Diagonalenverhältnisse im regelmäßigen Vieleck[1]

Hans Walser, Basel (Schweiz)
Dieter Wode, Hannover (Deutschland)

Abstract: *Ratios of diagonals in regular polygons.* In a regular polygon there are constant ratios based on the lengths of the diagonals. By folding a regular polygon along the diagonals through one vertex we get a zigzag line which yields special ratios. These ratios are generalizations of the golden ratio.

Kurzreferat: Im regelmäßigen Vieleck gibt es konstante Verhältnisse, die aus Diagonalenlängen gebildet werden. Falten der regelmäßigen Vielecke längs des Diagonalenbüschels durch einen der Eckpunkte liefert eine Zickzacklinie, welche zu Teilverhältnissen führt, die als eine Verallgemeinerung des goldenen Schnittes angesehen werden können.

ZDM-Classification: F80, G40

1. Worum geht es

Diese Note basiert auf einem Vortrag von Dieter Wode an der Eight International Conference on Geometry in Nahsholim, Israel, March 7–14, 1999.

Wir zeichnen exemplarisch im regelmäßigen 13-Eck $A_0A_1 \dots A_{12}$ die von A_0 ausgehenden Diagonalen $d_i := A_0A_i$ (Abb. 1); dabei sind speziell d_1 und d_{12} die mit A_0 inzidenten Seiten des 13-Ecks.

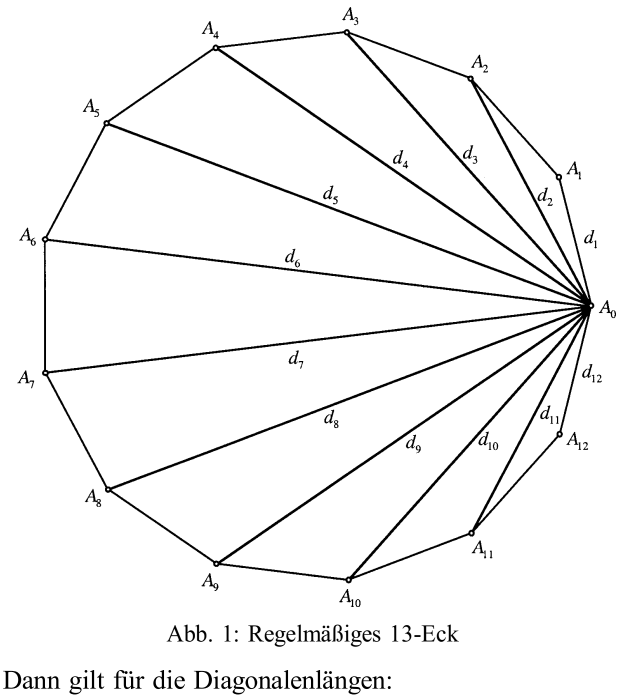

Abb. 1: Regelmäßiges 13-Eck

Dann gilt für die Diagonalenlängen:

$$\frac{d_1}{d_6} = \frac{d_2-d_1}{d_5} = \frac{d_3-d_2}{d_4} = \frac{d_4-d_3}{d_3} = \frac{d_5-d_4}{d_2} = \frac{d_6-d_5}{d_1}$$

aber auch:

$$\frac{d_3}{d_5} = \frac{d_4-d_1}{d_4} = \frac{d_5-d_2}{d_3} = \frac{d_6-d_3}{d_2} = \frac{d_7-d_4}{d_1}$$

sowie:

$$\frac{d_5}{d_4} = \frac{d_6-d_1}{d_3} = \frac{d_7-d_2}{d_2} = \frac{d_8-d_3}{d_1}$$

Der Leser/die Leserin ist eingeladen, weitere Verhältnisgleichungen zu finden.

Diese Gleichheiten sind Folge eines einfachen trigonometrischen Sachverhaltes. Im dritten Abschnitt wird gezeigt, wie diese Verhältnisse auf eine Linie gebracht werden können und dann als Teilverhältnisse erscheinen.

2. Etwas Trigonometrie im Thaleskreis

Wir zeichnen auf dem Thaleskreis eines rechtwinkligen Dreieckes ABC mit der Normierung $c = 2$ zwei zu C benachbarte Punkte C^+ und C^-, welche von C den Bogenabstand $+\varepsilon$ haben (Abb. 2).

