Владикавказский математический журнал
2010, Том 12, Выпуск 2, С. 46–61

УДК **517.95, 517.946**

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННО-СОСТАВНОГО ТИПА С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ В МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

М. А. Нурмамедов

В работе рассматривается квазилинейная система уравнений смешанно-составного типа с меняющимся направлением времени в многомерной области, применяются методы функционального анализа, «ε-регуляризации», продолжения по параметру и Фаэдо — Галеркина с выбором специального базиса, а также метод компактности. Доказывается существование и единственность обобщенного решения задачи в весовых пространствах Соболева.

Ключевые слова: системы уравнений смешанного и составного типа, уравнения с меняющимся направлением времени, весовые пространства Соболева, регулярное и обобщенное решение, методы продолжения по параметру.

1. Введение

Исследования вырождающихся уравнений и уравнений смешанного типа имеют значительный математический интерес в связи с важностью их приложений в различных разделах механики, физики. Например, в газовой динамике имеются задачи, изучающие движения, в которых есть как дозвуковые, так и сверхзвуковые зоны, и такие течения обычно называются смешанными, околозвуковыми. Поэтому изучение задач трансзвуковой газодинамики тесно связано с развитием теории уравнений смешанного типа [1–6, 20–23]. Впервые в работе М. В. Келдыша [26] были получены условия разрешимости задачи Дирихле, в которой некоторая часть границы области освобождается от граничных условий. Затем в работах Г. Фикера [27] была обобщена постановка первой краевой задачи на случай общих эллиптико-параболических уравнений второго порядка и для гиперболо-параболических уравнений [24, 25]. Отметим, что в работах [14–18] исследованы уравнения со всевозможными знакоопределенными квадратичными формами в области. В данной же работе исследуются системы уравнений, близкие к [14–18], где, в отличие от работ [22, 23], гиперплоскость $x_n = 0$, $t = 0$, является характеристической для системы уравнений.

2. Постановка задачи

Пусть Ω — ограниченная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, выключающая часть гиперплоскости $x_n = 0$, где точка $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \subset R^n$. Положим $D = \Omega \times (-T, T)$

($T > 0$ — число), $S = \partial\Omega \times [-T, T]$ — поверхность и $\Gamma = \partial D$ — граница области D. В области D рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} L_1(u,\upsilon) = k_1(t)u_{tt} + k_2(x)\Delta u + \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i1}^{(1)}(x,t)u_{x_i} + \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i2}^{(1)}(x,t)\upsilon_{x_i} \\ \qquad +b_{11}(x,t)u_t + b_{12}(x,t)\upsilon_t + +c_{11}(x,t)u + c_{12}(x,t)\upsilon + c_1(x)|u|^{\rho_1}u = f_1(x,t); \\ L_2(u,\upsilon) = \upsilon_{tt} + \Delta\upsilon + \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i1}^{(2)}(x,t)u_{x_i} + \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i2}^{(2)}(x,t)\upsilon_{x_i} + b_{21}(x,t)u_t \\ \qquad +b_{22}(x,t)\upsilon_t + c_{21}(x,t)u + c_{22}(x,t)\upsilon - |\upsilon|^{\rho_2}\upsilon = f_2(x,t), \end{cases} \tag{2.1}$$

где $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i}$. Всюду далее будем предполагать, что коэффициенты системы (2.1) достаточно гладкие в области D и удовлетворяют условиям:

$$tk_1\left(t\right) > 0, \quad t \neq 0,\ t \in [-T, T]\,;$$

$$x_n k_2\left(x\right) < 0, \quad x_n \neq 0,\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Отсюда, из условий на коэффициенты при старших производных $k_1(t)$ и $k_2(x)$ видно, что система уравнений (2.1) состоит из вырождающихся эллиптических уравнений, гиперболических уравнений, уравнений смешанного и составного типа с меняющимся направлением времени; более того, система (2.1) имеет нелинейный член. Введем следующие обозначения:

$$\Gamma_{-T}^{+} = \left\{(x,t) \in \Gamma:\ x_n > 0;\ t = -T\right\}, \quad \Gamma_{-T}^{-} = \left\{(x,t) \in \Gamma:\ x_n < 0;\ t = -T\right\},$$

$$\Gamma_{T}^{+} = \left\{(x,t) \in \Gamma:\ x_n > 0;\ t = T\right\}, \quad \Gamma_{T}^{-} = \left\{(x,t) \in \Gamma:\ x_n < 0;\ t = T\right\},$$

$$D^{+} = D \cap \left\{x_n > 0\right\}, \quad D^{-} = D \cap \left\{x_n < 0\right\}.$$

Пространства С. Л. Соболева $W_2^k\left(D\right)$ будем понимать как обычно с нормой [10]:

$$\|u\|^2_{W_2^k(D)} = \|u\|^2_{K,D} = \int\limits_D \sum_{|\alpha| \leqslant k} \left|D^\alpha u\right|^2\, dx\, dt,$$

где $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_0 + \ldots + \alpha_n$, $D^\alpha = D_0^{\alpha_0} + \ldots + D_n^{\alpha_n}$, $D_0 = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Краевая задача 2.1. Найти в области $\bar{D}$ решение системы уравнений (2.1) такое, что

$$\begin{gathered} u_t(x,-T) = 0,\ x_n < 0; \quad u_t(x,T) = 0,\ x_n > 0, \\ u(x,t)\big|_\Gamma = 0, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega, \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\upsilon(x,t)\big|_S = 0, \quad \upsilon(x,-T) = 0, \quad \upsilon(x,T) = 0. \tag{2.3}$$

Краевая задача 2.2. Найти в области $\bar{D}$ решение системы уравнений (2.1) такое, что

$$u|_{\overline{\Gamma_T^-}} = 0, \quad u|_{\overline{\Gamma_{-T}^+}} = 0, \quad u|_S = 0, \tag{2.4}$$

$$\upsilon|_S = 0, \quad \upsilon(x,-T) = \upsilon(x,T) = 0. \tag{2.5}$$

Обозначим через $C_{L'}(D)$ и $C_L(D)$ классы дважды непрерывно дифференцируемых функций в замкнутой области $\bar{D}$, удовлетворяющих условиям (2.2), (2.3) и (2.4), (2.5) соответственно, а через $H_1(D)$ обозначим пространства Соболева с весами, получаемыми замыканием класса $C_{L'}(C_L)$ по норме

$$\|u\|^2_{H_1} = \int\limits_D \left(u_t^2 + \left|k_2\left(x\right)\right| \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 + u^2\right) dD$$

соответственно.

Прежде чем мы сформулируем теорему существования, сначала возьмем распадающуюся систему уравнений в следующем виде:

$$L_1(u) = k_1(t)u_{tt} + k_2(x)\Delta u + \sum_{i=1}^{n} a_{i1}^{(1)} u_{x_i} + b_{11}u_t + c_{11}u + c_1(x)|u|^{\rho_1}u = f_1(x,t), \qquad (2.6)$$

$$L_2(u) = \upsilon_{tt} + \Delta\upsilon + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}^{(2)} \upsilon_{x_i} + b_{22}\upsilon_t + c_{22}\upsilon - |\upsilon|^{\rho_2}\upsilon = f_2(x,t). \qquad (2.7)$$

Решения задач (2.6), (2.2) ((2.6), (2.4)) строим методом Фаэдо — Галеркина с выбором специального базиса [7, 8, 14]. Для этого сначала дадим определение обобщенного решения для уравнений (2.6), (2.7).

