

Heugl, H.; Klinger, W.; Lechner, J.:

Mathematikunterricht mit Computer-algebra-Systemen

Ein didaktisches Lehrbuch mit Erfahrungen aus dem österreichischen DERIVE-Projekt

Bonn: Addison-Wesley, 1996. – 307 S.

ISBN 3-8273-1082-2

Hans-Georg Weigand, Gießen

In Österreich wurde 1993 ein landesweites Projekt mit dem Ziel gestartet, Veränderungen des Mathematikunterrichts durch den Einsatz von Computeralgebra-Systemen zu erforschen. Dabei sollte herausgefunden werden, welche Auswirkungen die Verwendung dieses neuen Werkzeugs auf Lernziele, Lerninhalte und Methoden haben kann. Für alle Gymnasien in Österreich wurde eine Generallizenz des Programms DERIVE angeschafft, das sowohl den Einsatz dieses Programms im Unterricht als auch auf dem häuslichen Computer erlaubte. Im Rahmen des Projekts wurde eine Testgruppe von etwa 700 Schülerinnen und Schülern in 39 Klassen der Jahrgangsstufen 7 bis 12 ausgewählt und über einen zweijährigen Zeitraum beobachtet. Dabei gab es Klassen, die DERIVE sowohl im Klassenraum als auch zu Hause und bei Prüfungen verwenden durften, es gab Klassen, die das Programm nur im Unterricht einsetzten, und es gab schließlich Vergleichsgruppen, die im traditionellen Rahmen ohne Computereinsatz unterrichtet wurden.

Mit diesem Buch blicken die Verfasser auf ihre im Rahmen dieses Projekts gewonnenen Erfahrungen zurück und geben eine umfassende Analyse der erhaltenen Ergebnisse. Sie sehen es als das wesentliche Ziel dieses Buches an zu zeigen, daß der Bildungsauftrag des Faches Mathematik mit Unterstützung von Computeralgebra-Systemen leichter und besser zu realisieren ist (S. 87), wobei sie davon ausgehen, daß die "alten" Bildungsziele – wie Probleme lösen lernen, heuristische Strategien kennenlernen, Mathematisieren lernen, Begriffe bilden lernen, Beweise lernen oder algorithmisches und kalkülhaftes Arbeiten kennenlernen – auch beim Computereinsatz uneingeschränkt gültig bleiben.

Die Verfasser haben nicht nur dieses Ziel erreicht, sondern sie zeigen in diesem Buch auch eine Konzeption für den Einsatz von Computeralgebra-Systemen im Mathematikunterricht auf, die sich nicht nur auf einzelne Unterrichtseinheiten oder -sequenzen beschränkt, sondern eine unter methodischen und didaktischen Aspekten reflektierte globale Strategie für den gesamten Mathematiklehrgang umfaßt. Hierzu geben sie einen Einblick in die gegenwärtige Diskussion zum Einsatz von Computeralgebra-Systemen im Mathematikunterricht, sie haben die sich daraus ergebenden Fragen- und Problemstellungen fokussiert und operationalisiert, und sie geben Lehrern und Lehrerinnen viele Anregungen für einen computerunterstützten Unterricht in Form erprobter Unterrichts-

beispiele. Das Buch kann deshalb allen Lehrern und Lehrerinnen als Anregung für ihren eigenen computerunterstützten Unterricht uneingeschränkt empfohlen werden, es stellt eine Grundlage für die didaktische Ausbildung für Lehramtsstudierende und Referendare dar, und es muß als eine Pflichtlektüre für diejenigen angesehen werden, die sich mit dem zukünftigen computerunterstützten Unterricht beschäftigen.

1. Zum Inhalt

Im 1. Kapitel versuchen die Autoren durch einen kurzen Rückblick auf die Bedeutung von Rechenhilfsmitteln (Abakus, Rechenstab) und den Wandel des Mathematikunterrichts in den letzten 50 Jahren ("New Math") ihrer Überzeugung Ausdruck zu verleihen, daß "Computeralgebra-Systeme einen "Quantensprung" in der Entwicklung des Mathematikunterrichts bringen werden" (S. 19). Auch wenn die Bedeutung des Modeworts "Quantensprung" hier nicht genauer hinterfragt werden soll, so muß man doch der These der Autoren zustimmen, daß es schon immer eine Triebfeder des zivilisatorischen Fortschritts war und auch heute noch ist, Probleme des täglichen Lebens durch technische Hilfsmittel leichter bewältigen zu können.