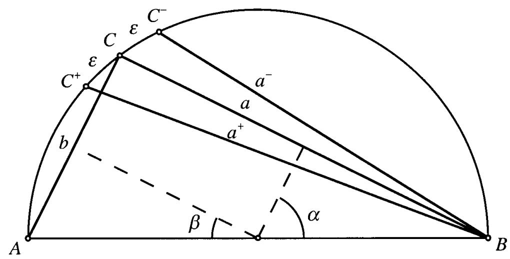

Abb. 2: Benachbarte Punkte auf dem Thaleskreis

Dann ist: $b = 2\sin\beta = 2\cos\alpha$, $a^+ := AC^+ = 2\sin(\alpha + \frac{\varepsilon}{2})$ und $a^- := AC^- = 2\sin(\alpha - \frac{\varepsilon}{2})$.

Unter Verwendung der Additionstheoreme ergibt sich:

$$\frac{a^+-a^-}{b} = \frac{\sin(\alpha-\frac{\varepsilon}{2})-\sin(\alpha-\frac{\varepsilon}{2})}{\cos\alpha} =$$
$$= \frac{(\sin\alpha\cos\frac{\varepsilon}{2})-(\sin\alpha\cos\frac{\varepsilon}{2}-\cos\alpha\sin\frac{\varepsilon}{2})}{\cos\alpha} = 2\sin\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Dieses Verhältnis ist unabhängig von α und β; wenn wir also den Punkt C und die beiden benachbarten Punkte C^+ und C^- so auf dem Thaleskreis bewegen, dass ihr relativer Bogenabstand $\pm\varepsilon$ sich nicht ändert, bleibt das Verhältnis invariant.

Wir können nun diesen Sachverhalt im regelmäßigen Vieleck anwenden.

3. Im regelmäßigen Vieleck

Wir untersuchen zunächst ein Vieleck mit einer *ungeraden* Eckenzahl $2m + 1$. Auf dem Umkreis des Vieleckes sei A_0^* der zu A_0 diametrale Punkt (Abb. 3).

[1]Diese Note basiert auf einem Vortrag von Dieter Wode auf der 8. International Conference on Geometry in Nahsholim, Israel, 7.–14. März 1999.

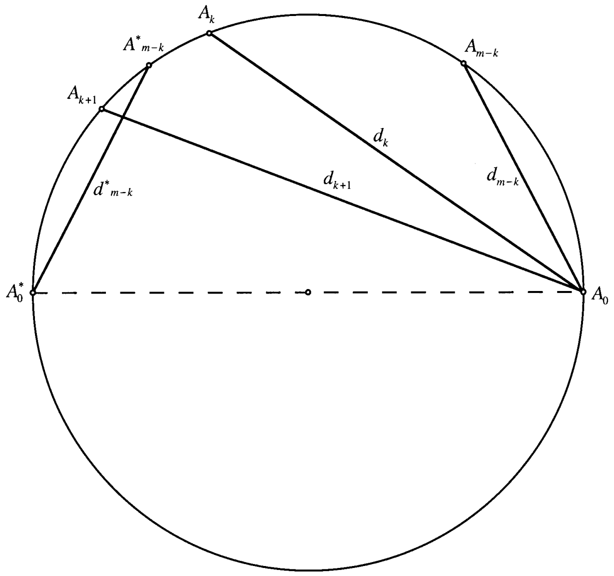

Abb. 3: Spiegeln einer Diagonalen

Wenn wir nun die Diagonale d_{m-k}, $0 \leq k < m$, an der Mittelsenkrechten der Strecke $A_0 A_0^*$ spiegeln, kommt der Endpunkt A^*_{m-k} genau in die Bogenmitte zwischen die beiden Punkte A_k und A_{k+1} zu liegen; der Bogenabstand zu diesen beiden Punkten ist $\pm\varepsilon = \pm\frac{\pi}{2m+1}$. Nach unseren Überlegungen im Thaleskreis ist somit:

$$\frac{d_{k+1}-d_k}{d_{m-k}} = 2\sin\frac{\varepsilon}{2} = 2\sin\frac{\pi}{4m+2}, \text{ unabhängig von } k.$$