Определение 2.1. *Обобщенным решением задачи* (2.6), (2.4) будем называть функцию $u(x,t) \in H_1(D) \cap L_{\rho_1+2,|c_1|}(D)$, удовлетворяющую интегральному тождеству:

$$\begin{gathered} B(u,\varphi) = -\int\limits_D k_1(t)u_t\varphi_t\,dD + \int\limits_D (b_{11} - k_{1t})\,u_t\varphi_t\,dD \\ -\int\limits_D \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(k_2(x)u)\,\varphi_{x_i}\,dD + \int\limits_D \left(c_{11} - \sum_{i=1}^{n} a_{i1x_i}^{(1)} + k_{2x_ix_i}\right) u\varphi_{x_i}\,dD \\ -\int\limits_D \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1x_i}^{(1)} - 2k_{2x_i}\right) u\varphi_{x_i}\,dD + \int\limits_D c_1(x)|u|^{\rho_1}u\varphi\,dD = \int\limits_D f\varphi\,dD \end{gathered} \qquad (2.8)$$

для любой функции $\varphi(x,t) \in W$, где класс

$$W = \left\{\varphi:\, \varphi \in C^2(\bar D),\ \varphi|_{\Gamma} = 0,\ \varphi_t|_{\overline{\Gamma_T^+}} = \varphi_t|_{\overline{\Gamma_{-T}^-}} = 0\right\}. \qquad (2.9)$$

Определение 2.2. *Обобщенным решением задачи* (2.6), (2.7) будем называть функцию $u(x,t) \in H_1(D) \bigcap L_{\rho_1+2,|c_1|}(D)$, удовлетворяющую интегральному тождеству (2.8) для любой функции

$$\varphi(x,t) \in W_1 = \left\{\varphi:\, \varphi \in C^2\left(\bar D\right),\ \varphi|_{\Gamma} = 0\right\}. \qquad (2.10)$$

Сформулируем вспомогательные результаты.

3. Теоремы существования обобщенных решений задач (2.6), (2.4) и (2.6), (2.2)

Теорема 3.1 (о существовании обобщенного решения задачи (2.6), (2.4))**.** *Предположим, что коэффициенты уравнения* (2.1) *удовлетворяют условиям:*

1) $b_{11} - \frac{1}{2}k_{1t} \leqslant -\delta < 0$, $t = 0$; $(x,t) \in D$;
2) $c_{11t} \leqslant 0$; $(x,t) \in D$;
3) $x_n c_{11} > 0$, $x_n \neq 0$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$, $t \in [-T, T]$;
4) $\sum_{i=1}^{n} \left(a_{i1}^{(1)} - k_{2x_i}\right)^2 \leqslant M\,|k_2(x)|$; $k_{2x_n}^2 \leqslant M\,|k_2(x)|$;
5) $\rho_1 > -1$, $\rho_2 > -1$;
6) $\left(c_{11} - \sum_{i=1}^{n} a_{i1x_i}^{(1)} + k_{2x_ix_i}\right)\Big|_{\overline{\Gamma_T^+}} > 0$;
7) $\left(c_{11} - \sum_{i=1}^{n} a_{i1x_i}^{(1)} + k_{2x_ix_i}\right)\Big|_{\overline{\Gamma_{-T}^-}} < 0$.

Тогда для любой функции $f_1(x,t) \in L_2(D)$ существует обобщенное решение краевой задачи (2.6), (2.2) *такое, что $H_1(D) \cap L_{\rho_1+2,|c_1|}(D)$.*

$\triangleleft$ Выберем ортонормированный полный базис $\{\varphi^i(x,t)\}$ в пространстве $L_2(D)$ из гладких функций $\{\varphi^i \in C^2(D)\}$, удовлетворяющих краевому условию (2.10). Используя метод работы [14], построим по функциям $\varphi^i(x,t)$ функции $\psi^i(x,t)$, являющиеся решениями следующих обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi^i(x,t) = (-tx_n - M_i)\,\psi^i_t(x,t) \quad \text{в} \quad D, \tag{3.1}$$

удовлетворяющие краевым условиям:

$$\psi^i_t(x,-T) = 0, \quad x_n < 0;$$

$$\psi^i_t(x,T) = 0, \quad x_n > 0, \quad x = (x_1,\ldots,x_n) \in \Omega,$$

$$\psi^i(x,t)\big|_\Gamma = 0, \quad (x,t) \in D. \tag{3.2}$$

Решение задачи (3.1), (3.2) $u(x,t)$ будем искать как «приближенное» решение $u^m(x,t)$ в виде

$$u^m(x,t) = \sum_{i=1}^{n} c_{im}\psi^i(x,t),$$

где c_{im} — константы, определяющиеся из нелинейной системы алгебраических уравнений

$$B\left(u^m,\varphi^i\right)_{L_2(D)} = \left(f_1,\varphi^i\right)_{L_2(D)}. \tag{3.3}$$

Необходимо заметить, что хотя «приближенное» решение $u^m(x,t)$ при $x_n = 0$, вообще говоря, может иметь разрывы, однако функции $k_2(x)u^m(x,t)$, входящие в интегральное тождество (2.8), определены. Разрешимость системы уравнений (3.3) следует из условий теоремы 3.1 и леммы «об остром угле» [7, гл. 5], а также полученных нами оценок для приближенных решений.

Сначала получим оценки для приближенных решений, а потом обоснование разрешимости (3.3). Для этой цели умножим тождество (3.3) на c_{im} и просуммируем по i от 1 до m. Тогда получим:

$$\begin{gathered} m_1\left\|u^m\right\|^2_{H_1(D)} + \frac{1}{\rho_1+2}\left\||c_1|^{\frac{1}{\rho_1+2}}u^m\right\|^{\rho_1+2}_{L_{\rho_1+2}(D^+)} + \frac{1}{\rho_1+2}\left\||c_1|^{\frac{1}{\rho_1+2}}u^m\right\|^{\rho_1+2}_{L_{\rho_1+2}(D^-)} \\ \leqslant \int\limits_{D^+}\alpha_1 f_1^2\,dD^+ + \int\limits_{D^-}\alpha_1 f_1^2\,dD^-, \end{gathered} \tag{3.4}$$

