Neuansätze und eine andere Sichtweise des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts

Hans-Christian Reichel, Wien

Der muß viel wissen, der andere lehren will, mit wenig Wissen weise zu sein.

Abstract: *New approaches to and another view of mathematics and science teaching.* In this paper, we discuss the question of how mathematics (in a typical manner) can contribute to general abilities aimed at at school, to general education and to the "Allgemeinbildung" of the pupils (especially of higher ages and in secondary schools). Our discussion concerns contributions of mathematics education in addition to providing mathematical literacy, technological aspects and all those concrete mathematical abilities necessary for "modern life". Amongst others, the paper was motivated by the results of the international TIMS-studies (TIMSS) and – as well – by the discussions caused by the book of H. W. Heymann (1996) in Germany which, in many cases, had been held in a wrong way. Of course, the questions as well as some of our results are old ones, but they have to be discussed under new aspects from time to time, and they should be illustrated by concrete examples.

Kurzreferat: Ausgangspunkt dieser Arbeit sind Überlegungen über Zielsetzungen, Inhalte und Methoden eines zeitgemäßen Mathematikunterrichts. Nicht zuletzt die Ergebnisse der TIMS-Studien oder die (oft falsch geführten) Diskussionen um das Buch und die Arbeiten von H. W. Heymann, u.a.m. geben Anlaß zu neuen Überlegungen dieser Art. Wir stellen verschiedene Gesichtspunkte und Sichtweisen für einen Neuansatz zur Diskussion und versuchen, diese Fragen – in anderer Weise vielleicht als es H. W. Heymann höchst kompetent bereits getan hat – in die allgemeine pädagogische Problematik vor allem der Höheren Schulen einzubinden. Demgemäß kommen wir auch auf Fragen der Persönlichkeitserziehung und Bildung überhaupt zu sprechen. Neben konkreten Beispielen aus und für den Alltagsunterricht behandeln wir vor allem die Frage, wie ein (verpflichtend und auf sämtliche Unterrichtsjahre hin angelegter) Mathematikunterricht in fachtypischer Weise, und vielleicht auch jenseits der "bloßen" Vermittlung praktischer Fähig- und Fertigkeiten (mathematical literacy, technological aspects and the like) zu Erziehung und Allgemeinbildung der Schülerinnen und Schüler beitragen kann.

ZDM-Classification: D30

Mathematikunterricht aus "herkömmlicher" Sicht und die damit verbundenen Probleme

Dieser Aufsatz ist *kein* Beitrag zu den Ergebnissen der TIMS-Studie TIMSS (die Arbeit an dem vorliegenden Aufsatz reicht weiter zurück), dennoch geben die in diesem Jahr veröffentlichten Ergebnisse der dritten internationalen TIMS-Studie auch Anlaß, über den Mathematikunterricht als solchen und über den Mathematikunterricht in concreto neu nachzudenken.

Während bei der zweiten TIMS-Studie (1996; Schüler der Mittelstufe) Österreich einigermaßen gut und besser als Deutschland abgeschnitten hat (und daher wohl in Österreich kaum Stellung genommen wurde), weisen bei der dritten TIMS-Studie (1997; 17- bis 18-jährige Schülerinnen und Schüler und Abiturklassen) die Ergebnisse in die umgekehrte Richtung. Dieses speziell für Österreich traurige Ergebnis verwende ich hier nur ganz kurz als Einstieg in mein wesentlich allgemeineres Thema (dennoch finden sich einige kurze und dennoch weitgreifende Überlegungen zu den TIMSS-Ergebnissen im Anhang, und zwar in einer Form, wie sie auch für Deutschland gelten und den entsprechenden Handlungsbedarf aufzeigen).

Die folgende Diskussion wird zunächst den alltäglichen und konkreten Unterricht betreffen, dann aber werden wir auch weiter ausgreifen und die Frage nach dem Sinn und Wesen des Mathematikunterrichts neu aufrollen, bzw. in einen allgemeineren Rahmen stellen. Dabei werden wir neben konkreten Beispielen auch die Frage behandeln, wie ein allgemein verpflichtender (und über sämtliche Schuljahre angelegter) Mathematikunterricht über das rein Praktische hinaus in fachtypischer Weise zu Erziehung und Bildung der Schülerinnen und Schüler beitragen kann.

Ist im Grunde – und speziell bei den Ergebnissen der TIMS-Studie – vielleicht ohnehin alles nicht so arg? Und ist vielleicht nur die Art der Studie oder der Zeitpunkt kritikwürdig? Vielleicht ist das Ergebnis – zumindest in dieser Form – nicht aussagekräftig?

Beide Punkte werden wohl angesprochen werden, lassen wir aber den zweiten für den Augenblick unbeachtet.

Ich habe mir die weltweit gestellten und jeweils gleichen Fragen genau angesehen. Sie wurden durchwegs auch von nationalen Kommissionen jeweils mit Lehrplan und Schulbüchern abgestimmt, und jede der Fragen müßte eigentlich ohne Probleme gekonnt werden.
Eine allererste Analyse unseres Fiaskos in Österreich zeigt dreierlei:

1. Die Fragen beziehen sich deutlich weniger auf den bei uns vielfach noch üblichen Unterricht, der oft auf das bloße *Abarbeiten von Routinen* zielt und fachlich-inhaltliche Aspekte ein wenig hintanstellt. Ich weiß natürlich, daß Routinen und reine Rechenaufgaben vielfach als Rettungsanker für schwächere Schülerinnen und Schüler gesehen werden. Andererseits hat die Tatsache, daß oft die reinen Rechenaufgaben *vor* etwas anspruchsvolleren, inhaltlichen Fragestellungen rangieren, vielfach auch rein historische Gründe, Ursachen und Gewohnheiten. Das alles ist übrigens keineswegs von vornherein schlecht und zu verurteilen. Bedenken wir: die Mathematik bildet nicht die Welt, sie muß auch keineswegs im Zentrum jedes Menschen stehen. Nur: die TIMSS-Fragen sind in dieser Hinsicht ein wenig anspruchsvoller, wenn auch nicht wirklich schwerer.

Eine erste Forderung könnte also auf die Änderung all dessen zielen. Zum Beispiel auf das eher *selbständig aktive Problemlösen,* das inhaltlich nicht-standardisierte *Argumentieren,* das Herstellen von Verbindungen mathematischer Begriffe mit Situationen aus Alltag und Umwelt und Ähnliches.

Diese Forderungen wären an sich naheliegend und sinnvoll, allein: das Wesentliche ist aber damit noch nicht getroffen.

