Pädagogische Entscheidungen im Unterricht und mögliche Folgen hinsichtlich demokratischer Erziehung

Hartmut Köhler, Stuttgart

Abstract: *Pedagogical teaching decisions in the classroom and their implications for democratic education.* As a possible starting point for reflections on classroom situations according to its leading intentions of the teacher and as a possible step towards changing beliefs of teachers, the article reflects pedagogical decicions and their (possible) results by means of some examples. The article should be a hint to the necessity of such an approach to the development of a dialogical (democratical) culture of classes, it is not yet its systematic treatment.

Kurzreferat: Als möglicher Ausgangspunkt der Reflexion von Unterricht in Hinsicht auf die ihn bestimmenden Intentionen des Lehrers sowie als möglicher Schritt in Richtung einer Veränderung von Lehrereinstellungen (beliefs) werden anhand einiger Beispiele pädagogische Entscheidungen und ihre (möglichen) Folgen betrachtet. Der Artikel versteht sich als Hinweis auf die Notwendigkeit eines solchen Ansatzes für die Entwicklung einer dialogischen (demokratischen) Unterrichtskultur, er leistet aber nicht schon die systematische Aufnahme dieses Ansatzes.

ZDM-Classification: A40, D30, D40

> *In der Lernstoff-"Reife", dem im Unterricht erreichten Niveau, darf sich der Bildungsauftrag unserer Schulen nicht erschöpfen, soll die Demokratie ... feste Wurzeln schlagen. Denn das setzt junge Bürgerinnen und Bürger voraus, die sich in ihrem Gemeinwesen nicht als Untertanen oder Zuschauer, sondern als Aktive, als Handelnde verstehen. Erst dann und nur dann kann sich aus einer Untertanen- und Mitläufergesellschaft eine demokratisch verfaßte Bürgergesellschaft entwickeln.*
> *H. Hamm-Brücher, Staatsministerin a.D. (Hamm-Brücher 1997, S. 44)*

Es gibt etliche Untersuchungen zu Lehrereinstellungen (beliefs) und ihren Fragwürdigkeiten. Wie aber könnten Änderungsversuche ansetzen? Im Folgenden werden Situationen aus dem Umfeld des Unterrichts hinsichtlich getroffener pädagogischer Entscheidungen und ihrer Folgen analysiert als mögliche Anregung solcher Reflexion von Lehrern zur Entwicklung einer dialogischen (demokratischen) Unterrichtskultur.

Die zentrale Frage lautet: *Worauf kommt es mir an, in meinem Mathematikunterricht?* Alles, was es zum Thema Mathematikunterricht und demokratische Erziehung zu diskutieren gibt, ist letztlich eine Frage nach der Weite des Horizontes, unter dem diese Ausgangsfrage beantwortet wird und unter dem dann die pädagogischen Entscheidungen im Unterricht getroffen werden.

> ***Beispiel*** (Köhler 1995): ***Es geht doch nur um die Differenz!***
> *Wie weit ist es von Stuttgart nach Ulm?* lautet die Frage zu einem Wegweiser mit den Angaben *Stuttgart 78 km* und *Ulm 192 km* im Manuskript für ein neues Schulbuch.

Ein Lehrer, der das Manuskript begutachten soll, schreibt dazu: "Die Entfernung zwischen zwei Städten, hier zwischen Stuttgart und Ulm, kann nur in Sonderfällen von einem Wegweiser abgeleitet werden. Hier handelt es sich um verfälschte Lebenswirklichkeit. Die Realsituation sollte nochmals reflektiert werden." Damit er auch wirklich verstanden würde, setzt er eine Skizze daneben, die den Wegweiser ein Stück vor einer Weggabelung zeigt, an der sich die Wege nach Stuttgart und Ulm trennen.

Was war wohl das Thema an der entsprechenden Stelle des Buches? Natürlich die Subtraktion. Unter der Aufgabe stand, mit einem Kasten umrahmt, *37 − 12 = 25*, und unter der 25 stand *Differenz.*

Diesen Kasten bemerkt auch derjenige ganz oben in der Hierarchie, der letztendlich über Änderungsforderungen zu entscheiden hat. Er merkt an: "Ich halte den Einwand für unsinnig. Es geht hier doch nur um die Differenz." Er hat es genauso gemerkt, wie die Schüler, die, durch solche Bücher (solchen Unterricht) erzogen, wegen des offensichtlichen Themas auf *Differenz bilden* schalten, die in Rede stehende Aufgabe nur nach einer möglichen Differenz absuchen und diese berechnen werden.

Aber der zitierte Letztentscheidende hatte durchaus auch einen Einwand: Die Differenz von Stuttgart nach Ulm sei nicht 114 km sondern weniger als 100. Daraufhin wartet das gedruckte Buch nun mit der Veränderung des Wegweisers auf. Darauf steht jetzt: *Ulm 169 km.* Zwar ist sachlich gar nicht klar, ob diese Differenzbildung überhaupt angebracht ist, aber man "verbessert" sie! – Ein Handlungsmuster, das übrigens für viele unserer bedrohlichen Umweltprobleme verantwortlich ist.

Wenn wir nicht weiter kommen als zu solchem *Es geht doch nur um die Differenz,* wird in naher Zukunft die Gesellschaft aufwachen und den Mathematikunterricht angesichts der allgemeinen Verfügbarkeit von Rechengeräten als weitgehend überflüssig (zu recht) erheblich reduzieren.

Sogar in den Lehrplänen steht längst, daß es um mehr geht als die Differenz. Denn wegen der Verfügbarkeit von Rechengeräten wurde die Frage danach, was sinnvollerweise und verantwortlicherweise gerechnet werden soll und darf, von geradezu lebensentscheidender Wichtigkeit für unsere Zivilisation, deren (Aus)Weglosigkeit durch weglose Wegweiser nicht zu bannen ist. Wie sollen Kinder das spüren, erleben, lernen, um es später *handelnd zu leben,* wenn das Bewußtsein davon in der Szene rund um den Mathematikunterricht dermaßen unterentwickelt ist?