где $\alpha_1 = (-tx_n - M_1)$ и константа m_1 не зависит от функций $u^m(x,t)$ и m. Следовательно, $\{u^m(x,t)\}$ сходится слабо в пространстве $H_1(D)$ к функции $u(x,t) \in H_1(D)$. Поэтому можно перейти к пределу в линейных членах тождества (3.3). Теперь покажем, что и в нелинейном члене тождества (3.3) также можно перейти к пределу. Рассмотрим функцию $w^m(x,t) = \sqrt{|k_2|u^m}$. Из построения этих функций вытекает, что $w^m(x,t) \in W^1_2(D)$. Тогда мы можем записать:

$$w^m_{x_n} = \sqrt{|k_2|}\,u^m_{x_i} + \frac{1}{2}\frac{k_{2x_i}}{\sqrt{|k_2|}}\,u^m, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

$$w^m_t = \sqrt{|k_2|}\,u^m_t.$$

Отсюда для любых m получим, что $\|w^m\|_{W_2^1(D)} \leqslant M_2$. Тогда по теореме вложения С. Л. Соболева [10] существует такая функция $w(x,t) \in W_2^1(D)$ и подпоследовательность функций $\{w^{m_k}\}$, которую снова обозначим через $w^m(x,t)$, слабо сходящаяся в пространстве $W_2^1(D)$ к функции $w(x,t)$. Кроме того, последовательность функций $\{w^m(x,t)\}$ будет сходится и сильно в $L_2(D)$ почти всюду в области D. Таким образом получаем, что функции $\sqrt{|k_2|}u^m \to w$ почти всюду в области D. Так как нам известно, что функция $k_2(x)$ может обращаться в нуль только при $x_n = 0$, то имеем, что $w^m \to \frac{w}{\sqrt{|k_2|}}$ при $m \to \infty$ почти всюду в области D. С другой стороны, в силу того, что $u^m \to u$ при $m \to \infty$ слабо в пространстве $L_2(D)$, то можно легко обосновать, что $u = \frac{w}{\sqrt{|k_2|}}$ или же $w = \sqrt{|k_2|}u$ почти всюду в области D. Следовательно, $w^m = |c_1(x)|^{\frac{1}{\rho_1}} \operatorname{sgn} c_1(x)|u^m|^{\rho_1}u^m$ сходится к функции $|c_1|^{\frac{1}{\rho_1}} \operatorname{sgn} c_1|u|^{\rho_1}u$ слабо в $L_{p_1}(D)$, где $\rho' = \frac{\rho_1+2}{\rho_1+1}$. Окончательно можно заключить, что $|c_1|^{\frac{1}{\rho_1}} \operatorname{sgn} c_1|u^m|^{\rho_1}u^m \to |c_1||u|^{\rho_1}u$ при $m \to \infty$ почти всюду в D. Далее, так как мы показали, что справедливо неравенство $\|w^m\|_{L_p(D)} \leqslant m_4$, где константа m_4 не зависит от функции w^m, то согласно лемме 1.3 о предельном переходе [7] получаем, что $|c_1|^{\frac{1}{\rho_1}} \operatorname{sgn} c_1|u^m|^{\rho_1}u^m \to |u|^{\rho_1}u|c_1|^{\frac{1}{\rho_1}} \operatorname{sgn} c_1$ при $m \to \infty$, слабо в пространстве $L_{p_1}(D)$. Отсюда, так как $|c_1(x)| \leqslant m_5$, следует, что последовательность $\{c_1(x)|u^m|^{\rho_1}u^m\}$ слабо сходится к функции $c_1(x)|u|^{\rho_1}u$. Таким образом, в нелинейном члене также можно переходить к переделу при $m \to \infty$ в равенстве (3.3). Теперь, если докажем разрешимость (3.3), то доказательство теоремы 3.1 будет полностью завершено. Положим:

$$c = (c_1, \dots, c_m), \quad A(c) = \big(A^1(c), \dots, A^m(c)\big),$$
$$A^m(c) = -\sum_{i=1}^m c_{im} \int\limits_D L_1\varphi^i\psi^i\,dD - \sum_{i=1}^m c_{im} \int\limits_D \left|\sum_{i=1}^m c_{im}\varphi^i\right|^{\rho_1} \varphi^i\psi^i dD - \int\limits_D f_1(x,t)\psi^i\,dD.$$

В силу леммы об остром угле [7] или леммы Вишика [19] следует, что достаточно доказать непрерывность $A^m(c^m)$ относительно C^m и что $(A(c),c) \geqslant m_0|c|^2 - m_1$, $m_0 > 0$, $m_1 \geqslant 0$ — достаточно большая величина. Но непрерывность $A^m(c^m)$ вытекает из непрерывности функции $f_1(x,t)$, $B(\lambda) = |\lambda|^{p_1}\lambda$, и свойств ψ^i, φ^i. Используя указанное ранее условие ортогональности φ^i и оценку (3.4), мы получим, что $(A(c),c)$ есть $|c|^2$. $\rhd$

Теорема 3.2 (о существовании обобщенного решения задачи (2.6), (2.4))**.** *Предположим, что в области D выполнены условия* 2)–7) *из теоремы* 3.1 *и, кроме того,* $b_{11} - \frac{1}{2}k_{1t} \geqslant \delta > 0$ *при* $t = 0$. *Тогда для любой функции* $f_1(x,t) \in L_2(D)$ *существует обобщенное решение задачи* (2.6), (2.4) *из пространства* $H_1(D) \cap L_{\rho_1+2,|c_1|}(D)$.

$\lhd$ Так же, как в доказательстве теоремы 3.1, выберем ортонормированный полный базис $\{\varphi^i(x,t)\}$ в пространстве $L_2(D)$ из гладких функций $\{\varphi^i \in C^2(D)\}$, удовлетворяющих краевому условию (2.9), и по функциям $\psi^i(x,t)$, являющимися решениями следующих обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\big\{\varphi^i(x,t)\big\} \in C^2(D)\psi^i(x,t), \quad \varphi^i(x,t) = \begin{cases} e^{\lambda t}\psi_t^i(x,t) & \text{в } D^+; \\ e^{\mu t}\psi_t^i(x,t) & \text{в } D^-, \end{cases} \\ \psi^i(x,t)\big|_{\overline{\Gamma_T^-}} = 0, \quad \psi^i(x,t)\big|_{\overline{\Gamma_{-T}^+}} = 0, \quad \psi^i(x,t)\big|_S = 0,\end{gathered} \tag{3.5}$$

где $\lambda < 0$, $\mu > 0$ — константы.

Снова мы можем искать приближенные решения задачи (2.6), (2.4) в виде:

$$u^m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} c_{im}\varphi^i(x,t),$$

где константы c_{im} определяются из нелинейной системы алгебраических уравнений

$$B(u^m, \varphi^i)_{L_2(D)} = (f_1, \varphi^i)_{L_2(D)}. \tag{3.6}$$

Теперь, повторяя все шаги доказательства теоремы 3.1, получим, что

$$\begin{gathered} m\|u^m\|^2_{H_1(D)} + \frac{1}{\rho_1+2}\left\||c_1|^{\frac{1}{\rho_1+2}}u^m\right\|^{\rho_1+2}_{L_2(D^+)} + \frac{1}{\rho_1+2}\left\||c_1|^{\frac{1}{\rho_1+2}}u^m\right\|^{\rho_1+2}_{L_2(D^-)} \\ \leqslant \int\limits_{D^+} f_1^2 e^{\lambda t}\,dD^+ + \int\limits_{D^-} f_1^2 e^{\mu t}\,dD^-. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Так же, как и в доказательстве теоремы 3.1, показываем возможность перехода к пределу в линейных и нелинейных членах в тождестве (3.6); тем самым доказательство разрешимости системы (3.6) полностью совпадает с доказательством разрешимости системы (3.3).