2. Ein *zweiter* auffälliger Punkt bezieht sich auf die Streuung der abgefragten Probleme. Bei uns (wenn auch nicht nur bei uns) ist es üblich, den Stoff mit der Schularbeit abzuschließen, und länger zurückliegende Fragen nicht mehr abzurufen. (Das hängt auch mit juridischen Umständen – etwa den Einspruchsmöglichkeiten – zusammen, aber auch mit eingefahrenen Gewohnheiten.) – *Nur* vor dem Abitur wird dann alter Stoff zusammengefaßt, freilich oft nur so weit, wie er für das Abitur benötigt wird. Auch darin mag ein Grund für das nun relativ schlechte Abschneiden Österreichs liegen. Und auch diesbezüglich sollte pro und contra diskutiert werden.

Lassen Sie mich das Inhaltlich-Methodische zwischenzeitlich kurz zusammenfassen!

Wir könnten verlangen (vergleiche auch die Forderungen in Blum / Törner / Wulftange (1997)):

– mehr selbständiges und aktives Mathematiktreiben
– mehr fachübergreifendes Lernen
– mehr inhaltliches Argumentieren und Problemelösen
– systematisches Wiederaufgreifen und Vernetzen bereits früher behandelter Stoffgebiete
– Prozeßorientierung versus Produktorientierung.

3. Es gibt aber einen *dritten* Grund für unsere Situation, und dieser liegt auf einer etwas allgemeineren und tieferen Ebene (vielleicht hat er auch mit dem sogenannten Zeitgeist zu tun): Meine Bemerkung betrifft das *schulische Lernen* als solches. Diesem nämlich wird hierzulande immer weniger Gewicht zugestanden. Vielfach als bloßes Einzelwissen verschrien, stellt man es den sogenannten Zusammenhängen, dem Durch- und Überblick gegenüber. Das ist gerade in der heutigen Pluralität natürlich richtig, doch gibt es andererseits kein "Stricken ohne Wolle".

Das schulische Lernen sei – so sagt man oft – mehr und mehr fragwürdig; Überblicke, Teamwork, Projekte etc. müßten im Vordergrund stehen.

Und wenn das auch nicht falsch ist, so ist doch gerade hier die Gefahr des Dilletantismus groß.

Bei der TIMS-Studie wurde aber anders herum weitgehend konkretes Faktenwissen abgefragt. Und da überrascht es vielleicht nicht, daß Korea, Japan, aber auch Kanada und das nordische Europa sehr viel besser abgeschnitten haben. (Diesmal waren Japan und Korea übrigens nicht offiziell dabei.)

Tatsächlich liegt bei dieser Frage also auch ein *gesellschaftliches Problem* vor, die grundsätzliche Frage nach anzustrebender Bildung und Erziehung; denn freilich ist die Hauptaufgabe der Schule aus unserer Sicht die Erziehung und Bildung der Schülerinnen und Schüler, mehr noch als sie zum Beispiel für gutes Abschneiden bei internationalen Drillaufgaben zu schulen. Freilich aber: alles "cum grano salis", denn internationale Konkurrenz und Globalisierung darf auch für uns kein Schlagwort bleiben.

Wieder andererseits übrigens können wir zukünftige Notwendigkeiten kaum wirklich vorhersagen, so daß für unsere europäische Schule weiterhin noch *vor* den einzelnen Schulfächern die vielleicht unscharfen Begriffe *Bildung* und *Erziehung* vorrangig sein sollten.

Zu dieser Hauptaufgabe aber – und das werden wir begründen – können die klassischen Schulfächer ganz Wesentliches beitragen, und möglicherweise führt auch der einzig sinnvolle Weg über die Gesamtheit der einzelnen Fächer.

Freilich stellen sich auch Hindernisse entgegen: so muß die moderne Schule bekanntlich wegen der laufenden sozialen Veränderungen mehr und mehr Aufgaben übernehmen, die früher das Elternhaus und andere erziehende Gemeinschaften verantworteten. Die Schule wird von der Gesellschaft – jedenfalls hierzulande – nicht mehr nur als der Ort zur Vermittlung von reinem Fachwissen gesehen. Mit dieser Tatsache sind wir konfrontiert, und wir müssen uns daher mehr und mehr der Frage widmen, *was* wir mit der Schule erreichen wollen. Erst in zweiter Linie damit, *wie* wir das erreichen. Bildungs- und didaktische Fragen also sind *vor* den rein methodischen zu lösen. Diese Einsicht erscheint mir wichtig!

Gleichzeitig sind diese Fragen aber auch nur sehr schwierig zu behandeln, zumal sie nicht in dem Maße zu planen, zu reglementieren sind wie jene der Methodik. Bildung als solche nämlich bezieht sich eher auf eine *Haltung* des Menschen, denn auf Fachwissen und Fertigkeiten.

Aus all diesen Gründen und wegen dieser Vorrangigkeit möchte ich zuerst hierzu sprechen und mich aber selbstverständlich auf die Mathematik beziehen.

Bildungsauftrag und Mathematik an der "modernen" Schule

Fragen wir also: Soll auch in der modernen Schule der *Mathematik* als Unterrichtsgegenstand Bedeutung beigemessen werden? Sollen wir diesbezüglich einen neuen Standpunkt einnehmen, und wenn ja, dann welchen?

Wie Sie wissen, werden diese Fragen heute immer wieder in der Öffentlichkeit diskutiert, und das ist es auch wert (z.B. in der oft falsch geführten Diskussion rund um Heymann (1996))! Insbesondere auch in einer Zeit, wo Mathematik von manchem auf Technologie reduziert zu werden scheint. (Wo dies aber umgekehrt auch nicht völlig unbegründet ist.)

Daß Computer- und mathematisch-technisches Wissen gelehrt werden sollen, ist sicherlich selbstverständlich. Weniger klar ist aber die Rolle und der Stellenwert der *klassischen Mathematik* als Schulfach. Hat sie angesichts der Technologie und des praktischen Rechnens überhaupt erzieherische Werte? Kann sie fachtypisch zur Bildung unserer Jugend beitragen?

Ich meine: ja!