Es geht um mehr als nur ums Rechnen

Die Entscheidung, nur die reine Rechenfertigkeit fördern zu wollen, ist auch die Entscheidung zur *Nichtbeachtung des Kontextes,* aus dem die Aufgabe stammt. Was ein solcher Unterricht unzweifelhaft fördert, ist die Gewöhnung an flüchtig-assoziierendes Handeln: Man hat den Eindruck, hier müsse etwas subtrahiert werden, und man tut es ohne weiteres Nachdenken. Es ist darüber hinaus die Gewöhnung an das unhinterfragte Handeln im gerade naheliegenden Rahmen: Man subtrahiert gerade, also subtrahiert man auch in diesem Fall. Politisch gesehen: *Mitläufertum.* Jedenfalls aber undifferenziertes, die Sache vernachlässigendes Handeln. Übrigens scheitert dieses Handeln nicht nur später außerhalb des Mathematikunterrichts, sondern schon im Unterricht selbst. Wenn es z.B. etwas im Koordinatensystem darzustellen gibt, denkt ein so erzogener Schüler dann auch nicht über die Eignung eines zufällig gewählten Systems angesichts des Problems nach.

Wie kann konkret eine mögliche Folge solchen Handelns später im Leben aussehen?

> ***Beispiel aus der Rechtsprechung:***
> "Ein Autofahrer A fährt auf einer innerstädtischen Vorfahrtstraße mit 135 km/h (!). Fahrer B verursacht durch Nichtbeachten der Vorfahrt von A einen Unfall. Welchen Anteil des Schadens von A hat B zu tragen? Der Bundesgerichtshof hatte in einem ähnlichen Fall, in dem ein Fahrer mit 100 km/h gefahren war, diesem $33\frac{1}{3}\%$ des Schadensbetrags zugebilligt. Davon ausgehend, argumentierte ein Oberlandesgericht, A habe hier *"entsprechend"* dem BGH-Urteil noch Anspruch auf 25% ($\approx 33\frac{1}{3}\% \cdot \frac{100}{135}$) des Schadensbetrags. – Diese Entscheidung ist grotesk, ganz unabhängig von der Nichtbeachtung der [nichtlinearen – d.Verf.] Bremswegformel." (Kirsch 1995)

Eine *andere Kultur des Mathematikunterrichts* mit einer anderen pädagogischen Entscheidung, nämlich der für die Beachtung der Wirklichkeit, im ersten Beispiel also dessen, was der Wegweiser aussagt und was nicht, dürfte auch einen anderen Umgang etwa des Richters in dieser Situation zur Folge haben. Natürlich sind solche Folgen nicht zwingend, da es sich um Menschen und nicht um programmierbare Maschinen handelt. Man könnte daher ein wenig nachhelfen und die möglichen Folgen ab und zu selbst zum Unterrichtsgegenstand machen. Eine aus dem Urteil resultierende Aufgabe könnte z. B. lauten:

> Welche Gründe des OLG für seine Kalkulation sind vorstellbar? Welche Argumentationen für andere Entscheidungen auf der Basis des BGH-Urteils wären möglich?
> Wann ist eigentlich ein proportionaler Ansatz überhaupt nur sinnvoll?

Das Wegweiser-Beispiel scheint nur eine Kleinigkeit zu sein. Und doch führt es zur Diskussion eines politisch zentralen Problems unserer technisierten Welt. Die Schule ist mitverantwortlich dafür, daß der Schüler lernt, die *Grenzen* sinnvoller oder überhaupt möglicher *mathematischer Aussagen* sehen zu lernen. Damit lernt er zugleich, überhaupt nach den Grundlagen und den Grenzen von Aussagen zu fragen; ein Schritt von dogmatischer Fixierung zu rationalem Dialog.

Angesichts des Kontextes entscheidet sich der Sinn einer Berechnung

Wir setzen noch einmal an bei der Entscheidung für ein möglichst umfassendes Verständnis des anstehenden Problems, der einzuführenden Methode o.ä. im Gegensatz zur Entscheidung, dem Schüler nur "den jeweiligen Stoff beizubringen", möglichst ungehindert "mit dem Stoff durchzukommen" o.ä. Die Folgen der letzten Entscheidung sind besonders dann prekär, wenn eine zu bearbeitende Aufgabe von ihrer Problematik her wirklich auf das Leben außerhalb des mathematischen Kalküls bezogen ist.

> ***Beispiel: Gebührenfestsetzung***
> "Im Praktikum (... 9. Schuljahr; Lineare Gleichungssysteme ...) behandelten Studenten die folgende Aufgabe: *Ein Sportverein hat 3500 Mitglieder, davon 2000 Jugendliche. Diese zahlten bisher 5 DM Monatsbeitrag, die Erwachsenen 7 DM. Die gesamten Beitragseinnahmen müssen auf monatlich 34500 DM (14000 DM mehr) erhöht werden. Wie sind die Beiträge neu festzusetzen?*
> ... Die Schüler bezeichneten mit x, y den Erhöhungsbetrag für Jugendliche bzw. Erwachsene und erhielten die (erste) Gleichung $2000x + 1500y = 14000$. Jetzt kam die Aufforderung: 'Stellt Euch vor, Ihr seid Jugendsprecher in dem Verein, und macht Vorschläge für eine zweite Gleichung'.
> Dies war für die Schüler eine völlig ungewohnte Aufgabe: Die *Entscheidung* zu treffen für einen Ansatz, ein Modell, um die Vorstellung 'gerechte Verteilung der neuen Lasten auf alle Mitglieder' mathematisch zu fassen. Die Vorschläge waren dementsprechend noch enttäuschend: Z.B. schlug niemand $x = 0$ vor (d.h., daß die Erwachsenen allein die Mehrkosten zu tragen hätten), was gar nicht so abwegig gewesen wäre. Vielmehr: 'Alle sollen um den gleichen Betrag erhöht werden', $x = y$.
> Es dauerte eine ganze Weile, bis die offensichtliche Ungerechtigkeit dieses Ansatzes erkannt wurde, und weiter, bis der Vorschlag kam: 'Alle Beiträge um den gleichen *Prozentsatz* erhöhen'. Das führte dann zu der zweiten Gleichung $7x - 5y = 0$, womit schließlich die neuen Beiträge ausgerechnet wurden. ...
> Hiermit schien nun der richtige Ansatz für die Lösung des Problems gefunden! Es zeigte sich kein Bedürfnis, die Aufforderung zu Vorschlägen weiter zu nutzen, obwohl doch das alte Beitragsverhältnis 5 zu 7 durchaus Ansatzpunkte zu Kritik geboten hätte. Es lag wohl auch das verbreitete Mißverständnis vor, daß – ganz allgemein – prozentuale Erhöhungen 'gleichwertige' Belastungen ausdrücken, daß also der gefundene Ansatz schlechthin 'der gerechte' sei." (Kirsch 1995)