Im 2. Kapitel werden die Einsatzformen eines Computeralgebra-Systems anhand vieler konkreter Beispiele (Heron-Verfahren, Kurvendiskussion, Modellbildung, Tilgungsproblematik, Plancksches Strahlungsgesetz, Wachstumsprozesse, Differenzierbarkeit) erläutert. Alle Beispiele werden in DERIVE-Notation angegeben, was für diejenigen, die mit dem Programm weniger oder nicht vertraut sind, die Möglichkeit des unmittelbaren Nachvollziehens auf dem eigenen Rechner bietet, was aber das Lesen des Buches aufgrund der ausführlichen "Programmlistings" für diejenigen erschwert, die stärker an den hinter den Beispielen stehenden didaktischen Ideen interessiert sind. Die didaktischen Hinweise sind zudem in diesem Kapitel äußerst knapp gehalten, und es ist empfehlenswert, diese Beispiele nochmals nach dem Lesen der in den späteren Kapiteln ausführlicher erläuterten didaktischen Prinzipien durcharbeiten.

Die Problematik einer didaktischen Einordnung von Computeralgebra-Systemen wird darin deutlich, daß sich die hier aufgeführten Einsatzformen (Computeralgebra-System als numerisches, symbolisches, algorithmisches, methodisches und sprachliches Hilfsmittel) auf unterschiedliche Ebenen mathematischen Handelns beziehen. So spricht die Sichtweise des Computeralgebra-Systems als numerisches und symbolisches Hilfsmittel die Repräsentationsebene mathematischer Begriffe an, den Rechner als algorithmisches Hilfsmittel anzusehen heißt, die Werkzeugebene zu betonen, methodisches Hilfsmittel ist der Rechner dann im Rahmen von Lehrprozessen, und das Computeralgebra-System als sprachliches Hilfsmittel zu sehen heißt, es in Beziehung zur symbolischen Ebene und zum Entwicklungsprozeß der Herauslösung mathematischer Begriffe aus Umweltsituationen zu setzen. Diese verschiedenen sich wechselseitig beeinflussenden Aspekte sind aber beim gesamten mathematischen Arbeiten – mit und ohne Computer – zu berücksichtigen, und sie

waren schon häufig Gegenstand empirischer Untersuchungen (vgl. etwa Müller-Philipp 1994). Mit Vorsicht sollte deshalb auch die Ansicht der Autoren beurteilt werden, daß durch die Verwendung eines Computeralgebra-Systems "dem Schüler die vielfältigen Aspekte eines Begriffs leichter zugänglich werden" (S. 76). Für die Stützung dieser These sind sicherlich noch weitere empirische Untersuchungen notwendig.

Im 3. Kapitel wird "der Weg in die Mathematik mit Computeralgebra-Systemen" beschrieben, wobei man hier vielleicht doch etwas vorsichtiger von den Möglichkeiten sprechen sollte, die Computeralgebra-Systeme beim Weg oder besser bei den Wegen in die Mathematik bieten können. Ein Modell oder Konzept für das Mathematiklernen im Rahmen von Problemlöseprozessen stellt für die Autoren die "Kreativitätsspirale von Bruno Buchberger" (der auch ein lesenswertes Vorwort zu diesem Buch geschrieben hat) dar. Ausgangspunkt dieser Spirale ist das Experimentieren mit gegebenen Daten, es werden dann Vermutungen aufgestellt und durch das Aufzeigen oder Suchen von Beziehungen zu bekannten mathematischen Sätzen und Verfahren (die Verfasser nennen das "Exaktifizieren") bewiesen oder begründet. Damit werden dann Regeln oder Algorithmen zur Problemlösung entwickelt. Die Verfasser deuten kurz den Bezug dieses Modells zum "genetischen Prinzip" oder zur Theorie Piagets an, wünschenswerte weitergehende Betrachtungen zu dieser Beziehung hätten wohl den Rahmen dieses Buches überstiegen, es wäre aber interessant, die Beziehung dieses heuristischen Spiralmodells zu anderen heuristischen Modellen etwa von Poincaré oder Pólya zu sehen und im Hinblick auf den Lernprozeß zu bewerten.