Der Bildungsauftrag an etwa das Gymnasium ist sicherlich mehr als eine Aufzählung von Wissensinhalten, so bedeutsam diese auch sein mögen. Indem Bildungsfragen einen bloß technischen Charakter annehmen, löst sich ihr Gehalt in Luft auf. Es ist absolut unsinnig, das Bildungsproblem auf ein Stoffproblem, auf ein Methodenproblem oder auf einen verbindlichen Kanon fachlicher Kenntnisse zu reduzieren. Und dennoch ist auch das nicht völlig von der Hand zu weisen. Natürlich gibt es einen festen mathematisch-naturwissenschaftlichen Kanon, der gekonnt werden muß. In dieser Dichotomie liegt eben einer der Widersprüche und eine der Schwierigkeiten der allgemeinen Bildungsfrage. (Nur hier behandle ich die konkreten mathematischen Inhalte nicht vorrangig, und es mag der falsche Eindruck entstehen, daß ich diese nicht hoch schätze!)

Versuchen wir nun ein paar konkrete Hinweise zu unseren Gegenständen und denken wir daran, daß es vor allem im Gymnasium um "reflektierte Personalität" geht, keinesfalls ist ja das Gymnasium eine ausschließlich "wissenschaftliche" Einrichtung!

Mathematik und Naturwissenschaften im "Kanon" der Unterrichtsfächer

Ein wesentliches Merkmal des Menschen ist es, daß er seine Welt mit *Begriffen* ordnet, um bestimmte Phänomene zu verstehen und Orientierungen für spätere Handlungsweisen zur Verfügung zu haben (Graumann 1998). Begriffsbildung in diesem Sinn ist natürlich Sache jeder Wissenschaft; auf die Schule bezogen, gewinnen wir aber aus diesem Motto eine Denkweise, die in den Naturwissenschaften und vor allem in der Mathematik virulent wird und dort ihre Macht zeigen kann.

– Strukturieren, Ordnen, Systematisieren und Abstrahieren
– Arbeiten mit Hypothesen und das Bemühen um Verallgemeinerung

ist hier die Devise und scheint eine der charakteristischen Merkmale mathematisch-naturwissenschaftlichen Denkens zu sein. Der Unterricht sollte das verdeutlichen.

Während in den – sagen wir – Geisteswissenschaften die Begriffe vor allem zur möglichst korrekten *Beschreibung* der dort zentralen *Ideen* dienen, ist in unseren Wissenschaften bereits das zweckmäßige und sinnvolle *Erfassen* der Dinge durch Begriffe zentral. Viele Phänomena *entstehen* in unseren Wissenschaften ja erst durch die Begriffsbildung. (Denken Sie etwa an den Begriff der Momentangeschwindigkeit, bzw. der Änderungsrate einer Größe beschrieben durch einen Differentialquotienten in der 11. Jahrgangsstufe) (in Österreich: 7. Klasse) oder an den Begriff der Geradensteigung in der 8. Schulstufe (in Österreich: 4. Klasse!) Ein anderes Beispiel: Wenn es um Faschismus oder – sagen wir – Gerechtigkeit geht, spielen Wort und Begriff eine andere Rolle als bei etwa der Entropie oder beim Integral. Hier sind das Begriffe, die das Ding in gewisser Weise erst erschaffen, wenngleich auch dessen Sinngehalt in bestimmter Weise auch vorher schon bestanden hat. (Mathematik und Naturwissenschaften spielen hier eine grundsätzlich andere erzieherische Rolle als die Humanwissenschaften.) Der Rückgriff auf das reine Wort, auf den Begriff hat hier eine größere Bedeutung als etwa in der Philosophie oder in der Psychologie, wo die rein begriffliche Arbeit eher sekundär ist.

In unseren Fächern sprechen wir – richtig verstanden – durch die Arbeit mit Begriff und Wort auch die Persönlichkeitsdimension der Jugendlichen an. (Das mag abstrakt klingen, hat aber sehr konkrete Auswirkungen, wenn man es auf den Alltagsunterricht spezialisiert. Dazu ein wenig später!)

Ein anderer Gesichtspunkt, der gerade von unseren Fächern besonders angesprochen wird, kann mit dem Menschenrecht "Verstehen des Verstehbaren" gut beschrieben werden (M. Wagenschein). – Hierher gehört es auch, bisweilen über die Grenzen des mathematisch Erklär- und Entscheidbaren zu sprechen. Doch auch dazu ein wenig später noch!

Alles in allem ging es mir bisher darum, einmal mehr aufzuzeigen, daß das methodisch Einzelne zwar planbar ist, der Bildungsauftrag der Schule als solcher aber nicht; hier geht es um eine bestimmte *Haltung* den Dingen gegenüber, die uns im Leben begleiten. Um die sogenannte *theoretische Sichtweise* nämlich, die zwar konkretes Wissen voraussetzt, daraus aber nicht besteht. In unseren Fächern speziell geht es um den Aufbau der naturwissenschaftlich-mathematischen Haltung, die ich zwar nicht überbewerten will, die aber im großen und ganzen heute noch zu kurz kommt.

Dennoch dürfen – nehmt alles nur in allem – die Fachwissenschaften nicht allein verantwortlich sein für die Erziehung der Menschen. (Darin aber lag übrigens ein Fehler der Schulreform der siebziger Jahre.)

Erziehung und Allgemeinbildung beruht auf anderer Verantwortung als auf der wissenschaftlichen Richtigkeit (Jaspers). Unter dieser Instanz ist die Auswahl der Schulfächer jederzeit vom Geist der Schule, also auch von deren Autonomie her neu zu prüfen. Die wissenschaftlichen Inhalte aber dürfen dabei nicht aus dem Auge fallen: vielleicht ein Widerspruch, den es vor allem von Pädagogen und Lehrern zu lösen gilt. (Karl Jaspers (1958) spricht in ähnlichem Zusammenhang von der "Paradoxie des Planens durch Nichtplanen".)

Bildung ist *Lebensform*, die – ebenfalls nach K. Jaspers – zu ihrem *Rückgrat* Disziplin als Denkenkönnen hat, zu ihrem *Raum* aber geordnetes Wissen. (Gibt es einen schöneren Auftrag für unsere Fächer?)

Der Mensch ist nicht durch das, was er psychologisch und biologisch ist, sondern erst durch die ihm objektiv in den einzelnen Fächern werdende Welt des Geistes und der Naturwissenschaften. Für den über die Materialien hinausgehenden Bildungsinhalt sind wir Lehrer verantwortlich, ohne genauen Lehrplan und in je subjektiv verschiedener und ganz persönlicher Form.

Ohne genau sagen zu können, was das jeweils ist, sollen jedenfalls psychologische und soziale Erkenntnisse den Bildungsinhalt nicht bestimmen, oder nicht allein bestimmen. Und daraus ergeben sich ganz spezielle Forderungen an unsere Fächer, die früher so nicht gesehen wurden. Sie sind je nach Lehrer bzw. Lehrerin und Klasse auch verschieden zu beantworten, aber gerade in der Mathematik *muß* es geschehen, in einem Fach, dessen Sinngehalt nicht immer sofort einsichtig ist. Das alles sollten wir – meine ich – bei unseren Stundenvorbereitungen bedenken, wenn es auch nicht stündlich umgesetzt werden muß.