Von solchen noch recht einfachen Fragestellungen reicht die Problematik bis hin zu Fragen, bei denen es im Extremfall um Leben und Tod geht. So etwa bei der Entscheidung eines Arztes, ob er seinen Patienten statistisch einordnen oder individuell behandeln soll. (Köhler 1992, S. 54f) Eine Aufgabe zu einer Medizinstatistik zu rechnen, ohne diese Problematik zu streifen, kann durchaus künftige Patienten wie Ärzte über die Anwendung der Statistik blind für das dahinter stehende Geschehen machen. Von Ärzten, die Gesundheitsschädigungen von Kindern in Kauf nehmen (Köhler 1992, S. 44: Bsp. III. 2.b.3) bis zu Mathematikern, die ausrechnen, ob die

Zahlung für die Toten als Folge statistisch zu erwartender Unfälle wegen eines Fehlers bei der Autoproduktion oder die Umstellung der Produktion zur Vermeidung des Fehlers billiger wäre (Köhler 1992, S. 43: Bsp. III. 2.b.2) öffnet sich hier ein weites Feld möglicher Folgen.

Genauso wie man beurteilen muß, ob in Physik eine Formel zur vorliegenden Situation "paßt", so muß auch sonst über den *Einsatz* eines mathematischen Hilfsmittels zunächst *entschieden* werden. Wo aber lernt der Schüler das, wenn im Mathematikunterricht die Hilfsmittel immer fraglos eingesetzt werden? Ein mündiger Bürger braucht ein Bewußtsein von solchen Zusammenhängen und er braucht Grunderfahrungen davon, wie man mit ihnen umgehen könnte.

Mathematische Entscheidungen greifen in unser Leben ein

Eine pädagogische Entscheidung gegen engen Unterricht als Anleitung zur bloßen Handhabung von Kalkülen ist die, im Unterricht möglichst vielen Aspekten einer Sache oder eines Problems Raum zu geben. Dabei werden die möglichen Folgen einer weiteren bzw. tieferen Weltsicht schon im Unterricht selbst manifest. Begriffe beginnen zu leben, Inhalte treten in Verbindung zu vielen anderen, der Schüler gerät in einen Aktivitätssog durch das Erleben, daß Dinge nicht eindeutig und vom Lehrer präsentiert gegenübertreten sondern viele Seiten haben, die zu entdecken spannend ist. Das beginnt beim frühen Umgang mit Zahlen.

Beispiel (Schuberth): ***"Schönste Zwölf"***

Wenn die Zwölf nicht nur eine Zahl ist, die als Ergebnis erscheint, vielleicht noch gewisse Teiler hat, sondern auch eine vielfältig darstellbare wie in der Frage nach der "schönsten" Zwölf, nämlich der "am schönsten" additiv zusammengesetzten, gibt es etwas zu erkunden und etwas zu beurteilen:

$$1+11, \quad 2+10$$
$$6+2+4, \quad 6+4+2$$
$$6+6$$
$$4+4+4$$
$$1+2+3+3+2+1$$

Das führt sogleich mit der größeren Vertrautheit mit Zahlen und der Verbesserung der Rechenfertigkeit zur Erfahrung der Vielfältigkeit der Mathematik und ihrer "Verwendung". So wird Mathematik beziehungshaltiger, also tiefer und bleibender erfahren. Die offene Frage führt zwar auch zu subjektiven Urteilen, diese mobilisieren aber mathematische Vorstellungen! Das führt vor allem zur Erfahrung, daß es *verschiedene Anworten* gibt, daß der Klassenkamerad nicht einfach nur richtiger oder schlechter umgeht mit einer Sache, sondern anders in einem nicht unbedingt qualifizierbaren Sinne: Ein Weg zu echter Toleranz.

Erfahrung des Reichtums verschiedener (mathematischer) Sichtweisen als Weg zu echter Toleranz

Sofern die Lehrerentscheidung lautet, das lehren zu wollen, "was der Fall ist", also alle Überlegungen zur Einbindung der Mathematik in das Leben auszuklammern, ist die Folge sehr leicht, daß der Schüler überhaupt nicht wahrnimmt, daß sich diese "Objektivität" höchstens auf die mathematischen Verfahren selbst, niemals aber auf ihre Verwendung bezieht. So ist auch die Aussage, Mathematik erziehe zur Objektivität, mit Vorsicht zu genießen. Was und inwieweit Objektivität ist, kann nur wahrgenommen werden, wenn die *Grenzen der Objektivität* deutlich werden. Sonst kommen wir immer erneut zu dem fatalen Vorurteil, alles, was irgendwie mit Mathematik zu tun hat, sei objektiv. Dieses Vorurteil bedeutet übrigens auch die Überflüssigkeit, einen eigenen Standpunkt zu den entsprechenden Sachverhalten zu gewinnen und durchzutragen.

