

## Und dann und wann ein Leitprogramm!

U. Kirchgraber, W. Hartmann, M. Bettinaglio,  
M. Adelmeyer, J. P. David, K. Frey, Zürich

**Abstract:** *And now and then a leading programme.* At ETH Zürich a relatively large project was recently devoted to the construction of what is called "Leitprogramm" (leading programme). In this article we provide some information on the leading programme method and its theoretical background. Moreover we describe in some detail the four leading programmes which relate to mathematics and which are constructed for use at the gymnasium in the course of the project.

**Kurzreferat:** Auf Anregung von K. Frey haben verschiedene an der ETH-Zürich für Didaktik Verantwortliche in den letzten Jahren einige Leitprogramme für die Fächer Biologie, Chemie, Geographie, Mathematik, Informatik und Physik entwickelt, mit dem Ziel, daß sie am Gymnasium eingesetzt werden können. Es wurde dabei mit Studierenden und mit Lehrerkolleginnen und -kollegen aus mehreren Schulen zusammengearbeitet. In diesem Artikel stellen wir zunächst die Leitprogramm-Methode und dann vier Leitprogramme für den Bereich Mathematik/Informatik vor.

**ZDM-Classification:** D30, U10

### 1. Hintergrund

Der gängige fragend-entwickelnde Unterricht wird immer mehr kritisiert, insbesondere weil er sich, wie verschiedene Untersuchungen gezeigt haben, am Tempo der obersten 30 Prozent einer Schülerpopulation orientiert. Auch wird die Eigenaktivität der Lernenden mit dieser Unterrichtsform zu wenig gefördert.

Eine Verbesserung erhofft man sich durch individualisierende Lernmethoden. *Leitprogramme* sind ein solches Instrument. Leitprogramme basieren auf dem Konzept des *Kellerplans*, s. [8], und auf dem *Mastery-Learning-Prinzip*. Beim Kellerplan wird der Stoff in Pakete eingeteilt und mit Anleitungen versehen. Der Kellerplan basiert auf der Erkenntnis, daß Schüler unterschiedlich rasch lernen und der bekannten Wirkung des Verstärkungsmechanismus, s. [13]. Beim Leitprogramm müssen die SchülerInnen zudem einen Test bestehen, bevor sie ein neues Stoffpaket in Angriff nehmen dürfen. Diese Bedingung hängt mit dem Mastery-Learning-Prinzip von Benjamin Bloom zusammen. Die Grunderkenntnis

ist: *Die SchülerInnen sollen den bisherigen Stoff gut beherrschen, bevor sie fortfahren.*

Das Prinzip ist einleuchtend, wie jeder aus eigener Erfahrung weiß. Versucht man nämlich, in einem mathematischen Text zu schnell voranzukommen, so verliert man bald den Boden unter den Füßen, man versteht je länger je weniger, versandet, ist frustriert. Mastery-Learning nach Bloom bedeutet, daß 80 bis 90 Prozent der Klasse den Stoff im Umfang von 80 bis 90 Prozent beherrschen. Wissenschaftlich beruht dieses Postulat auf der Erkenntnis, daß das Ausmaß der Beherrschung des vorausliegenden Lernstoffes der wichtigste Faktor für den Lernerfolg bei neuem Stoff ist, s. [3].

Die Bezeichnung Leitprogramm stammt vermutlich vom Frankfurter Physikdidaktiker K. Weltner. Weltner und Koautoren haben die Methode für einen großen Mathematikurs für PhysikstudentInnen [14] implementiert. Dieses mehrbändige Werk ist so erfolgreich, daß es schon ein halbes Dutzend Auflagen erlebt hat. In Abschnitt 2 stellen wir die Leitprogramm-Methode<sup>1</sup> vor, wobei wir uns auf entsprechende Ausführungen von K. Frey in [5] stützen. In Abschnitt 3 präsentieren wir vier Leitprogramme für den Bereich Mathematik/Informatik, die seit Sommer 1995 an Schweizer Gymnasien im Einsatz sind. Abschnitt 4 beschreibt, wie die Leitprogramme an die Schweizer Gymnasien vermittelt wurden, und enthält eine Reihe von zusätzlichen Bemerkungen und einige SchülerInnenkommentare.

### 2. Die Leitprogramm-Methode

#### 2.1 Aufbau eines Leitprogramms

Ein Leitprogramm ist ein *Arbeitsheft* im Umfang von ca. 50 bis 100 Seiten, das jede Schülerin zu Beginn der Arbeit erhält. Es umfaßt den Stoff von 10 bis 20 Lektionen. Es enthält alle wesentlichen Informationen, so daß die Schülerin völlig selbständig arbeiten kann.

Ein Leitprogramm besteht aus einem *Fundamentum* und einem *Additum*. Das Fundamentum enthält den Grundstoff, der von allen SchülerInnen bearbeitet und am Ende beherrscht werden muß. Das Additum bietet Zusatzmaterial an und ist fakultativ. Am Anfang des Leitprogramms und zu Beginn jedes Kapitels werden die Lerninhalte und die Lernziele dargelegt, so daß der Schüler weiß,

<sup>1</sup>Dieser Teil des Artikels ist, bis auf einige redaktionelle Änderungen, auch den Leitprogrammen beigelegt, die an die Schulen ausgeliefert wurden und werden.

um was es geht und was er am Schluß können muß. *Kernstück eines Leitprogramms ist daher eine gut durchdachte, verständliche Darstellung des Stoffes.* Ein Leitprogramm ist durchsetzt mit *Übungen* zum Stoff. Es enthält die Lösungen zu den Übungen, damit die SchülerInnen ihren Wissensstand immer wieder überprüfen können. Ein Leitprogramm enthält *Aufträge* für Beobachtungen und Lektüre, es kann zu Experimenten anleiten usw. Ein Leitprogramm enthält Hinweise für die Erarbeitung des Stoffes, beispielsweise, wenn etwas im Selbststudium erarbeitet werden soll oder in Partnerarbeit. Auch arbeitstechnische Informationen können eingestreut sein. Weltner z. B. gibt an einer Stelle Erläuterungen über die Bedeutung von Pausen bei der Arbeit.