Kehren wir aber zum konkreten Alltagsunterricht zurück:

Die Mathematik hat sicherlich die Aufgabe, die Schülerinnen und Schüler auf das praktische Leben vorzubereiten. Was das aber bedeutet, ist um so unschärfer, je komplexer die Gesellschaft ist. Die Lebenserfordernisse sind für jeden andere. Denken Sie an einen Tischler, einen Rennfahrer, Chirurgen, Richter u.s.w. Ja mehr noch: wir wissen gar nicht, welche Forderungen das Leben an die zukünftigen Erwachsenen stellen wird.

Selbstverständlich muß man elementares Rechnen lernen, Tabellen und Skizzen deuten und selbst anfertigen, sowie statistische Aussagen kritisch lesen können. Auch Prozentrechnen und die Handhabung von Taschenrechnern und Computern gehören zu den modernen Kulturtechniken, alles Fertigkeiten, ohne die man in Zukunft wahrscheinlich nicht auskommen wird können. Die Arbeit mit Computern gehört übrigens auch zu dem modernen Wissenschaftsbild der Mathematik und der Naturwissenschaften, das – zumindest am Gymnasium – auch vermittelt werden soll.

Wenn es bei der Mathematik theoretisch wird, wenn also z. B. der Sprachaspekt der Mathematik zum Tragen kommen soll, winken – wie die seinerzeit Neue Mathematik gezeigt hat – wieder andere Gefahren. Denn dann müssen etwas höhere Abstraktionsstufen gewählt werden, und da kann leicht die falsche gewählt werden. Wieder sind wir Lehrer zur größten Verantwortung gerufen, denn nichts kann Schülerinnen bzw. Schüler so sehr von der Mathematik abbringen wie falsch gewählte Abstraktionsstufen. Das sind Sprachniveaus, die dem Lehrer bzw. der Lehrerin vom Studium und von schlechten Schulbüchern her geläufig sind, die aber wenig mit der Sprache der Schülerinnen und Schüler zu tun haben.

Ich sage ausdrücklich nicht, daß Schülerinnen und Schüler nicht andererseits gerade durch den Mathematikunterricht auf ein höheres Sprachniveau gebracht werden sollen, aber hier liegt eben wieder eine schwierige Aufgabe der Didaktik, die sich grundsätzlich – wie viele didaktische Fragen – von der Art der mathematischen Denkweise unterscheidet.

Sie wissen, daß es in Deutschland und demnächst auch Österreich eine Debatte gibt, ob sich Mathematik nicht auf das praktisch Notwendige und in den letzten Klassen auf Wahlfächer beschränken soll. Im Sinne des vorher Gesagten ist meine Antwort klarerweise: *nein!*

Das Ziel der Schule ist es, Menschen zu erziehen, die ihre Handlungen aus Denkkraft, Einsicht und Überblick herleiten; Menschen, die sich nicht damit begnügen, fremdbestimmte Verfahren auszuführen und die ihre Befriedigung dann nur aus der mehr oder minder ordentlichen Durchführung derselben ableiten. Erst derartige Menschen gelten ja als gebildet, auch dann, wenn man den Terminus "Bildung" nicht fest umreißen kann.

Die Allgemeinbildenden Höheren Schulen sind sicherlich nicht primär dazu da, Scheckausfüllen zu lehren, Autofahren, Streitkultur, Medienumgang oder Sexualprobleme zu diskutieren. Der Grund, warum statt dessen Literatur, Geschichte, Latein, Naturwissenschaften, Religion/Ethik oder eben Mathematik gelehrt wird, liegt darin, daß jeder dieser Gegenstände mit seinen typischen Sichtweisen und Abstraktionen die sogenannte Allgemeinbildung erst ausmacht. *Jedes* Problem, angefangen vom Waldsterben, über die Volkswirtschaft, den Europagedanken, den Nationsbegriff bis hin zur AIDS-Problematik kann ja entweder historisch, juridisch, ökonomisch, physiologisch, biologisch oder soziologisch gesehen werden, und dann eben auch unter Anwendung der mathematisch-statistischen "Brille". Keine der angeführten Sichtweisen erfaßt das Ganze, aber das Ganze kann auch nicht ohne Behandlung auf diesen einzelnen Abstraktionsstufen erkannt werden.

Freilich muß dann immer auch gesehen werden, *daß* eine und welche Sichtweise eingenommen wird und welche Beschneidungen und Einseitigkeiten dabei auftreten können.

Eine mehr oder minder unreflektierte Methode bleibt oft im Trivialen. Die im Mathematikunterricht nebenbei erworbene *theoretische Sichtweise* hilft mit, dies zu verhindern.

Mathematik als Gegenstand des täglichen Unterrichts – mögliche Ziele und deren Neubewertung. Genügen "sieben Jahre"?

Für uns Mathematiklehrer heißt das konkret: nicht oberflächliche, leicht abprüfbare Weltsicht mit ein paar Zahlen garniert ist Aufgabe des Mathematikunterrichts, sondern – wie es immer wieder genannt wurde – Bildung *durch* Mathematik, mathematikspezifische Fähig- und Fertigkeiten, die über das Faktenwissen hinausreichen.

Was kann man also – oft nur durch ein paar Worte oder durch eine ganz bestimmte Aufbereitung – mit dem jeweils in Rede stehenden mathematischen Thema über den mathematischen Gehalt *hinaus* erreichen? Das wird jeweils etwas anders sein; *was* es sein könnte, entnimmt man der didaktischen Literatur.

Ein Beispiel zur 8. Schulstufe (4. Klasse):

Rationale und irrationale Zahlen, ein Thema, das innermathematisch rigid erscheinen kann, gleichermaßen aber aufregend sein kann und mathematische Denkweisen widerspiegelnd.

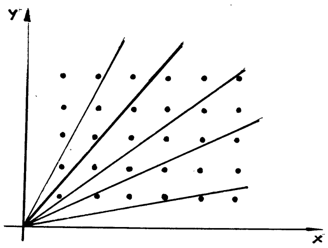

Abb. 1

In Abb. 1 sind alle Gitterpunkte mit ganzzahligen Koordinaten eingezeichnet. Kann es eine Gerade geben, die beim Ursprung beginnt und keinen einzigen dieser Milliarden, ja unendlich vielen Punkte trifft, die also "hindurch läuft".