Schließlich ist ja schon in der Mathematik selbst vieles nicht mit einer Sichtweise zu behandeln. Beispiel: Ist ein Dreieck eine Fläche oder eine 3-Punkte-Konstellation oder eine 3-Strecken-Konstellation oder eine 3-Geraden-Konstellation oder ... ? (Übrigens: Worin steckt ein weiteres Veränderungspotential, wo ist ein größerer Beziehungsreichtum angelegt, was regt die mathematische Phantasie stärker an?)

Sieht man nur die "objektiven mathematischen Gegebenheiten", entscheidet man sich normalerweise auch dafür, daß sich der Schüler im Unterricht "möglichst exakt" ausdrücken müsse. Zwar ist das nicht zwingend, denn eine genetische Entwicklung selbst eines solchen mathematischen Wissens wäre allemal auf eine entsprechende genetische sprachliche Entwicklung angewiesen, aber das wird oft übersehen. Die Entscheidung, ohne Ansehung des Entwicklungsstandes exakte Ausdrucksweisen zu verlangen, führt neben der Unmöglichkeit, Mathematik wirklich zu verstehen (denn das ist ein Nachentdecken, und nicht einmal der entdeckende Mathematiker hat sofort exakte Begriffe für seine neu entwickelten Theorien), vor allem dazu, daß der Schüler die Mathematik nicht in seine Person integriert. Sie wird nicht Teil seines Lebens, seines Weltbildes, wird nicht zur Basis seiner späteren Entscheidungen und Handlungsvollzüge. Das heißt, der Schüler bleibt in bezug auf diesen Aspekt der gesellschaftlichen Wirklichkeit *unmündig.*

Hier bietet sich an, eine andere Entscheidung zu betrachten, die Entscheidung für die *Offenheit* gegenüber dem Unpassenden, dem Unerklärlichen, dem "Fehlerhaften", das der Schüler äußert. Dazu muß man seine Sprache ernst nehmen. Dazu muß man sich seinen Äußerungen öffnen. Das führt dahin, *seine* Sichtweise von den Dingen zu erfahren, und von dort aus wird Hilfe möglich, die er braucht, um weiter und tiefer in die Mathematik einzudringen. Damit nützt das soziale Sich-gegenseitig-ernst-Nehmen, ein wichtiges Element demokratischer Erziehung, zugleich wesentlich dem Lernfortschritt in der Mathematik.

Die Offenheit ist besonders wichtig, wenn es um die Entwicklung bzw. den Erwerb anspruchsvoller Begriffe durch den Schüler geht. Und da trifft sich der Mathematikunterricht gleich wieder mit allgemeinen Erziehungszielen. *Offenheit im Dialog* ist so wichtig für den Mathematikunterricht in beschränkter Sichtweise wie auch für einen, der den mündigen Bürger von morgen erziehen will.

Beispiel (Köhler 1996): ***Dialog: Nicht Überrumpelung sondern Annahme des Schülers – d.h. seines Arguments***
Aufgabe: *Stell Dir ein Roulette mit (nur) gleich vielen roten und schwarzen Feldern vor. Dein Freund hat zehnmal auf Rot gesetzt, und zehnmal kam Schwarz. Jetzt kannst Du noch einmal setzen; worauf setzt Du, und warum?*

Die verschiedenen Antworten werden diskutiert. Johannes sagt: "Ich setze auf Rot, denn nach zehnmal Schwarz ist die Wahrscheinlichkeit für Rot zehnmal größer." Er wird mit dem Gegenargument pariert, daß sich die Wahrscheinlichkeit für den nächsten Wurf nicht geändert haben könne, da das Rad kein Gedächtnis habe. Er kann sich dem Argument nicht entziehen. Es ist offensichtlich richtig. Aber was macht er nun mit seiner Überlegung, die doch insofern richtig ist, als schon eine Zehnerserie selten ist, eine Elferserie aber noch viel seltener?

"... doch wir überzeugen nicht" (stellte Martin Wagenschein fest), und die neuerliche Diskussion um Notwendigkeit und Sinn des Mathematikunterrichtes kreist vor allem um die Forderung nach mehr Verstehen. Verstehen aber geht über die Anerkennung logischer Folge hinaus in Richtung (selbst zu leistender) *Sinnkonstitution* und (eigener) Überzeugung von Wahrheit.

Nachdem Thales von der Frage danach, was in der Mathematik der Fall ist, zur Frage, warum es der Fall ist, fortgeschritten war, behaupten wir, daß Mathematik wegen ihrer Einsehbarkeit prinzipiell jedermann zugänglich sei, sei diese Frage nach dem *warum* doch heute durchgehende Methode ihrer Vermittelung. Und so beantworten wir das *warum* in unserem Unterricht ständig, ausgiebig und von einem ganzen Heer (dafür?) bezahlter Schulbuchautoren und Hochschuldidaktiker durch immer neue Vorschläge angeleitet. Aber wir überzeugen immer weniger. Vielleicht liegt es daran, daß wir dem Schüler ein *warum* zu beantworten trachten, das nicht *sein warum* ist.

Das ist immer dann ein schwer zu lösendes Problem, wenn der Schüler nicht selbst aktiv ist und zu einem eigenen *warum* daher gar nicht vorstößt. Doch im vorliegenden Beispiel war es ja anders. Der Schüler hatte seine ganz eigene Begründung. Man ging allerdings nicht auf sie ein. Der Dialogpartner hat sich nicht auf die Argumentationsebene von Johannes eingelassen, sondern auf ganz anderer Ebene ausgeholt und Johannes besiegt.

Hätte sich der Dialogpartner auf Johannes eingelassen, hätte er auf die Frage der seltenen langen Serien eingehen müssen. Das wäre vielleicht sogar gelungen, indem er, von seiner eigenen Denkweise, der Symmetrie des Apparates ausgehend, argumentiert hätte: "Natürlich ist eine Elferserie noch seltener. Aber wieso zehnmal seltener?" Und falls Johannes hier gepaßt hätte, hätte er ja dann seine Meinung in die Debatte werfen können. "Die Wahrscheinlichkeit einer Elferserie wird halb so groß sein wie die einer Zehnerserie. Im Mittel wird jede zweite Zehnerserie zur Elferserie werden:" Hier hätte Johannes die Möglichkeit gehabt, von *seiner* Überlegung her mitzudenken.