Jedes Kapitel eines Leitprogramms enthält am Ende eine *Lernkontrolle*, damit der Schüler selber überprüfen kann, ob er die Lernziele dieses Teiles erreicht hat und sich zum Kapiteltest anmelden soll. Er erhält Vorschläge, wie er vorgehen soll, wenn er sich noch nicht genügend sicher fühlt oder das Resultat seiner eigenen Lernkontrolle ungenügend ist. Der *Kapiteltest* wird von der Lehrerin oder gelegentlich von zu Tutoren ausgebildeten Schülerinnen durchgeführt. Er kann in einem kurzen Gespräch, oder in einem schriftlichen Test bestehen. Wichtig ist: Erst nach bestandenen Test darf das nächste Kapitel in Angriff genommen werden.

### 2.2 Wann eignet sich ein Leitprogramm?

In der Literatur werden zwei Situationen beschrieben, in denen Leitprogramme empfohlen werden [8, 12].

Ein Leitprogramm eignet sich erstens bei einer heterogenen Gruppe von Lernenden. Diese Bedingung ist im Fach Mathematik notorisch erfüllt, selbst für die Schüler einer seit längerem bestehenden Klasse. Die Tiefe der vorhandenen Einsichten sind von Schüler zu Schüler gerade im Fach Mathematik recht unterschiedlich. Wenn aus irgendeinem Grund unterschiedliche Vorkenntnisse vorhanden sind, dann ist die Bedingung erst recht erfüllt. Ein Beispiel für eine solche Situation: In den Mathematikgrundkursen im 1. Semester an der ETH Zürich werden, wie anderswo auch, die komplexen Zahlen behandelt. Die einen Studierenden kennen diesen Gegenstand schon aus dem Gymnasium, für andere ist er jedoch neu. In dieser Situation hat sich ein von U. Manz verfaßtes Leitprogramm bewährt.

Zweitens werden Leitprogramme empfohlen, wenn der Stoff schwierig ist. Natürlich gibt es auch in der Schulmathematik mehr oder weniger anspruchsvolle Stoffe. Es ist aber ähnlich wie bei der Frage nach der Homogenität einer Schülergruppe: In der Mathematik ist jeder Stoff für die einen Schüler schwieriger als für die anderen.

### 2.3 Welche Vorteile haben Leitprogramme?

In einem guten Leitprogramm wird der Stoff durch einen wohl durchdachten, möglichst einfach geschriebenen Text erklärt. Ein schriftlich verfaßter Lehrtext ist i. allg. besser aufgebaut, als es die Ausführungen in einem mündlichen Lehrervortrag oder gar im fragend-entwickelnden Unterricht sind. Allerdings erfordert das Verfassen von Texten, die sachlich gut, gut verständlich, anregend und sympathisch sind, viel mathematische Kompetenz, didaktische

Phantasie und nicht zuletzt Sprachtalent, und es bereitet eine Heidenarbeit!

In einem Leitprogramm werden die Ziele definiert und offengelegt, und es wird versucht, die Vermittlung des Wissens entsprechend zu organisieren.

Ganz wichtig ist der folgende Punkt. *Die Schülerinnen und Schüler bestimmen ihr Arbeitstempo selber:*

- Langsamere Schüler können sich Zeit nehmen und Zusatzklärungen lesen.
- Bei den Lösungsbeschreibungen von Aufgaben kann der Leitprogrammautor verschiedene Angebote machen. Kurzbeschreibungen für die einen, ausführlichere für die, die's brauchen.
- Die langsameren Schüler werden nicht wie im fragend-entwickelnden Unterricht ständig abgehängt und somit frustriert. Ein gewisser sozialer Druck durch die Klasse fällt weg.
- Die schnellen Schülerinnen langweilen sich nicht: Mit dem Additum haben sie die Möglichkeit, weiteres Material kennenzulernen und zusätzlich tätig zu werden.
- Es versteht sich, daß die SchülerInnen selber bestimmen, wann sie zum Kapiteltest kommen wollen. Das kann schon nach 30 Minuten sein oder aber erst nach zwei Stunden. Die Lehrerin legt allenfalls gewisse Ecktermine fest, insbesondere, bis wann das Fundamentum bearbeitet sein muß.

Mit Leitprogrammen *lernen Schüler Mathematiktexte lesen.* Das ist unserer Meinung nach ein besonders wichtiger Aspekt.

Aufgrund einer Meta-Analyse von Kulik et al. aus dem Jahre 1990, [9], weiß man, daß die Effektstärke von Mastery Learning bei Mathematik bei 0,5 liegt, d.h. die Leistung nimmt gegenüber konventionellem Unterricht um 0,5 Standardabweichungen zu.

### 2.4 Abgrenzung zum Programmierten Unterricht

Die Leitprogramm-Methode hat gewisse Gemeinsamkeiten mit Programmierem Unterricht. Zu nennen sind: Das präzise vorbereitete Material, die Ausrichtung auf gewisse Ziele, die periodische Wissenssicherung und die Lernkontrollen. Daneben gibt es wesentliche Unterschiede.

Programmierter Unterricht läßt den Lernenden wenige Sekunden oder Minuten zum Lernen. Dann folgt eine Wissensabfrage mit Bestätigung oder Korrektur. Diese Interaktion mit hoher Kadenz ist ermüdend und mit der Zeit langweilig. Programmierter Unterricht besitzt auch keine allgemeine Wirkungsgarantie. Er ist etwa gleich wirksam wie üblicher lehrerzentrierter Unterricht [1, 4].

Nicht nur die Wirkungsgrade, auch die theoretischen Grundlagen dieser beiden Lernmethoden sind unterschiedlich. Programmierter Unterricht basiert auf der Beobachtung, daß Belohnung und Verstärkung Freude machen und zur Bereitschaft führen, weiterzuarbeiten. In Einzelsituationen tritt dieser Effekt ein, auf Dauer nicht.