Nun, wenn die Gerade einen Punkt (m/n) trifft, muß der Geradenanstieg n/m sein, also rational (Abb. 2).

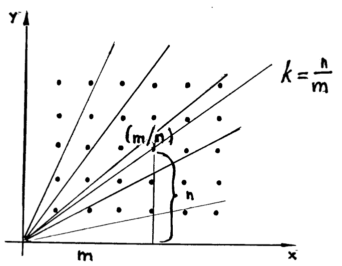

Abb. 2

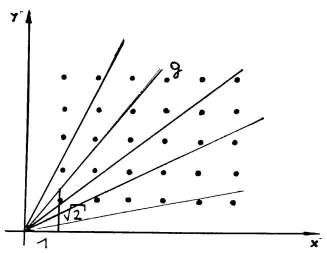

Abb. 3

Daß umgekehrt schon die Gerade g (Abb. 3) keinen einzigen Punkt trifft, ist daher die Tatsache, daß $\sqrt{2}$ irrational ist, ein Standardthema der 4. Klasse, jetzt aber so, daß die Sache im Gedächtnis bleibt und mathematische Denkweise über den in Rede stehenden Gesichtspunkt hinaus widerspiegelt wird (Problemlösung durch Formalisierung nämlich). Es gibt – wie Sie wissen – sogar "mehr" Geraden, die "durchlaufen" als Geraden, die einen Punkt treffen.

Ich erinnere mich gut daran, wie mein Sohn seinerzeit aus der Schule heimkam: Das Thema Irrationalzahlen hatte ihn bewegt und es folgte eine lange Diskussion mit meiner Frau, einer Altphilologin, über die Möglichkeit unendlicher Dezimalzahlen an sich! Eine damals von seinem Lehrer – wenn auch anders als hier – gestaltete Sternstunde mathematischen Denkens über den bloßen Gegenstand hinaus.

Ein zweites Beispiel:
Fragen wir rein umgangssprachlich nach der "Mitte" eines Dreiecks; irgendwie hat man ja das Gefühl, daß so etwas existieren muß (Abb. 4).

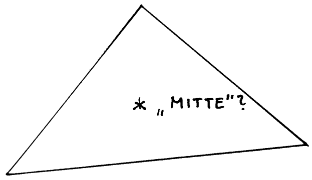

Abb. 4

Der Mittelpunkt soll natürlich von jedem Eckpunkt gleichweit entfernt sein. Scheinbar klar! Ist es also der Umkreismittelpunkt? (Abb. 5) (Das muß natürlich behutsam entwickelt werden, verschiedene Ideen kommen zum Tragen, usf). Hier nur kurz: es geht um das für den gesamten Mathematikunterricht so typische schrittweise *Exaktifizieren unscharfer Alltagsbegriffe* (ähnliche Beispiele: "besser", "genauer", "Wahrscheinlichkeit", "Zufall", u.s.w.)!

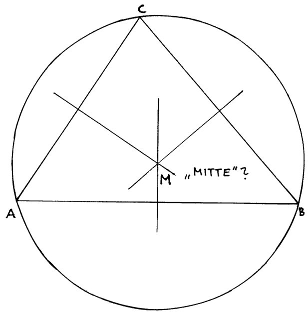

Abb. 5

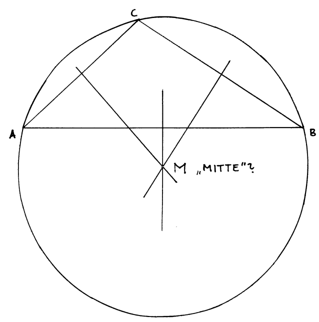

Abb. 6

Dummerweise kann aber der Umkreismittelpunkt *außerhalb* des Dreiecks liegen (Abb. 6). Der Umkreismittelpunkt kann also nicht die "Mitte" sein. Versuchen wir es von Neuem, etwa mit dem Schwerpunkt u.s.w.

Nun, ich gehe nicht ins Detail. Sie wissen, was ich meine. Es geht mir darum, daß mit dem bloßen *Material* allein immer auch typische *Denkweisen* mitgeteilt werden. (Für Beispiele siehe auch etwa in Posamentier/Schulz 1996, bzw. Weth 1997.)

Ein hier nun *drittes*, vielleicht eher lustiges Beispiel aus einem Wiener Boulevardblatt der letzten Zeit zeigt (wie viele derartige Beispiele), wie es um die *mathematical literacy* der Bevölkerung bestellt ist. – Zitat:

Spielen Sie Lotto?
Ja, aber es hat nur zu einem Dreier gereicht. Drei Zahlen von sechs waren richtig, und trotzdem habe

ich nicht die Hälfte des Sechsers bekommen[1].

Klarerweise sollte ein vernünftiger Mathematikunterricht verhindern, daß es soweit kommt. Letztendlich geht es hier um Allgemeinbildung im weitesten Sinn.

Andere Denkweisen, für die an sich unsere Fächer zuständig wären, und für die es natürlich auch konkrete Beispiel gibt, sind:
– Analogisieren (das im täglichen Leben eine große Rolle spielt, und wo viele logische Fehler auftreten können)
– Systematisieren
– bildhaftes Denken
– statistisches Denken

u.a.m., wie es die Lehrpläne durchaus auch fordern.

Kehren wir zu etwas weiter ausgreifenden Aspekten zurück.

Bildung durch Mathematik wurde immer wieder gefordert und Verwirklichungsmöglichkeiten wurden aufgezeigt. Von Plato über R. Descartes, I. Kant, L. Wittgenstein, um nur einige zu nennen, die die Mathematik expressis verbis nannten. Desgleichen von Pädagogen, aufgeschlossenen Fachwissenschaftlern und Didaktikern. H. Freudenthal, K. Menger, E. Mach, M. Wagenschein sind einige der bereits Verstorbenen.

Seit der Antike, hin bis spät in die Neuzeit und das 19. Jahrhundert wurde speziell der Bildungswert der Geometrie betont. Das *Denken in Bildern* wäre hier zu nennen, das strikte Trennen von Voraussetzung und Folgerung, der nach Eindeutigkeit ringenden Formulierungen. Ferner die Erkenntnis, daß jede Argumentation von einer ganz bestimmten Basis ausgeht und daß Resultate immer auch von den Werkzeugen abhängen, die zugelassen sind. Das alles sind genuine Anliegen des Mathematikunterrichts. (Das zuletzt Genannte ist geradezu der Grund, warum in der 8./9. Schulstufe *verschiedene* Beweise für den Satz von Pythagoras gebracht werden sollten, weil es eben um mehr geht, als bloß die Richtigkeit des Satzes nachzuweisen.)

