$ se calculent alors de la manière suivante :

$$H^k(\mathfrak{g}, K, A(\lambda)^{\pm_1}_{\pm_2}) \cong \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } k = R := |\lambda|, \\ 0 & \text{si } k < R, \end{cases}$$

et plus généralement

$$\begin{aligned} & H^k(\mathfrak{g}, K, A(\lambda)^{\pm_1}_{\pm_2}) \\ & \cong H^{k-R}\left(O(p_0+q_0)/(O(p_0)\times O(q_0)) \prod_{i=1}^m U(a_i+b_i)/(U(a_i)\times U(b_i)), \mathbb{C}\right). \end{aligned}$$

Nous noterons H^λ la $A(\lambda)$-composante de la cohomologie de degré R.

Dans ce cas le Théorème 3.7 implique le corollaire suivant (*cf.* [18]).

Corollaire 4.2. *Soit $\lambda \subset p \times q$ une partition orthogonale avec $\hat{\lambda}/\lambda = (a_1 \times b_1) * \ldots * (a_m \times b_m) * (p_0 \times q_0) * (a_m \times b_m) * \ldots * (a_1 \times b_1)$. Alors les différentes représentations $A(\lambda)^{\pm_2}_{\pm_1}$ associées à λ sont soit toutes isolées dans le dual unitaire de $SO_0(p,q)$ soit toutes non isolées. Elles sont isolées si et seulement si*

1. $\min_i(a_i, b_i) \geq 2$, *et*
2. *soit* $p_0, q_0 \geq 2$ *et* $p_0 + q_0 \geq 5$, *soit* $p_0 q_0 = 0$, *et*
3. λ *et* $\hat{\lambda}$ *n'ont aucun angle* $\lrcorner$ *ou* $\ulcorner$ *en commun.*

Le cas $G = Sp(p,q)$. Il est similaire au cas des groupes unitaires. Rappelons juste qu'en utilisant l'identification classique entre l'algèbre des quaternions $\mathbb{H}$ et $\mathbb{C}^2$, on a :

$$\mathfrak{k}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & S & 0 \\ 0 & B & 0 & T \\ -\overline{S} & 0 & \overline{A} & 0 \\ 0 & -\overline{T} & 0 & \overline{B} \end{pmatrix} : \begin{array}{l} A \in \mathfrak{u}(p),\ B \in \mathfrak{u}(q), \\ S \in \mathrm{Sym}(p, \mathbb{C}),\ T \in \mathrm{Sym}(q, \mathbb{C}) \end{array} \right\},$$

$$\mathfrak{p}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & M & 0 & X \\ {}^t\overline{M} & 0 & {}^tX & 0 \\ 0 & \overline{X} & 0 & -\overline{M} \\ {}^t\overline{X} & 0 & -{}^tM & 0 \end{pmatrix} : M, X \in M_{p\times q}(\mathbb{C}) \right\}.$$

Comme dans le cas unitaire [14] il n'est alors pas difficile de montrer que l'ensemble des représentations cohomologiques de G est

$$\left\{ A(\lambda,\mu)_i \ : \ \begin{array}{l} (\lambda,\mu) \text{ est un couple compatible de partitions et} \\ i = 0, 1 \text{ (toujours } = 1 \text{ si } \lambda_p > 0 \text{ ou } \mu_1 = q) \end{array} \right\},$$

où

$$H^k(\mathfrak{g}, K, A(\lambda,\mu)_1) \cong \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } k = R := pq + |\lambda| + |\hat{\mu}| = 2pq - \sum_{i=1}^m p_i q_i, \\ 0 & \text{si } k < R, \end{cases}$$

et

$$H^k(\mathfrak{g}, K, A(\lambda,\mu)_0) \cong \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } k = R := \begin{cases} pq - p_1q_1 + |\lambda| + |\hat{\mu}| \\ 2pq - 2p_1q_1 - \sum_{i=2}^m p_iq_i, \end{cases} \\ 0 & \text{si } k < R, \end{cases}$$

et plus généralement

$$H^k(\mathfrak{g}, K, A(\lambda,\mu)_1) \cong H^{k-R}\left(\prod_{i=1}^m U(p_i+q_i)/(U(p_i)\times U(q_i)), \mathbb{C}\right),$$

et

$$\begin{aligned} & H^k(\mathfrak{g}, K, A(\lambda,\mu)_0) \\ & \cong H^{k-R}\big(Sp(p_1+q_1)/(Sp(p_1)\times Sp(q_1)) \\ & \times \textstyle\prod_{i=2}^m U(p_i+q_i)/(U(p_i)\times U(q_i)), \mathbb{C}\big). \end{aligned}$$

Dans ce cas le Théorème 3.7 implique le corollaire suivant.

Corollaire 4.3. *Soit (λ,μ) un couple compatible de partitions dans $p\times q$ avec $\mu/\lambda = (p_1\times q_1) * \ldots * (p_m \times q_m)$. Alors la représentation $A(\lambda,\mu)_i$ $(i = 0,1)$ est isolée dans le dual unitaire de G si et seulement si*

1. *$p_1, q_1 \geq 1$, $p_1 + q_1 \geq 3$, si $i = 0$ et $p_1, q_1 \geq 2$, sinon,*
2. *$\min_{j\geq 2}(p_j, q_j) \geq 2$, et*
3. *λ et μ n'ont aucun angle $\lrcorner$ ou $\ulcorner$ en commun.*

Le cas $G = GSp_p$. Dans ce paragraphe $G = GSp_p$, où p est un entier strictement positif. Rappelons alors que

$$G = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in U(p,p) \ : \ {}^tg \begin{pmatrix} 0 & 1_p \\ -1_p & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & 1_p \\ -1_p & 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (4.3)$$

Et K est le groupe $U(p)$ plongé dans G via l'application

$$k \mapsto \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & {}^tk^{-1} \end{pmatrix}.$$

Dans l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}$, on a :

$$\mathfrak{p}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } B \in M_{p\times p}(\mathbb{C}) \text{ symétrique} \right\}$$

et

$$\mathfrak{p}^- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } C \in M_{p\times p}(\mathbb{C}) \text{ symétrique} \right\}.$$

Notons $E = \mathbb{C}^p$ la représentation standard de $U(p)$. Alors, comme représentation de $K_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{p}^+ = \mathrm{sym}^2(E)$. De la même manière, $\mathfrak{p}^- = \mathrm{sym}^2(E^*)$.

Nous dirons d'une partition λ qu'elle est *symétrique* si $\lambda^* = \lambda$. Remarquons que si (λ,μ) est un couple compatible de partitions symétriques dans

$p \times p$, le diagramme gauche μ/λ est symétrique et s'écrit donc $(a_1 \times b_1) * \ldots * (a_m \times b_m) * (p_0 \times p_0) * (b_m \times a_m) * \ldots * (b_1 \times a_1)$ pour un certain $m \geq 1$ et des entiers a_i, $b_i \geq 1$ et $p_0 \geq 0$. Étant donné une partition symétrique $\lambda \subset p \times p$, nous noterons λ^+ la partition $(\lambda_1^+, \ldots, \lambda_p^+)$ où pour $i = 1, \ldots, p$

$$\begin{aligned} \lambda_i^+ &= |\{j \geq i \ : \ (i,j) \in \lambda\}|, \\ &= \max(0, \lambda_i - i + 1). \end{aligned}$$

Nous noterons $\overline{\lambda}$ le diagramme de Young $\subset p \times (p+1)$ obtenu en rajoutant une case à chaque ligne intersectant la diagonale. Remarquons alors que $|\overline{\lambda}|$ est nécessairement pair égal à $2|\lambda^+|$. Si (λ, μ) est un couple compatible de partitions symétriques $\subset p \times p$ dont le diagramme gauche associé $\mu/\lambda = (a_1 \times b_1) * \ldots * (a_m \times b_m) * (p_0 \times p_0) * (b_m \times a_m) * \ldots * (b_1 \times a_1)$, nous noterons enfin $(\mu/\lambda)^+$ le sous-diagramme gauche égal à $(p_0 \times p_0) * (b_m \times a_m) * \ldots * (b_1 \times a_1)$.

Les résultats de Parthasarathy, Kumaresan et Vogan-Zuckerman affirment alors que l'ensemble des classes d'équivalences de représentations cohomologiques de G est

$$\{A(\lambda, \mu) \ : \ (\lambda, \mu) \text{ compatible et } \lambda, \mu \text{ symétriques}\},$$

où

$$H^k(\mathfrak{g}, K, A(\lambda, \mu)) \cong \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } k = R := |\lambda^+| + |\hat{\mu}^+|, \\ 0 & \text{si } k < R, \end{cases}$$

et plus généralement

$$\begin{aligned} &H^k(\mathfrak{g}, K, A(\lambda, \mu)) \\ &\cong H^{k-R}\left(Sp(p_0)/U(p_0) \times \prod_{i=1}^m U(a_i + b_i)/(U(a_i) \times U(b_i)), \mathbb{C} \right). \end{aligned}$$

Dans ce cas le Théorème 3.7 implique le corollaire suivant.

Corollaire 4.4. *Soit (λ, μ) un couple compatible de partitions symétriques dans $p \times p$ avec $\mu/\lambda = (a_1 \times b_1) * \ldots * (a_m \times b_m) * (p_0 \times p_0) * (b_m \times a_m) * \ldots * (b_1 \times a_1)$. Alors la représentation $A(\lambda, \mu)$ est isolée dans le dual unitaire de G si et seulement si*

1. *$p_0 \geq 2$, $\min_i(a_i, b_i) \geq 2$, et*
2. *λ et μ n'ont aucun angle $\lrcorner$ ou $\ulcorner$ en commun.*

Le cas $G = O^*(2p)$. Dans ce paragraphe $G = O^*(2p)$, où p est un entier strictement positif. Rappelons alors que

$$G = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in U(p,p) \ : \ {}^t g \begin{pmatrix} 0 & 1_p \\ 1_p & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & 1_p \\ 1_p & 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (4.4)$$

Et K est le groupe $U(p)$ plongé dans G via l'application

$$k \mapsto \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & {}^t k^{-1} \end{pmatrix}.$$

Dans l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}$, on a :

$$\mathfrak{p}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } B \in M_{p\times p}(\mathbb{C}) \text{ antisymétrique} \right\}$$

et

$$\mathfrak{p}^- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } C \in M_{p\times p}(\mathbb{C}) \text{ antisymétrique} \right\}.$$

Notons $E = \mathbb{C}^p$ la représentation standard de $U(p)$. Alors, comme représentation de $K_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{p}^+ = \bigwedge^2(E)$. De la même manière, $\mathfrak{p}^- = \bigwedge^2(E^*)$.

Étant donnée une partition symétrique $\lambda \subset p \times p$, nous noterons λ^- la partition $(\lambda_1^-, \dots, \lambda_p^-)$ où pour $i = 1, \dots, p$

$$\begin{aligned} \lambda_i^- &= |\{j > i \ : \ (i,j) \in \lambda\}|, \\ &= \max(0, \lambda_i - i). \end{aligned}$$

Nous noterons $\check{\lambda}$ le diagramme de Young $\subset p \times p$ obtenu en soustrayant une case à chaque ligne intersectant la diagonale. Remarquons alors que $|\check{\lambda}|$ est nécessairement pair égal à $2|\lambda^-|$.

Les résultats de Parthasarathy, Kumaresan et Vogan-Zuckerman décrits plus haut affirment alors que l'ensemble des classes d'équivalences de représentations cohomologiques de G est

$$\{A(\lambda^-, \mu^-) \ : \ (\lambda, \mu) \text{ compatible et } \lambda, \mu \text{ symétriques}\},$$

où

$$H^k(\mathfrak{g}, K, A(\lambda^-, \mu^-)) \cong \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } k = R := |\lambda^-| + |\hat{\mu}^-|, \\ 0 & \text{si } k < R, \end{cases}$$

et plus généralement

$$\begin{aligned} &H^k(\mathfrak{g}, K, A(\lambda^-, \mu^-)) \\ &\cong H^{k-R}\left(O(2p_0)/U(p_0) \times \textstyle\prod_{i=1}^m U(a_i + b_i)/(U(a_i) \times U(b_i)), \mathbb{C}\right). \end{aligned}$$

Dans ce cas le Théorème 3.7 implique le corollaire suivant.

Corollaire 4.5. *Soit (λ, μ) un couple compatible de partitions symétriques dans $p \times p$ avec $\mu/\lambda = (a_1 \times b_1) * \dots * (a_m \times b_m) * (p_0 \times p_0) * (b_m \times a_m) * \dots * (b_1 \times a_1)$. Alors la représentation $A(\lambda^-, \mu^-)$ est isolée dans le dual unitaire de G si et seulement si*

1. *$p_0 \geq 3$, $\min_i(a_i, b_i) \geq 2$, et*
2. *si λ et μ ne sont pas tous les deux triviaux et n'ont aucun angle $\lrcorner$ ou $\ulcorner$ en commun.*

4.1 Théorèmes d'annulation et de non annulation de la cohomologie

La méthode la plus générale pour attaquer les Questions 1.1 et 1.2 passe par de remarquables fonctorialités découvertes par Burger, Li et Sarnak dans [27] et [28] :

1. Si $H \subset G$ sont deux $\mathbb{Q}$-groupes semi-simples et si $\rho \in \widehat{H}_{\mathrm{Aut}}$ alors toute représentation dans le support de l'induite $\mathrm{ind}_H^G \rho$ appartient au dual automorphe $\widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$.
2. Si $H \subset G$ sont deux $\mathbb{Q}$-groupes semi-simples et si $\pi \in \widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$ alors toute représentation dans le support de la restriction $\pi_{|H}$ appartient au dual automorphe $\widehat{H}_{\mathrm{Aut}}$.