Die Stärke des Buches liegt im Aufarbeiten unterrichtspraktischer Versuche und im Aufzeigen von Unterrichtskonzeptionen. Dabei gehen die Verfasser auf verschiedene "heuristische Regeln" ein (S. 89ff), wie Experimentieren, Spezialfälle untersuchen, Darstellungsarten wechseln, ..., die sicherlich auch ohne Computereinsatz bedeutsam sind, bei denen aber Computeralgebra-Systeme neue Möglichkeiten eröffnen, was eindrucksvoll durch viele Unterrichtsbeispiele belegt wird. So werden verschiedene Modelle für die Ausbreitung von Luftschadstoffen hinsichtlich ihres Realitätsbezugs erläutert und diskutiert (S. 118), bei der Robotersteuerung werden die Auswirkungen untersucht, die verschiedene Werte für die Länge der Roboterarme hervorrufen (S. 127ff), und am Beispiel der "Sterilen Insektentechnik" (S. 135ff) wird gezeigt, wie Visualisierungen auf der numerischen, graphischen und symbolischen Ebene unterschiedliche Sichtweisen zur Problemlösung beitragen können.

Das tatsächliche Arbeiten von Schülern am Computer wird im Rahmen verschiedener Phasen des Problemlösens realitätsorientierter Aufgaben erläutert (Modellbilden, Operieren, Interpretieren, S. 107). Insbesondere bei der "Schnittstelle Operieren – Interpretieren" (S. 147) werden dabei Schwierigkeiten und Probleme deutlich, die durch die Verwendung eines Computeralgebra-Systems zusätzlich in den Unterricht getragen werden. So müssen "Schüler Ergebnisse überprüfen und interpretieren, die sie nicht selbst produziert haben" (S. 147) und die Vielfalt

der Lösungswege- und -strategien nimmt deutlich zu, was in didaktischer Hinsicht erfreulich ist, was sich aber für den Lehrer bei der Unterrichtsgestaltung erschwerend auswirkt. Die Verwendung des Werkzeugs "Computer" bewirkt, daß der häufig im traditionellen Unterricht zu beobachtende durch den Lehrer diktierte "Gleichschritt" bei Problemlöseprozessen im computerunterstützten Unterricht nicht mehr möglich ist.

Dem 4. Kapitel liegt die Ansicht zugrunde, daß didaktische Prinzipien "Konstruktionsanleitungen" für den Unterricht sind, wobei die Verfasser ausgehend von bekannten didaktischen Prinzipien wie Spiralprinzip, genetischem Prinzip oder dem Prinzip des entdeckenden Lernens deren Veränderung oder Modifizierung beim Einsatz von Computeralgebra-Systemen aufzeigen. Beim White Box/Black Box-Prinzip werden zunächst Begriffe oder Verfahren – ohne Computer – erklärt (White Box), diese werden dann in eine "Black-Box" verpackt und mittels des Computeralgebra-Systems durch den Aufruf eines Befehls dem Benutzer zur Verfügung gestellt. Eine Erfahrung des Unterrichtsprojekts ist es, daß diese Trennung von "White-Box" und "Black-Box" nicht aufrechtzuerhalten ist, sondern daß man es im Unterricht eher mit ineinander verschachtelten "White-" und "Black-Boxes" zu tun hat. So kann, nach Meinung der Verfasser, ein Computeralgebra-System durchaus bereits in der White-Box-Phase, in der sie ursprünglich keinen Computer einsetzen wollten, sinnvoll verwendet werden, indem es etwa bei Termumformungen zum Überprüfen der Äquivalenz der Terme eingesetzt wird oder beim Gleichungslösen die Terme mit Computereilfe schrittweise umgeformt werden. Allerdings stellt sich die Frage nach dem Sinn, wenn beim Faktorisieren des Ausdrucks $(3m + 1)^2 - (2m - 3)^2$ ein Computeralgebra-System zum schrittweisen Durchführen einzelner Umformungen verwendet wird (S. 165). Wer diese "Schrittfolge" mit DERIVE sukzessive durchzuführen versteht, der kennt und kann soviel an elementarer Algebra, daß er diese Aufgabe auch ohne Computer lösen kann. Weiterhin erscheint die Möglichkeit der graphischen Veranschaulichung von Äquivalenzumformungen mittels eines Computeralgebra-Systems nur dem Wissenden mehr Einsicht zu geben (S. 169).