Die Leitprogramme hingegen beruhen auf der Tatsache, daß der größte Lerneffekt dann erreicht wird, wenn das nötige Vorwissen möglichst vollständig vorhanden ist. Deshalb zielen Leitprogramme auf die Sicherung dieses Vorwissens. Dieses Vorwissen besteht jedoch nicht nur aus ein paar Sätzen, die im Programmierem Unterricht jeweils verstärkt werden. Es erstreckt sich oft über mehrere Seiten

an Lernstoff. In Leitprogrammen sind deshalb die Lernsequenzen deutlich länger. Die positive Wirkung wird nicht durch externe Verstärkung zu erreichen versucht, sondern resultiert aus der Erfahrung des eigenen Erfolges und aus dem *Mastery*, dem Beherrschen des direkt vorausliegenden Stoffes.

### 3. Vier Leitprogramme für den Bereich Mathematik/ Informatik

Gemeinsam mit Studierenden und Lehrerkolleginnen und -kollegen von Gymnasien haben wir einige Leitprogramme entwickelt. Wir haben verschiedene Themen ausprobiert und dazu Leitprogramme entworfen. Ein paar Themen waren: Näherungsweise Lösen von Gleichungen, Kurvendiskussion mit dem (grafikfähigen Taschenrechner) TI 81, Was sind Differentialgleichungen?, Chaos, Pythagoras, Winkelfunktionen, Kurvendiskussion, Vollständige Induktion, Komplexe Zahlen, Ableitungsregeln.

Man erkennt: Nach einem mutigen Start sind die Themen biederer geworden! Das hat folgenden Grund. In Gesprächen mit potentiellen Benützern, also Lehrern und Lehrerinnen der beiden Sekundarstufen, haben wir bald einmal festgestellt, daß nicht so viel Bereitschaft besteht, zugleich eine neue Unterrichtstechnik *und* ein unkonventionelles Thema auszuprobieren. Wenn überhaupt, dann sollten klassische Themen des Mathematikunterrichts im Sinne eines Angebots in Form von Leitprogrammen zur Verfügung gestellt werden.

Im folgenden stellen wir vier Leitprogramme näher vor. Sie heißen:

- Quadratische Gleichungen
- Wer Schulden macht, muß rechnen können
- Lineare Gleichungssysteme
- Rekursives Programmieren.

Jedes dieser Leitprogramme ist spiralartig entwickelt worden: Typischerweise entstanden zunächst studentische Fassungen, die dann von Lehrerinnen und Lehrern gelesen und kritisiert und in einer oder mehreren Schulklassen ausgetestet wurden. Dann wurden diese Fassungen aufgrund der Rückmeldungen überarbeitet. Oder wir entschlossen uns, ganz neue Texte zu schreiben. Es folgten weitere Erprobungen, Bearbeitungen usw.

#### 3.1 Das Leitprogramm "Quadratische Gleichungen"

Im Leitprogramm *Quadratische Gleichungen* von M. Bettinaglio und U. Kirchgraber, M. Andenmatten, P. Gebauer, G. Gentile, U. Manz, K. A. Meier für das 9. oder 10. Schuljahr geht es natürlich um ein einfaches und klassisches Thema des Mathematikunterrichts. Wenn man Multiplizieren kann, hat es einen gewissen Reiz, zwei gleiche Zahlen miteinander zu multiplizieren. Nach einer Weile kommt man wie von selbst auf die Idee, die umgekehrte Frage zu stellen: Welche Zahl muß man mit sich multiplizieren, um eine gegebene Zahl zu erhalten?

Aber das Wurzelziehen ist nicht der eigentliche Gegenstand dieses Leitprogramms, es wird als bekannte Operation vorausgesetzt. Im Leitprogramm *Quadratische Gleichungen* geht es um beliebige quadratische Gleichungen und das überraschende Phänomen, daß jede quadratische Gleichung durch Wurzelziehen gelöst werden kann.

Warum wir das hier ausführen? Damit die Leserin, der

Leser ein wenig die Stimmung in diesem Leitprogramm spüren kann. Es möchte, daß die Schülerinnen eine große kleine Idee erfahren: Wenn man rein quadratische Gleichungen lösen kann, kann man auch beliebige quadratische Gleichungen lösen. Das liegt nicht auf der Hand, das braucht eine Idee, das ist Mathematik pur!

Auf diese Idee kann man selber kommen, wenn man mathematisches Talent hat. Oder wenn man geschickt angeleitet wird. Vor Jahren hat Peter Gallin einem der Autoren ein schön komponiertes Aufgabenblatt samt aufschlußreichen Schülerinnenkommentaren gegeben, s. [6]. Das Leitprogramm zeugt davon!

Um was geht es noch? Quadratische Gleichungen sind echt nichtlineare Probleme: Manchmal haben sie keine, manchmal zwei, in Ausnahmefällen haben sie eine Lösung. Und welcher Fall jeweils vorliegt, läßt sich, ohne Wurzeln zu ziehen, ohne die Lösungen auszurechnen, direkt anhand der Koeffizienten vorhersagen.

Das Additum für schnelle Lerner macht seinen Leserinnen und Lesern drei Angebote:

1. In *Alt und Chic* kann man an einem Beispiel erleben, in welcher kunstvoller Weise die Alten Babylonier schon vor langer Zeit quadratische Gleichungen gemeistert haben.
2. In *Motoren und Ohren* geht es um ein Experiment zur Bestimmung der Reaktionszeit der LeserInnen, um die bekannte Aufgabe, die Tiefe eines Sodbrunnens mit Hilfe einer Münze oder eines Kieselsteins auszuloten, und um den Zusammenhang zwischen Benzinverbrauch und Geschwindigkeit beim Autofahren.
3. Das dritte Thema dieses Additums heißt *Brüche mit Bärten*. Ausgehend von einer quadratischen Gleichung landet die Leserin unversehens bei einem ganz anderen Objekt: einem Kettenbruch!

Soweit die Bemerkungen zum Inhalt des Leitprogramms *Quadratische Gleichungen*.