Commençons par exploiter la première fonctorialité en prenant pour ρ la représentation triviale 1_H de H. Alors $\mathrm{ind}_H^G \rho = \mathrm{ind}_H^G 1_H = L^2(H \backslash G)$. Toute représentation de la série discrète de $H\backslash G$ (*i.e.* toute représentation intervenant discrètement dans la représentation $L^2(H\backslash G)$) appartient au dual automorphe $\widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$. Comme le remarquent Burger, Li et Sarnak, une représentation cohomologique π **isolée** de G intervenant dans la série discrète de $H\backslash G$ pour un certain sous-groupe H comme ci-dessus intervient alors dans la cohomologie (L^2) de $S(\Gamma)$ pour un certain sous-groupe de congruence $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$. Dans [20] nous précisons un peu ce résultat : il n'est pas difficile de vérifier qu'il suffit en fait que la représentation π soit **isolée sous la condition** $d = 0$. Cette condition correspond à ce que la forme harmonique correspondante soit isolée parmi les formes différentielles fermées. Précisons cette définition. Soient (π, V_π) une représentation irréductible unitaire de G et V_π^K l'espace des vecteurs K-finis de la représentation π et

$$\ldots \to C^i(\pi) = \mathrm{Hom}_K(\textstyle\bigwedge^i \mathfrak{p}, V_\pi^K) \xrightarrow{d_i} C^{i+1}(\pi) \to \ldots .$$

le complexe calculant la $(\mathfrak{g}, K)$-cohomologie de π. Une représentation cohomologique $A_{\mathfrak{q}}$ de G, de degré primitif $R = R(\mathfrak{q})$, est *isolée sous la condition* $d = 0$ si elle est isolée de l'ensemble des représentations irréductibles unitaires telles que $\mathrm{Im}(d_R) = 0$. Dans [20], nous caractérisons complètement les représentations cohomologiques isolées sous la condition $d = 0$. et nous montrons :

Proposition 4.1. *Soit π une représentation cohomologique de G appartenant à la série discrète de $H\backslash G$. Supposons de plus π* **isolée sous la condition** $d = 0$ *dans $\widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$. Il existe alors un sous-groupe de congruence $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ tel que la représentation π intervienne discrètement dans $L^2(\Gamma\backslash G)$.*

Par ailleurs (et c'est la raison profonde derrière le Théorème 2.23) l'espace G/H possède une série discrète si et seulement si $\mathrm{rang}_{\mathbb{C}}(G/H) = \mathrm{rang}_{\mathbb{C}}(K/(K \cap H))$, *cf.* [50]. Et dans ce cas il existe une représentation cohomologique appartenant à la série discrète.

Appliquées tour à tour aux couples $(U(p,q-r)\times U(r),U(p,q))$, $(O(p,q-r)\times O(r),O(p,q))$, $(Sp(p,q-r)\times Sp(r),Sp(p,q))$ et $(G(Sp_{p-r}\times Sp_r),GSp_p)$, $(O^*(2p-2r)\times O^*(2r),O^*(2p))$, ces remarques impliquent les réponses partielles suivantes à la Question 1.2, *cf.* [20].

Théorème 4.1. *1. Soit $G=U(p,q)$ avec $p\geq 2$. Alors la réponse à la Question 1.2 est positive pour chacune des représentations $A((r^p),((q-r)^p))$, $0\leq r\leq q/2$.*

2. Soit $G=O(p,q)$ avec $p\geq 2$. Alors la réponse à la Question 1.2 est positive pour chacune des représentations $A((r^p))$, $0\leq r\leq q/2$.

3. Soit $G=Sp(p,q)$ avec $p\geq 2$. Alors la réponse à la Question 1.2 est positive pour chacune des représentations $A((0),((q-2r)^p))_0$, $0\leq r\leq q/2$.

4. Soit $G=Sp_p$. Alors la réponse à la Question 1.2 est positive pour chacune des représentations $A((p^r,r^{p-r}),p\times q)$, $0\leq r\leq p$.

5. Soit $G=O^*(2p)$. Alors la réponse à la Question 1.2 est positive pour chacune des représentations $A((p^r,r^{p-r})^-,(p\times q)^-)$, $0\leq r\leq p-1$.

Peter Sarnak m'a signalé que dans une suite à [27] encore en gestation, Burger, Li et Sarnak applique cette méthode (sans la Proposition 4.1) à l'étude des Questions 1.1 et 1.2 dans le cas des groupes exceptionnels, la méthode ci-dessus donne les meilleurs résultats connus à lors actuel.

Revenons à l'étude des groupes classiques : dans ce cas la méthode la plus efficace pour construire des formes automorphes et en particulier pour répondre aux Questions 1.1 et 1.2 semble être la formation de séries thêta, ou, en théorie des représentations, l'utilisation de la théorie du relevé thêta. Rappelons brièvement comment celle-ci fonctionne.

Relèvement thêta. Soit k un corps de nombre totalement réel et soit $(D,\imath)$ une k-algèbre à involution de l'un des trois types suivants :

$$D=\begin{cases} k, & \text{cas } 1,\\ \text{une extension quadratique } F/k, & \text{cas } 2,\\ \text{une algèbre de quaternion de centre } k, & \text{cas } 3,\end{cases} \tag{4.5}$$

et

$$\imath=\begin{cases} id, & \text{cas } 1,\\ \text{l'involution de Galois de } F/k, & \text{cas } 2,\\ \text{l'involution standard}, & \text{cas } 3.\end{cases} \tag{4.6}$$

Soient V et V' deux espaces vectoriels de dimension finie sur D équipés de deux formes sesquilinéaires non-dégénérées $(.,.)$ et $(.,.)'$, l'une $\imath$-hermitienne, l'autre $\imath$-anti-hermitienne. Le k-espace vectoriel $W=V\otimes_D V'$ est alors naturellement muni d'une forme symplectique

$$\langle .,.\rangle=\mathrm{tr}_{D/k}((.,.)\otimes(.,.)'^{\imath})$$

où $\mathrm{tr}_{D/k}$ désigne la trace usuelle de D sur k. Notons $Sp(W)$, G et G' les groupes d'isométries respectifs de $\langle .,. \rangle$, $(.,.)$ et $(.,.)'$. Alors (G,G') es une paire réductive duale irréductible de type I dans $Sp(W)$. Supposons le groupe $Sp(W)$ compact à toutes les places à l'infini de k sauf une et notons Sp le groupe réel (non compact) en cette place. Nous noterons également G et G' les sous-groupes réels de Sp correspondants. Notons enfin $\widetilde{Sp}$ le revêtement métaplectique à deux feuillets du groupe symplectique Sp et $\widetilde{G}$, $\widetilde{G}'$ les images inverses respectives de G et G' dans $\widetilde{Sp}$. Comme dans l'introduction, et après restriction des scalaires de k à $\mathbb{Q}$, nous pouvons parler du dual automorphe de $\widetilde{Sp}$. Traduits en ces termes, Howe montre, entre autres choses, dans [58], que la représentation de Weil (ou représentation de l'oscillateur harmonique) ω du groupe $\widetilde{Sp}$ appartient au dual automorphe de $\widetilde{Sp}$. Considérons maintenant deux représentations respectives π et π' de G et G'. Les deux représentations π et π' sont dites duales pour la correspondance θ locale, noté $\pi' = \theta(\pi)$, si la représentation $\pi \otimes \pi'$ de $\widetilde{G} \cdot \widetilde{G}'$ est équivalente à une sous-représentation irréductible de la restriction de ω à $\widetilde{G} \cdot \widetilde{G}'$. Dans [75], Li montre que si π est une représentation de la série discrète de G "suffisamment régulière" (*cf.* [75]) et si $\dim_D V \geq \dim_D V'$, alors π' admet un relevé thêta non nul à $\widetilde{G}$. La représentation correspondante $\pi = \theta(\pi')$ est une représentation cohomologique explicitement décrite dans [75].

Dans [76] Li vérifie que dans un grand nombre de cas la correspondance est globale. Ce qui lui permet de démontrer le théorème suivant (le groupe G est toujours comme ci-dessus) en relevant des représentations appartenant à la séries discrète de G'.

Théorème 4.2. *1. Soit $G = U(p,q)$. Alors la réponse à la Question 1.2 est positive pour chacune des représentations $A(\lambda,\mu)$, avec μ/λ rectangle de périmètre $> p+q$.*

2. Soit $G = O(p,q)$ avec $p+q$ pair. Alors la réponse à la Question 1.1 est positive pour chacune des représentations $A(\lambda)$, avec $\hat{\lambda}/\lambda$ rectangle de périmètre $> p+q+2$.

3. Soit $G = O(p,q)$ avec $p+q$ impair. Alors la réponse à la Question 1.1 est positive pour chacune des représentations $A((r^p))$, avec $r < \frac{1}{4}(p+q-2)$.

4. Soit $G = Sp(p,q)$. Alors la réponse à la Question 1.1 est positive pour chacune des représentations $A(\lambda,\mu)_0$, avec μ/λ rectangle de périmètre $\geq p+q$.

5. Soit $G = Sp_p$. Alors la réponse à la Question 1.1 est positive pour chacune des représentations $A(\lambda,\mu)$, avec μ/λ carré de côté $\geq p/2$.

6. Soit $G = O^*(2p)$. Alors la réponse à la Question 1.1 est positive pour chacune des représentations $A(\lambda^-,\mu^-)$, avec μ/λ carré de côté $> (p+1)/2$.

La démonstration fait intervenir des théorèmes d'arithmétiques assez fins, valeurs de fonctions L associées à des représentations automorphes de groupes classiques, formule de Siegel-Weil...

Enfin remarquons que dans le cas des espaces hermitiens et concernant la cohomologie **holomorphe** Anderson [3] répond positivement à la Question 1.2 en utilisant là encore la technique du relèvement thêta.

Dans [20] nous remarquons [9] que lorsque la représentation π de G est une représentation cohomologique isolée dans le dual automorphe, on peut directement déduire de la correspondance thêta locale (c'est-à-dire au niveau des représentations des groupes réels) une réponse positive à la Question 1.1 ou 1.2 pour la représentation π. Il découle en effet de la deuxième fonctorialité de Burger, Li et Sarnak que si la représentation $\pi \otimes \pi'$ de $\widetilde{G} \cdot \widetilde{G}'$ est équivalente à une sous-représentation irréductible de la restriction de la représentation $\omega \in \widehat{(\widetilde{Sp})}_{\mathrm{Aut}}$, alors (dans notre situation) la représentation $\pi \in \widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$ (et $\pi' \in \widehat{G'}_{\mathrm{Aut}}$). Si π est isolée dans $\widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$, elle doit donc intervenir discrètement dans un $L^2(\Gamma \backslash G)$, pour Γ sous-groupe de congruence de G. Le théorème qui suit découle donc des travaux [75] de Li sur la correspondance thêta locale archimédienne et du Théorème 3.7. Modulo la Conjecture 3.6 cette méthode "douce" (qui évite notamment le recours à de l'arithmétique fine) permet de rédémontrer toutes les réponses partielles aux Questions 1.1 et 1.2 citées dans ce mémoire.

Théorème 4.3. *1. Soit $G = U(p,q)$ avec $p \geq 2$. Alors la réponse à la Question 1.2 est positive pour chacune des représentations $A((r^p),((q-s)^p))$, avec r, s entiers naturels tels que $r+s \leq q-2$.*

2. Soit $G = O(p,q)$ avec $p \geq 2$. Alors la réponse à la Question 1.1 est positive pour chacune des représentations $A((r^p))$, avec r entier naturel tel que $2r \leq \min(q-2, p+q-5)$.

3. Soit $G = Sp(p,q)$. Alors la réponse à la Question 1.1 est positive pour chacune des représentations $A((0),((q-r)^p)_0$, avec r entier naturel tel que $r \leq q$.

4. Soit $G = Sp_p$. Alors la réponse à la Question 1.2 est positive pour chacune des représentations $A((p^r, r^{p-r}), p \times q)$, $0 \leq r \leq p-2$.

5. Soit $G = O^*(2p)$. Alors la réponse à la Question 1.2 est positive pour chacune des représentations $A((p^r, r^{p-r})^-, (p \times q)^-)$, $0 \leq r \leq p-4$.

Dans les Théorèmes 4.3 et 4.2 le cas du groupe unitaire est spécial puisque seule la Question 1.2 est résolue pour les représentations cohomologiques considérées : il existe alors des réseaux arithmétiques provenant d'algèbres à division. Et la réponse à la Question 1.1 est négative en général comme l'a montré Clozel dans [39] :

[9] Après que [20] ait circulé, Peter Sarnak m'a signalé que dans la suite (en gestation) de [27], Burger, Li et Sarnak font la même remarque et en tire des conséquences identiques.

Théorème 4.4. *Soient p, q, s trois entiers vérifiant $q \geq p \geq 2$ et $s < p$. Il existe un sous-groupe discret cocompact Γ de $G = U(p+q, p+q)$ tel que la représentation cohomologique $A((s^{p+q}))$ de G n'intervienne jamais comme sous-représentation de $L^2(\Gamma'\backslash G)$ pour $\Gamma' \subset \Gamma$ d'indice fini.*

La démonstration de ce dernier théorème repose sur les mêmes idées que celle du Corollaire 2.5. Le rang supérieur intervient néanmoins de manière essentielle : la propriété des sous-groupes de congruence doit être vérifiée. Un outil de la démonstration est l'injectivité de l'application de restriction virtuelle en restriction à certaines composantes fortement primitives de la cohomologie. Nous passons maintenant à l'étude de ces propriétés pour les variétés de Shimura, *i.e.* lorsque l'espace symétrique est hermitien.

4.2 Restriction de la cohomologie d'une variété de Shimura à une sous-variété de Shimura plus petite

La démonstration du Théorème 2.33 consiste à penser à la réunion

$$\cup_{g \in G(\mathbb{Q})} S_H(g)$$

comme à un cycle diffus dans la variété kaehlérienne compacte $S(\Gamma)$ duale à une forme de Kaehler puis à appliquer le Théorème de Lefschetz fort.

Plus généralement si $X_H \subset X_G$ est un plongement holomorphe entre deux espaces symétriques hermitiens, Venkataramana montre dans [113] que l'application de restriction virtuelle Res_H^G est **injective** en restriction au sous-espace (fortement primitif) $H^R(A_{\mathfrak{q}} : Sh^0 G)$ de la cohomologie de $Sh^0 G$ dès que la multiplication par l'image de $[\widehat{X}_H] \in H^*(\widehat{X}_G)$ dans $H^*(Sh^0 G)$ est injective en restriction à ce même sous-espace $H^R(A_{\mathfrak{q}} : Sh^0 G)$.

Comprendre l'injectivité ou non de l'application de restriction virtuelle passe donc par la compréhension de l'action de la cohomologie triviale $H^*(1_G : Sh^0 G)$ sur la cohomologie $H^*(Sh^0 G)$. C'est de l'algèbre linéaire délicate qui généralise la démonstration du Théorème de Lefschetz fort.

Nous traitons dans [14] le cas des domaines hermitiens classiques. Distinguons différents cas.