Neben dem White-Box/Black-Box Prinzip (bzw. Black-Box/White-Box-Prinzip) ist das Modulprinzip ein zentrales mathematisches Prinzip, das durch den Computereinsatz eine neue oder erweiternde Bedeutung erhält (vgl. Weigand 1993 oder Weth 1992). Ein Modul ist eine Einheit, ein Baustein oder eine Prozedur, die oder der als Ganzes betrachtet werden kann und durch einen Befehl verfügbar wird. Module sind Werkzeuge und diese verändern die Tätigkeit, für die sie konstruiert wurden (Dörfler 1991). Diese Veränderung oder Reorganisation der mathematischen Tätigkeit besteht in der "Verschiebung des Schwerpunkts von der Tätigkeit des Ausführens hin zu Tätigkeiten wie Planen, Reflektieren und Anwenden von Strategien" (S. 182). Module sind vorteilhaft beim Erstellen von Tabellen und Stabdiagrammen, oder es können Formeln und Algorithmen als Module betrachtet werden. Die Verfasser geben verschiedene Möglichkeiten der Modulerstellung: Schüler

erstellen Module selbst, Schüler verändern vorhandene Module, der Lehrer stellt Module zur Verfügung, die dann u. U. von den Schülern an das Problem angepaßt und entsprechend modifiziert werden können. Hier wäre es schön gewesen, wenn die Verfasser genauer auf ihre Unterrichtserfahrungen mit diesen verschiedenen Möglichkeiten des Werkzeugeinsatzes eingegangen wären, wie Schüler mit Moduln gearbeitet haben, wie sie ihre eigene "Formelsammlung" zusammengestellt und in Problemlöseprozessen eingesetzt haben.

Der letzte Abschnitt dieses Kapitels geht darauf ein, daß ein Computeralgebrasystem nicht nur eine größere Vielfalt an Darstellungsformen zur Verfügung stellt, sondern vor allem das Erzeugen von und das Arbeiten mit diesen Darstellungen erleichtert. Es wird möglich, mehrere Darstellungen gleichzeitig auf dem Bildschirm zu erzeugen und zwischen diesen Darstellungen zu wechseln. Diesen Aspekt bezeichnen die Verfasser mit der anglizistisch technokratischen Wortschöpfung: "Window-Shuttle-Technik", wobei sie sich auf den immer noch höchst lesenswerten Aufsatz von W. Dörfler beziehen, "Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium". Leider widmen die Autoren diesem hochinteressanten Aspekt nur wenige Seiten. Es sei deshalb hier doch kritisch nachgefragt, ob sich aus den Ergebnissen tatsächlich der Schluß ziehen läßt, daß "die Arbeitsweise der Window-Shuttle-Technik ... wesentlich zur qualitativen Veränderung von Kognition beitragen kann" (S. 200). Gerade dieses 4. Kapitel eröffnet viele Möglichkeiten für weitere empirische Untersuchungen.