4. Теорема единственности решения задач (2.6), (2.4) и (2.6), (2.2)

Теорема 4.1 (о единственности решения задачи (2.6), (2.4) и (2.6), (2.2)). *Предположим, что выполнены условия 2)–7) и $b_{11} - \frac{1}{2}k_{1t} \geqslant \delta > 0$ при $t = 0$. Более того, $c_1(x) > 0$ для $x_n > 2\varepsilon$; $c_1(x) < 0$ для $x_n < -2\varepsilon$; $c_1(x) \equiv 0$ для $-2\varepsilon < x_n < 2\varepsilon$. Тогда, если норма $\|f_1\|_{L_2(D)} < +\infty$ достаточна мала, то существует единственное обобщенное решение краевой задачи (2.6), (2.4) из пространства $H_1(D) \cap L_{\rho_1+2,|c_1|}(D)$.*

Аналогично, имеет место

Теорема 4.2 (о единственности решения задач (2.6), (2.2)). *Предположим, что выполнены условия 2)–7) и $b_{11} - \frac{1}{2}k_{1t} \geqslant \delta > 0$ при $t = 0$. Кроме того, $c_1(x) > 0$ для $x_n > 2\varepsilon$; $c_1(x) < 0$ для $x_n < -2\varepsilon$; $c_1(x) \equiv 0$ для $-2\varepsilon < x_n < 2\varepsilon$. Тогда, если норма $\|f_1\|_{L_2(D)} < +\infty$ достаточна мала, то существует единственное обобщенное решение краевой задачи (2.6), (2.4) из пространства $H_1(D) \cap L_{\rho_1+2,|c_1|}(D)$.*

$\lhd$ Принимая во внимание теорему 3.1 и условия теоремы 4.1, имеем следующее неравенство:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\int\limits_{D^+} f_1^2 e^{\lambda t}\,dD^+ + \frac{1}{2}\int\limits_{D^-} f_1^2 e^{\mu t}\,dD^- \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{D^+}(2b_{11} - k_{1t} - \lambda k_1 - 2)\,e^{\lambda t}u_t^2\,dD^+ \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{D^+}|k_2|(-\lambda - M)e^{\lambda t}\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2\,dD^+ + \frac{1}{2}\int\limits_{D^+}(-c_{11}\lambda - c_{11t})u^2 e^{\lambda t}\,dD^+ \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{D^-}(2b_{11} - k_{1t} - \mu k_1 - 2)e^{\mu t}u_t^2\,dD^- + \frac{1}{2}\int\limits_{D^-}|k_2|(\mu - M)\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2\,dD^- \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{D^-}(-c_{11}\mu - c_{11t})u^2 e^{\mu t}\,dD^- - \frac{1}{\rho_1+2}\int\limits_{D^+} c_1(x)|u|^{\rho_1+2}\lambda e^{\lambda t}\,dD^+ \\ - \frac{1}{\rho_1+2}\int\limits_{D^-} c_1(x)|u|^{\rho_1+2}\mu e^{\mu t}\,dD^-. \end{gathered}$$

Введем обозначения:

$$\delta_1 = \min_{\overline{D^+}}(2b_{11} - k_{1t} - \lambda k_1 - 2), \quad \delta_2 = \min_{\overline{D^-}}(2b_{11} - k_{1t} - \mu k_1 - 2),$$
$$D_\varepsilon^+ = D \cap \{x_n > \varepsilon\}, \quad D_\varepsilon^- = D \cap \{x_n < -\varepsilon\}.$$

Пусть существуют два обобщенных решения $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ задачи (2.6), (2.4) в пространстве $H_1(D) \cap L_{\rho_1+2,|c_1|}(D)$. Тогда возьмем $u \equiv u_1 - u_2$ и рассмотрим следующий интеграл:

$$\begin{aligned} J \equiv & \int\limits_{D^+} c_1 u_t e^{\lambda t}\big(u_1|^{\rho_1} u_1 - |u_2|^{\rho_1} u_2\big)\, dD^+ + \int\limits_{D^-} c_1 u_t e^{\mu t}(|u_1|^{\rho_1} u_1 - |u_2|^{\rho_1} u_2)\, dD^- \\ & = (\rho_1+1) \int\limits_{D^+} c_1(x) u_t e^{\lambda t}(u_1 - u_2)|u_1 + \theta u_2|^{\rho_1}(u_1 + \theta u_2)\, dD^+ \\ & +(\rho_1+1) \int\limits_{D^-} c_1(x) u_t e^{\mu t}(u_1 - u_2)|u_1 + \theta u_2|^{\rho_1}\,(u_1 + \theta u_2)\, dD^- \\ & \leqslant \delta_3(\rho_1+1)\Bigg[\int\limits_{D_{2\varepsilon}^+} u_t e^{\lambda t}|u| g\, dD^+ + \int\limits_{D_{2\varepsilon}^-} u_t e^{\mu t}|u| g\, dD^-\Bigg], \end{aligned}$$

где $g = |u_1 + \theta u_2|^{\rho_1}(u_1 + \theta u_2)$, $0 < \theta < 1$, и $\delta_3 > 0$ — константа.

Применяя неравенство Коши, получим

$$P \geqslant \int\limits_{D_\varepsilon^+} \left[\delta_1 u_t^2 \varepsilon\,(-\lambda - M) \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right] e^{\lambda t} dD^+ + \int\limits_{D_\varepsilon^-} \left[\delta_2 u_t^2 \varepsilon\,(\mu - M) \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right] e^{\mu t} dD^-,$$

$$\begin{aligned} & J \leqslant \delta_3\,(\rho_1+1)\, \|u_t\|_{L_2(D_{2\varepsilon}^+)}\, \|u\|_{L_{\rho_1}(D_{2\varepsilon}^+)}\, \|g\|_{L_q(D_{2\varepsilon}^+)} \\ & +e^{\mu t}\delta_3\,(\rho_1+1)\, \|u_t\|_{L_2(D_{2\varepsilon}^-)}\, \|u\|_{L_{\rho_1}(D_{2\varepsilon}^-)}\, \|g\|_{L_q(D_{2\varepsilon}^-)}\,, \end{aligned}$$

где $\frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{q} = 1$. Отсюда, применяя мультипликативные неравенства из работ [12, 13] и теорему вложения Соболева, получаем

$$J \leqslant \delta_3(\rho_1+1)\beta\left[\|u\|^2_{W_2^1(D_{2\varepsilon}^+)}\|g\|_{L_6(D_{2\varepsilon}^+)} + \|u\|^2_{W_2^1(D_{2\varepsilon}^-)} e^{\mu t}\|g\|_{L_6(D_{2\varepsilon}^-)}\right],$$

где $n \leqslant 6$, $\alpha = \frac{n}{6}$, $\beta = \left(\frac{2(n-1)}{n-2}\right)^\alpha$. Отсюда следует

$$\begin{aligned} & \int\limits_{D_{2\varepsilon}^+} \left[\delta_1 u_t^2 + \varepsilon(-\lambda - M)\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right] e^{\lambda t}\, dD^+ + \int\limits_{D_{2\varepsilon}^-} \left[\delta_2 u_t^2 + \varepsilon(\mu - M)\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right] e^{\mu t}\, dD^- \\ & \leqslant \beta\delta_3(\rho_1+1)\left[\|u\|^2_{W_2^1(D_{2\varepsilon}^+)}\|g\|_{L_6(D_{2\varepsilon}^+)} + e^{\mu t}\|u\|^2_{W_2^1(D_{2\varepsilon}^-)}\|g\|_{L_6(D_{2\varepsilon}^-)}\right]. \end{aligned}$$