An dieser Stelle ist ein didaktischer Kommentar nötig. Wir verwenden den Funktionsbegriff und die Idee der grafischen Darstellung einer Funktion nicht. Das kann man kritisieren. Unser Grund: Wir wollen den Zusammenhang zwischen allgemeinen und rein quadratischen Gleichungen aufzeigen. Unser Vorgehen korrespondiert immerhin mit der historischen Entwicklung: Quadratische Gleichungen wurden gelöst, längst bevor die Idee der Funktion und ihrer grafischen Darstellung da war. Kommt man später im Sinne des Spiralprinzips auf das Thema zurück, ergibt sich eine vertiefte Sicht. Ein weiterer Grund: Bei Leitprogrammen, wie bei jedem Unterrichtsinstrument, das punktuell in den Unterricht eingreift, gibt es ein grundsätzliches Problem: Die Definition von Schnittstellen. Würden wir die grafische Darstellung der quadratischen Funktion verwenden, wäre es wohl schwieriger, die Schnittstelle zu definieren. Einige mögen daraus den Schluß ziehen, Leitprogramme seien eben in einer so hierarchisch strukturierten Disziplin wie der Mathematik ungeeignet. Wir meinen, daß es beim Design von Unterricht meist nicht nur einen einzigen Weg gibt. Es geht darum, jeweils *eine respektable* Variante auszuwählen.

Das Leitprogramm Quadratische Gleichungen ist für 6

bis 8 Schulstunden ausgelegt.

**3.2 Das Leitprogramm “Wer Schulden macht, muß rechnen können”**

Das Leitprogramm *Wer Schulden macht, muß rechnen können* von Moritz Adelmeyer und Jean-Paul David ist für das 9. oder 10. Schuljahr und für 6 bis 10 Schulstunden ausgelegt.

Wer sein Geld auf die Bank bringt, erhält Zins, das weiß jedes Kind! Wer umgekehrt Geld borgt, muß Zins bezahlen.

Im Leitprogramm *Wer Schulden macht, muß rechnen können* ist Frau X Studentin an der Universität. Sie braucht kurzfristig Geld, denn sie möchte im Anschluß ans nächste Semester einen 10-wöchigen Sprachaufenthalt in den USA absolvieren. Das Angebot, das sie wahrnehmen will, schließt Flug, Unterkunft und Schulgeld ein. Die Kosten von rund Fr. 8000,- muß sie schon jetzt bei der Anmeldung entrichten. Etwa Fr. 3000,- hat sie gespart, die restlichen Fr. 5000,- will sie als Darlehen aufnehmen. Frau X hat gute Chancen, den Kredit zu erhalten: Seit langem hat sie einen sicheren Teilzeitjob, der ihr die regelmäßige Bezahlung der Raten ermöglichen wird. Eine Bank macht ihr das folgende Angebot: Sie erhält die Fr. 5000,-, im Gegenzug soll sie 6 Monatsraten zu Fr. 870,- an die Bank zahlen.

Über dieses Geschäft wird in dem Leitprogramm nachgedacht:

- Welche Berechnungen liegen dem Angebot zu Grunde?
- Wieviel Profit erzielt die Bank?
- Ist dieses Angebot gesetzlich zulässig, oder ist es Wucher?

Das *Fundamentum* dieses Leitprogramms besteht aus zwei Kapiteln. Im ersten geht es um einige grundlegende Begriffe wie Kredit, Zins, Zinssatz, Zinsfaktor, Zinseszins, Zinsperiode.

Fundamental für das Verständnis eines Abzahlungsgeschäfts auf der Grundlage des Bundesgesetzes der Schweizerischen Eidgenossenschaft über den Konsumkredit vom 8.10.1993 ist sodann der Begriff des Abzahlungsplans. Er beschreibt, wie sich der Schuldenstand von Frau X von Monat zu Monat entwickelt.  $K$  bezeichne den Kreditbetrag,  $R$  die Monatsrate,  $p$  den Monatszinssatz,  $q = 1 + p$  den Zinsfaktor,  $n$  die Laufzeit des Abzahlungsgeschäfts. Nach einem Monat beträgt die Schuld

$$K + pK - R = qK - R,$$

am Ende des 2. Monats

$$q(qK - R) - R = q^2K - qR - R,$$

und nach  $n$  Monaten

$$q^n K - q^{n-1} R - q^{n-2} R - \dots - q^2 R - qR - R.$$

Nun soll ja die Schuld nach  $n$  Monaten gerade getilgt sein, d.h. es muß folgende *Abzahlungsgleichung* erfüllt sein

$$q^n K - q^{n-1} R - q^{n-2} R - \dots - q^2 R - qR - R = 0. \quad (1)$$

Mit dieser Gleichung ist das Ende des ersten Kapitels des Leitprogramms und ein fundamentales Ziel erreicht:

*Die SchülerInnen erkennen, daß hinter einem Abzahlungsgeschäft eine mathematische Gleichung steckt!*

Die Abzahlungsgleichung enthält 4 Parameter:  $K, R, q, n$ . In bezug auf die ersten beiden ist sie linear, in bezug auf  $q$  und  $n$  aber nichtlinear. Das 2. Kapitel dreht sich um die vier daraus resultierenden Gleichungen. Zur Beantwortung der Frage von Frau X interessiert die Auflösung von Gleichung (1) nach  $q$ , d. h. es geht um die Nullstelle des folgenden Polynoms 6. Grades in der Nähe von  $q = 1$

$$5000q^6 - 870(q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) = 0. \quad (2)$$

Probierwert für $q$	$5000q^6 - 870(q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)$	Probierwert liegt
1,00	-220,00	zu tief
1,01	-44,65	zu tief
1,02	+142,75	zu hoch

Tabelle 1: Probierplan für die zweite Nachkommastelle von  $q$

Zur Lösung dieser nichtlinearen Gleichung wird den Schülern in Anlehnung an das bekannte Ratespiel High-Low ein planmäßiges Probierverfahren vorgeschlagen: Man wählt einen Wert für  $q$  und wertet die linke Seite von Gleichung (2) aus. Ist  $q$  zu groß gewählt, sind die Raten zu klein. Es bleibt eine Restschuld, der Wert der linken Seite der Gleichung ist positiv. Und umgekehrt im anderen Fall. Auf diese Weise kann jede Stelle von  $q$  sukzessive bestimmt werden, s. Tabelle 1. Frau X errechnet so einen Monatszinssatz von 1,24 Prozent für ihr Angebot. Das entspricht einem Jahreszinssatz von 15,9 Prozent, was im Rahmen der gesetzlichen Bestimmungen ist.