Variétés de Shimura unitaires. Dans ce cas $G = U(p, q)$ et le dual compact $\widehat{X}_G$ est la grassmannienne des p-plans complexes dans $\mathbb{C}^{p+q}$. Il est bien connu que l'on peut paramétrer une base $\{C_\nu\}$ de $H^*(\widehat{X}_G) \cong H^*(1_G : Sh^0 G)$ par les diagrammes de Young $\nu \subset p \times q$: prendre les classes des sous-variétés de Schubert de la grassmannienne.

Dans [122] Zelevinski définit une *image* entre une partition $\nu \subset p \times q$ et un diagramme gauche μ/λ comme étant une bijection f entre les cases des diagrammes ν et μ/λ telle que si une case A est au-dessus (au sens large) et à gauche (au sens large) d'une case B dans l'un des diagrammes, les cases correspondantes (par f ou f^{-1}) A' et B' de l'autre diagramme sont dans l'ordre du numérotage inverse, *i.e.* le numérotage obtenu en parcourant les lignes de droite à gauche de haut en bas. Zelevinski montre notamment que le nombre d'images entre ν et μ/λ est égal à $c^{\mu}_{\lambda\nu}$ (nombre de Littlewood-Richardson, *cf.* [51]).

Nous dirons d'une partition $\nu \subset p \times q$ qu'elle *s'inscrit* dans un diagramme gauche μ/λ si elle est une image d'un sous-diagramme gauche de μ/λ.

La proposition suivante [14, Proposition 11] est exactement le résultat d'algèbre linéaire recherché.

Proposition 4.2. *Soient λ, μ et ν trois partitions incluses dans $p\times q$ telles que (λ, μ) forme un couple compatible. Alors, pour toute classe fortement primitive non nulle $s \in H^{\lambda,\mu}(Sh^0G)$, $C_\nu \cdot s \neq 0$ si et seulement si la partition ν s'inscrit dans le diagramme gauche μ/λ.*

À l'aide du critère de Venkataramana il n'est alors pas très difficile d'obtenir des critères d'injectivité de l'application de restriction virtuelle aux différentes sous-variétés de Shimura de Sh^0G. On peut (*cf.* [14]) réduire le problème aux trois types suivants de sous-variétés de Shimura $Sh^0H \subset Sh^0G$:

1. $H = U(p_1, q_1) \times \ldots \times U(p_m, q_m)$ avec $p_j, q_j \geq 1$, $p_1 + \ldots + p_m \leq p$ et $q_1 + \ldots + q_m \leq q$;
2. $H = GSp_p$ et $p = q$;
3. $H = O^*(2p)$ et $p = q$.

C'est l'objet des deux théorèmes qui suivent ainsi que d'une remarque finale concernant le cas $H = O^*(2p)$.

Théorème 4.5. *Soit Sh^0H une sous-variété de Shimura de Sh^0G avec $H = U(p_1, q_1) \times \ldots \times U(p_m, q_m)$, $p_j, q_j \geq 1$, $p_1 + \ldots + p_m \leq p$ et $q_1 + \ldots + q_m \leq q$. Soient λ et μ deux partitions incluses dans $p \times q$ telles que le couple (λ, μ) soit compatible. Alors, l'application*

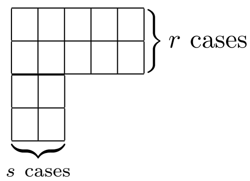
$$\mathrm{Res}^G_H : H^*(Sh^0G) \to \prod_{G(\mathbb{Q})} H^*(Sh^0H)$$

de restriction virtuelle est **injective en restriction à** *$H^{\lambda,\mu}(Sh^0G)$ s'il existe une partition ν image du diagramme gauche $(p_1 \times q_1) * \ldots * (p_m \times q_m)$ telle que $\hat{\nu}$ s'inscrive dans le diagramme gauche μ/λ.*

Rappelons que le sous-espace $H^{\lambda,\mu}(Sh^0G)$ apparaît dans la cohomologie holomorphe si et seulement si $\mu = p \times q$. La partition λ est alors naturellement paramétrée par un couple d'entier (r, s) avec $0 \leq r \leq p$ et $0 \leq s \leq q$ tels que

$$\lambda = (\underbrace{q, \ldots, q}_{r \text{ fois}}, \underbrace{s, \ldots, s}_{p-r \text{ fois}})$$

de diagramme de Young :



(Ici $p = 4$ et $q = 5$.)

Dans ce cas (et pour souligner le fait qu'il apparaît dans la cohomologie holomorphe) nous noterons $H^{(r,s),0}(Sh^0G)$ le sous-espace $H^{\lambda,\mu}(Sh^0G)$ de la cohomologie holomorphe de degré $|\lambda| = rq + s(p-r)$ (remarquons que $|\hat{\mu}| = 0$).

Corollaire 4.6 (Clozel-Venkataramana)**.** *Soit Sh^0H une sous-variété de Shimura de Sh^0G avec $H = U(p_1, q_1) \times \ldots \times U(p_m, q_m)$, $p_j, q_j \geq 1$, $p_1 + \ldots + p_m \leq p$ et $q_1 + \ldots + q_m \leq q$. Soit (r, s) un couple d'entiers naturels avec $r \leq p$ et $s \leq q$. Alors, l'application*

$$\mathrm{Res}_H^G : H^*(Sh^0G) \to \prod_{G(\mathbb{Q})} H^*(Sh^0H)$$

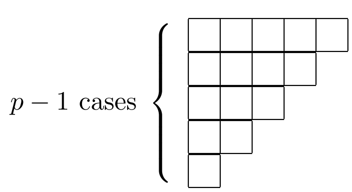
de restriction virtuelle est **injective** *en restriction à $H^{(r,s),0}(Sh^0G)$* **si et seulement si** *soit $p_1 + \ldots + p_m = p$, $r = 0$ et $s \leq q_i$ pour chaque i, soit $q_1 + \ldots + q_m = q$, $s = 0$ et $r \leq p_i$ pour chaque i.*

On obtient de la même manière le théorème suivant.

Théorème 4.6. *Soit Sh^0H une sous-variété de Shimura de Sh^0G avec $H = GSp_p$ et $p = q$. Soient λ et μ deux partitions incluses dans $p \times p$ telles que le couple (λ, μ) soit compatible. Alors, l'application*

$$\mathrm{Res}_H^G : H^*(Sh^0G) \to \prod_{G(\mathbb{G})} H^*(Sh^0H)$$

de restriction virtuelle est **injective en restriction à** *$H^{\lambda,\mu}(Sh^0G)$ si la partition $\nu = (p-1, p-2, \ldots, 1)$ de diagramme de Young*



s'inscrit dans le diagramme gauche μ/λ.

Et comme au-dessus, on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 4.7 (Clozel-Venkataramana)**.** *Soit Sh^0H une sous-variété de Shimura de Sh^0G avec $H = GSp_p$ et $p = q$. Soit (r, s) un couple d'entiers naturels avec $r \leq p$ et $s \leq q$. Alors, l'application*

$$\mathrm{Res}_H^G : H^*(Sh^0G) \to \prod_{G(\mathbb{G})} H^*(Sh^0H)$$

de restriction virtuelle est **injective** *en restriction à $H^{(r,s),0}(Sh^0G)$* **si et seulement si** $r, s \leq 1$.

Dans le cas où $H = O^*(2p)$, le critère d'injectivité de l'application de restriction virtuelle que l'on obtiendrait en suivant la même méthode serait vide, ou presque puisqu'il permet quand même de retrouver le résultat suivant de Clozel et Venkataramana :

Soit Sh^0H une sous-variété de Shimura de Sh^0G avec $H = O^*(2p)$ et $p = q$. Alors, l'application

$$\mathrm{Res}_H^G : H^*(Sh^0G) \to \prod_{G(\mathbb{Q})} H^*(Sh^0H)$$

de restriction virtuelle est identiquement **nulle** *en restriction à la cohomologie* **holomorphe** *de degré strictement positif.*

On a une réciproque partielle au Théorème 4.5, un critère d'annulation de l'application de restriction.

Théorème 4.7. *Soient Sh^0H une sous-variété de Shimura de Sh^0G avec $H = H_1 \times \ldots \times H_m$, $H_i = U(p_i, q_i)$, $p_i, q_i \geq 1$, $p_1 + \ldots + p_m \leq p$ et $q_1 + \ldots + q_m \leq q$. Soient λ et μ deux partitions incluses dans $p \times q$ telles que le couple (λ, μ) soit compatible. Fixons pour chaque entier $i = 1, \ldots, m$, un couple compatible de partitions (λ_i, μ_i) dans $p_i \times q_i$. Supposons*

$$c^{\lambda}_{\lambda_1 \ldots \lambda_m} c^{\hat{\mu}}_{\hat{\mu}_1 \ldots \hat{\mu}_m} = 0.$$

(Autrement dit, supposons soit que λ n'est pas une image du diagramme gauche $\lambda_1 * \ldots * \lambda_m$ soit que $\hat{\mu}$ n'est pas une image du diagramme gauche $\hat{\mu}_1 * \ldots * \hat{\mu}_m$.)

Alors, la projection de l'image de l'application de restriction

$$\mathrm{res}_H^G : H^{\lambda,\mu}(Sh^0G) \to H^{|\lambda|+|\hat{\mu}|}(Sh^0H)$$

dans la composante de Künneth

$$H^{\lambda_1,\mu_1}(Sh^0H_1) \otimes \ldots \otimes H^{\lambda_m,\mu_m}(Sh^0H_m)$$

est **nulle***.*

Concluons par une remarque et une application.

À la toute fin de son célèbre article [4], Arthur pose la question de la possibilité de découper les espaces $H^i_{\mathrm{prim}}(Sh^0G)$, $(0 \le i \le \frac{d_G}{2})$, en morceaux identifiés à des sous-espaces de la cohomologie primitive en degré médian $H^{d_H/2}_{\mathrm{prim}}(Sh^0H)$, attachés à des variétés de Shimura Sh^0H de dimension d_H plus petite que d_G.

Cette belle question motive une grande part de ces questions. On peut penser à cette question comme à un analogue du Théorème de Lefschetz pour les variétés projectives. Dans son article Arthur propose des candidats pour les variétés de Shimura Sh^0H de dimension plus petite. Les groupes H devraient être des groupes endoscopiques. Il est naturel de se demander si, comme dans le cas du Théorème de Lefschetz, on ne pourrait pas épuiser une large part de la cohomologie en se restreignant à des sous-variétés de Shimura. C'est l'objet des Théorèmes ci-dessus qui impliquent que c'est en tout cas le cas pour les variétés Sh^0G, où $G = U(p,q)$ provient d'un groupe unitaire sur un corps de nombre, et pour les petits degrés $< 3p-2$ si $p = q$ et $< p+q-1$ si $p < q$. Remarquons néanmoins avec Venkataramana que l'on ne peut espèrer répondre positivement à la question d'Arthur simplement à coup de restriction à des sous-variétés de Shimura. On peut plus généralement montrer le résultat suivant qui implique que les degrés ci-dessus sont optimaux.

Proposition 4.3. *Soit $G = U(p,q)$ obtenu à partir d'un groupe unitaire sur un corps de nombre. Il existe alors une classe de cohomologie (holomorphe)* **non triviale** *et de degré $3p-2$ si $p = q$ et $p+q-1$ si $p < q$, dont la restriction virtuelle à n'importe quelle sous-variété de Shimura $Sh^0H \subset Sh^0G$ soit* **nulle**.

À partir d'une idée de Venkataramana, les Théorèmes 4.5 et 4.7 permettent de démontrer un cas particulier amusant de la Conjecture de Hodge, *cf.* [14].

Théorème 4.8. *Soit $G = U(p,q)$ obtenu à partir d'un groupe unitaire sur un corps de nombre, avec $3 \le 2p+1 \le q$. Alors, toute classe de Hodge dans $H^{2pq-2p}(Sh^0G)$ est algébrique.*

Remarquons enfin que si la notion de classe de cohomologie fortement primitive est définie de manière transcendante, nous montrons dans [21], avec Venkataramana et en utilisant la Proposition 4.2, que dans le cas des domaines hermitiens classiques *la partie fortement primitive de la cohomologie est en fait définie sur $\mathbb{Q}$*.

Autres variétés de Shimura. Dans le cas orthogonal $G = O(2,n)$ Venkataramana montre dans [113] (toujours à l'aide du Théorème de Lefschetz fort) le théorème suivant.

Théorème 4.9. *Soit Sh^0H une sous-variété de Shimura de Sh^0G avec $G = O(2,n)$ et $H = O(2,k)$. Alors,*

$$Res_H^G : H^i(Sh^0G) \to \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^i(Sh^0H)$$

est injective pour tout $i \leq k$.

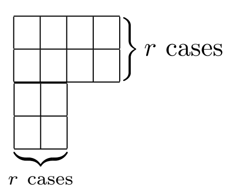
Dans les cas $G = GSp_p$ et $G = O^*(2p)$ la combinatoire de l'action de la cohomologie triviale sur toute la cohomologie de Sh^0G est élucidée dans [14] toujours en termes de partitions.

L'analogue du Théorème 4.5 n'est non vide que dans le cas de la cohomologie holomorphe et pour $G = GSp_p$. Nos méthodes ne permettent donc pas de démontrer de nouveaux résultats, nous retrouvons néanmoins un résultat de Clozel et Venkataramana [36].

Le sous-espace $H^{\lambda,\mu}(Sh^0G)$ apparaît dans la cohomologie holomorphe si et seulement si $\mu = p \times p$. La partition λ est alors naturellement paramétrée par un entier r compris entre 0 et p tel que

$$\lambda = (\underbrace{p, \ldots, p}_{r \text{ fois}}, \underbrace{r, \ldots, r}_{p-r \text{ fois}})$$

de diagramme de Young :



(Ici $p = 4$.)

Dans ce cas $H^{\lambda,\mu}(Sh^0G) = H^{rp-\frac{r(r-1)}{2},0}(Sh^0G)$ et les espaces de cohomologie holomorphe sont triviaux dans tous les autres degrés.