So fordert z. B. Plato im "Staat" Mathematik nicht nur um der Anwendungen willen zu lehren, sondern um – wie er sagt – "den Weg zu Wahrheit und Weisheit zu finden" (Zitat). "Hast du aber schon bemerkt", sagt da Sokrates zu Glaukon, "daß [...] alle schwerfälligen Naturen, wenn sie im Rechnen unterrichtet und geübt werden, sollten sie auch sonst keinen Vorteil davon haben, doch wenigstens das gewinnen, daß ihre Auffassungsgabe rascher wird, als sie vorher war."

Leider zeigt sich der von einem guten Mathematikunterricht bewirkte geistige Fortschritt bei den solcherart beschulten Kindern nicht unmittelbar. Tatsächlich ist er aber vorhanden, und das tröstet selbst mich als geborenen Realisten. Zum Abschluß nenne ich noch kurz *zwei* Punkte: *Weckung der Neugier und Rationale Distanz:*

Zur Rolle der Neugier; systematisches Probieren und Rationale Distanz

1. Ein gut angelegter mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht vermag Neugier zu wecken als den Wunsch, Verborgenes zu entdecken, Vorgegebenes zu hinterfragen und dabei auch kreativ zu werden.

Sehen wir uns kurz folgendes *Beispiel* an, das bloß die Tendenz zeigen soll:

Wir alle wissen, wie man den Schwerpunkt eines *Dreiecks* zeichnet. Fragen wir, wie man den Schwerpunkt eines *Vierecks* findet und lassen wir Zeit zum Probieren. Zeit ist in diesem Sinn das Wichtigste.

Nun, hier gleich eine interessante Lösung: Schwerlinien helfen nicht weiter (Abb. 7). Zerlegt man aber das Viereck durch seine Diagonalen und zeichnet man die Schwerpunkte der entstehenden vier Dreiecke, entsteht ein zum ursprünglichen ähnliches Viereck (Abb. 8). Verbindet man zusammengehörige Punkte, erhält man einen äußerst interessanten merkwürdigen Punkt ... Es ist gleichzeitig der gesuchte Schwerpunkt.

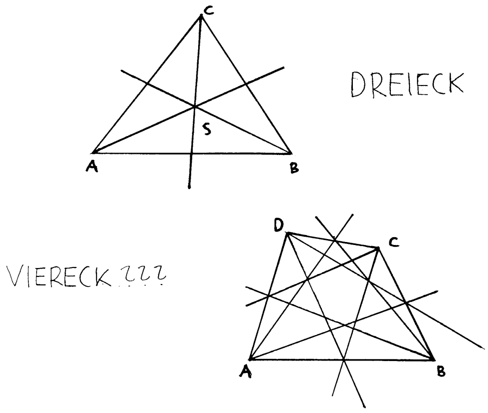

Abb. 7

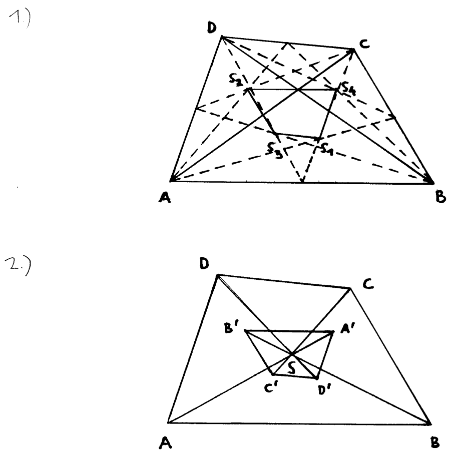

Abb. 8

Es kommt hier nicht auf die *Lösung* an, sondern darauf, daß *vermutet* und *erraten* wird (Weth 1997): *Systematisches Probieren* ist eine *genuin mathematische Tätigkeit!*

Neugier ist die Triebfeder aller Forschung und Wissenschaft, ein wesentliches Ingredienz menschlicher Vernunft. (In Goethes Faust sagt der Teufel: "Verachte nur Vernunft und Wissenschaft, des Menschen allerhöchste Kraft; dann hab ich Dich schon unbedingt.") – Wer die Zeit, die zur Erzeugung eben dieser Neugier nötig ist, durch allzu rigide Lehrpläne und Stundentafeln einengt, bringt sich selbst um den Profit.

Letzter Punkt:

2. Zur Bildung gehört auch, daß man über die Probleme der eigenen Lebenswelt hinaussehen kann. Daß man

[1] Lotto in Österreich bedeutet "6 aus *45*" zu erraten.

die persönlichen Probleme außer Acht lassen kann; die Gewinnung *rationaler Distanziertheit* wie der Psychologe sagen würde. (Übrigens handelt es sich um ein konstitutives Merkmal von besonderer Begabung.) Rationale Distanziertheit ist also die Fähigkeit, zugunsten objektiver Erkenntnis die eigenen Wertungen für je einen Augenblick zu suspendieren. Das könnte, wie gesagt, ein typischer Beitrag des Mathematik- und des naturwissenschaftlichen Unterrichts zur Persönlichkeitsbildung der Schülerinnen und Schüler sein. Hochtrabend ausgedrückt geht es um eine Haltung des Menschen, die man als *Wissenschaftlichkeit* bezeichnen könnte, und zwar im Sinn von "science", nicht von "arts" also quasi im Sinne der Geisteswissenschaften. Unter allen Schulfächern wird sich die Mathematik hier besonders zuständig fühlen und das auch voll und ganz zu recht.

Zusammenfassung; Plädoyer für eine "Didaktik der Prüfungen"

Insgesamt sind es, um den Aufsatz abzuschließen, also *drei Merkmale,* die den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht bestimmen sollen:
1. Konkretes Faktenwissen mit Mut zur Auswahl
2. Bildungsaspekte, die sich aus einer bestimmten Art ergeben, mit Mathematik umzugehen
3. Persönlichkeits- und Charakterbildung der Schülerinnen und Schüler durch Mathematik und Naturwissenschaft.