Wir sind der Meinung, daß dieses Leitprogramm die Sichtweise der Schüler über das Lösen von Gleichungen grundlegend verändert, weil sie auf eine ganze Reihe von Gleichungen treffen, die sie nicht in gewohnter Weise auflösen können. Die naheliegende, aber in der Mathematik irgendwie verpönte Methode des systematischen Probierens leistet in dieser Situation sehr gute Dienste.

Im *Additum* erhalten die Schüler Informationen zu weiteren Themen und jeweils einige mehr oder weniger offenen formulierte Arbeitsaufträge. Es werden hier keine Lösungen mehr angeboten, es gibt keine Lernkontrolle. Ziel ist, daß die Schüler versuchen, selbständig zu handeln. Interessante Ergebnisse könnten vielleicht in der Klasse vorgestellt werden.

Um welche Themen geht es?

- Die Rückzahlung eines Kredits in Raten ist ein Beispiel für einen Abbau- oder Verfallprozeß. Solche Vorgänge treten in ganz unterschiedlichen Zusammenhängen auf. Das erste Thema des Additums behandelt die Ausrottung der Wale, das zweite den weltweiten Abbau von Erdöl.
- Das Kleinkreditwesen hat auch eine gesellschaftspolitische Dimension, besteht doch die Gefahr einer Überschuldung des Kreditnehmers. Die Schüler lernen diese Problematik anhand eines Zeitungsartikels näher kennen.
- Zwei weitere Arbeitsaufträge leiten zur Erstellung von Abzahlungsplänen mit einem Tabellenkalkulationsprogramm, bzw. zur Entwicklung eines Taschenrechner- oder Computerprogramms für Kreditberechnungen an.

Diese letzten beiden Aufträge erfordern Kenntnisse im Umgang mit einem Computer bzw. mit einem programmierbaren Taschenrechner. Ansonsten reicht es für dieses Leitprogramm aus, wenn die SchülerInnen über einen einfachen Taschenrechner mit den Grundrechenarten, der Wurzeltaste und einem einzigen Speicherplatz verfügen. Ein Taschenrechner, bei dem Terme eingegeben und wiederholt ausgewertet werden können, erleichtert bei der approximativen Lösung der Abzahlungsgleichung natürlich die Arbeit.

Eine Version dieses Leitprogramms kann auf WWW unter der Adresse <http://educeth.ethz.ch/mathematik/> angeschaut und im Original-Format Word heruntergeladen werden.

### 3.3 Das Leitprogramm "Lineare Gleichungssysteme"

Das Leitprogramm *Lineare Gleichungssysteme* von U. Kirchgraber, M. Bettinaglio, C. Weber und D. Stoffler richtet sich an Schüler des 9. Schuljahres. In einer kürzeren Fassung eingesetzt, werden 8 bis 10 Lektionen benötigt, in einer erweiterten Version sind 15 bis 18 Lektionen erforderlich.

Natürlich wollen wir zeigen, daß es sich um ein großes Thema handelt, mit einer langen Geschichte und wichtigen Anwendungen. Das Leitprogramm beginnt mit dem Satz: *Die Geschichte unseres Themas beginnt vor 5000 Jahren in den warmen und wasserreichen Gegenden der Erde. An den großen Flüssen in Mesopotamien, Ägypten, Indien und China begannen Königreiche zu entstehen. Die Menschen fingen an das hervorzubringen, was wir Kultur nennen. Also auch die Mathematik.*

Und wir kommen sogleich auf Aufgaben zu sprechen, die uns von den Babyloniern, den Alten Ägyptern, aus China und von den mittelalterlichen Rechenmeistern überliefert sind und die auf lineare Gleichungssysteme führen. (Die schönen und an historischen Bezügen reichen Algebrabücher von F. Barth et al., [2], sind uns dabei eine vorzügliche Quelle gewesen.)

Daß lineare Gleichungssysteme aber nicht nur ein alter Zopf sind, zeigen wir ebenfalls schon im ersten der fünf Kapitel des Leitprogramms, indem wir auf einige moderne Anwendungen hinweisen. Lineare Gleichungssysteme treten beispielsweise auf, wenn es

- um die Erfassung von Spannungen in einem Gabelschlüssel
- um das Versickern von Wasser unter einem Stausee
- um die Ausbreitung von Schall in einem Raum, z. B. im Innern eines Autos

geht, und wir weisen schon hier auf die Anwendung in der Computertomographie hin.

Im 2. Kapitel lassen wir die Schüler anhand einer einfachen Aufgabensequenz die Substitutionsmethode zunächst an  $2 \times 2$ -Systemen, dann auch an höherdimensionalen Beispielen selber entdecken.

Warum die Substitutionsmethode? Es gibt folgende Gründe:

- Sie schließt direkt an das Auflösen einer Gleichung mit einer Unbekannten an.
- Bei geeignetem Vorgehen erschließt sie sich der Schülerin fast von selbst.

- Im Gegensatz zur Eliminationsmethode kommt die Substitutionsmethode auch bei nichtlinearen Systemen in Betracht.

Mit den ersten beiden Kapiteln ist bereits ein Minimalziel erreicht. Fügt man das 5. Kapitel über Computertomografie als Additum hinzu, erhält man die Kurzversion des Leitprogramms.

Die Kapitel 3 und 4 sind theoretischen bzw. algorithmischen Aspekten des Themas gewidmet. Im 3. Kapitel geht es darum zu sehen, daß nicht jedes lineare Gleichungssystem genau eine Lösung haben muß. Um dafür eine tragfähige Argumentationsbasis zu haben, muß man auf die etwas subtilen Begriffe der Äquivalenz von Gleichungssystemen und Äquivalenzumformungen eingehen. Hier entsteht eine gewisse Spannung zwischen Theorie und Praxis. Der Leitprogrammenschreiber hält eine Reflexion für nötig, manch ein Praktiker im Kampf um vorzeigbare Resultate und im Konflikt mit der fehlenden Zeit mag es für verlorene Liebesmüh halten ("weil die Schüler 'das' sowieso nicht verstehen!").