Théorème 4.10. *Soit Sh^0H une sous-variété de Shimura de Sh^0G avec $H = GSp_{p_1} \times \ldots \times GSp_{p_m}$, $p_j \geq 1$ et $p_1 + \ldots + p_m \leq p$. Soit r un entiers naturel $\leq p$. Alors, l'application*

$$\mathrm{Res}_H^G : H^*(Sh^0G) \to \prod_{G(\mathbb{Q})} H^*(Sh^0H)$$

de restriction virtuelle est **injective** *en restriction à $H^{rp-\frac{r(r-1)}{2},0}(Sh^0G)$* **si et seulement si** *$p_1 + \ldots + p_m = p$ et $r = 1$.*

Dans le cas $G = O^*(2p)$ nous renforçons des résultats antérieurs de Clozel et Venkataramana.

Théorème 4.11. *Soit $Sh^0 H$ une sous-variété de Shimura de $Sh^0 G$. Alors, l'application*

$$\mathrm{Res}_H^G : H^*(Sh^0 G) \to \prod_{G(\mathbb{Q})} H^*(Sh^0 H)$$

de restriction virtuelle est identiquement **nulle** *en restriction à la cohomologie* **holomorphe** *$H^{*,0}(Sh^0 G)$.*

Produits dans la cohomologie. Concernant le cup-produit dans la cohomologie des variétés de Shimura, la question analogue au Théorème 2.36 se pose en général. Il existe là encore un critère de Venkataramana impliquant la même conclusion que le Théorème 2.36 lorsque l'on se restreint à des classes fortement primitives. Il s'agit ici de considérer le produit avec la classe $[\widehat{\Delta}] \in H^*(\widehat{X} \times \widehat{X}) = H^*(\widehat{X}) \otimes H^*(\widehat{X})$ de la diagonale dans le produit $\widehat{X} \times \widehat{X}$.

Toujours à l'aide du Théorème de Lefschetz fort, Venkataramana démontre ainsi le Théorème 2.36 et le théorème suivant (dont certains cas particuliers sont dus à Kudla).

Théorème 4.12. *Supposons fixée une donnée $Sh^0 G$ avec $G = O(2, n)$. Soient α et β deux classes de cohomologie non triviales de degrés respectifs k et l dans $H^*(Sh^0 G)$ avec $k + l \leq [n/2]$. Il existe alors un éléments $g \in G(\mathbb{Q})$ tel que*

$$g(\alpha) \wedge \beta \neq 0.$$

Dans le cas $G = U(p, q)$, de la même manière, la Proposition 4.2 nous permet dans [15] de démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.13. *Soient (λ, μ) et (α, β) deux couples compatibles de partitions. Supposons qu'il existe une partition $\nu \subset p \times q$ telle que*

1. *ν s'inscrive dans μ/λ, et*
2. *$\hat{\nu}$ s'inscrive dans β/α.*

Alors, pour toutes classes non triviales $\omega \in H^{\lambda,\mu}(Sh^0 G)$ et $\eta \in H^{\alpha,\beta}(Sh^0 G)$, il existe un élément $g \in G(\mathbb{Q})$ tel que

$$g(\omega) \wedge \eta \neq 0.$$

Le Théorème 4.13 implique immédiatement que si ω et η sont deux classes quelconques de degrés respectifs k et l avec $k+l \leq p+q-1$, la conclusion du Théorème est vérifiée. De plus, lorsque les classes ω et η sont holomorphes ($\mu = \beta = p \times q$), la condition nécessaire est en fait suffisante dans le sens que si 1. ou 2. n'est pas vérifiée le cup-produit de ω et de η est (virtuellement) nul. On retrouve ainsi un résultat de Parthasarathy [93] et Clozel [34]. En particulier, le produit d'une classe $\omega \in H^{(1^p), p\times q}(Sh^0 G)$ par une classe $\eta \in H^{(q), p\times q}(Sh^0 G)$ est toujours (virtuellement) nul. De telles classes non triviales apparraissent bel et bien dans la cohomologie de certaines variétés de Shimura Sh^0G comme au-dessus, d'après le Théorème 4.2 (*cf.* aussi [3]). La condition $k+l \leq p+q-1$ est donc bien nécessaire.

Dans le cas des groupes GSp_p et $O^*(2p)$ la combinatoire est plus restrictive, ces méthodes n'impliquent rien de plus que les résultats de Parthasarathy [93] et Clozel [40] selon lesquels le cup-produit de deux classes de cohomologie holomorphes est toujours nul.

4.3 Restriction au niveau local et cohomologie L^2

Restriction

Comme en rang 1, on peut s'interesser au problème local de la restriction d'une représentation cohomologique de G à un sous-groupe H. L'approche générale décrite au §2.4 fonctionne toujours. En considérant tour à tour les groupes en balance suivants :

$$\begin{array}{ccc} U(p,q) & & U(i,j)\times U(i,j) \\ | & \times & | \\ U(r)\times U(p,q-r) & & U(i,j) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} O(p,q) & & Sp(2i,\mathbb{R})\times Sp(2i,\mathbb{R}) \\ | & \times & | \\ O(r)\times O(p,q-r) & & Sp(2i,\mathbb{R}) \end{array}$$

nous montrons dans [18] les deux théorèmes suivants.

Théorème 4.14. *Soient $H = U(p,q-r) \subset U(p,q) = G$ où l'inclusion est l'inclusion standard, $1 \leq p,q$ et $1 \leq r < q$. Alors, pour tout couple d'entiers naturels (i,j) tel que $i+j \leq q-r$,*

1. *la représentation cohomologique $A((i^p),((q-r-j)^p))_H$ de H apparaît avec multiplicité 1 dans la restriction à H de la représentation cohomologique $A((i^p),((q-j)^p))$ de G, et*
2. *l'application naturelle en cohomologie*

$$\begin{aligned} &H^{pi,pj}(\mathfrak{g},K;A((i^p),((q-j)^p))) \\ &\to H^{pi,pj}(\mathfrak{h},K^H;A((i^p),((q-r-j)^p))_H) \end{aligned} \tag{4.7}$$

est un isomorphisme d'espaces de dimension 1.

Théorème 4.15. *Soient $H = SO_0(p,q-r) \subset SO_0(p,q) = G$ où l'inclusion est l'inclusion standard, $1 \leq p,q$ et $1 \leq r < q$. Alors, pour tout entier naturel $i \leq (q-r)/2$,*

1. *la représentation cohomologique $A((i^p))^{\pm}_H$ de H apparaît avec multiplicité 1 dans la restriction à H de la représentation cohomologique $A((i^p))$ de G, et*

2. l'application naturelle en cohomologie

$$H^{pi}(\mathfrak{g}, K; A((i^p))) \to H^{pi}(\mathfrak{h}, K^H; A((i^p))^{\pm}_H) \tag{4.8}$$

est un isomorphisme d'espaces de dimension 1.

Nous pourrions traiter de la même manière les autres groupes classiques ou d'autres plongements. Concernant les deux cas ci-dessus, nous conjecturons plus généralement les énoncés suivants.

Conjecture 4.1. *Soient $H = U(p, q-r) \subset U(p,q) = G$ où l'inclusion est l'inclusion standard, $1 \leq p, q$ et $1 \leq r < q$. Soient λ et μ deux partitions incluses dans $p \times q$ formant un couple compatible.*

1. *La restriction à H de la représentation cohomologique $A(\lambda, \mu)$ de G contient (discrètement) une représentation cohomologique de degré fortement primitif $|\lambda|+|\hat{\mu}|$ si et seulement si la partition (r^p) s'inscrit dans le diagramme gauche μ/λ. Elle contient dans ce cas la représentation cohomologique $A(\lambda, \mu-(r^p))$ de H avec multiplicité exactement égale à* 1.
2. *Supposons que la partition (r^p) s'inscrive dans le diagramme gauche μ/λ. Alors, l'application naturelle en cohomologie*

$$H^{|\lambda|,|\hat{\mu}|}(\mathfrak{g}, K; A(\lambda,\mu)) \to H^{|\lambda|,|\hat{\mu}|}(\mathfrak{h}, K^H; A(\lambda, \mu-(r^p))_H)$$

est un isomorphisme d'espaces de dimension 1.

Conjecture 4.2. *Soient $H = SO_0(p, q-r) \subset SO_0(p,q) = G$ où l'inclusion est l'inclusion standard, $1 \leq p, q$ et $1 \leq r < q$. Soit λ une partition orthogonale dans $p \times q$.*

1. *La restriction à H de la représentation cohomologique $A(\lambda)^{\pm_2}_{\pm_1}$ de G contient (discrètement) une représentation cohomologique de degré fortement primitif $|\lambda|$ si et seulement si la partition (r^p) s'inscrit dans le diagramme gauche $\hat{\lambda}/\lambda$. Elle contient dans ce cas la représentation cohomologique $A(\lambda)^{\pm_2}_{\pm_1}$ de H avec multiplicité exactement égale à* 1.
2. *Supposons que la partition (r^p) s'inscrive dans le diagramme gauche $\hat{\lambda}/\lambda$. Alors, l'application naturelle en cohomologie*

$$H^{|\lambda|}(\mathfrak{g}, K; A(\lambda)^{\pm_2}_{\pm_1}) \to H^{|\lambda|}(\mathfrak{h}, K^H; A(\lambda)^{\pm_2}_{\pm_1})$$

est un isomorphisme d'espaces de dimension 1.

Remarquons enfin qu'en considérant les paires suivantes en balance dans $Sp_{2i(p+q)}$:

$$\begin{array}{ccc} U(p,q) & & U(i) \\ | & \times & | \\ O(p,q) & & Sp(2i,\mathbb{R}), \end{array}$$

nous obtenons le théorème suivant.

Théorème 4.16. *Soient $H = O(p,q) \subset U(p,q) = G$ où l'inclusion est l'inclusion standard, $1 \leq p, q$. Alors, pour tout entier naturel $i \leq q/2$,*

1. *la représentation cohomologique $\overline{A((i^p))}_H$ de H apparaît avec multiplicité 1 dans la restriction à H de la représentation cohomologique $A((i^p))$ de G, et*
2. *l'application naturelle en cohomologie*
$$H^{pi,0}(\mathfrak{g}, K; A((i^p))) \to H^{pi}(\mathfrak{h}, K^H; \overline{A((i^p))}_H) \tag{4.9}$$
est un isomorphisme d'espaces de dimension 1.

Nous conjecturons plus généralement l'énoncé suivant.

Conjecture 4.3. *Soient $H = O(p,q) \subset U(p,q) = G$ où l'inclusion est l'inclusion standard, $1 \leq p, q$. Soient λ et μ deux partitions incluses dans $p \times q$ formant un couple compatible.*

1. *Si la restriction à H de la représentation cohomologique $A(\lambda, \mu)$ de G contient (discrètement) une représentation cohomologique de degré fortement primitif $|\lambda| + |\hat{\mu}|$ alors $\lambda = 0$ ou $\mu = p \times q$.*
2. *Supposons par exemple $\mu = p \times q$. Alors la restriction à H de la représentation cohomologique $A(\lambda)$ de G contient (discrètement) une représentation de degré fortement primitif $|\lambda|$ si et seulement si la diagramme est λ est orthogonal. Elle contient dans ce cas la représentation cohomologique $\overline{A(\lambda)}_H$ de H avec multiplicité exactement égale à 1.*
3. *Supposons que la partition λ est orthogonale. Alors, l'application naturelle en cohomologie*
$$H^{|\lambda|,0}(\mathfrak{g}, K; A(\lambda)) \to H^{|\lambda|}(\mathfrak{h}, K^H; \overline{A(\lambda)}_H) \tag{4.10}$$
est un isomorphisme d'espaces de dimension 1.

Produits tensoriels de représentations cohomologiques

La méthode générale du §2.4 s'applique également aux plongements diagonaux respectifs

$$U(p,q) \subset U(p,q) \times U(p,q)$$

et

$$SO_0(p,q) \subset SO_0(p,q) \times SO_0(p,q).$$

La considération des paires réductives duales en balance :

$$\begin{array}{ccc} U(p,q) \times U(p,q) & & U(i+k, j+l) \\ | & \times & | \\ U(p,q) & & U(i,j) \times U(k,l) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} O(p,q)\times O(p,q) & & Sp(2(k+l),\mathbb{R}) \\ | & \times & | \\ O(p,q) & & Sp(2k,\mathbb{R})\times Sp(2l,\mathbb{R}) \end{array}$$

permet alors de démontrer les deux théorèmes suivants.

Théorème 4.17. *Soit $G = U(p,q)$, $1 \leq p,q$. Alors, pour tout quadruplet (i,j,k,l) d'entiers ≥ 0 de somme $i+j+k+l \leq q$,*

1. *la représentation cohomologique $A(((i+k)^p),((q-j-l)^p))$ de G apparaît avec multiplicité 1 dans le produit tensoriel des représentations cohomologiques $A((i^p),((q-j)^p))$ et $A((k^p),((q-l)^p))$ de G, et*
2. *l'application "cup-produit"*

$$\begin{aligned} &H^{pi,pj}(\mathfrak{g},K;A((i^p),((q-j)^p))) \\ &\otimes H^{pk,pl}(\mathfrak{g},K;A((k^p),((q-l)^p))) \\ &\to H^{p(i+k),p(j+l)}(\mathfrak{g},K;A(((i+k)^p),((q-j-l)^p))) \end{aligned} \tag{4.11}$$

est un isomorphisme d'espaces de dimension 1.

Théorème 4.18. *Soit $G = SO_0(p,q)$, $1 \leq p,q$. Alors, pour tout couple d'entiers ≥ 0 de somme $k+l \leq q/2$,*

1. *la représentation cohomologique $A(((k+l)^p))^{\pm}$ de G apparaît avec multiplicité 1 dans le produit tensoriel des représentations cohomologiques $A((k^p))^{\pm}$ et $A((l^p))^{\pm}$ de G, et*
2. *l'application "cup-produit"*

$$\begin{aligned} &H^{pk}(\mathfrak{g},K;A((k^p))^{\pm})\otimes H^{pl}(\mathfrak{g},K;A((l^p))^{\pm}) \\ &\to H^{p(k+l)}(\mathfrak{g},K;A(((k+l)^p))^{\pm}) \end{aligned} \tag{4.12}$$

est un isomorphisme d'espaces de dimension 1.

Cohomologie L^2

Le deuxième aspect local que nous avons considéré dans le cas du rang 1 est le calcul de la cohomologie L^2 des variétés limites "effeuillées". Considérons maintenant cette question dans le cas des groupes unitaires et orthogonaux.