Теперь нам необходимо оценить норму функции $g = |u_1 + \theta u_2|^{\rho_1}(u_1 + \theta u_2 t)$, $0 < \theta < 1$, в пространстве $L_6(\bar{D})$:

$$\min\left\{\min[\delta_1,\varepsilon(-\lambda-M)]\,e^{\lambda t},\min[\delta_2,\varepsilon(\mu-M)]\,e^{\mu t}\right\}\left[\|u\|^2_{W_2^1(D^+_{2\varepsilon})}+\|u\|^2_{W_2^1(D^-_{2\varepsilon})}\right]$$
$$\leqslant\delta_3(\rho_1+1)\left[\frac{2(n-1)}{n-2}\right]^{\frac{n}{6}}[3(\rho_1+1)]^{\frac{3\rho_1+2}{3}}\,P^{\frac{\rho_1+1}{2}}$$
$$\times\max\left\{\left[\frac{1}{e^{\lambda t}\min[\delta_1,\varepsilon(-\lambda-M)]}\right]^{\frac{\rho_1+1}{2}},\left[\frac{1}{e^{\mu t}\min[\delta_2,\varepsilon(\mu-M)]}\right]^{\frac{\rho_1+1}{2}}\right\}$$
$$\times\left[\|u\|^2_{W_2^1(D^+_{2\varepsilon})}+\|u\|^2_{W_2^1(D^-_{2\varepsilon})}\right].$$

Отсюда, если будет выполнено неравенство

$$\begin{gathered}\min\left\{\min\left[\delta_1,\varepsilon(-\lambda-M)\right]\,e^{\lambda t},\min\left[\delta_2,\varepsilon(\mu-M)\right]\,e^{\mu t}\right\}\\>\delta_3(\rho_1+1)\left[\frac{2(n-1)}{n-2}\right]^{\frac{n}{6}}[3(\rho_1+1)]^{\frac{3\rho_1+2}{3}}\,P^{\frac{\rho_1+1}{2}}\\\times\max\left\{\left[\frac{1}{e^{\lambda t}\min[\delta_1,\varepsilon(-\lambda-M)]}\right]^{\frac{\rho_1+1}{2}},\left[\frac{1}{e^{\mu t}\min[\delta_2,\varepsilon(\mu-M)]}\right]^{\frac{\rho_1+1}{2}}\right\},\end{gathered}\tag{4.1}$$

то получаем противоречие, и, следовательно, $u\equiv 0$ или $u_1\equiv u_2$. Отсюда следует, что, если условия теоремы 4.1 выполнены, то существует единственное решение задачи (2.6), (2.4) в пространстве $W_2^1(D^+_{2\varepsilon}\cup D^-_{2\varepsilon})$ (или в пространстве $H_1(D^+_{2\varepsilon}\cup D^-_{2\varepsilon})$). Итак, существует единственное обобщенное решение задачи (2.6), (2.4) в пространстве $H_1(D)\cap L_{\rho_1+2,|c_1|}(D)$. Учитывая ограничения на $c_1(x)$ в теореме 4.1, имеем $c_1(x)|u|^{\rho_1}u\equiv 0$ в области $\tilde D=D\backslash(D^-_{2\varepsilon}\cup D^+_{2\varepsilon})$. Отсюда следует, что обобщенное решение краевой задачи (2.6), (2.4) в D единственно и принадлежит пространству $H_1(D)\cap L_{\rho_1+2,|c_1|}(D)$. ▷

Аналогично, применяя методы доказательства теоремы 4.1, доказывается теорема 4.2. Здесь достаточно рассмотреть следующий интеграл:

$$P\equiv\int\limits_{D^+}f_1^2\alpha_1\,dD^++\int\limits_{D^-}f_1^2\alpha_1\,dD^-$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\int\limits_{D^+}\left\{\left[\,(2b_{11}-k_{1t})\,\alpha_1-k_1\alpha_{1t}\right]u_t^2+2\sum_{i=1}^n\left[a_{i1}^{(1)}\alpha_1-(k_2\alpha_1)_{x_i}\right]u_{x_i}u_t+\sum_{i=1}^n k_2\alpha_{1t}u_{x_i}^2\right.$$
$$\left.-\,(c_{11}\alpha_{1t}-c_{11t}\alpha_1)\,u^2\right\}dD^++\frac{1}{2}\int\limits_{D^-}\left\{\left[\,(2b_{11}-k_{1t})\,\alpha_1-k_1\alpha_{1t}\right]u_t^2\right.$$
$$\left.+2\sum_{i=1}^n\left[a_{i1}^{(1)}\alpha_1-(k_2\alpha_1)_{x_i}\right]u_{x_i}u_t+\sum_{i=1}^n k_2\alpha_{1t}u_{x_i}^2-(c_{11}\alpha_{1t}-c_{11t}\alpha_1)\,u^2\right\}dD^-$$
$$-\frac{1}{\rho_1+1}\int\limits_{D^+}c_1\,(x)\,|u|^{\rho_1+2}\,\alpha_{1t}\,dD^+-\frac{1}{\rho_1+1}\int\limits_{D^-}c_1\,(x)\,|u|^{\rho_1+2}\,\alpha_{1t}\,dD^-.$$

Тогда, повторяя все шаги доказательства теоремы 4.1, получаем, что существует и притом единственное обобщенное решение краевой задачи (2.6), (2.2) в пространстве $H_1(D)\cap L_{\rho_1+2,|c_1|}(D)$.

Замечание 4.1. Если выполняется условие малости нормы $\|f_1(x,t)\|_{L_2(D)}$, то также справедливо неравенство (4.1).

5. Основные результаты

Теорема 5.1. *Предположим, что*

$$\rho_2 < \frac{2}{n-2}, \tag{5.1}$$

$$2c_{22}(x,t) - \sum_{i=1}^{n} a_{i2}^{(2)}(x,t) - b_{22}(x,t) \leqslant 0 \quad \forall\,(x,t) \in D. \tag{5.2}$$

Тогда для любой функции $f_2(x,t) \in L_2(D)$ *существует единственное решение* $\upsilon(x,t)$ *краевой задачи* (2.7), (2.5), ((2.7), (2.3)) *из пространства* $W_2^2(D)$.

◁ Очевидно, что выполнение условия (5.1) обеспечивает коэрцитивность оператора

$$L_2\upsilon = \upsilon_{tt} + \Delta\upsilon + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}^{(2)}\upsilon_{x_i} + b_{22}\upsilon_t + |\upsilon|^{\rho_2}\upsilon + c_{22}\upsilon.$$

Тогда при $\rho_2 < \frac{2}{n-2}$ существует и притом единственное решение краевой задачи (2.7), (2.5) (или задачи (2.7), (2.3)) в пространстве $W_2^1(D)$. Обозначим

$$\bar{L}_2\upsilon = \upsilon_{tt} + \Delta\upsilon + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}^{(2)}\upsilon_{x_i} + b_{22}\upsilon_t.$$

Тогда уравнение (2.7) можно записать в виде:

$$\bar{L}_2\upsilon = F_t + |\upsilon|^{\rho_2}\upsilon. \tag{5.3}$$

Если $\upsilon(x,t) \in W_2^1(D)$ — решение, то $|\upsilon|^{\rho_2}\upsilon \in L_2(D)$, и, следовательно, $f_2(x,t) + |\upsilon|^{\rho_2}\upsilon \in L_2(D)$. Поэтому любое решение из $W_2^1(D)$ краевой задачи (2.7), (2.5) (или задачи (2.7), (2.3)) является элементом пространства $W_2^2(D)$. Так как уравнение (2.7) является квазилинейным эллиптическим уравнением, то доказательство этого утверждения можно провести аналогично доказательству разрешимости задачи Дирихле для эллиптического оператора в пространстве $W_2^2(D)$ [12, 13]. Отсюда можно заключить, что в предположениях теоремы 5.1 существует и притом единственное обобщенное решение задачи (2.7), (2.5) (или задачи (2.7), (2.3)). ▷

Замечание 5.1. Предположим, что коэффициенты уравнения (2.7) удовлетворяют условию $|a_{i2}^{(2)}(x,t)|^2 \leqslant M|k_2(x)|$, тогда для любой функции $f_2(x,t) \in L_2(D)$ существует и притом единственное обобщенное решение задачи (2.7), (2.5) (или задачи (2.7), (2.3)) в пространстве $H_1(D) \cap L_{\rho_2+2}(D)$.