An Richtigkeiten zweifeln unsere Schüler nicht. Sie spüren längst, daß man viel als richtig dartun kann, man braucht nur seinen Blickwinkel genügend einzuengen. Schlagen wir den Weg zu wirklichem persönlichen Verständnis ein. Das Motto lautet: Von der *Richtigkeit an sich* zur *Wahrheit für mich* gelangen!

Offenheit für das Andere als Hilfe zum Verständnis

Eine durch die didaktische Diskussion um den "anwendungsorientierten Mathematikunterricht" nahegelegte positive Entscheidung ist die für die Hereinnahme von *echten* Kontexten in den Unterricht. Das beginnt bei kleinen Textaufgaben, die sinnvoll sind und daher auch wirklich *gelesen* zu werden verlangen.

Im Bericht über eine jüngere Umfrage unter Schülern (Huth/Schröder 1992) heißt es: "Die meisten Beispiele für die Kritik an Lerninhalten entstammen dem Fach Mathematik. Immer wieder wird gefragt, warum Aufgaben gerechnet werden müssen, deren Sinn unverständlich ist." Gemeint ist nicht innermathematischer Sinn, sondern *Bedeutsamkeit für das Leben.* Eine Schülerin der 8. Klasse einer Realschule bemängelt z.B. allgemein: "Ich finde, bis zur 8. Klasse bekommt man so gut wie gar nichts von der Welt mit. Ich finde, ab der 5. Klasse müßte man ein Fach erfinden, wo man mehr von der Realität mitbekommt, eben das Fach 'Real' wie Realität." Eine andere Schülerin (9. Klasse, Gymnasium) bemängelt insbesondere das Fehlen der politischen Wirklichkeit im Unterricht.

Angemahnt wird der Bezug aufs Ganze des Lebens indessen auch seitens der Schule. Nehmen wir als Beispiel die Lehrplaneinheit *König und Kirche im Mittelalter* für Geschichte der 8. Klasse des Gymnasiums (Baden-Württemberg 1984). Sie setzt das Ziel: Die Schüler "erkennen den Einfluß des hohen Adels auf die königliche Gewalt und begreifen die Andersartigkeit mittelalterlicher Herrschaft". Nun haben (noch hatten) diese Achtklässler aber weder Gemeinschaftskunde, noch haben sie vorher in Geschichte etwas über die heutige Welt "gehabt", das das angemahnte "begreifen die Andersartigkeit" etwa von heute aus ermöglichte. Dieses Begreifen ist also darauf angewiesen, daß Schüler sowohl von außerhalb der Schule als auch aus anderen Unterrichtsfächern immer schon Verständnishilfen für das Fach mitbringen. Darauf kann und darf die Schule übrigens prinzipiell nicht verzichten, denn abgekapselte Fächer werden zu Schubladen voller toter Gegenstände. Hier liegt also gerade die Chance, den Fächern durch ihre gegenseitige Verwiesenheit Bedeutung zuwachsen zu lassen. Und da können wir Mathematiklehrer durchaus mithalten. Eine Möglichkeit: *Weite Aufgaben stellen!*

Beispiel (Köhler 1994): ***Wahlausgang***
In einer Situation, die erwarten ließ, daß den hier angesprochenen Schülern der gesellschaftliche Bezug etwas bedeutete, wurde in einer 8. Klasse folgende Aufgabe gestellt:

Die gestrige Oberbürgermeisterwahl in Stuttgart gewann laut SDR-Nachrichten von gestern abend (4. 11. 1990, 20.00 Uhr) Manfred Rommel mit 70%.
In Deinem Stadtviertel wohnen 4000 Menschen. Wieviele davon werden Rommel gewählt haben?

19 der 20 Schüler berechneten 2800 als 70% von 4000. 7 davon beantworteten die gestellte Frage nur damit. Alle anderen bedachten eines oder mehrere der Probleme Wahlberechtigung, Wahlbeteiligung und Repräsentativität des Stadtviertels: 8 Schüler setzten *falls alle 4000 wahlberechtigt* als Bedingung für die 2800. 3 Schüler gingen auf das Problem der Repräsentativität ein, einer davon sprach außerdem (und verdeutlichte am Beispiel) die Wahlberechtigung an, ein anderer darüberhinaus die Wahlbeteiligung und der hielt die gestellte Frage mangels weiterer Informationen für nicht beantwortbar. Ein Schüler merkte zur Antwort 2800 nur an *aber praktisch?* Und dann gab es noch die zur nur gerechneten Antwort der 7 Schüler duale Antwort, die am Rechnen gescheitert war, aber anmerkte, daß ja nicht alle 4000 wahlberechtigt gewesen wären.

Eine Diskussion der Ergebnisse war für alle Schüler selbstverständlich – und das wurden lebhafte Minuten!

Wäre bei einer solcher Aufgabe der oben zitierten Realschülerin nicht ein wenig aufgegangen, wozu Prozentaufgaben dienlich sein können, hätte die erwähnte Gymnasiastin hier nicht begrüßt, am Montag das politische Ereignis des Sonntags diskutieren zu können, und war diese Aufgabe nicht die Chance, ein wenig von unserer Demokratie zu verstehen als Voraussetzung zum "Begreifen der Andersartigkeit mittelalterlicher Herrschaft" in der Geschichtsstunde?

> In engen Schubladen hält sich das Leben nicht auf:
> In Zusammenhängen arbeiten!