Groupes unitaires. Dans ce paragraphe $G = U(p,q+r)$. Et l'on suppose fixée une donnée $Sh^0H \subset Sh^0G$ avec $H = U(p,q)$ plongé de manière standard dans G. Fixons Λ un sous-groupe de congruence sans torsion de H et notons enfin $M = \Lambda\backslash X_G$ et $F = \Lambda\backslash X_H$.

Soient (λ,μ) un couple compatible de partitions $\subset p\times(q+r)$. Conformément aux notations des sections précédentes nous notons $H_2^*(M)_{\lambda,\mu} = H_2^*(A(\lambda,\mu):M)$ la $A(\lambda,\mu)$-composante de la cohomologie L^2 de M, enfin nous notons $H_2^{\lambda,\mu}(M)$ la partie *fortement primitive* $H_2^{|\lambda|+|\hat{\mu}|}(M)_{\lambda,\mu}$.

Dans [18], nous commençons par remarquer que le Théorème 2.23 implique le corollaire suivant.

Corollaire 4.8. *La classe* $[F] \in H_2^{d_G-d_H}(M)_{(r^p),(q^p)}$ *est non nulle si et seulement si* $d_H \geq d_G/2$ *(i.e. si et seulement si* $q \geq r$*).*

Nous conjecturons plus généralement le résultat suivant.

Conjecture 4.4. *(Sous les hypothèses du Corollaire 4.8.) Si* λ *et* μ *sont deux partitions incluses dans* $p\times q$ *formant un couple compatible avec* $\mu/\lambda = (p_1 \times q_1) * \ldots * (p_m \times q_m)$*, alors l'application*

$$H^{\lambda,\mu}(F) \to H_{2,\text{ prim}+}^{|\lambda|+pr+|\hat{\mu}|}(M)$$

obtenue en composant l'application "cup-produit avec $[F]$*" et la projection sur la composante fortement primitive de la cohomologie* L^2 *de* M *est* **injective** *si et seulement si la partition* (r^p) *s'inscrit dans le diagramme gauche* μ/λ *(i.e. si* $p_1 + \ldots + p_m = p$ *et* $r \leq q_i$ *pour* $i = 1, \ldots, m$*). Son image est alors contenue dans* $H_2^{\lambda+(r^p),\mu}(M)$*.*

Dans [16] nous montrons le théorème relié suivant.

Théorème 4.19. *Pour tout entier,* $k < q - pr$*, on a l'***isomorphisme** *naturel suivant :*

$$H^k(F) \cong H_2^{k+2pr}(M).$$

Groupes orthogonaux. Dans ce paragraphe $G = O(p, q + r)$. On suppose fixée une donnée $Sh^0 H \subset Sh^0 G$ avec $H = O(p, q)$ plongé de manière standard dans G et Λ un sous-groupe de congruence sans torsion de H. Notons enfin $M = \Lambda\backslash X_G$ et $F = \Lambda\backslash X_H$.

Soit λ une partition orthogonale $\subset p\times(q+r)$. Nous notons $H_2^*(M)_\lambda^{\pm_1,\pm_2} = H_2^*(A(\lambda)_{\pm_1}^{\pm_2} : M)$ la $A(\lambda)_{\pm_1}^{\pm_2}$-composante de la cohomologie L^2 de M. Nous notons plus généralement $H_2^*(M)_\lambda$ la somme directe de tous les $H_2^*(M)_\lambda^{\pm_1,\pm_2}$ lorsque les signes $\pm_1$ et $\pm_2$ varient. Enfin nous notons $H_2^\lambda(M)$ la partie *fortement primitive* $H_2^{|\lambda|}(M)_\lambda$.

Dans [18] nous déduisons du Théorème 2.23 le corollaire suivant.

Corollaire 4.9. *La classe de* $[F] \in H_2^{d_G-d_H}(M)_{(r^p)}$ *est non nulle si et seulement si* $d_H \geq d_G/2$ *(i.e. si et seulement si* $q \geq r$*).*

De manière analogue à la Conjecture 4.4 nous conjecturons :

Conjecture 4.5. *Si* λ *est une partition orthogonale incluse dans* $p \times q$*, alors l'application*

$$H^\lambda(F) \to H_{2,\text{ prim}+}^{|\lambda|+pr}(M)$$

obtenue en composant l'application "cup-produit avec $[F]$*" et la projection sur la composante fortement primitive de la cohomologie* L^2 *de* M *est* **injective** *si et seulement si la partition* (r^p) *s'inscrit dans le diagramme gauche* $\hat{\lambda}/\lambda$*. Son image est alors contenue dans* $H_2^{\lambda+(r^p)}(M)$*.*

Dans [18] nous démontrons le théorème relié suivant.

Théorème 4.20. *Pour tout entier, $k < (q-pr-1)/2$, on a l'***isomorphisme** *naturel suivant :*

$$H^k(F) \to H_2^{k+pr}(M).$$

4.4 Propriétés de Lefschetz automorphes

Comme en rang 1, les résultats locaux du paragraphe précédent ont leurs pendants globaux que nous rassemblons sous le nom de "Propriétés de Lefschetz automorphes" et que nous étudions dans [18] dans le cas des groupes unitaires et orthogonaux. Ceux-ci se déduisent des résultats locaux ci-dessus suivant le même procédé (bien que techniquement un peu plus compliqué) que dans le cas du rang 1 et en utilisant les propriétés d'isolations spectrales propres au rang supérieur décrites dans la partie spectrale du mémoire. Nous obtenons en particulier les théorèmes suivants.

Théorème 4.21. *Supposons fixées des données $Sh^0H_i \subset Sh^0G$ ($i = 1, 2$) avec $H_1 = U(p, q-1)$, $H_2 = U(p-1, q)$ et $G = U(p, q)$ avec $p, q \geq 2$. Alors,*

1. *pour tout entier $\mathbf{k < p + q - 1}$, l'application de restriction virtuelle*

$$\mathrm{Res}^G_{H_1} \times \mathrm{Res}^G_{H_2} : H^k(Sh^0G) \to \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^k(Sh^0H_1) \times \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^k(Sh^0H_2)$$

   est **injective** *;*

2. *pour tout entier $\mathbf{k < q - p - 1}$ (resp. $\mathbf{k < p - q - 1}$), l'application "cup-produit avec $[Sh^0H_1]$ (resp. $[Sh^0H_2]$)"*

$$\bigwedge_{H_1}^{G} : H^k(Sh^0H_1) \to H^{k+2p}(Sh^0G)$$

$$(\textit{resp.} \ \bigwedge_{H_2}^{G} : H^k(Sh^0H_2) \to H^{k+2q}(Sh^0G))$$

   est **injective**.

Théorème 4.22. *Supposons fixées des données $Sh^0H_i \subset Sh^0G$ ($i = 1, 2$) avec $H_1 = O(p, q-1)$, $H_2 = O(p-1, q)$ et $G = O(p, q)$ avec $p, q \geq 3$. Alors,*

1. *pour tout entier $\mathbf{k \leq p + q - 4}$, l'application de restriction virtuelle*

$$\mathrm{Res}^G_{H_1} \times \mathrm{Res}^G_{H_2} : H^k(Sh^0G) \to \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^k(Sh^0H_1) \times \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^k(Sh^0H_2)$$

   est **injective** *;*

2. *pour tout entier* $\mathbf{k} \leq (\mathbf{q}-\mathbf{p}-\mathbf{3})/\mathbf{2}$ *(resp.* $\mathbf{k} \leq (\mathbf{p}-\mathbf{q}-\mathbf{3})/\mathbf{2}$*), l'application "cup-produit avec* $[Sh^0 H_1]$ *(resp.* $[Sh^0 H_2]$*)"*

$$\bigwedge_{H_1}^{G} : H^k(Sh^0 H_1) \to H^{k+p}(Sh^0 G)$$

$$(resp. \ \bigwedge_{H_2}^{G} : H^k(Sh^0 H_2) \to H^{k+q}(Sh^0 G))$$

est **injective***.*

Le cas des groupes $O(2,n)$ $(n \geq 3)$ est légèrement différent nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 4.23. *Supposons fixées des données* $Sh^0 H \subset Sh^0 G$ *avec* $H = O(2, n-1)$ *et* $G = O(2,n)$ *avec* $n \geq 3$*. Alors,*

1. *pour tout entier* $\mathbf{k} \leq \mathbf{n}-\mathbf{1}$*, l'application de restriction virtuelle*

$$\mathrm{Res}_H^G : H^k(Sh^0 G) \to \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^k(Sh^0 H)$$

est **injective** *;*

2. *pour tout entier* $\mathbf{k} \leq \left[\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{2}}\right] - \mathbf{2}$*, l'application "cup-produit avec* $[Sh^0 H]$*"*

$$\bigwedge_{H}^{G} : H^k(Sh^0 H) \to H^{k+2}(Sh^0 G)$$

est **injective***.*

En prenant $k = 0$ dans le point 2. des Théorèmes 4.22 et 4.23 on retrouve le résultat suivant dû à Millson et Raghunathan [89] [10].

Corollaire 4.10. *Supposons fixées les données* $Sh^0 H \subset Sh^0 G$ *avec* $H = O(p, q-1)$ *et* $G = O(p,q)$ *avec* $1 \leq p \leq q$*. Alors, la classe fondamentale de* $Sh^0 H$ *est non triviale dans* $H^p(Sh^0 G)$*.*

Les Théorèmes 4.22 et 4.23 sont en particulier une vaste généralisation de ce Corollaire. Le plus surprenant est peut-être que mises bout à bout les applications des points 1. et 2. impliquent une sorte de décomposition de Lefschetz dans un cadre réel. Les Théorèmes 4.21 et 4.22 permettent en tout cas de comprendre géométriquement la façon dont certaines classes de cohomologie apparaissent dans l'esprit du Corollaire ci-dessus. Il n'est pas facile en général d'exhiber des classes de cohomologie non triviales dans les variétés arithmétiques associées aux groupes orthogonaux. Lorsque celles-ci

[10] Pour q petit le Corollaire ne découle pas directement des Théorèmes il faut travailler un petit peu plus.

proviennent de groupes orthogonaux sur des corps de nombres, le Corollaire ci-dessus permet de telles constructions. C'est d'ailleurs historiquement le premier résultat concernant ce problème. Lorsqu'elles proviennent d'autres constructions Raghunathan et Venkataramana ont remarqué qu'il pouvait être utile de les plonger dans des variétés arithmétiques associées aux groupes unitaires. Le théorème suivant éclaire les relations entre leurs groupes de cohomologie.

Théorème 4.24. *Supposons fixées les données $Sh^0H \subset Sh^0G$ avec $H = O(p,q)$, $G = U(p,q)$ et $p,q \geq 3$. Alors,*

1. *pour tout entier $\mathbf{k \leq p+q-3}$, l'application de restriction virtuelle*

$$Res_H^G : H^{k,0}(Sh^0G) \to \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^k(Sh^0H)$$

est **injective** *;*

2. *la projection de la classe $[Sh^0H] \in H^{pq}(Sh^0G)$ dans la partie fortement primitive de la cohomologie est non triviale si et seulement si pq est* **pair***.*

Là encore le cas $p = 2$ et $q \geq 3$ est légèrement différent, nous montrons le théorème suivant.

Théorème 4.25. *Supposons fixées les données $Sh^0H \subset Sh^0G$ avec $H = O(2,n)$, $G = U(2,n)$ et $n \geq 3$. Alors,*

1. *pour tout entier $\mathbf{k} \leq \left[\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{2}}\right]$, l'application de restriction virtuelle*

$$Res_H^G : H^{k,0}(Sh^0G) \to \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^k(Sh^0H)$$

est **injective** *;*

2. *la classe de Sh^0H dans $H^{2n}(Sh^0G)$ est non triviale.*

En prenant $k = p$ dans les Théorèmes 4.24 et 4.25 on obtient le corollaire intéressant suivant [11].

Corollaire 4.11. *Supposons fixées les données $Sh^0H \subset Sh^0G$ avec $H = O(p,q)$, $G = U(p,q)$ et $1 \leq p \leq q$. Alors, l'application de restriction virtuelle*

$$Res_H^G : H^{p,0}(Sh^0G) \to \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^p(Sh^0H)$$

est **injective***.*

[11] Pour q petit le Corollaire ne découle pas directement du Théorème il faut travailler un petit peu plus.

De ce Corollaire et du Théorème d'Anderson concernant la cohomologie holomorphe des variétés arithmétiques associées aux groupes unitaires, nous déduisons le Corollaire suivant.

Corollaire 4.12. *Soit G un groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ obtenu par restriction des scalaires à partir d'un groupe de type D_n, $\neq {}^{3,6}D_4$ et $n > 2$, et tel que $G = O(p,q)$, avec $1 \leq p \leq q$. Alors,*

$$H^p(Sh^0 G) \neq 0.$$

Par rapport aux Théorèmes 4.2 (de Li) et 2.8 (de Li, Raghunathan et Venkataramana et Li-Millson) ce résultat n'est nouveau que pour $n = 3$ et $p > 1$. La démonstration que l'on en donne ici permet de traiter tous ces cas de manière uniforme, notons que ce Corollaire reste vrai si G est isotrope avec la même démonstration.

Soit r_G l'entier définit au §1.3. Alors

$$H^i(Sh^0 G) = 0, \text{ pour tout } 0 < i < r_G.$$

On a ainsi

$$r_G = \begin{cases} p, & G = GS_p \\ \min(p,q), & G = O(p,q),\ U(p,q) \\ p-1, & G = O^*(2p) \\ 2\min(p,q), & G = Sp(p,q). \end{cases}$$

Rappelons que dans le cas hermitiens l'existence d'une variété de Shimura $Sh^0 G$ avec $H^{r_G}(Sh^0 G) \neq 0$ est démontrée par Anderson [3]. En se restreignant de $U(p,q)$ à $O(p,q)$ ou de $U(2p,2q)$ à $Sp(p,q)$, nos méthodes nous permettent de complèter légèrement un résultat de Li [76] et d'en donner une démonstration unifiée.

Corollaire 4.13. *Soit G un groupe $\mathbb{Q}$-algébrique provenant (par restriction des scalaires) d'une algèbre à involution (de type I, II ou III) sur un corps de nombre et tel que $G = O(p,q)$ ou $Sp(p,q)$. Alors,*

$$H^{r_G}(Sh^0 G) \neq 0.$$

L'analogue de ce résultat est faux pour le groupe $U(p,q)$ d'après le Théorème 4.4.

Nous démontrons enfin dans [18] (et par des méthodes différentes) l'analogue suivant du Théorème 4.13 pour les groupes orthogonaux.