Доказательство этого утверждения получается аналогично доказательству теорем 3.1, 4.1 работ [11, 14].

Далее, для того чтобы доказать разрешимость исходной задачи (2.1)–(2.3) и (2.1), (2.4), (2.5), введем следующие обозначения:

$$M\bar{u} = k\bar{u}_{tt} + \sum_{i=1}^{n} A_i\bar{u}_{x_i} + B\bar{u}_t + D\bar{u}, \quad N\bar{u} = \sum_{i=1}^{n} P_i\bar{u}_{x_i} + Q\bar{u}_t + R\bar{u},$$

где

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{pmatrix} a_{i1}^{(1)} & 0 \\ 0 & a_{i2}^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} k_2(x)\Delta + c_{11} + c_1|u|^{\rho_1} & 0 \\ 0 & \Delta + c_{22} - |\upsilon|^{\rho_2} \end{pmatrix},$$

$$P_i = \begin{pmatrix} 0 & a_{i2}^{(1)} \\ a_{i1}^{(2)} & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} \\ c_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u \\ \upsilon \end{pmatrix}, \quad \bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{D} = D_{2\varepsilon}^{+} \bigcup D_{2\varepsilon}^{-}, \quad \tilde{D}_\varepsilon = D_\varepsilon^{+} \bigcup D_\varepsilon^{-}.$$

Тогда систему (2.1) можно записать в виде:

$$L\bar{u} = M\bar{u} + N\bar{u} = \bar{f}. \tag{5.4}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия теорем* 3.1, 3.2, 4.1, 4.2. *Кроме того, коэффициенты* $a_{i2}^{(1)}(x,t)$ *достаточно малы. Тогда для любых функций* $f_1, f_{1t}, f_2 \in L_2(D)$, $f_2(x,-T) = 0$, *существует и притом единственное обобщенное решение краевой задачи* (2.1)–(2.3) ((2.1), (2.4), (2.5)) *из пространства* $W_2^2(\tilde{D})$.

$\lhd$ Умножая уравнение 5.4 на вектор $\eta_1 = \{u_t e^{\lambda t}, \upsilon\}$, $\eta_2 = \{u_t e^{\mu t}, \upsilon\}$ в соответствующей области D^+ и D^-, применяя неравенство Коши, а также формулу интегрирования по частям, легко получим, что

$$\|L\bar{u}\|_{2,D} \geqslant m_1 \|\bar{u}\|_{W_2^1(D)}, \tag{5.5}$$

где m_1 — константа, не зависящая от $\bar{u}(x,t)$. Теперь обозначим через $H_{t,0}$ пространство вектор-функций $\psi = \{\psi_1, \psi_2\}$ таких, что $\psi_1, \psi_{1t}, \psi_2 \in L_2(D)$, причем $\psi_{1t}(x,-T) = 0$. Норму в пространстве $H_{t,0}$ определим следующим образом:

$$\left\|\bar{\psi}\right\|_{t,0}^2 = \|\psi_{1t}\|_0^2 + \|\psi_2\|_0^2. \tag{5.6}$$

Отсюда на основании оценки (5.5) и из уравнения (5.4) получаем следующую оценку:

$$\|\bar{u}\|_{W_2^2(\tilde{D}_{2\varepsilon})} \leqslant m_2 \|M\bar{u}\|_{t,0}, \tag{5.7}$$

где $m_2 > 0$ — константа, не зависящая от $\bar{u}(x,t)$. Преобразуем уравнение (5.5) следующим образом:

$$M\bar{u} = L\bar{u} - N\bar{u}.$$

Тогда на основании оценки (5.5) из нормы (5.6) имеем, что

$$\|\bar{u}\|_{W_2^2(\tilde{D})} \leqslant m_3 \Big(\|M\bar{u}\|_{t,0} + \|N\bar{u}\|_{t,0}\Big).$$

Отсюда, используя результаты теорем 4.1, 5.1 и неравенство (5.5), получаем следующую оценку:

$$\|\bar{u}\|_{W_2^2(\tilde{D}_{2\varepsilon})} \leqslant m_5 \|M\bar{u}\|_{t,0}. \tag{5.8}$$

Далее, рассмотрим семейство уравнений относительно параметра τ:

$$L_\tau \bar{u} = M\bar{u} + \tau N\bar{u}, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1.$$

Пользуясь полученными выше оценками, мы можем получить равномерную относительно параметра τ априорную оценку

$$\|\bar{u}\|_{W_2^2(\tilde{D}_{2\varepsilon})} \leqslant m_5 \|L_\tau \bar{u}\|_{t,0}.$$

С другой стороны, при $\tau = 0$ задача (2.1)–(2.3) и (2.1), (2.4), (2.5) разрешима. На основе хорошо известного [9, 11] метода продолжения по параметру доказывается разрешимость задачи (2.1)–(2.3) и (2.1), (2.4), (2.5) в пространстве $W_2^2(D)$. Единственность решения задачи доказывается аналогично доказательствам теорем 3.1, 3.2. ▷

Теорема 5.4. *Пусть выполнены условия теорем* 2.1, 3.1, 4.1, 4.2, 5.1. *Тогда для любых функций $f_1, f_{1t}, f_2 \in L_2(D)$ таких, что $f_{1t}(x,-T) = 0$, существует единственное обобщенное решение краевой задачи* (2.1)–(2.3) *и* (2.1), (2.4), (2.5) *из пространства $H_1(D) \cap L_{\rho_1+2,|c_1|}(D) \cap L_{\rho_2+2}(D)$.*

6. Исследование регулярности решения краевой задачи (2.1)–(2.3)

Символом C_L обозначим класс дважды непрерывно дифференцируемых в замкнутой области $\bar{D}$ функций, удовлетворяющих краевым условиям (2.2), (2.3) ((2.4), (2.5)), а через $H_2(D)$ — пространство Соболева с весом, получаемое замыканием класса C_L по норме

$$\|u\|_{H_2(D)} = \int\limits_D \left(u_{tt}^2 + k_2^2 \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}^2 + |k_2(x)| \sum_{i=1}^n u_{x_i t}^2 + |k_2(x)| \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u_t^2 + u^2 \right) dD.$$

Заметим, что так как $k_2(x) \neq 0$ при $x_n \neq 0$, то, в силу теорем вложения С. Л. Соболева [10], функции из пространства $H_2(D)$ будут удовлетворять граничным условиям (2.2), (2.3) (или (2.4), (2.5)).