Wir haben uns Mühe gegeben, das Thema anzusprechen, ohne es platt zu walzen. Wir meinen, daß es nicht richtig ist, solche Feinheiten einfach zu übergehen. Mag sein, daß sie noch nicht auf fruchtbaren Boden fallen. Aber vielleicht kann der Boden ja bereitet werden. Es geht um die Heranbildung einer gewissen mathematischen Kultur. Die entsteht nicht von selbst. Das ist ein langwieriger Prozeß, den man mit sisiphosscher Geduld betreiben muß!

Am Ende dieses 3. Kapitel wird auch die Querverbindung zwischen  $2 \times 2$ -Gleichungssystemen und Geometrie hergestellt. Manche Kollegen, mit denen wir diskutiert haben, fanden das zu spät. Unser Grund: Der algebraische Standpunkt führt hier weiter – er ermöglicht, sofort beliebig viele Gleichungen mit beliebig vielen Unbekannten ins Auge zu fassen. Die geometrische Interpretation des  $2 \times 2$ -Falles ist lediglich eine – allerdings sehr erhellende – Nebenbemerkung.

Das 4. Kapitel beginnt mit einem kleinen Abschnitt über die Geschichte des maschinellen Rechnens. Wir erinnern auch an Eduard Stiefel, den Pionier der numerischen und angewandten Mathematik in der Schweiz nach dem 2. Weltkrieg. Er hat von K. Zuse zunächst die Z4 gemietet und an der ETH betrieben. Später ist unter seiner Leitung der erste mit Elektronenröhren arbeitende Computer in der Schweiz, die ERMETH (Elektronische Rechenmaschine der ETH), gebaut worden. Eine ganze Reihe von berühmten numerischen Verfahren, die noch immer benutzt werden, stammen von ihm oder seinen damaligen Mitarbeitern.

Im übrigen wird in diesem Kapitel nun das Gaußsche Eliminationsverfahren betrachtet, wir gehen auf die Interpretation von Computeroutput, wie ihn z. B. der TI-85 liefert, sowie auf den Rechenaufwand des Gaußverfahrens ein. Den Rechenaufwand setzen wir mit der Leistung von Großrechnern und den Anforderungen bei der computertomografischen Bildverarbeitung in Beziehung.

Im 5. und letzten Kapitel möchten wir vermitteln, was Computertomografie ist. Der österreichische Mathematikdidaktiker H. C. Reichel propagiert dieses Thema für den Mathematikunterricht schon länger, [10], [11], s. auch [7].

Wir haben uns für unsere Darstellung einige Bilder vom Institut für Diagnostische Radiologie des Kantonsspitals Basel (Universitätskliniken) besorgt und ein paar einfache Skizzen verfertigt. Wir haben zwei Ziele:

- Wir möchten den Unterschied zwischen einem gewöhnlichen Röntgenbild und einem Computertomogramm erklären.
- Anhand eines einfachen Modells wollen wir zeigen, wie Computertomografie und lineare Gleichungssysteme zusammenhängen. Konkret: wie durch die Messung von Intensitätsverlusten der Röntgenstrahlung lineare Gleichungssysteme entstehen.

Auf die Überbestimmtheit der Systeme, auf iterative Lösungsverfahren, auf das Problem der Glättung der Daten usw. gehen wir nicht ein, das halten wir in diesem Zusammenhang nicht für erforderlich.

Wir machen auch eine Bemerkung zur sog. Kernspintomografie und weisen auf Richard Ernst, Professor für Physikalische Chemie an der ETH Zürich, hin, der 1991 für diese Entdeckung den Nobelpreis erhielt.

In Erprobungseinsätzen mit diesem Leitprogramm hat sich gezeigt, daß das Thema Computertomografie viele SchülerInnen, wie uns selbst auch, fasziniert. Einmal mußte allerdings ein Mädchen von der Bearbeitung des Kapitels entbunden werden. Wegen eines Krankheitsfalles in seiner Familie hat das Thema bei ihm heftige Emotionen ausgelöst.

### 3.4 Das Leitprogramm "Rekursives Programmieren"

Das Leitprogramm *Rekursives Programmieren* ist im Grenzbereich zwischen Mathematik und Informatik angesiedelt. Es wurde von W. Hartmann und A. Adler, P. Leoni, M. Meier entwickelt.

Rekursivität ist ein tief sinniger und weitreichender Gedanke! Und auf dem Computer kann er in effektiver Weise umgesetzt werden. Natürlich denkt man sofort an Fraktale. Und sie werden auch angesprochen in diesem Leitprogramm.

Aber zunächst stehen einfache Dinge im Vordergrund. Im 1. Kapitel wird an den Mathematikunterricht angeknüpft, es geht um rekursiv definierte Zahlfolgen (eingliedrige, mehrgliedrige, lineare, nichtlineare), und wie sie iterativ berechnet werden. Es kommen die A-Papierformate, die Fibonacci-Zahlen, die logistische Folge vor.

Im 2. Kapitel wird dann die Rekursion als wichtiges und elegantes Problemlöseinstrument der Informatik vorgestellt. Das Prinzip besteht bekanntlich darin, ein Ausgangsproblem in kleinere Teilprobleme zu zerlegen, wobei die Teilprobleme die gleiche Form haben wie das Ausgangsproblem. Die Unterteilung wird solange fortgesetzt, bis die Teilprobleme so einfach geworden sind, daß sie direkt gelöst werden können. Auf dem Computer wird diese Idee mit Programmen umgesetzt, die sich selbst aufrufen. Dabei spielt der IF ... THEN ... ELSE-Befehl eine zentrale Rolle.

Eingeführt wird die Idee am Beispiel des Telefonalarms, sodann geht es um die Frage, wie man mithilfe eines rekursiven Programms auf dem Bildschirm eine Strecke zwischen zwei Punkten durch Anzünden von geeigneten

Pixeln erzeugen kann.