Die Mißachtung von Zusammenhängen, die Beschränkung des Blickes auf das jeweilig gerade bearbeitete Detail, ist für die großen *Umweltprobleme* unserer Zeit verantwortlich. Um diese Probleme zu lösen, wird u.a. Umwelterziehung in der Schule gefordert, von allen Fächern. Es ist hier nicht der Platz, die Fragwürdigkeit mancher der daraus folgenden Ansätze zu diskutieren. Aber für unser Thema seien zwei beobachtbare Entscheidungen für den Mathematikunterricht angesprochen. Die eine ersetzt in Aufgaben, in denen Daten aus der Lebenswelt als Anlaß genommen werden, mathematische Methoden anzuwenden, bisher übliche Daten (Raketenbahn, Wirtschaftskennzahlen, ...) durch "Umweltdaten" (Energieverbrauch, Luftverschmutzung, ...). Der Schüler merkt das kaum, soweit es doch "nur auf das Rechnen ankommt" (s.o.). Der andere Ansatz aber sieht im Ernstnehmen von Zusammenhängen, im Blick möglichst auf das Ganze von Welt und Leben bei der mathematischen Behandlung eines Problems seine Aufgabe. Dabei kann natürlich überdies von einer umweltproblematischen Situation ausgegangen werden.

Beispiel (Köhler 1997c): ***Umwelterziehung im Mathematikunterricht: Vom bloßen Rechnen zum verantwortlichen Denken***

Das Schulbuch stellt zum "kostbaren Naß" die Aufgabe, die nach Verwendung aufgeschlüsselten 146 Liter Trinkwasser, die im Durchschnitt je Einwohner und Tag 1990 in den alten Bundesländern verbraucht wurden,

Toilettenspülung	47 l	
	44 l	Baden, Duschen
Wäsche waschen	18 l	
	9 l	Körperpflege
Geschirr spülen	9 l	
	6 l	Garten bewässern
Kochen, Trinken	3 l	
	3 l	Auto waschen
sonstige Zwecke	7 l	

in einem Stabdiagramm zu veranschaulichen: Da gilt es, die jeweiligen Höhen der Säulen nach der Wahl eines Maßstabes zu berechnen und entsprechend zu zeichnen. Das fordert die Aufgabe.

Dabei *müssen* einige Fragen aufgeworfen werden. Etwa fachlich notwendige Fragen nach dem Rahmen der Aussagen: Was ist wohl mit den einzelnen Posten alles erfaßt, was wird z.B. mit Körperpflege gemeint sein, wie ist es erfaßt, woher stammen die Zahlen?

Darüber hinaus *könnten* Fragen auftauchen wie diese: Nur 2% brauchen wir zur Ernährung, aber 30%, um deren Reste zu verdünnen für die Reise zum Klärwerk, wo sie mühsam wieder aus der Verdünnung zurückgeholt werden – welch unsinnige Technik!

Dann *sollte* auch der Blick über den Zaun nicht versäumt werden; das heißt, die hinter den Angaben stehenden Wertungen und Entscheidungen sollten reflektiert werden. Über das Verständnis der Kategorien hinaus geht es jetzt um deren Legitimation. Also etwa: Was hat man wohl diesem Verbrauch je Einwohner alles hinzugerechnet? Ist der Verbrauch einfach die insgesamt in die Wohnungen geflossene Wassermenge dividiert durch die Einwohnerzahl? Wenn das so wäre (wer geht der Sache nach?): Ist das alles, was dem Bürger als Wasserverbrauch zugerechnet werden muß?

Die chemische Industrie verbraucht so viel Wasser, wie in die privaten Haushalte fließt (Studie *Zukunftsfähiges Deutschland* 1996). Wieviel Wasser wird wohl gebraucht, um das Duschgel herzustellen, das viele benutzen? Muß man dieses verbrauchte Wasser nicht genauso zum Baden und Duschen hinzurechnen? Wer verbraucht denn überhaupt die Produkte der chemischen Industrie? Gehört deren Wasserverbrauch etwa nicht zum Verbrauch der Bürger?

Und schließlich eine *moralische* Frage: Wie sieht die Relation Wasser für die Ernährung zum übrigen Verbrauch aus? Durst ist ein schmerzendes, ja existentielles Problem für Millionen von Menschen. Wir aber "schütten fast alles Wasser ungetrunken weg".

(Oder zur Art der Ernährung: Von dem Wasser, das man für die Erzeugung eines Rindersteaks braucht, kann man für 50 Menschen eine gleichwertige Reis- oder Sojamahlzeit erzeugen.) Welche *Handlungstendenz* sollte daraus erwachsen? (Wer solche Aufgaben rechnet, ohne das mitzubedenken – wird er sonst besonders verantwortungsvoll Mitmenschen und Mitwelt gegenübertreten?)

Problembewußtsein ist Voraussetzung für Verantwortung

"Verantwortung zu übernehmen für den eigenen Lebenszusammenhang und den seiner Umgebung kann vor dem Hintergrund einer komplexer werdenden und Ängste erzeugenden Gesellschaft neue Identität stiften und Gelegenheit bieten, auch die Interessen der anderen zu begreifen und zu akzeptieren" schreibt die einstmalige Staatsministerin Hildegard Hamm-Brücher (Hamm-Brücher 1997, S. 46). Man kann diesen Satz auch als Satz speziell über den Mathematikunterricht lesen. Wieviele Schüler sind dort in einem endlosen Karussell *Unverständnis-Angst-Verkrampfung-Unverständnis ...* befangen, das daher rührt, daß sie nicht selbst in eine gewisse Verantwortung für ihren Lernprozeß entlassen wurden. Hier könnte ein demokratischer Ansatz dem Mathematikunterricht aufhelfen.