5. Kapitel: Veränderung in der Unterrichtskonzeption. Die Verfasser sehen sich durch ihre Untersuchungen in der Meinung bestärkt, daß ein computerunterstütztes Unterrichtskonzept "die gesamte Unterrichtsorganisation, das Rollenbild von Lehrern und Schülern, beginnend von der Vorbereitungsarbeit des Lehrers bis hin zur Prüfungssituation verändert" (S. 205). Bei der Veränderung im Methodeneinsatz beziehen sie sich auf Robert Nocker (1996), der durch eine größere empirische Untersuchung gezeigt hat, daß "der bisherige Computeralgebraeinsatz ohne begleitende Maßnahmen ... nur wenige, aber durchaus nicht unwichtige Elemente der Unterrichtsstruktur (ändert)" (1996, S. 328), daß er aber "zu mehr selbständiger produktiver Schülertätigkeit" (ebd.) führt. In diesem Buch werden zahlreiche "begleitende Maßnahmen" vorgestellt, wobei die unterrichtspraktische Erfahrung der Verfasser immer wieder in der Beschreibung des Unterrichts aus Lehrersicht und in den vielen Hinweisen zur Unterrichtsgestaltung deutlich wird. Diese Hinweise erscheinen allerdings manchmal etwas übertrieben kleinschrittig, wenn etwa Bedienungshinweise zu eng auf Details von DERIVE bezogen werden (S. 211f) oder gar der Hinweis erfolgt, daß es sich "bewährt hat, im Schulübungsheft in einer anderen Farbe zu notieren" (S. 214).

Dann werden aber wieder eindrucksvoll die heuristischen Möglichkeiten beim Arbeiten mit einem Computeralgebra-System dargelegt, indem etwa die Beziehung zwischen lokalen und globalen Sichtweisen (S. 222) oder das Erstellen von "Indikatormoduln" (S. 225), das sind

selbsterstellte Module, die das Vorhandensein bestimmter Eigenschaften überprüfen, an Beispielen erläutert wird. Es fehlen auch nicht Beispiele, bei denen bei Verwendung eines Computeralgebra-Systems Vorsicht geboten ist (S. 226ff), wie etwa bei der Integration über Nullstellen des Integranden oder bei numerischen Rundungsproblemen.

Es ist eine häufig geäußerte – aber bisher nicht belegte – These, daß das im derzeitigen Unterricht anzutreffende Üben von Rechenfertigkeiten durch den Einsatz von Computeralgebra-Systemen an Bedeutung verlieren wird. Richtig ist sicherlich, daß stupides lediglich auf Rechenfertigkeiten ausgerichtetes Üben noch bedeutungsloser wird, als es jetzt schon ist. In dem Buch werden viele Beispiele für sinnvolles Üben und vor allem für eine stärkere Einbettung des Übens in den Kontext des Problemlösens gegeben. Insbesondere werden dabei zwei Aspekte des Übens herausgestellt: Die Verfasser plädieren zum einen für eine stärkere Einbettung des Übens in "den Kontext des Mathematisierens" und zum zweiten sehen sie "die Notwendigkeit des Testens" vorhandener oder entwickelter Module oder Algorithmen (S. 245).

Interessant sind schließlich die Einblicke in Prüfungssituationen verschiedener Klassenstufen, wobei vor allem die Vielzahl der von Schülern gefundenen Lösungswege überraschen. So traten etwa bei der Berechnung des Flächeninhalts eines gleichschenkligen Trapezes 17 verschiedene Lösungswege auf (S. 268). Die hier aufgetretenen Arbeitsweisen zeigen somit eindrucksvoll das Vorhandensein unterschiedlicher Denkweisen von Schülern, die im traditionellen Unterricht häufig allzu frühzeitig auf eine Lösungsstrategie eingeengt werden.

Im 6. Kapitel wird dann ein kurzer Überblick über das österreichische Computeralgebra-Projekt gegeben. Als ein Hauptergebnis wird dabei herausgestellt: "Die Tätigkeiten der Lehrenden und Lernenden werden sich zumindest genauso stark verändern wie die Inhalte" (S. 293), und es wird dies mit der Aufforderung verbunden, "didaktische Konzepte, Lernstrategien und Arbeitsanleitungen" (ebd.) zu entwickeln. Das hoffnungsfrohe Ende lautet dann, daß durch den Computereinsatz "die Zunft der Mathematiklehrer" nicht aussterben wird, wenn sie sich der "Herausforderung des Computerzeitalters stellt und die Möglichkeiten zur Verbesserung des Mathematikunterrichts nutzt" (S. 298).