Die Algorithmen werden in diesem Leitprogramm in Pseudocode beschrieben. Die Schülerinnen erhalten aber immer wieder den Auftrag, diesen in einen echten Code für ihren Schulcomputer umzusetzen.

Das 3. Kapitel mit dem Titel *Probleme und Grenzen* ist der computerinternen Datenverwaltung gewidmet. Zunächst anhand eines fiktiven Modells mit Karten. In einem fakultativen, etwas informatiktechnischeren Teil wird genauer auf den Stapelspeicher, den sog. stack, eingegangen. Das Ziel ist zu verstehen, wie ein Computer ein rekursives Programm abarbeitet. Das ist nötig, will man beurteilen können, wann Rekursion eine adäquate Lösung für ein Problem ist.

Im 4. Kapitel sowie im Additum geht es um Rekursivität und Computergrafik. Zuerst bekommen die Schülerinnen den Auftrag, aus einem Papierstreifen eine Drachenkurve zu *falten*. Nach einer kurzen Einführung in die sog. Turtle-Graphik können sie nun Programme zur Erzeugung von Drachen- und Kochkurven schreiben und ausprobieren.

Im 5. Kapitel, das als Additum gedacht ist, können die Erkenntnisse aus Kapitel 4 vertieft werden. Es geht

- um baumartige Strukturen,
- um das Cantorsche Diskontinuum,
- um Peanokurven,
- um schwierige Fragen, wie die nach der Dimension eines Objekts.

In diesem Additum sind die Schülerinnen nun sehr frei. Sie wählen selber aus, womit sie sich beschäftigen wollen. Sie werden auf Literatur verwiesen, die ein selbständiges, vertieftes Studium der angesprochenen Phänomene ermöglicht.

Das Leitprogramm ist auf 15–20 Lektionen ausgelegt, abhängig von der Anzahl der implementierten Programme. Vorausgesetzt werden, neben dem Begriff der Rekursion und der Iteration aus dem Mathematikunterricht, Programmierkenntnisse in einer strukturierten Programmiersprache und eine gewisse Vertrautheit im Umgang mit Prozeduren.

Das Leitprogramm eignet sich fürs Gymnasium sowie für Ingenieurschulen. Auch von diesem Leitprogramm kann eine Version auf WWW unter der Adresse <http://educeth.ethz.ch/mathematik/> angeschaut und im Original-Format Word heruntergeladen werden.

## 4. Epilog

Jeder Verfasser von Schülermaterial muß damit rechnen, daß er von Lehrerinnen und Lehrern kritisiert wird: "Das wäre doch so oder so viel besser gewesen. Die Reihenfolge gefällt mir nicht. Und überhaupt: ich hätte alles ganz anders gemacht!"

Wir sind nicht der Meinung, daß wir jeweils *den richtigen* Weg gefunden haben. Wir haben *einen* Weg gewählt. Wir haben viele mathematische und didaktische Entscheidungen getroffen, von denen wir glauben, daß sie begründbar sind. Wir hoffen, daß wir ein brauchbares Produkt vorgelegt haben. Wir sind uns bewußt, daß es andere, ebenso gute und vielleicht auch noch bessere Lösungen gibt.

Die vier beschriebenen Leitprogramme wurden am 10. Mai 1995 anlässlich des *6. Schweizerischen Tages über*

*Mathematik und Unterricht*<sup>2</sup> in Luzern etwa 150 anwesenden MathematiklehrerInnen vorgestellt. Bis zum 15. Juni 1995 konnten die Schulen sodann Bestellungen einreichen. Noch vor Beginn der Sommerferien haben wir ca. 100 Sätze an ebenso viele Schulen ausgeliefert. Mit dem Kaufpreis von Fr. 25,- pro Leitprogramm (für Druckkosten, Verpackung und Versand) erwarben sich die Schulen ausdrücklich das Recht, diese Leitprogramme für den Einsatz in ihren Klassen beliebig kopieren zu dürfen.

Wir erhielten nur wenige spontane Rückmeldungen von LehrerInnen. Aus diesem Grund führten wir 1996 am 7. Schweizerischen Tag über Mathematik und Unterricht in Stans eine Umfrage durch. Ihre Ergebnisse zeigen, daß die Leitprogramme von den Lehrpersonen mehrheitlich wohlwollend aufgenommen, jedoch noch nicht so häufig im Unterricht ausprobiert worden sind. Etwa 15 Prozent der anwesenden Lehrerinnen und Lehrer haben angegeben, im vergangenen Jahr wenigstens eines der Leitprogramme eingesetzt zu haben. Drei Viertel dieser Lehrpersonen sind mit dem Erfolg zufrieden, 10 Prozent sind vom Einsatz enttäuscht.

Eine häufig geäußerte Kritik möchten wir noch erwähnen: Die Verwendung von Leitprogrammen ist papieraufwendig. Ein Leitprogramm hat im Durchschnitt 50 bis 100 Seiten. Die müssen jedem Schüler, jeder Schülerin abgegeben werden. Das ist nicht erfreulich. Aber der Punkt sollte nicht überschätzt werden. Wir wollen den Mathematikunterricht ja nicht flächendeckend mit Leitprogrammen überziehen. Die Devise lautet: Und dann und wann ein Leitprogramm!

Und wie reagieren SchülerInnen auf unsere Leitprogramme? Aus den Testeinsätzen wissen wir, daß die SchülerInnen mit guter Motivation an die Arbeit mit einem Leitprogramm gehen. Das ist nicht so verwunderlich, weil ein neues Medium ja auf jeden Fall eine Abwechslung darstellt. Es hat sich allerdings gezeigt, daß die meisten SchülerInnen gefordert sind, daß sie die Arbeit mit einem Leitprogramm anstrengender finden als den normalen fragend-entwickelnden Unterricht.

Wir geben hier einige Bewertungen wieder, die Schülerinnen und Schüler nach der Arbeit mit Leitprogrammen in der Testphase abgegeben haben. Sie dienen zur Illustration. Ob sie in irgend einer Weise repräsentativ sind, wissen wir nicht.

Ich fand es nicht langweilig, denn der Aufbau ist sehr gut. Es baut immer auf dem Gelernten auf und das Hirn wird nicht vernachlässigt. Man ist immer bei der Sache.