Es sei also andermal darauf hingewiesen, daß die Entscheidung für den weiteren Horizont gleichzeitig den Unterricht im engeren Sinne verbessert. Dazu auf der ganz praktischen Ebene:

Beispiel (Köhler 1993): ***Üben oder verstehen?***
Natürlich ist das keine Alternative. – Aber die Praxis stellt sich trotzdem oft so dar. Wie oft wird eben doch versucht, Verständnis durch Einüben zu ersetzen, wie oft ist die bloße Wiedergabe des Eingeübten in der Klassenarbeit Kriterium für den Unterrichtserfolg! Beim Lehrerwechsel, nämlich dem Wechsel des äußerlichen Präsentationsrahmens, wird dieses Einüben dann manchmal entlarvt. Ein Beispiel:

Im fünften Schuljahr errichtet eine Lehrerin die Mittelsenkrechte auf einer Strecke AB, indem sie mit einem Radius, der kleiner ist als diese Streckenlänge, um A und B Kreise zeichnet und deren Schnittpunkte verbindet. "Falsch" tönt es ihr aus der Klasse entgegen, denn die Lehrerin der Primarstufe hatte den Kindern beigebracht, wie man so etwas ("richtig") macht: Man sticht den Zirkel in A ein und geht mit seiner Bleistiftspitze auf B, wodurch man nun einen Kreis um A zeichnet, hernach entsprechend um B, Verbindung der Schnittpunkte, ...

Die öffentliche Diskussion darüber, inwieweit die *Inhalte* des Mathematikunterrichts zur Meisterung des Alltags notwendig oder ausreichend (je nach aktueller Situation) seien, die immer mal wieder bis in die Tageszeitungen hinein geführt wird, spricht eine zentrale Frage zumeist nicht an: Wie viele für den Alltag notwendige *Fähigkeiten* werden im Mathematikunterricht nicht gebildet, und welche durchaus prekären Folgen hat das?

Da werden Schaubilder zur politischen Durchsetzung einer Sache für die gegenteilige Aussage reklamiert, ohne daß es auffällt; da werden wegen fehlender räumlicher Anschauung Wohnhäuser so gebaut, daß das Wohnen zur Mühe wird; da ärgert sich jemand über die Ungerechtigkeit einer Finanzamtsentscheidung, nur weil er eine einfache Ordnung von Ausgaben und Einnahmen nicht durchschaut u.v.m. Bedenkt man solche Vorfälle, kann man die Diskussion um Quantitäten nur als sträfliche Ablenkung von einem drängenden Problem bewerten: der Notwendigkeit einer Qualitätssteigerung. Die Qualität ist dabei als substantiell höhere mathematische Kompetenz gefordert, nicht als elaborierter Formalismus. Und gerade auch für diese Qualitätssteigerung ist eine bessere Unterrichtskultur notwendig.

So ist es durchaus fragwürdig, ob alle Schüler den Begriff der Äquivalenzumformung als Lebensgrundlage brauchen. Aber ein *Verständnis dessen, was eine gegebene Gleichung* – insbesondere eine Größengleichung – *über die damit gefaßte Realität aussagt,* das ist unumgehbar. Doch da stolpert mancher Schüler schon bei den gegebenen Hilfen, etwa einer "völlig klaren" Veranschaulichung. Er sieht $2 + 3 = 5$, sieht folgendes Bild

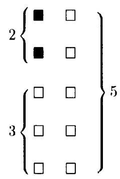

Abb. 1

und fragt sich, warum 10 Quadrate da stehen, wenn die Gleichung doch eine "Aussage über die Fünf" machen soll, oder wieso da zwei *verschiedene* Plattenreihen liegen, wenn "es doch *gleich* sein soll". So gesehen hat er recht, sind es doch nur zwei verschiedene Sichtweisen derselben Sache, also so:

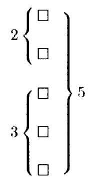

Abb. 2

Ein Klassenkamerad sieht das erste Bild ganz anders: Schwarz soll heißen, daß da schon zwei Platten lagen, dann legte jemand drei dazu, und man sah nicht mehr, welche zuerst lagen, da sah es aus wie die rechte Reihe. Er hat die Veranschaulichung verstanden. (Aber wozu muß er das, reichte es nicht, wenn er die *Sache* verstanden hätte?)

Also wie soll es der Lehrer nun erklären, mit dem ersten Bild oder mit dem zweiten? Mit gar keinem! Er soll *Impulse zur eigenen Auseinandersetzung geben.* Die Schüler sollen selbst ihr Bild finden, damit sie nicht nur Gleichungen zu manipulieren lernen, sondern auch verstehen, was sie da tun. Oder wollen wir zufrieden sein mit Ergebnissen, wie sie im folgenden Beispiel deutlich werden?

Beispiel (Köhler 1997a): ***Mathematik im politischen Alltag***

In der politischen Diskussion um die Einführung des EURO, die für viele vor allem die Abschaffung der DM bedeuten würde (schon solche Sichtwechsel sind auch im Mathematikunterricht relevant!), schrieb jemand Anfang 1996 seine Botschaft mit folgender Warnung sauber und ordentlich mit schwarzem Filzstift auf den silberfarbenen Aluminiumdeckel des Abfallbehälters in der S-Bahn:

Europageld bringt bei
10 000 DM einen Verlust von
5 000 DM.
Wechselkurs 2 DM = 1 Euro

Die Form der Botschaft: eine Aussage (drei Zeilen) mit anschließendem Beweis (vierte Zeile). Diese äußere Form mag der Schreiber aus dem Mathematikunterricht mitgenommen haben.

Die Botschaft wäre eine Diskussion im Mathematikunterricht wert. Aber die hätte *nur* dann Sinn, wenn auch der "schwächste Schüler" seine "dümmsten Gedanken" dazu äußern dürfte. Beispielsweise könnte man als Hausaufgabe einen Aufsatz über diese Botschaft schreiben lassen mit dem Thema: "Was hat sich der Schreiber wohl bei diesen Zeilen gedacht, wo liegt sein Denkfehler, und wie könnte man ihm helfen?" Der Schreiber obiger politischer Belehrung hatte vielleicht nie Gelegenheit, seine Zweifel und Gefühle zum Vorkommnis Gleichung zu äußern. Die politische Konsequenz ist verheerend.