Im Zusammenhang mit den oben angesprochenen Fragen müßte auch eine neue "Didaktik der Prüfungen" entwickelt werden. Dabei sollte weniger das Problem der Durchführung der Prüfungen behandelt werden, auch nicht "assessment" – Fragen, wie sie z.B. in den letzten Jahren verstärkt im angloamerikanischen Sprachraum wissenschaftlich abgehandelt wurden, sondern eher das Problem, *wie* die Prüfungen das Ergebnis, die Art und die Verwirklichung der Zielsetzungen des Mathematikunterrichts beeinflussen. Naturgemäß sind – jedenfalls für Schülerinnen und Schüler – die Prüfungen zentral. Von dort her lassen sich praktisch alle Fragen der Mathematikdidaktik aufrollen, und eben das sollte neben die stoffdidaktischen Untersuchungen zum Lehrstoff und zum Unterricht als solchen treten, und neben die empirischen, interpretativen, lernpsychologischen, interaktionistischen Studien usw.

Trotz aller realistischen Sicht auf den Schulalltag und trotz unserer vielleicht schmerzlichen Erfahrungen mit diesem Alltag sollten wir uns ein wenig von dem Idealismus erhalten, der uns getrieben hat, den Lehrberuf zu ergreifen.

Literatur

Blum, W.; Törner, G.; Wulftange, J. (1997): Schlechte Noten für den Mathematikunterricht in Deutschland – Anlaß und Chance für Innovationen. – Erklärung der Fachverbände DMV/GDM/MNU zu den Ergebnissen der internationalen Mathematikstudie TIMSS 1996. – Z.B. in: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (1998)Nr.66, S. 41-44

Götz, S.; Reichel, H. C. (1998): TIMSS – Informationen, Beispiele und Folgerungen. – Wien: Hölder-Pichler-Tempsky

Graumann, G. (1998): Ordnen, Strukturieren, Systematisieren – Gewinn jenseits des Rechnens. – In: G. Graumann; K. Röttel; H. Köhler, S. 47–53

Graumann, G.; Röttel, K; Köhler, H. (Arbeitskreis Mathematik und Bildung) (Hg.) (1998): Mathe – ja bitte; Wege zu einem anderen Unterricht. – Buxheim: Polygon Verlag

Hentig, H. v. (1996): Bildung. – München: Hanser

Heymann, H.-W. (1996): Allgemeinbildung und Mathematik. – Weinheim: Beltz

Humenberger, H.; Hanisch, G.; Reichel, H.-C.; Götz, S.; Koth, M. (1991): Fachbereichsarbeiten und Projekte. – Wien: Hölder-Pichler-Tempsky (Mathematik für Schule und Praxis; Bd. 2)

Jaspers, K. (1958): Von den Grenzen pädagogischen Planens. – In: Philosophie und Welt. München: Piper

Jaspers, K. (1977/1982): Was ist Erziehung? Ein Lesebuch. – München: Piper, 1977; München: dtv, 1982

Otte, M. (1993): Das Formale, das Soziale und das Subjektive; eine Einführung in die Philosophie und in die Didaktik der Mathematik. – Frankfurt/Main: Suhrkamp

Plato (1991): Der Staat. – München und Zürich: dtv/Artemis

Posamentier, A; Schulz, W. (1996): The Art of Problem Solving; – Thousand Oaks, CA: Corvin Press

Postman, N. (1996): Keine Götter mehr; das Ende der Erziehung. – Berlin: Berlin Verlag

Reichel, H.-C. (1997a): How can or should the recent development in mathematics influence the philosophy of mathematics? – In: A. Driessen; A. Suarez (Hg.), Math. Undecidabilitiy Quantum Non-Locality and the Question of the Existence of God. Amsterdam: Kluwer, p. 3–14

Reichel, H.-C. (1997b): Identifying and Promoting Mathematically Gifted Pupils (12–20 years). – In: High Ability Studies 8(1997), p. 223–232

Reichel, H.-C. (1998): Mathematikunterricht jenseits der vordergründlichen Nützlichkeit für Alltag und Beruf. – In: G. Graumann; K. Röttel; H. Köhler, S. 104–110

Restivo, S.; Bendegem, J.-P.; Fischer, R. (1993): Math-Worlds. – New York: State University of New York Press

Weth, Th. (1997): Begriffsbildung als kreatives Tun im Mathematikunterricht. – Habilitationsschrift, Univ. Würzburg

Für Hilfe bei der Herstellung des Manuskripts danke ich Herrn Tomas Kubelik, Frau Gudrun Kretzschmar, Frau Eva Kissler und Herrn Dr. Stefan Götz.

Anhang: Gedanken zu den (eher schlechten) Ergebnisse der dritten TIMS-Studie (TIMSS) (die mathematisch-naturwissenschaftliche Ausbildung der 17/18-jährigen Schülerinnen und Schüler)

1. Gesellschaftlich-politische Gründe:
Das "Faktenwissen" (es wurde bei der TIMSS praktisch nur Faktenwissen abgefragt) wird hierzulande gering geschätzt (nötig sei vielmehr "Übersichtswissen", "Lernen lernen" und andere Worthülsen). Das ist an sich *richtig*, aber es besteht die Gefahr des Dilettantismus! Das "schulische" Lernen wird hierzulande nur wenig geschätzt; es wurden bei der TIMSS aber hauptsächlich Fragen nach erlernbaren Fakten ("Einzelwissen") gestellt.

Bei uns ist mathematisch-naturwissenschaftliches Wissen leider allgemein nicht hochgeschätzt! (Fördern!)

2. Gründe, die in der Schulorganisation liegen:
Es gibt nur ganz wenige Schulen, die mit mathematisch-naturwissenschaftlichen Stunden wirklich hochdotiert sind. (Der Zug scheint sogar dahin zu gehen, daß man in den letzten Klassen diese Gegenstände noch wird abwählen können.) In unseren Höheren Schulen ist die Stundenzahl für Mathematik im allgemeinen gering. In den Naturwissenschaften ist sie noch geringer, Physik und Chemie z.B. werden nicht einmal in allen Klassen unterrichtet.

3. Gründe, die in der Lehrerfortbildung liegen:
Mathematisch-naturwissenschaftliche Lehrerfortbildung ist vielfach unterrepräsentiert. Ferner: es ist bekannt (speziell auch mir durch eigene langjährige Erfahrung), daß nur wenige und im Schnitt vor allem jüngere Lehrer und Lehrerinnen regelmäßig an Fortbildung teilnehmen. Hier besteht Handlungsbedarf. Es wäre sogar sinnvoll, eine in gewissem Sinn verpflichtende Lehrerfortbildung einzuführen.