Théorème 4.26. *Supposons fixée une donnée $Sh^0 G$ avec $G = O(p,q)$, avec $p, q \geq 3$. Soient α et β deux classes de cohomologie de degrés respectifs k et l dans $H^*(Sh^0 G)$ avec $\mathbf{k} + \mathbf{l} \leq \mathbf{q} + \mathbf{p} - \mathbf{3}$. Il existe alors un élément $g \in G(\mathbb{Q})$ tel que*

$$g(\alpha) \wedge \beta \neq 0.$$

Précisons maintenant un peu plus ces résultats.

Groupes unitaires. Le premier point du Théorème 4.21 découle du Théorème 4.5 un peu précisé :

Théorème 4.27. *Soit G un groupe algébrique réductif, connexe et anisotrope sur $\mathbb{Q}$ tel que $G = U(p,q)$. Soit $Sh^0H \subset Sh^0G$ avec $H = U(p,q-r)$ plongé de manière standard dans G. Soient λ et μ deux partitions incluses dans $p\times q$ formant un couple compatible avec $\mu/\lambda = (p_1\times q_1)*\ldots*(p_m\times q_m)$. Alors, l'application*

$$H^{\lambda,\mu}(Sh^0G) \to \prod_{g\in G(\mathbb{Q})} H^{|\lambda|+|\hat{\mu}|}_{\text{prim}+}(Sh^0H)$$

obtenue en composant l'application Res_H^G et la projection sur la composante fortement primitive de la cohomologie de Sh^0H est **injective** *si et seulement si la partition (r^p) s'inscrit dans le diagramme gauche μ/λ (i.e. si $p_1+\ldots+p_m = p$ et $r \leq q_i$ pour $i = 1,\ldots,m$). Son image est alors contenue dans $\prod_{g\in G(\mathbb{Q})} H^{\lambda,\mu-(r^p)}(Sh^0H)$.*

Le deuxième point du Théorème 4.21 est quant à lui démontré (avec Clozel) dans [16]. Plus généralement nous conjecturons le résultat suivant.

Conjecture 4.6. *Soit G un groupe algébrique réductif, connexe et anisotrope sur $\mathbb{Q}$ tel que $G = U(p,q+r)$. Soit $Sh^0H \subset Sh^0G$ avec $H = U(p,q)$ plongé de manière standard dans G. Soient λ et μ deux partitions incluses dans $p\times q$ formant un couple compatible avec $\mu/\lambda = (p_1\times q_1)*\ldots*(p_m\times q_m)$. Alors, l'application*

$$H^{\lambda,\mu}(Sh^0H) \to H^{|\lambda|+pr+|\hat{\mu}|}_{\text{prim}+}(Sh^0G)$$

obtenue en composant l'application $\bigwedge_H^G$ et la projection sur la composante fortement primitive de la cohomologie de Sh^0G est **injective** *si et seulement si la partition (r^p) s'inscrit dans le diagramme gauche μ/λ (i.e. si $p_1+\ldots+p_m = p$ et $r \leq q_i$ pour $i = 1,\ldots,m$). Son image est alors contenue dans $H^{\lambda+(r^p),\mu}(Sh^0G)$.*

Groupes orthogonaux. Dans le cas des groupes orthogonaux et de l'application de restriction nous déduisons de leurs analogues locaux les théorèmes suivants.

Théorème 4.28. *Soit G un groupe algébrique réductif, connexe et anisotrope sur $\mathbb{Q}$ tel que $G = O(p,q)$. Soit $Sh^0H \subset Sh^0G$ avec $H = O(p,q-r)$ plongé de manière standard dans G avec $p,q \geq 2$. Soit i un entier $\leq (q-r-2)/2$ tel que $p+q-r-2i \geq 5$. Alors, l'application*

$$H^{(i^p)}(Sh^0G) \to \prod_{g\in G(\mathbb{Q})} H^{*}_{\text{prim}+}(Sh^0H)$$

obtenue en composant l'application Res_H^G *et la projection sur la composante fortement primitive de la cohomologie de* Sh^0H *est* **injective**. *Son image est contenue dans* $\prod_{g\in G(\mathbb{Q})} H^{(i^p)}(Sh^0H)$.

Théorème 4.29. *Soit* G *un groupe algébrique réductif, connexe et anisotrope sur* $\mathbb{Q}$ *tel que* $G = U(p,q)$. *Soit* $Sh^0H \subset Sh^0G$ *avec* $H = O(p,q)$ *plongé de manière standard dans* G *avec* $p,q \geq 2$. *Soit* i *un entier* $\leq (q-2)/2$ *tel que* $p+q-2i \geq 5$. *Alors, l'application*

$$H^{(i^p)}(Sh^0G) \to \prod_{g\in G(\mathbb{Q})} H^*_{\mathrm{prim}+}(Sh^0H)$$

obtenue en composant l'application Res_H^G *et la projection sur la composante fortement primitive de la cohomologie de* Sh^0H *est* **injective**. *Son image est contenue dans* $\prod_{g\in G(\mathbb{Q})} H^{(i^p)}(Sh^0H)$.

Plus généralement et au vu de la Conjecture 4.2 nous conjecturons les résultats suivants.

Conjecture 4.7. *Soit* G *un groupe algébrique réductif, connexe et anisotrope sur* $\mathbb{Q}$ *tel que* $G = O(p,q)$. *Soit* $Sh^0H \subset Sh^0G$ *avec* $H = O(p,q-r)$ *plongé de manière standard dans* G, $1 \leq p,q$ *et* $1 \leq r < q$. *Soit* λ *une partition orthogonale dans* $p \times q$. *Alors, l'application*

$$H^{\lambda}(Sh^0G)^{\pm_2}_{\pm_1} \to \prod_{g\in G(\mathbb{Q})} H^{|\lambda|}_{\mathrm{prim}+}(Sh^0H)$$

obtenue en composant l'application Res_H^G *et la projection sur la composante fortement primitive de la cohomologie de* Sh^0H *est* **injective** *si et seulement si la partition* (r^p) *s'inscrit dans le diagramme gauche* $\hat{\lambda}/\lambda$. *Son image est alors contenue dans* $\prod_{g\in G(\mathbb{Q})} H^{\lambda}(Sh^0H)^{\pm'_2}_{\pm'_1}$.

Conjecture 4.8. *Soit* G *un groupe algébrique réductif, connexe et anisotrope sur* $\mathbb{Q}$ *tel que* $G = U(p,q)$. *Soit* $Sh^0H \subset Sh^0G$ *avec* $H = O(p,q)$ *plongé de manière standard dans* G, $1 \leq p,q$. *Soient* λ *et* μ *deux partitions incluses dans* $p \times q$ *formant un couple compatible. Si l'application*

$$H^{\lambda,\mu}(Sh^0G)^{\pm_2}_{\pm_1} \to \prod_{g\in G(\mathbb{Q})} H^{|\lambda|}_{\mathrm{prim}+}(Sh^0H) \tag{4.13}$$

obtenue en composant l'application Res_H^G *et la projection sur la composante fortement primitive de la cohomologie de* Sh^0H *est non nulle alors* $\lambda = 0$ *ou* $\mu = p \times q$. *Supposons par exemple* $\mu = p \times q$. *Alors, l'application (4.13) est* **injective** *si et seulement si la partition* λ *est orthogonale. Son image est alors contenue dans* $\prod_{g\in G(\mathbb{Q})} H^{\lambda}(Sh^0H)^{\pm'_2}_{\pm'_1}$.

Concernant le cup-produit nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 4.30. *Soit G un groupe algébrique réductif, connexe et anisotrope sur $\mathbb{Q}$ tel que $G = O(p,q)$, avec $p,q \geq 2$. Soient α et β deux classes de cohomologie appartenant respectivement à $H^{(k^p)}(Sh^0G)$ et $H^{(l^p)}(Sh^0G)$ avec $k+l \leq (q-2)/2$ et $p+q-2(k+l) \geq 5$. Il existe alors un élément $g \in G(\mathbb{Q})$ tel que le projeté de*

$$g(\alpha) \wedge \beta \neq 0$$

dans $H^{(k+l)^p}(Sh^0G)$ soit non nul.

Plus généralement et au vu du Théorème 4.18 nous conjecturons le résultat suivant (qui généralise la Conjecture 2.5).

Conjecture 4.9. *Soit G un groupe algébrique réductif, connexe et anisotrope sur $\mathbb{Q}$ tel que $G = O(p,q)$, avec $p,q \geq 1$. Soient α et β deux classes de cohomologie appartenant respectivement à $H^{(k^p)}(Sh^0G)$ et $H^{(l^p)}(Sh^0G)$.. Alors, il existe un élément $g \in G(\mathbb{Q})$ tel que le projeté de*

$$g(\alpha) \wedge \beta \neq 0$$

dans la partie fortement primitive de la cohomologie de Sh^0G soit non nul si et seulement si $k+l \leq q/2$. Le projeté appartient alors à $H^{(k+l)^p}(Sh^0G)$.

Enfin concernant les théorèmes de relèvement, nous montrons et conjecturons les résultats suivants.

Théorème 4.31. *Supposons fixée une donnée $Sh^0H \subset Sh^0G$ avec $H = O(p,q)$ plongé de manière standard dans $G = O(p,q+r)$, avec $p,q \geq 2$. Alors, pour tout degré $k \leq \min(p+q+r-rp-3, (q-pr)/2-1)$, l'application "cup-produit avec $[Sh^0H]$"*

$$\bigwedge_H^G : H^k(Sh^0H) \to H^{k+rp}(Sh^0G)$$

est **injective**.

Conjecture 4.10. *Supposons fixée une donnée $Sh^0H \subset Sh^0G$ avec $H = O(p,q)$ plongé de manière standard dans $G = O(p,q+r)$. Si λ est une partition incluse dans $p \times q$, alors l'application*

$$H^\lambda(Sh^0H) \to H^{|\lambda|+rp}_{\mathrm{prim}+}(Sh^0G)$$

obtenue en composant l'application "cup-produit avec $[Sh^0H]$" et la projection sur la composante fortement primitive de la cohomologie de Sh^0G est **injective** *si et seulement si la partition (r^p) s'inscrit dans le diagramme $\hat{\lambda}/\lambda$. Son image est alors contenue dans $H^{\lambda+(r^p)}(Sh^0G)$.*

4.5 Généralisations

Ces résultats se généralisent de façon assez naturelle dans deux directions : (1) lorsque les systèmes de coefficients (de la cohomologie) sont non triviaux, et (2) lorsque les groupes sont isotropes.

Coefficients tordus. Le cas (1) est relativement immédiat. Soit E une représentation de dimension finie de G. La représentation E définit un système local $\mathcal{E}$ sur tous les quotients $\Gamma \backslash X_G$ considérés dans cet article. Supposons pour simplifier E irréductible. Toujours d'après la théorie de Vogan et Zuckerman, l'algèbre graduée $H^*(Sh^0 G, \mathcal{E})$ peut être décomposée selon des représentations $A_{\mathfrak{q}}(E)$ associées aux sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{g}$ (voir [116]). Les résultats des sections précédentes se traduisent alors mot à mot. Dans le cas de l'application "cup-produit avec $[Sh^0 H]$" il faut quand même penser à tordre la classe fondamentale $[Sh^0 H]$. Plus précisemment et en se plaçant à un niveau fini Γ, on considère toujours la sous-variété $(\Gamma \cap H) \backslash X_H \to \Gamma \backslash X_G$, que l'on note C_Γ^H. Il s'agit alors de construire une section s du fibré $\mathcal{E}_{|C_\Gamma^H}$. Ce que réalisent Tong et Wang dans [110], dont on peut également extraire la construction de la classe duale à (C_Γ^H, s) dans $H_2^{d_G - d_H}(\Gamma \backslash X_G, \mathcal{E})$. La reste se généralise immédiatement. Notons même que concernant les symboles modulaires les démonstrations se simplifient dans nombre de cas où la forme duale construite par Tong et Wang est L^1. On peut en effet alors former directement une série de Poincaré convergente (sans avoir recours à un poids) et se passer de l'isolation spectrale. Ceci explique les constructions par Tong et Wang de classes de cohomologie non triviales (pour des systèmes de coefficients non triviaux).

Groupes isotropes. Le cas (2) est plus délicat et très intéressant. Considérons donc maintenant un groupe G isotrope sur $\mathbb{Q}$. La cohomologie de $Sh^0 G$ n'est plus naturellement reliée à la théorie des représentations, il n'y a plus de décomposition de Hodge ou de Vogan-Zuckerman. Il est dans ce contexte plus naturel de considérer la cohomologie L^2, $H_2^*(Sh^0 G)$, ou encore la cohomologie cuspidale $H_{\mathrm{cusp}}^*(Sh^0 G)$. L'espace $H_{\mathrm{cusp}}^*(Sh^0 G)$ est un sous-espace de $H^*(Sh^0 G)$ comme de $H_2^*(Sh^0 G)$, celui des classes représentées par des formes cuspidales (qui sont bornées et donc L^2). Les théories de Matsushima et de Vogan-Zuckerman s'appliquent à l'espace $H_2^*(Sh^0 G)$. Le sous-espace $H_{\mathrm{cusp}}^*(Sh^0 G)$ hérite alors de la décomposition de Vogan-Zuckerman.

Commençons par considérer l'application de restriction stable de G à H. Soit $\omega_\varphi \in H_2^R(\pi : \Gamma)$. On peut montrer (*cf.* [18]) que la forme harmonique ω_φ est bornée sur $\Gamma \backslash X_G$. La restriction de la forme ω_φ, via les applications j_g ($g \in G(\mathbb{Q})$), aux sous-variétés $(H \cap g^{-1} \Gamma g) \backslash X_H$ sont bornées et donc dans L^2. L'application

$$\mathrm{Res}^G_{2,\ H} : H^*_2(Sh^0G) \to \prod_{g\in G(\mathbb{Q})} H^*_2(Sh^0H)$$

est bien définie. Si de plus $\omega_\varphi \in H^R_{\mathrm{cusp}}(\pi : \Gamma)$, un résultat de Clozel et Venkataramana [36, Lemma 2.9] affirme que la forme $j_g^*\omega_\varphi$ est rapidement décroissante le long de $(H\cap g^{-1}\Gamma g)\backslash X_H$, et définit en particulier une forme cuspidale. L'application

$$\mathrm{Res}^G_{\mathrm{cusp},\ H} : H^*_{\mathrm{cusp}}(Sh^0G) \to \prod_{g\in G(\mathbb{Q})} H^*_{\mathrm{cusp}}(Sh^0H)$$

est bien définie, elle est induite par la restriction de $\mathrm{Res}^G_{2,\ H}$ au sous-espace $H^*_{\mathrm{cusp}}(Sh^0G)$.