Der Bürger im demokratischen Staat ist sozusagen sein eigener Souverän. Dazu gehört ein gewisses Maß an *Souveränität des Handelns.* Das trifft sich mit sowieso für den Mathematikunterricht Gefordertem: Wir müssen heutzutage erreichen, daß der Schüler zu gewisser Souveränität über die Methoden kommt, da das von der Methode beherrschte Abarbeiten des Kalküls immer weniger gefragt ist. Dazu ein Beispiel:

Es gibt verschiedene Gründe, einen Beweis zu suchen. Wenn man einen Sachverhalt gefunden hat, kann die Frage "Ist es eigentlich verwunderlich, daß das so ist?" zu einem Beweis führen, der letztlich Gründe dafür angibt, *warum* es so sein *muß.* Aber sogar der Beweis, der nur zur Absicherung eines Sachverhaltes dient, kann helfen, solche Einsichten zu gewinnen: Manchmal hat man ja einen Beweis als Folgerungskette verstanden, kann sich der Sicherheit der einzelnen Folgerungen nicht entziehen, hat aber keineswegs das verstanden, was der Beweis bewiesen hat. Verständnis aber zeugt sich fort: Aus dem Verständnis des Beweises kann das Verständnis des zu Beweisenden erwachsen.

Beispiel (Köhler 1997b): ***Vom Beweis zum Verständnis***

Im Zusammenhang mit dem goldenen Schnitt taucht die Formel $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ auf, und es heißt, ihr Kehrwert sei $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Das sieht doch erstaunlich aus; da ist es besser, sich von der Richtigkeit zu überzeugen. Also prüft man es nach.

$$\frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$4 = -1+5.$$

Mit diesem Beweis hat man aber das Erstaunliche noch nicht als "ach ja, natürlich" durchschaut. Dazu ging alles viel zu schnell. Das "Überkreuzmalnehmen" bot sich an, und dann lag das Ergebnis schon vor uns. Man müßte doch übersehen, wie man von $\frac{2}{-1+\sqrt{5}}$ zu $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ kommt, Also:

$$\frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \cdots = \cdots = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Da gibt es viele Möglichkeiten, den ersten Bruch umzuwandeln. – Moment mal, warum lief der Beweis so glatt? Weil durch das $(a+b)(a-b)$ eine drastische Vereinfachung geschah. Dann könnte das doch auch jetzt die beste Chance für uns bieten. Und tatsächlich, es klappt:

$$\frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{-1+5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Aha, wegen der binomischen Formel führt es zum Erfolg, den Bruch mit gerade dem Ausdruck zu erweitern, der im Zähler stehen soll. Plötzlich ist alles ganz einfach und völlig klar.

Wenn man "dahinter" geschaut hat, kann man die Sache besser einschätzen – eine auch politisch nützliche Haltung.

Wir könnten fortfahren. Es gäbe noch viele solcher Punkte zu bedenken. Wenn man sich dem hier angesprochenen Problem einmal geöffnet hat, sieht man viele Entscheidungen im Unterricht anders, ja sieht überhaupt, wie vieles im Unterricht stattfindet, ohne daß man die dahinter verborgenen Entscheidungen bewußt getroffen und ihre möglichen Folgen reflektiert hätte. Wie kommen wir dahin, daß sich Lehrer diesem Problem weiter öffnen? Vielleicht ist die Suche solcher Beispiele durch sie selbst ein möglicher Weg. Lehrerfortbildung könnte so eine nachhaltigere Tönung erfahren.

Literatur

Hamm-Brücher, H.: Die Bürgergesellschaft beginnt in der Schule. – In: Frithjof Hager (Hrsg.), Im Namen der Demokratie. Darmstadt: Wiss. Buchgesellschaft, 1997

Huth, M.; Schröder, Chr.-J.: Was Schüler lernen wollen. Ergebnisse einer bundesweiten Umfrage. – In: Pädagogik (1992) H. 7/8

Kirsch, A.: “Verstehen des Verstehbaren” – auch im anwendungsorientierten Mathematikunterricht. – In: Didaktik der Mathematik 23 (1995) H. 4, S. 250–264

Köhler, H.: Über Relevanz und Grenzen von Mathematisierungen. Anregungen zur Ermöglichung von Bildung im Mathematikunterricht. – Buxheim: Polygon, 1992

Die nachfolgend nachgewiesenen Beispiele erscheinen gesammelt in:

Köhler, H.: Pädagogische Miniaturen. Ein Kaleidoskop von Denkanstößen zum Mathematikunterricht. – Leipzig: Klett, 1998

Köhler, H.: Üben statt Verstehen? – In: Mathematik in der Schule 31 (1993) H. 10, S. 521f

Köhler, H.: In engen Schubladen hält sich das Leben nicht auf! – In: Mathematik in der Schule 32 (1994) H. 5, S. 258f

Köhler, H.: Wegloser Wegweiser. – In: Mathematik in der Schule 33 (1995) H. 2, S. 76f

Köhler, H.: Dialog. Nicht Überrumpelung sondern Annahme des Schülers – d.h. seines Arguments. – In: Mathematik in der Schule 34 (1996) H. 5, S. 257–258

Köhler, H.: Mathematik im politischen Alltag. – In: Mathematik in der Schule 35 (1997a) H. 4, S. 194–196

Köhler, H.: Vom Beweis zum Verständnis. – In: Mathematik in der Schule 35 (1997b) H. 6, S. 338f

Köhler, H.: Umwelterziehung im Mathematikunterricht: Vom bloßen Rechnen zum verantwortungsvollen Denken. – In: Mathematik in der Schule 35 (1997c) H. 7, S. 454–456

Zukunftsfähiges Deutschland. Ein Beitrag zu einer global nachhaltigen Entwicklung. Hrsg.: BUND, Misereor. – Basel: Birkhäuser, 1996

Autor

Köhler, Hartmut, Dr., Landesinstitut für Erziehung und Unterricht, Wiederholdstr. 13, D-70174 Stuttgart.
E-mail: koehler@media.leu.bw.schule.de