4. Gründe, die in unserem Bildungskonzept liegen (Lehrplanfrage):
Unser Bildungskonzept ist (m. E. mit Recht) das der Allgemeinbildung. Diese Art Bildung wird bei uns in höherem Maße erreicht als z. B. in den USA, sie ist aber schwer abprüfbar oder durch "Punkte" bewertbar. Trotz allem darf man das fachliche Einzelwissen aber nicht unterschätzen. In den USA etwa, die übrigens auch nicht gut abgeschnitten haben, ist das allgemeine Bildungsniveau i. allg. niedriger, dennoch gibt es andererseits sehr viele gut ausgebildete Spezialisten (Problem der Polarisierung der Ausbildung).

In puncto Lehrplan ist im Grunde kaum etwas zu ändern, die Lehrpläne müssen aber *umgesetzt* werden (speziell in ihrem "allgemeinen Teil")! Da liegt es zum Teil im argen (siehe etwa den obigen Aufsatz).

5. Gründe, die in der Art des Unterrichts liegen:
Bei uns endet der Stoff im allgemeinen mit der Schularbeit. Weiter zurückliegender Stoff darf – schon aus juridischen Gründen – nicht abgefragt werden. Im obigen Aufsatz finden sich Vorschläge hiezu.

Beim Abitur (auch bei Schularbeiten) müßten z.B. viel *mehr*, dafür aber *kürzere*, "einfachere" Aufgaben gestellt werden, auch solche, die sich auf inhaltliches Verständnis beziehen, nicht nur Routineaufgaben. Freilich: die Routineaufgaben retten oft die schwachen Schülerinnen und Schüler. Das ist auch gut so. (Die Mathematik ist nicht für jeden die "Welt"!) Aber: eine sinnvolle "Mischung" müßte gefunden werden. (Handlungsbedarf!)

Die TIMSS-Fragen haben sich praktisch nicht auf Routinen bezogen, die sind aber in unserem Unterricht die Regel.

6. Gründe, die in der Lehrerausbildung liegen:
Die Lehrerausbildung ist nicht optimal, die Gymnasiallehrerausbildung ist an vielen Universitäten ausschließlich "wissenschaftlich" orientiert, vielfach fehlt es einerseits an didaktischen Lehrveranstaltungen, andererseits an fachlich orientierten LV, die aber "auf das Lehramt hin" konzipiert sind (z.B. "Algebra für Lehramtskandidaten", u.s.w).

7. Gründe, die in der Art der Studie liegen:
Die Studie ist m. E. korrekt durchgeführt, da gibt es kein Herausreden. Aber es haben viele Schulen die Antwort verweigert; Fragebögen sind verhaßt. Auch: der "Schnitt durch die Schulen" ist nicht derselbe wie in anderen Ländern.

Im einzelnen:

a) Österreich hat eine extrem hohe Anzahl unter den 17/18-jährigen, die eine Höhere Schule besuchen (meines Wissens ca. 33% alles in allem, in Deutschland sind es m.W. nur rund 23%). Zudem hat Deutschland 13 Jahre bis zum Abitur, das heißt vielfach waren auch 19-jährige Schülerinnen und Schüler dabei (Mischung verschiedener Schultypen.)

b) In Österreich wurde (vom Salzburger Pädagogischen Institut IEA) nicht vor-ausgewählt (weder Schüler noch Schulen); überhaupt wurden nie einzelne Schüler, sondern immer nur Schulen gefragt. In Rußland z.B. wurde vor-ausgewählt. Dort spielten überhaupt nur die 2% der mathematisch höchstdotierten Schulen mit, analog auch anderswo.

   Aus all diesen Gründen nahmen jedenfalls in Österreich auch viele "schwache" Schülerinnen und Schüler (wenig Interessierte, usw.) teil.

   Die "guten" (mathematisch besonders geschulten) Schülerinnen und Schüler sind – verglichen mit anderen Staaten – sicherlich ebenso kompetent und würden daher recht gut abschneiden.

c) In Deutschland gibt es – im Unterschied zu Österreich – das Kurssystem, das heißt Grund- und Leistungskurse. Wo nun eine Leistungskursklasse mitgespielt hat, wird das Ergebnis von vornherein schon besser sein! Es zählt ja immer die ganze Klasse, bzw. wird dem Alter nach verglichen. (Interessant ist z.B., daß in Deutschland nur 3% der 19-jährigen einen Physik-Leistungskurs besuchen. Wenn nun also eine solche Klasse mitgespielt hat, ist der Ergebnisunterschied verständlich.)

d) In den deutschsprachigen Büchern finden sich sämtliche TIMSS-Aufgaben, dennoch schnitten die Schülerinnen und Schüler schlecht ab. Die schulische Umsetzung der Buchinhalte und die Wiederholung in späteren Klassenstufen wird zu überdenken sein (Handlungsbedarf!). Siehe auch im obigen Aufsatz! Ob ein

– an sich auch problematisches – Zentralabitur die Lösung ist, ist bisher nicht schlüssig geklärt.

Handlungsbedarf ist auf allen Ebenen gegeben, am wenigsten in Fragen der Lehrpläne (Oberstufe) und der Bücher, die ich alle sehr gut kenne. Alle TIMSS-Aufgaben sind dort ausführlichst behandelt! Das Problem ergibt sich bei der *Umsetzung in den schulischen Alltag und bei der Förderung der mathematischen Ausbildung im allgemeinen* (siehe Punkt 1); die Angst der Lehrer und Lehrerinnen vor der Stoffauswahl, u.a.m.

Autor
Reichel, Hans-Christian, Prof. Dr., Institut für Mathematik, Universität Wien, Strudlhofgasse 4, A-1090 Wien, Österreich. E-mail: reichel@radon.mat.univie.ac.at

Vorschau auf Analysethemen der nächsten Hefte

Für die Analysen der Jahrgänge 30 (1998) bis 32 (2000) sind folgende Themen geplant:
– Mathematikunterricht und demokratische Erziehung
– Mathematik und Deutsch
– TIMSS
– Mathematikdidaktische Forschung im Primarbereich
– Mathematik an Hochschulen lehren und lernen
– Analysis an Hochschulen
– Mathematik in der Ingenieurausbildung
– Theoretische Betrachtungen zu Schulbuchanalysen.

Vorschläge für Beiträge zu o.g. Themen erbitten wir an die Schriftleitung.

Outlook on Future Topics

The following subjects are intended for the analysis sections of Vol. 30 (1998) to Vol. 32 (2000):
– Mathematics teaching and democratic education
– TIMSS
– Research in primary mathematics education
– Teaching and learning mathematics at university level
– Calculus at universities
– Mathematics and engineering education
– Concepts and issues in textbook analyses.

Suggestions for contributions to these subjects are welcome and should be addressed to the editor.