La question de l'injectivité des applications $\mathrm{Res}^G_{2,\ H}$ et $\mathrm{Res}^G_{\mathrm{cusp},\ H}$ est donc bien posée. Les techniques de [14] ne se généralisent pas au cas isotrope (non-compact), le Théorème 4.27 avec Res^G_H remplacé par $\mathrm{Res}^G_{2,\ H}$ ou $\mathrm{Res}^G_{\mathrm{cusp},\ H}$ est ouvert. Il est par contre possible de suivre la démonstration du Théorème 4.28 dans le cas isotrope, *cf.* [18]. Remarquons finalement que dans le cas unitaire, et en ce qui concerne la cohomologie holomorphe l'application $\mathrm{Res}^G_{2,\ H}$ est bien comprise, d'après les travaux de Clozel et Venkataramana [36].

Considérons maintenant l'application "cup-produit avec $[Sh^0H]$". La seule étape qui utilise de manière cruciale le fait que G est anisotrope est la démonstration des Théorèmes 4.19 et 4.20. La généralisation de ce résultat au cas isotrope semble nécessiter des idées nouvelles ou à tout le moins une description plus fine de la géométrie à l'infini des variétés limites effeuillées. On peut néanmoins appliquer notre méthode aux symboles modulaires. Dans un preprint récent [107], Speh et Venkataramana démontrent que si $Sh^0H \subset Sh^0G$ avec $H = U(1,q)$, $G = U(1,q+r)$ et $r = 1$ ou 2, alors la classe $[Sh^0H]$ est non triviale dans $H^*(Sh^0G)$ et engendre sous l'action des opérateurs de Hecke un espace de dimension infini. Ils montrent en fait la non trivialité de la projection de la classe $[Sh^0H]$ dans la cohomologie triviale. De manière complémentaire notre méthode permet de démontrer (au moins lorsque $r = 1$) la non trivialité de la projection de $[Sh^0H]$ dans la cohomologie fortement primitive. Nous montrons plus précisément le théorème suivant.

Théorème 4.32. *Supposons fixées des données $Sh^0H \subset Sh^0G$ avec $H = O(1,q)$ (resp. $= U(1,q)$), $G = O(1,q+1)$ (resp. $U(1,q+1)$) et $q \geq 2$ (resp. $q \geq 1$). Alors, la projection de la classe $[Sh^0H]$ dans la composante fortement primitive de $H^*_2(Sh^0G)$ est non triviale et le sous-espace engendré par ses translatés de Hecke est de dimension infini. En particulier, la classe $[Sh^0H]$ est non triviale dans $H^*(Sh^0G)$ et engendre sous l'action des opérateurs de Hecke un espace de dimension infini.*

Groupes généraux. Il n'y a évidemment aucune raison autre que technique pour restreindre l'étude des propriétés de Lefschetz automorphes au cas des groupes unitaires ou orthogonaux. Concluons alors ce mémoire par deux conjectures (peut-être un peu optimistes et ambitieuses) qui décrivent les propriétés de Lefschetz automorphes auxquelles on s'attend pour des groupes généraux.

La première conjecture concerne l'application de restriction stable. Elle est motivée par les Théorèmes 4.27 et 4.28, l'article [14] et (surtout) par un résultat général de Venkataramana [113, Theorem 6] dans le cas hermitien. Nous avons besoin de quelques préliminaires pour énoncer cette conjecture.

Considérons G un groupe algébrique réductif et connexe sur $\mathbb{Q}$, presque simple sur $\mathbb{Q}$ modulo son centre. Nous supposons de plus que que le groupe $G(\mathbb{R})$ de ses points réels est semi-simple et non compact modulo un centre compact. Soit $H \subset G$ un sous-groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{Q}$ dont le groupe $H(\mathbb{R})$ intersecte un compact maximal K de $G(\mathbb{R})$ selon un sous-groupe compact maximal de $H(\mathbb{R})$. Soient $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan du complexifié de l'algèbre de Lie de $G(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{k}_H \oplus \mathfrak{p}_H$ la décomposition correspondante pour H. Notons $\mathfrak{s}$ le supplémentaire orthogonal (pour la forme de Killing) de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Soit maintenant $T \subset K$ un tore maximal, $\mathfrak{t}_0 = \mathrm{Lie}(T)$ et $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0 \otimes \mathbb{C}$. Fixons $\Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ un système positif de racines dans $\Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$. Posons alors

$$e_H = \bigwedge^{\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{s} \cap \mathfrak{p})} (\mathfrak{s} \cap \mathfrak{p}) \tag{4.14}$$

et considérons V_H le plus petit sous-espace K-stable de $\bigwedge^* \mathfrak{p}$ contenant e_H (cet espace n'est en général par irréductible).

Étant donné un élément $X \in i\mathfrak{t}_0$ tel que $\alpha(X) \geq 0$ pour toute racine $\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$, on pose

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(X) = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}, \ \mathfrak{l} = \mathfrak{g}^X, \ \mathfrak{u} = \oplus_{\alpha(X)>0} \mathfrak{g}_\alpha.$$

L'algèbre $\mathfrak{q}$ est une sous-algèbre parabolique θ-stable de $\mathfrak{g}$. Notons $E(G, L)$ le sous-espace de $\bigwedge^* \mathfrak{p}$ engendré par les translatés par K du sous-espace $\bigwedge^*(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{l})$ et toujours $R = \dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$.

Conjecture 4.11. *L'application*

$$H_2^R(A_{\mathfrak{q}} : Sh^0 G) \to \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^R_{2,\ \mathrm{prim}+}(Sh^0 H)$$

obtenue en composant l'application $\mathrm{Res}^G_{2,\ H}$ *et la projection sur la composante fortement primitive de la cohomologie* L^2 *de* $Sh^0 H$ *est* **injective** *si et seulement si l'intersection*

$$V_H \cap E(G, L) \neq 0.$$

Considérons maintenant une sous-algèbre parabolique θ-stable de $\mathfrak{h}$, que nous notons toujours $\mathfrak{q}$. La sous-algèbre $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{h}$ définit bien évidemment une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. On peut donc toujours parler de $E(G, L)$.

Conjecture 4.12. *La projection de la classe $[Sh^0 H]$ dans la cohomologie L^2 fortement primitive $H^*_{2,\ \mathrm{prim}+}(Sh^0 G)$ est non nulle si et seulement si*

$$\mathrm{rang}_{\mathbb{C}}(G/H) = \mathrm{rang}_{\mathbb{C}}(K/(K \cap H)).$$

Dans ce cas, l'application

$$H_2^R(A_{\mathfrak{q}} : Sh^0 H) \to H^{R+d}_{2,\ \mathrm{prim}+}(Sh^0 G)$$

obtenue en composant l'application "cup-produit avec $[Sh^0 H]$" et la projection sur la composante fortement primitive de la cohomologie L^2 de $Sh^0 G$ est **injective** *si et seulement si l'intersection*

$$V_H \cap E(G, L) \neq 0.$$

Remarques. Il n'est même pas évident que les Conjectures 4.11 et 4.12 impliquent les résultats et conjectures énoncés plus haut dans le cas des groupes unitaires et orthogonaux. Cela semble néanmoins raisonnable au vu de [14]. Enfin on peut évidemment formuler une conjecture générale analogue concernant l'application de cup-produit.

Remerciements

Je remercie chaleureusement Jean-Pierre Otal, Étienne Ghys, Damien Gaboriau, Laurent Clozel et T.N. Venkataramana (dans l'ordre chronologique) pour tout ce que j'ai appris à leur contact. Je remercie enfin Maria Eulalia Vares pour son formidable travail d'éditrice en chef d'Ensaios Matemáticos.

Bibliographie

[1] *Geometry. II*, volume 29 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 1993. Spaces of constant curvature, A translation of Geometriya. II, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1988, Translation by V. Minachin [V. V. Minakhin], Translation edited by È. B. Vinberg.

[2] Iain R. Aitchison and J. Hyam Rubinstein. Geodesic surfaces in knot complements. *Experiment. Math.*, 6(2), 137–150, 1997.

[3] Greg W. Anderson. Theta functions and holomorphic differential forms on compact quotients of bounded symmetric domains. *Duke Math. J.*, 50(4), 1137–1170, 1983.

[4] James Arthur. Unipotent automorphic representations : conjectures. *Astérisque*, (171-172), 13–71, 1989. Orbites unipotentes et représentations, II.

[5] M. F. Atiyah. Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras. In *Colloque "Analyse et Topologie" en l'Honneur de Henri Cartan (Orsay, 1974)*, pages 43–72. Astérisque, No. 32–33. Soc. Math. France, Paris, 1976.

[6] Mark D. Baker. The virtual **Z**-representability of certain 3-manifold groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 103(3), 996–998, 1988.

[7] N. Bergeron. Premier nombre de Betti et spectre du laplacien de certaines variétés hyperboliques. *Enseign. Math.* (2) 46 (2000), no. 1-2, 109–137.

[8] N. Bergeron. Sur l'homologie et le spectre des variétés hyperboliques. *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie*, Vol. 18, Année 1999–2000, 17–26.

[9] N. Bergeron. Cycles géodésiques transverses dans les variétés hyperboliques. *Geom. Funct. Anal.* 12 (2002), no. 3, 437–463.

[10] N. Bergeron. Asymptotique de la norme L^2 d'un cycle géodésique dans les revêtements de congruence d'une variété hyperbolique arithmétique. *Math. Z.* 241 (2002), no. 1, 101–125.

[11] N. Bergeron. Lefschetz properties for arithmetic real and complex hyperbolic manifolds. *Int. Math. Res. Not.* 2003, no. 20, 1089–1122.

[12] N. Bergeron. Propriétés de Lefschetz dans la cohomologie de certaines variétés arithmétiques : le cas des surfaces modulaires de Hilbert. *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie.* Vol. 21. Année 2002–2003, 75–101.

[13] N. Bergeron ; D. Gaboriau. Asymptotique des nombres de Betti, invariants l^2 et laminations. *Comment. Math. Helv.* 79 (2004), no. 2, 362–395.

[14] N. Bergeron. Tentative d'épuisement de la cohomologie d'une variété de Shimura par restriction à ses sous-variétés. *arXiv :math.NT/0403407 v1 24 Mar 2004 et soumis pour publication* 57 pages.

[15] N. Bergeron. Produits dans la cohomologie des variétés de Shimura : quelques calculs. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 339 (2004), no. 11, 751–756.

[16] N. Bergeron ; L. Clozel. Spectre automorphe des variétés hyperboliques et applications topologiques. *Astérisque* 303 (2005), xx+214 pages.

[17] N. Bergeron. Des équations différentielles à coefficients algébriques aux variétés arithmétiques. *à paraître dans un Livre sur Poincaré.*

[18] N. Bergeron. Propriétés de Lefschetz automorphes pour les groupes unitaires et orthogonaux. *arXiv :math.GR/0503062 v1 3 Mar 2005 et soumis pour publication* 106 pages.

[19] N. Bergeron. Spectre des surfaces hyperboliques. *notes de cours de DEA disponibles sur-http ://www.math.jussieu.fr/ baladi/Cours-bergeron.pdf* 135 pages.

[20] N. Bergeron. Représentations cohomologiques isolées. *arXiv :math.RT/0511689 v1 28 Nov 2005 et soumis pour publication* 39 pages.

[21] N. Bergeron ; T. N. Venkataramana. A note on the rational structure of the cohomology ring of a Shimura variety. *en préparation.*

[22] A. Borel. Automorphic L-functions. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 27–61. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[23] Armand Borel. Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces. *Topology*, 2, 111–122, 1963.

[24] Armand Borel. Cohomologie de sous-groupes discrets et représentations de groupes semi-simples. In *Colloque "Analyse et Topologie" en l'Honneur de Henri Cartan (Orsay, 1974)*, pages 73–112. Astérisque, No. 32–33. Soc. Math. France, Paris, 1976.

[25] Armand Borel and Harish-Chandra. Arithmetic subgroups of algebraic groups. *Ann. of Math. (2)*, 75, 485–535, 1962.

[26] Armand Borel and Nolan R. Wallach. *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, volume 94 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.

[27] M. Burger, J.-S. Li, and P. Sarnak. Ramanujan duals and automorphic spectrum. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 26(2), 253–257, 1992.

[28] M. Burger and P. Sarnak. Ramanujan duals. II. *Invent. Math.*, 106(1), 1–11, 1991.

[29] Peter Buser. A note on the isoperimetric constant. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 15(2), 213–230, 1982.

[30] Peter Buser. *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, volume 106 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.

[31] Jeff Cheeger. A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian. In *Problems in analysis (Papers dedicated to Salomon Bochner, 1969)*, pages 195–199. Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1970.

[32] Jeff Cheeger and Mikhael Gromov. L_2-cohomology and group cohomology. *Topology*, 25(2), 189–215, 1986.

[33] L. Clozel. On the cuspidal cohomology of arithmetic subgroups of $\mathrm{SL}(2n)$ and the first Betti number of arithmetic 3-manifolds. *Duke Math. J.*, 55(2), 475–486, 1987.

[34] L. Clozel. Produits dans la cohomologie holomorphe des variétés de Shimura. II. Calculs et applications. *J. Reine Angew. Math.*, 444, 1–15, 1993.

[35] Laurent Clozel. On limit multiplicities of discrete series representations in spaces of automorphic forms. *Invent. Math.*, 83(2), 265–284, 1986.

[36] L. Clozel and T. N. Venkataramana. Restriction of the holomorphic cohomology of a Shimura variety to a smaller Shimura variety. *Duke Math. J.*, 95(1), 51–106, 1998.

[37] Laurent Clozel. Spectral theory of automorphic forms. à paraître (Conférence du Park City Math. Institute, AMS/IAS, 2002).

[38] Laurent Clozel. On the cohomology of Kottwitz's arithmetic varieties. *Duke Math. J.*, 72(3), 757–795, 1993.

[39] Laurent Clozel. Sur une question d'Armand Borel. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 324(9), 973–976, 1997.

[40] Laurent Clozel. Démonstration de la conjecture τ. *Invent. Math.*, 151(2), 297–328, 2003.