2. Gesamtbewertung

Dies ist das erste Buch zum Computeralgebraeinsatz im Unterricht, dem es gelingt, die Auflistung und Darstellung vieler Unterrichtsbeispiele in eine didaktische und methodische Konzeption einzubetten. Dabei wird an die traditionelle didaktische Diskussion angeschlossen, etwa im Zusammenhang mit den didaktischen Prinzipien oder bei den Möglichkeiten des neuen Werkzeugs im Rahmen der klassischen Inhalte, und es werden in mannigfacher Weise Perspektiven für einen zukünftigen computerunterstützten Unterricht aufgezeigt. Das ganze Buch ist getragen von der Vision eines problem- und anwendungsbezogenen Mathematikunterrichts, in dem Neue Technologien zum obligatorischen Hilfsmittel und Werkzeug wer-

den. Ein zentrales Problem des zukünftigen computerunterstützten Unterrichts ist aber auch ein Problem dieses Buches. Es baut auf der DOS-Version von DERIVE auf, mittlerweile gibt es aber bereits eine Windows-Version von diesem Programm, und DERIVE ist auch auf dem Taschencomputer TI-92 verfügbar. Wenn man weiterhin bedenkt, wie es die Verfasser auch selbst ansprechen (S. 240), daß in naher Zukunft auch Notebooks mit Internetanschluß und Multimediaeigenschaften im Klassenzimmer zur Verfügung stehen, so zeigt sich hierin die Schnelllebigkeit der technischen Welt, es zeigt sich, daß heute aktuelle Werkzeuge (d. h. Computer und Computerprogramme) in kürzester Zeit veraltet sind. Neue Werkzeuge erfordern oder führen aber auch zu neuen methodischen und didaktischen Konzeptionen, oder zumindest zu Veränderungen bisheriger Konzepte. Trotz dieses Problems wird das hier vorliegende Buch aber auch bei der Weiterentwicklung der Werkzeuge – zumindest in den nächsten Jahren – aufgrund seiner zusammenfassenden Darstellung der gegenwärtigen Theoriediskussion und seiner vielen praktisch erprobten unterrichtsrelevanten Beispiele lesenswert bleiben und eine Grundlage für konzeptionelle Weiterentwicklungen darstellen. Allen am computerunterstützten Unterricht Interessierten soll dieses Buch deshalb uneingeschränkt empfohlen werden.

Bleibt zum Schluß über einen Wermutstropfen zu berichten. Es ist schade und absolut unverständlich, daß so viele Druckfehler in diesem Buch auftreten, und daß die bei Gliederung und Stichwortverzeichnis angegebenen Seitenzahlen nicht mit den Seitenzahlen im Text übereinstimmen. So etwas hätte dem Verlag nicht passieren dürfen. Ein Fehler, der sich allerdings bei der Neuauflage leicht beheben läßt.

3. Literatur

- Dörfler, W.: Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium. – In: W. Dörfler u. a. (Hrsg.), *Computer – Mensch – Mathematik*. Wien: Hoelder – Pichler – Tempsky; Stuttgart: Teubner, 1991
- Müller-Philipp, S.: *Der Funktionsbegriff im Mathematikunterricht*. – Münster: Waxmann, 1994
- Nocker, R.: Der Einfluß von Computeralgebrasystemen auf die Unterrichtsmethoden und die Schüleraktivitäten. – In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker, 1996, S. 325–328
- Weigand, H.-G.: Überlegungen zum Verhältnis von Mathematik- und Informatikunterricht. – In: *MNU* 46 (1993) H. 7, S. 428–432
- Weth, Th.: Computerunterstütztes modulares Konstruieren im Geometrieunterricht. – In: *ZDM* 24 (1992), S. 148–153

Autor

Weigand, Hans-Georg, Prof. Dr., Universität Gießen, Institut für Didaktik der Mathematik, Karl-Glöckner-Str. 21C, D-35394 Gießen.
hans-georg.weigand@math.uni-giessen.de
<http://www.uni-giessen.de/math-didaktik/weigand.htm>