Es war so, als ob mir eine Person das Thema persönlich erklären würde.

Es geht schneller, wenn es der Lehrer erklärt, aber vielleicht bleibt es besser, wenn man es selbst erarbeitet.

Gut, für meinen Geschmack fast zu gut, sind die Lösungen zu den Aufgaben aufgeschrieben. Wie im ganzen Leitprogramm

<sup>2</sup>Der Schweizerische Tag über Mathematik und Unterricht ist eine Fortbildungsveranstaltung für Mathematiklehrerinnen und Lehrer der Gymnasialstufe, die seit 1990 von der ETH-Zürich und der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft (SMG) jedesmal an einem anderen Gymnasium in der Schweiz durchgeführt wird.

<http://www.math.ethz.ch/~kirchgra/>

wird mir alles erklärt, aufgelistet, vorgerechnet, . . . Es ist alles vorgegeben. Was bleibt da noch für mich . . . ?

[Das Leitprogramm] fördert das Sprachverständnis, weil alles geschrieben vorliegt.

Mit der Zeit wurde es langweilig, immer zu lesen: vielleicht hätte man es unterteilen können; es ist von der Unterrichtsgestaltung her total eintönig.

Hier muß man etwas machen, im Normalunterricht kann man schlafen und nur abschreiben.

Ich finde es sehr gut so selbständig arbeiten zu können. So kann man auch je nach Motivation mal mehr oder mal weniger machen, man lernt, sich die Zeit und die Arbeit selber einteilen.

## 5. Verdankung

Alle, die an einem der vier vorgestellten Leitprogramme mitgeschrieben haben, sind als Autoren genannt. Ungeannt dagegen sind alle Kolleginnen und Kollegen, die Versionen dieser Leitprogramme gelesen, in einer ihrer Klasse ausprobiert, freundliche, skeptische oder beinharte Kritik geübt haben. Zahlreiche nützliche, gescheite, lustige Schülerkommentare sind zu erwähnen. Allen möchten wir danken.

Das Leitprogrammprojekt ist durch einen namhaften finanziellen Beitrag der ETH Zürich ermöglicht worden.

Die Endfassung dieser Arbeit wurde geschrieben, als einer der Autoren (UK) Gast am Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik an der Universität Augsburg war. Er dankt Frau L. Hefendehl-Hebeker für die Einladung und die freundliche Aufnahme, und der Gesellschaft der Freunde der Universität Augsburg für die finanzielle Unterstützung.

## 6. Literatur

- [1] Bangert-Drowns, R. L.; Kulik, C.-L.; Kulik, J. A.; Morgan, M. T.: The instructional effect of feedback in test-like events. – In: Review of Educational Research 11, 1991, pp. 213–238
- [2] Barth, F.; Federle, R.; Haller, R.: Algebra 2. – München: Ehrenwirth, 1994<sup>4</sup>
- [3] Bloom, B. S.: Human Characteristics and School Learning. – New York: McGraw-Hill, 1976
- [4] Fraser, B. J.; Walberg, H. J.; Welch, W. W.; Hattie, J. A.: Syntheses of educational productivity research. – In: International Journal of Educational Research 11, 1987, pp. 145–252
- [5] Frey, K.; Frey-Eiling, A.: Allgemeine Didaktik. – Zürich: vdf Verlag der Fachvereine an den schweizerischen Hochschulen und Techniken AG, 1992<sup>6</sup>
- [6] Gallin, P.; Ruf, U.: Singuläre Schülertexte als Basis eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts. – In: Bieler, R.; Heymann, H. W.; Winkelmann, B. (Hg.): Mathematik allgemeinbildend unterrichten: Impulse für Lehrerbildung und Schule. Köln: Aulis Verlag Deubner, 1995
- [7] Harris, J.; Kamel, M.: Iterative Reconstruction in Computerized Tomography. – In: UMAP Module 713, 1990, pp. 151–176
- [8] Keller, F. S.: Good-bye, Teacher .... – In: J. of Applied Behaviour Analysis 1, 1968, pp. 79–89
- [9] Kulik, C.-L.; Kulik, J. A.; Bangert-Drowns, R. L.: Effectiveness of mastery learning programs: a meta analysis. – In: Review of Educational Research 60, 1990, pp. 265–299

- [10] Reichel, H. C.; Zöchling, J.: Tausend Gleichungen – und was nun? Computertomografie als Einstieg in ein aktuelles Thema des Mathematikunterrichts. – In: Didaktik der Mathematik 4, 1990, pp. 245–270
- [11] Reichel, H. C.; Zöchling, J.: Iteratives Lösen größerer linearer Gleichungssysteme. – In: MNU. Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht 47, 1994, pp. 20–25
- [12] Sherman, J. G. (Ed.): PSI. Personalized system of instruction. 41 germinal papers. – Menlo Park, 1974 (The Benjamin PSI series)
- [13] Thorndike, E. L.: A Proof of the Law of Effect. – In: Science 77, 1933, pp. 173–175
- [14] Weltner, K. (Hg.): Mathematik für Physiker: Braunschweig: Vieweg. Theoriebände 1 und 2, 1994<sup>10</sup>, Leitprogrammabände 1 und 2, 1991<sup>6</sup>

---

**Autoren**

Kirchgraber, Urs, Prof. Dr., ETH-Zürich, Mathematik, ETH-Zentrum, CH-8092 Zürich. kirchgraber@math.ethz.ch  
Hartmann, Werner, Dr., ETH-Zürich, Theoretische Informatik, CH-8092 Zürich. hartmann@inf.ethz.ch  
Bettinaglio, Marco, Schulhausstraße 35, CH-8002 Zürich  
Adelmeyer, Moritz, Gatterächerstraße 17, CH-5436 Würenlos. adelmey@dial.eunet.ch  
David, Jean-Paul, Jungstraße 15, CH-8050 Zürich  
Frey, Karl, Prof. Dr., ETH-Zürich, Institut für Verhaltenswissenschaften, ETH-Zentrum, CH-8092 Zürich. karl.frey@ifv.huwi.ethz.ch