[41] B. Colbois and A.-M. Matei. On the optimality of J. Cheeger and P. Buser inequalities. *Differential Geom. Appl.*, 19(3), 281–293, 2003.

[42] Alain Connes. Sur la théorie non commutative de l'intégration. In *Algèbres d'opérateurs (Sém., Les Plans-sur-Bex, 1978)*, volume 725 of *Lecture Notes in Math.*, pages 19–143. Springer, Berlin, 1979.

[43] David L. de George and Nolan R. Wallach. Limit formulas for multiplicities in $L^2(\Gamma\backslash G)$. *Ann. Math. (2)*, 107(1), 133–150, 1978.

[44] Patrick Delorme. Formules limites et formules asymptotiques pour les multiplicités dans $L^2(G/\Gamma)$. *Duke Math. J.*, 53(3), 691–731, 1986.

[45] Beno Eckmann. Harmonische Funktionen und Randwertaufgaben in einem Komplex. *Comment. Math. Helv.*, 17, 240–255, 1945.

[46] Beno Eckmann. Coverings and Betti numbers. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55, 95–101, 1949.

[47] Beno Eckmann. Introduction to l_2-methods in topology : reduced l_2-homology, harmonic chains, l_2-Betti numbers. *Israel J. Math.*, 117, 183–219, 2000. Notes prepared by Guido Mislin.

[48] J. Faraut. Distributions sphériques sur les espaces hyperboliques. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 58(4), 369–444, 1979.

[49] Michael Farber. Geometry of growth : approximation theorems for L^2 invariants. *Math. Ann.*, 311(2), 335–375, 1998.

[50] Mogens Flensted-Jensen. Discrete series for semisimple symmetric spaces. *Ann. of Math. (2)*, 111(2), 253–311, 1980.

[51] William Fulton. *Young tableaux*, volume 35 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cam-

bridge, 1997. With applications to representation theory and geometry.

[52] Damien Gaboriau. Invariants l^2 de relations d'équivalence et de groupes. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (95), 93–150, 2002.

[53] I. M. Gel′fand, M. I. Graev, and I. I. Pyatetskii-Shapiro. *Representation theory and automorphic functions*, volume 6 of *Generalized Functions*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1990. Translated from the Russian by K. A. Hirsch, Reprint of the 1969 edition.

[54] M. Gromov. Asymptotic invariants of infinite groups. In *Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*, volume 182 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–295. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[55] M. Gromov and I. Piatetski-Shapiro. Nonarithmetic groups in Lobachevsky spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (66), 93–103, 1988.

[56] Michael Harris and Jian-Shu Li. A Lefschetz property for subvarieties of Shimura varieties. *J. Algebraic Geom.*, 7(1), 77–122, 1998.

[57] Hugh M. Hilden, María Teresa Lozano, and José María Montesinos. On knots that are universal. *Topology*, 24(4), 499–504, 1985.

[58] R. Howe. θ-series and invariant theory. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 275–285. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[59] Roger Howe. Reciprocity laws in the theory of dual pairs. In *Representation theory of reductive groups (Park City, Utah, 1982)*, volume 40 of *Progr. Math.*, pages 159–175. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.

[60] Roger Howe. Transcending classical invariant theory. *J. Amer. Math. Soc.*, 2(3), 535–552, 1989.

[61] Roger E. Howe and Calvin C. Moore. Asymptotic properties of unitary representations. *J. Funct. Anal.*, 32(1), 72–96, 1979.

[62] Henryk Iwaniec. *Spectral methods of automorphic forms*, volume 53 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2002.

[63] H. Jacquet and R. P. Langlands. *Automorphic forms on* GL(2). Springer-Verlag, Berlin, 1970. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 114.

[64] D. A. Kajdan. On arithmetic varieties. In *Lie groups and their representations (Proc. Summer School, Bolyai János Math. Soc., Budapest, 1971)*, pages 151–217. Halsted, New York, 1975.

[65] David Kazhdan. Some applications of the Weil representation. *J. Analyse Mat.*, 32, 235–248, 1977.

[66] Henry H. Kim. Functoriality for the exterior square of GL_4 and the symmetric fourth of GL_2. *J. Amer. Math. Soc.*, 16(1), 139–183 (electronic), 2003. With appendix 1 by Dinakar Ramakrishnan and appendix 2 by Kim and Peter Sarnak.

[67] Toshiyuki Kobayashi. Discrete decomposability of the restriction of $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ with respect to reductive subgroups. III. Restriction of Harish-Chandra modules and associated varieties. *Invent. Math.*, 131(2), 229–256, 1998.

[68] S. Kojima and D. D. Long. Virtual Betti numbers of some hyperbolic 3-manifolds. In *A fête of topology*, pages 417–437. Academic Press, Boston, MA, 1988.

[69] Stephen S. Kudla. Seesaw dual reductive pairs. In *Automorphic forms of several variables (Katata, 1983)*, volume 46 of *Progr. Math.*, pages 244–268. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1984.

[70] Stephen S. Kudla and John J. Millson. Harmonic differentials and closed geodesics on a Riemann surface. *Invent. Math.*, 54(3), 193–211, 1979.

[71] Stephen S. Kudla and John J. Millson. Geodesic cyclics and the Weil representation. I. Quotients of hyperbolic space and Siegel modular forms. *Compositio Math.*, 45(2), 207–271, 1982.

[72] S. Kumaresan. On the canonical k-types in the irreducible unitary g-modules with nonzero relative cohomology. *Invent. Math.*, 59(1), 1–11, 1980.

[73] J.-P. Labesse and J. Schwermer. On liftings and cusp cohomology of arithmetic groups. *Invent. Math.*, 83(2), 383–401, 1986.

[74] R. P. Langlands. On the classification of irreducible representations of real algebraic groups. In *Representation theory and harmonic analysis on semisimple Lie groups*, volume 31 of *Math. Surveys Monogr.*, pages 101–170. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.

[75] Jian-Shu Li. Theta lifting for unitary representations with nonzero cohomology. *Duke Math. J.*, 61(3), 913–937, 1990.

[76] Jian-Shu Li. Nonvanishing theorems for the cohomology of certain arithmetic quotients. *J. Reine Angew. Math.*, 428, 177–217, 1992.

[77] Jian-Shu Li and John J. Millson. On the first Betti number of a hyperbolic manifold with an arithmetic fundamental group. *Duke Math. J.*, 71(2), 365–401, 1993.

[78] D. D. Long. Immersions and embeddings of totally geodesic surfaces. *Bull. London Math. Soc.*, 19(5), 481–484, 1987.

[79] Alexander Lubotzky. Eigenvalues of the Laplacian, the first Betti number and the congruence subgroup problem. *Ann. of Math. (2)*, 144(2), 441–452, 1996.

[80] Alexander Lubotzky. Free quotients and the first Betti number of some hyperbolic manifolds. *Transform. Groups*, 1(1-2), 71–82, 1996.

[81] W. Lück. Approximating L^2-invariants by their finite-dimensional analogues. *Geom. Funct. Anal.*, 4(4), 455–481, 1994.

[82] Wolfgang Lück. Dimension theory of arbitrary modules over finite von Neumann algebras and L^2-Betti numbers. I. Foundations. *J. Reine Angew. Math.*, 495, 135–162, 1998.

[83] Wolfgang Lück. Dimension theory of arbitrary modules over finite von Neumann algebras and L^2-Betti numbers. II. Applications to Grothendieck groups, L^2-Euler characteristics and Burnside groups. *J. Reine Angew. Math.*, 496, 213–236, 1998.

[84] Wenzhi Luo, Zeév Rudnick, and Peter Sarnak. On the generalized Ramanujan conjecture for $\mathrm{GL}(n)$. In *Automorphic forms, automorphic representations, and arithmetic (Fort Worth, TX, 1996)*, volume 66 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 301–310. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[85] A. Malcev. On isomorphic matrix representations of infinite groups. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, 8 (50), 405–422, 1940.

[86] Yozô Matsushima. A formula for the Betti numbers of compact locally symmetric Riemannian manifolds. *J. Differential Geometry*, 1, 99–109, 1967.

[87] Rafe Mazzeo and Ralph S. Phillips. Hodge theory on hyperbolic manifolds. *Duke Math. J.*, 60(2), 509–559, 1990.

[88] John J. Millson. On the first Betti number of a constant negatively curved manifold. *Ann. of Math. (2)*, 104(2), 235–247, 1976.

[89] John J. Millson and M. S. Raghunathan. Geometric construction of cohomology for arithmetic groups. I. In *Geometry and analysis*, pages 103–123. Indian Acad. Sci., Bangalore, 1980.

[90] D. Mumford. An algebraic surface with K ample, $(K^2) = 9$, $p_g = q = 0$. *Amer. J. Math.*, 101(1), 233–244, 1979.

[91] Takayuki Oda. A note on the Albanese variety of an arithmetic quotient of the complex hyperball. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 28(3), 481–486 (1982), 1981.

[92] Takeo Ohsawa and Kenshō Takegoshi. Hodge spectral sequence on pseudoconvex domains. *Math. Z.*, 197(1), 1–12, 1988.

[93] R. Parthasarathy. Criteria for the unitarizability of some highest weight modules. *Proc. Indian Acad. Sci. Sect. A Math. Sci.*, 89(1), 1–24, 1980.

[94] Vladimir Platonov and Andrei Rapinchuk. *Algebraic groups and number theory*, volume 139 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1994. Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen.

[95] Dipendra Prasad. A brief survey on the theta correspondence. In *Number theory (Tiruchirapalli, 1996)*, volume 210 of *Contemp. Math.*, pages 171–193. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[96] M. S. Raghunathan and T. N. Venkataramana. The first Betti number of arithmetic groups and the congruence subgroup problem. In *Linear algebraic groups and their representations (Los Angeles, CA, 1992)*, volume 153 of *Contemp. Math.*, pages 95–107. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[97] C. S. Rajan. On the non-vanishing of the first Betti number of hyperbolic three manifolds. *Math. Ann.*, 330(2), 323–329, 2004.

[98] C. S. Rajan and T. N. Venkataramana. On the first cohomology of arithmetic groups. *Manuscripta Math.*, 105(4), 537–552, 2001.

[99] Alan W. Reid. Isospectrality and commensurability of arithmetic hyperbolic 2- and 3-manifolds. *Duke Math. J.*, 65(2), 215–228, 1992.

[100] Jonathan D. Rogawski. *Automorphic representations of unitary groups in three variables*, volume 123 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.

[101] J. Rohlfs. Projective limits of locally symmetric spaces and cohomology. *J. Reine Angew. Math.*, 479, 149–182, 1996.

[102] Peter Sarnak and Xiao Xi Xue. Bounds for multiplicities of automorphic representations. *Duke Math. J.*, 64(1), 207–227, 1991.

[103] Peter Scott. Subgroups of surface groups are almost geometric. *J. London Math. Soc. (2)*, 17(3), 555–565, 1978.

[104] Atle Selberg. On the estimation of Fourier coefficients of modular forms. In *Proc. Sympos. Pure Math., Vol. VIII*, pages 1–15. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1965.

[105] Goro Shimura. Automorphic forms and the periods of abelian varieties. *J. Math. Soc. Japan*, 31(3), 561–592, 1979.

[106] R. J. Spatzier. On isospectral locally symmetric spaces and a theorem of von Neumann. *Duke Math. J.*, 59(1), 289–294, 1989.

[107] B. Speh and T.N. Venkataramana. Construction of some generalised modular symbols. arXiv :math.GR/0409376 v1 21 sept 2004.

[108] W. P. Thurston. *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*. Lectures Notes. Princeton Univ., Princeton, NJ, 1979.

[109] Y. L. Tong and S. P. Wang. Harmonic forms dual to geodesic cycles in quotients of SU(p, 1). *Math. Ann.*, 258(3), 289–318, 1981/82.

[110] Y. L. Tong and S. P. Wang. Geometric realization of discrete series for semisimple symmetric spaces. *Invent. Math.*, 96(2), 425–458, 1989.

[111] Yue Lin Tong. Special cycles, harmonic forms and invariant theory. In *Complex analysis of several variables (Madison, Wis., 1982)*, volume 41 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 191–197. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.

[112] Alain Valette. Restricting cohomological representations of SO(n,1) and SU(n,1). disponible sur http ://www.unine.ch/math/preprints/files/.

[113] T. N. Venkataramana. Cohomology of compact locally symmetric spaces. *Compositio Math.*, 125(2), 221–253, 2001.

[114] Marie-France Vignéras. Variétés riemanniennes isospectrales et non isométriques. *Ann. of Math. (2)*, 112(1), 21–32, 1980.

[115] D. A. Vogan. Isolated unitary representations. to appear in the 2002 Park City summer school volume.

[116] David A. Vogan, Jr. and Gregg J. Zuckerman. Unitary representations with nonzero cohomology. *Compositio Math.*, 53(1), 51–90, 1984.

[117] Nolan R. Wallach. Square integrable automorphic forms and cohomology of arithmetic quotients of SU(p, q). *Math. Ann.*, 266(3), 261–278, 1984.

[118] X. Xue. On the Betti numbers of a hyperbolic manifold. *Geom. Funct. Anal.*, 2(1), 126–136, 1992.

[119] Nader Yeganefar. Formes harmoniques L^2 sur les variétés asymptotiquement hyperboliques complexes. In *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie. Vol. 21. Année 2002–2003*, volume 21 of *Sémin. Théor. Spectr. Géom.*, pages 55–59. Univ. Grenoble I, Saint, 2003.

[120] Nader Yeganefar. Sur la L^2-cohomologie des variétés à courbure négative. *Duke Math. J.*, 122(1), 145–180, 2004.

[121] Sai-Kee Yeung. Betti numbers on a tower of coverings. *Duke Math. J.*, 73(1), 201–226, 1994.

[122] A. V. Zelevinsky. A generalization of the Littlewood-Richardson rule and the Robinson-Schensted-Knuth correspondence. *J. Algebra*, 69(1), 82–94, 1981.

[123] Steven Zucker. L_2 cohomology of warped products and arithmetic groups. *Invent. Math.*, 70(2), 169–218, 1982/83.

Nicolas Bergeron
Unité Mixte de Recherche 8553 du CNRS,
Département de mathématiques et applications (DMA),
45, rue d'Ulm 75230 Paris Cedex 05,
France
adresse electronique : `Nicolas.Bergeron@ens.fr`