Лемма 6.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1 *и условие* (5.1). *Тогда для любых функций $u(x,t), \upsilon(x,t) \in C_L$ справедливы следующие неравенства:*

$$\int\limits_{D^+} L_1(u,\upsilon)\alpha u_t\, dD^+ + \int\limits_{D^+} L_2(u,\upsilon)\alpha u_t\, dD^+ + \int\limits_{D^-} L_1(u,\upsilon)\alpha u_t\, dD^-$$
$$+ \int\limits_{D^-} L_2(u,\upsilon)\alpha u_t\, dD^- \geqslant m_1 \left(\|u\|^2_{H_1(D)\bigcap L_{p_1+2,|c_1|}(D)} + \|\upsilon\|^2_{H_1(D)\bigcap L_{p_1+2,|c_1|}(D)} \right),$$

где $\alpha(x,t) = -tx_n - M_1$.

Доказательство леммы 6.1 проводится интегрированием по частям и использованием неравенства Коши с учетом граничных условий.

Определение 6.1. Регулярным решением задачи (2.1), (2.2), (2.3) (или (2.1), (2.4), (2.5)) будем называть функции $u(x,t), \upsilon(x,t) \in H_2(D)$, удовлетворяющие уравнениям (2.1) почти всюду в области D.

Так как гиперплоскость $x_n = 0$ является характеристической для уравнения (2.1), то мы можем рассмотреть краевую задачу (2.6), (2.2) следующим образом.

Краевая задача 6.1. Найти решение уравнения (2.6) в области D^+, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_t(x,T) = 0, \quad u(x,T) = 0, \quad u(x,-T) = 0, \quad x_n > 0, u\big|_{S^+} = 0, \tag{6.1}$$

где $S^+ = S \cap \{x_n > 0\}$, $S^- = S \cap \{x_n < 0\}$.

Краевая задача 6.2. Найти решение уравнения (2.6) в области D^-, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_t(x,-T)=0,\quad u(x,-T)=0,\quad u(x,T)=0,\quad x_n<0,\quad u\big|_{S^-}=0. \tag{6.2}$$

Обозначим через $C_L(D^+)$, $C_L(D^-)$ класс бесконечно дифференцируемых в замкнутой области D^+, D^- соответственно, функции, удовлетворяющих краевым условиям (6.1), (6.2). Имеет место

Лемма 6.2. *Пусть выполнены условия теорем* 3.1, 3.3. *Тогда для любой функции* $u(x,t)\in C_L(D^+)$ $(u(x,t)\in C_L(D^-))$ *справедливы следующие оценки:*

$$(L_1u,\alpha u_t)_{L_2(D^+)}\geqslant m_1\,\|u\|^2_{H_1(D)\cap L_{p_1+2,|C_1|}(D^+)}, \tag{6.3}$$

$$(L_1u,\alpha u_t)_{L_2(D^-)}\geqslant m_2\|u\|^2_{H_1(D)\cap L_{p_1+2,|C_1|}(D^-)}. \tag{6.4}$$

◁ Доказательство леммы 6.2 аналогично доказательству теоремы 3.1. ▷

Рассмотрим в области D^+ «ε-регуляризированное» уравнение смешанного типа

$$\begin{gathered}L_{1\varepsilon}u_\varepsilon=k_1(t)u_{\varepsilon tt}+(k_2-\varepsilon)\Delta u_\varepsilon+b_{11}u_{\varepsilon t}\\+\sum_{i=1}^n a_{i1}^{(1)}u_{\varepsilon x_i}+c_{11}u_\varepsilon+c_1(x)|u_\varepsilon|^{\rho_1}u_\varepsilon=f_1(x,t)\end{gathered} \tag{6.5}$$

с граничными условиями

$$u_\varepsilon|_{x_n=0}=0,\quad u_\varepsilon|_{S^+}=0,\quad u_{\varepsilon t}(x,T)=u_\varepsilon(x,T)=u_\varepsilon(x,-T)=0,\quad x_n>0. \tag{6.6}$$

Также рассмотрим в области D^- «ε-регуляризированное» уравнение смешанного типа:

$$\begin{gathered}L_{1\varepsilon}u_\varepsilon=k_1(t)u_{\varepsilon tt}+(k_2+\varepsilon)\Delta u_\varepsilon+b_{11}u_\varepsilon+b_{11}u_{\varepsilon t}\\+\sum_{i=1}^n a_{i1}^{(1)}u_{\varepsilon x_i}+c_{11}u_\varepsilon+c_1(x)|u_\varepsilon|^{\rho_1}u_\varepsilon=f_1(x,t)\end{gathered} \tag{6.7}$$

с граничными условиями

$$u_\varepsilon|_{x_n=0}=0,\quad u_\varepsilon|_{S^-}=0,\quad u_{\varepsilon t}(x,-T)=0,\quad u_\varepsilon(x,-T)=u_\varepsilon(x,T)=0,\quad x_n<0. \tag{6.8}$$

Исходя из результатов [11, 14, 18] и теорем 3.1, 4.2, имеет место

Теорема 6.1. *Пусть выполнены условия теорем* 3.1, 4.2 *и, кроме того,*

$$|k_{2x_i}k_{2x_j}|\leqslant M|k_2(x)|,\quad f_1(x,t),f_{1t}(x,t)\in L_2(D^+),\quad 2b_{11}-|k_{1t}|\leqslant-\delta<0,\quad (x,t)\in D^+.$$

Тогда существует и притом единственное регулярное решение задачи (2.6), (6.1) *в области* $H_2(D^+)$.

Теорема 6.2. *Пусть выполнены условия теорем* 3.1, 4.2 *и, кроме того,*

$$|k_{2x_i}k_{2x_j}|\leqslant M|k_2(x)|,\quad f_1(x,t),f_{1t}(x,t)\in L_2(D^-),\quad 2b_{11}-|k_{1t}|\leqslant-\delta<0,\quad (x,t)\in D^-.$$

Тогда существует и притом единственное регулярное решение задачи (2.6), (6.2) *из пространства* $H_2(D^-)$.

◁ Доказательство теорем 6.1, 6.2. Для функции $u_\varepsilon(x,t)\in W_2^2(D^+)$ ($u_\varepsilon(x,t)\in W_2^2(D^-)$), являющейся решением краевой задачи (2.6), (6.1) (для (2.6), (6.2)), имеют место следующие априорные оценки:

$$\|f_1\|_{L_2(D^+)}\geqslant m_5\int\limits_{D^+}\left(u_{\varepsilon t}^2+|k_2-\varepsilon|\sum_{i=1}^{n}u_{\varepsilon x_i}^2+u_\varepsilon^2\right)dD^+ +\|u_\varepsilon\|_{L_{\rho_1+2,|C_1|}}D^+,$$

$$\|f_1\|_{L_2(D^-)}\geqslant m_6\int\limits_{D^-}\left(u_{\varepsilon t}^2+|k_2+\varepsilon|\sum_{i=1}^{n}u_{\varepsilon x_i}^2+u_\varepsilon^2\right)dD^- +\|u_\varepsilon\|_{L_{\rho_1+2,|C_1|}}D^-,$$