Daher ist:

$$\frac{d_1}{d_m} = \frac{d_2-d_1}{d_{m-1}} = \frac{d_3-d_2}{d_{m-2}} = \cdots = \frac{d_m-d_{m-1}}{d_1}.$$

Analog kann gezeigt werden, dass $\frac{d_{k+1}-d_{k-(j-1)}}{d_{m-k}}$ von k unabhängig ist: Der Bogenabstand wird $\pm\varepsilon = \pm\frac{(2j-1)\pi}{2m+1}$, und daher ist $\frac{d_{k+j}-d_{k-(j-1)}}{d_{m-k}} = 2\sin\frac{\varepsilon}{2} = 2\sin\frac{(2j-1)\pi}{4m+2}$.

Für ein regelmäßiges Vieleck mit *gerader* Eckenzahl kann entsprechend gezeigt werden, dass das Verhältnis $\frac{d_{k+1}-d_{k-j}}{d_{m-k}}$ von k unabhängig ist.

4. Zickzacklinie im Winkelfeld

Wenn wir ein regelmäßiges Vieleck mit ungerader Eckenzahl auf transparentes Papier zeichnen und längs des Diagonalenbüschels durch den Eckpunkt A_0 abwechslungsweise nach oben und nach unten falten, erhalten wir eine gleichseitige Zickzacklinie in einem Winkelfeld. Die Zickzacklinie $A_0 A_1 \ldots A_{2m+1}$ beginnt im Scheitelpunkt A_0 des Winkelfeldes und hat die Ecken A_i abwechslungsweise auf dem einen und dem anderen Schenkel. Der Endpunkt A_{2m+1} fällt mit dem Anfangspunkt A_0 zusammen. Das Winkelfeld hat einen Öffnungswinkel von $\frac{\pi}{2m+1}$. Die Abbildung 4 zeigt die Situation für ein regelmäßiges 13-Eck.

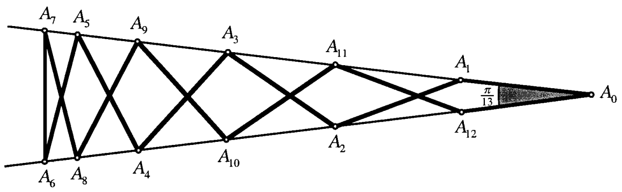

Abb. 4: Zickzacklinie im Winkelfeld

In dieser Situation sind die Abstände d_i und ihre Differenzen alle auf den Schenkeln ablesbar, so dass es sich bei den untersuchten Verhältnissen nun um Teilverhältnisse auf einer Geraden handelt. Für den Fall des regelmäßigen Fünfeckes erhalten wir durch Falten längs zweier Diagonalen die Figur der Abbildung 5 mit dem goldenen Schnitt als Teilverhältnis; daher ist es naheliegend, in unseren Überlegungen eine Verallgemeinerung des goldenen Schnittes zu sehen. Weiteres über geschlossene Zickzacklinien siehe Hohenberg 1979 und Walser 1988.

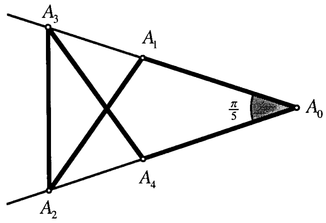

Abb. 5: Der Goldene Schnitt

Literaturverzeichnis

Hohenberg, F. (1979): Gleichseitige Polygone, deren Ecken abwechselnd auf zwei Geraden liegen. – In: Sitzungsberichte der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Abteilung II, 188 (H. 8–10), S. 385–405

Walser, H. (1988): Ein Schließungssatz der Elementargeometrie. – In: Elemente der Mathematik 43(6), S. 161–169

Autoren

Walser, Hans, Dr., Mathematisches Institut, Universität Basel, Rheinsprung 21, CH-4051 Basel. E-mail: hwalser@bluewin.ch

Wode, Dieter, Dr., Institut für Mathematik, Universität Hannover, Welfengarten 1, D-30167 Hannover.