где константы m_5, m_6 не зависят от ε. Доказательства этих утверждений легко получаются путем интегрирования по частям и использованием неравенства Коши. Для получения второй априорной оценки возьмем функцию $\xi_1(t)$:

$$\xi_1(t)=\begin{cases}\equiv 1 & \text{при}\ \ t\in(-t,-\eta),\ \ \frac{T}{2}>\eta>0,\\ \leqslant 1 & \text{при}\ \ t\in\left[-\eta,-\frac{\eta}{2}\right),\\ \equiv 0 & \text{при}\ \ t\in\left[-\frac{\eta}{2},T\right).\end{cases}$$

Затем рассмотрим функцию $W_\varepsilon(x,t)=\xi_1(t)u_\varepsilon(x,t)$. Очевидно, что $W_\varepsilon(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$L_{1\varepsilon}W_\varepsilon=\xi_1 f_1+2k_1(t)\xi_1'(t)u_{\varepsilon t}+k_1(t)\xi_1''(t)u_\varepsilon=F_1(x,t). \tag{6.9}$$

Умножим уравнение (6.9) на $-W_{\varepsilon tt}$ и проинтегрируем по частям в области D^+. Учитывая граничные условия и используя неравенство Коши, получим

$$\begin{aligned}\|f_1\|_{L_2(D^+)}\geqslant m_7\int\limits_{D^+}(u_{\varepsilon tt}^2+|k_2-\varepsilon|\sum_{i=1}^{n}u_{\varepsilon x_i t}^2+u_{\varepsilon t}^2\\ +|k_2-\varepsilon|\sum_{i=1}^{n}u_{\varepsilon x_i}^2+u_\varepsilon^2)\,dD^+ +m_8\|u_{\varepsilon t}t\|_{L\rho_1(D^+t)}^2,\end{aligned} \tag{6.10}$$

где константы m_7, m_8 не зависят от ε и $u(x,t)$.

Теперь рассмотрим функцию $\xi_2(t)\in C^\infty(-T,T)$ такую, что $\xi_2(t)\equiv 0$ при $-T<t<-2\eta$, $\xi_2(t)\equiv 1$ при $-\eta<t<T$. Очевидно, что $0\leqslant\xi_2(t)\leqslant 1$. Возьмем $\varphi_\varepsilon(x,t)=\xi_2(t)u_\varepsilon(x,t)$. Очевидно, что функции $\varphi_\varepsilon(x,t)$ удовлетворяют уравнениям

$$L_{1\varepsilon}\varphi_\varepsilon=\xi_2(t)f_1+2k_1\xi_2'(t)u_{\varepsilon t}+k_1\xi_2''(t)u_\varepsilon=\Phi_\varepsilon(x,t). \tag{6.11}$$

Поэтому можно утверждать, что $\Phi_\varepsilon(x,t)$, $\Phi_{\varepsilon t}(x,t)$ равномерно ограничены по ε в пространстве $L_2(D^+)$.

Рассмотрим для функций $\varphi_\varepsilon(x,t)$ конечные разности по переменной t:

$$\varphi_{\varepsilon h}=\frac{\varphi_\varepsilon(x,t+h)-\varphi_\varepsilon(x,t)}{h}.$$

Можно убедится, что функции $\varphi_{\varepsilon h}$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}L_{1\varepsilon}\varphi_{\varepsilon h}=k_1(t)\varphi_{\varepsilon htt}+|k_2-\varepsilon|\sum_{i=1}^{n}\varphi_{\varepsilon h x_i x_i}+b_{11}(x,t)\varphi_{\varepsilon ht}\\ +\sum_{i=1}^{n}a_{i1}^{(1)}\varphi_{\varepsilon h x_i}+c_{11}\varphi_{\varepsilon h}+c_1(x)|\varphi_{\varepsilon h}|_{\varphi_{\varepsilon h}}^{\rho_1}=\Phi_{\varepsilon h}t(x,t).\end{aligned} \tag{6.12}$$

Используя результаты о гладкости решений задачи (6.5), (6.6) и априорные оценки (6.10), а также переходя к пределу по $h \to 0$ в полученных неравенствах и устанавливая связь между функциями f_1 и Φ_ε, получаем

$$\begin{gathered}\|f_{1t}\|_{L_2(D^+)} + \|f_1\|_{L_2(D^+)} \geqslant m_9 \int\limits_{D^+} \left(u^2_{\varepsilon tt} + |k_2 - \varepsilon| \sum_{i=1}^{n} u^2_{\varepsilon x_i t} + u^2_{\varepsilon t}\right. \\ \left. + |k_2 - \varepsilon| \sum_{i=1}^{n} u^2_{\varepsilon x_i} + u^2_\varepsilon\right) dD^+ + \|u_{\varepsilon t}\|^2_{L_{\rho_1}(D^+)} \quad \forall\, u_\varepsilon \in C_{L'}(D^+).\end{gathered} \tag{6.13}$$

Далее, из уравнения (6.5) методом оценивания (см. [11, 12, 18]) получим, что

$$|k_2 - \varepsilon| \sum_{i=1}^{n} u_{\varepsilon x_i x_i} \in L_2(D^+).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon_k \to 0$ в тождестве

$$(u_{\varepsilon_k}, L^*_{1\varepsilon_k} W)_{L_2(D^+)} = (f_1, W)_{L_2(D^+)}$$

(где L_1^* — оператор, сопряженный к оператору L_1, и, кроме того, $W(x,t) \in C_0^\infty(D^+)$ — класс финитных функций), получим, что $u(x,t)$ есть обобщенное решение задачи (2.6), (6.1), принадлежащее пространству $H_2(D^+)$, и, кроме того, в силу теоремы вложения Соболева, удовлетворяет уравнению (2.6) почти всюду.

Аналогичным образом, повторяя все шаги, проведенные для области D^+, мы можем установить, что $u(x,t) \in H_2(D^-)$. $\rhd$

Определение 6.2. Функцию $u(x,t) \in H_1(D^+)$ $(u(x,t) \in H_1(D^-))$ (следуя по [1]) будем называть сильным решением краевой задачи (2.6), (6.1) (для (2.6), (6.2)), если существует последовательность функций $\{u_m\} \in C_L(D^+)$ $(\{u_m\} \in C_L(D^-))$ таких, что выполнены равенства

$$\lim_{m\to\infty} \|L_1 u_m - f_1(x,t)\|_{L_2(D^+)} = \lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{H_1(D^+ t)} = 0,$$

$$\lim_{m\to\infty} \|L_1 u_m - f_1(x,t)\|_{L_2(D^-)} = \lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{H_1(D^-)} = 0$$

соответственно. Имеет место следующая теорема существования сильных решений.

Теорема 6.3. *Пусть выполнены условия леммы* 6.1. *Кроме того, пусть*

$$|k_{2x_i} k_{2x_j}| \leqslant M|k_2(x)|, \quad 2b_{11} - |k_{1t}| \geqslant \delta > 0, \quad (x,t) \in D.$$

Тогда для любой функции $f_1 \in L_2(D^+)$ $(f_1 \in L_2(D^-))$ существует и притом единственное сильное решение $u^+(x,t)$ краевой задачи (2.6), (6.1) *(для $u^-(x,t)$ задачи* (2.6), (6.2)*) из пространства $H_{1,L}(D^+)$ (а для задачи* (2.6), (6.2) *— из $H_{1,L}(D^-)$).*

$\lhd$ Из построения пространств $H_2(D^+)$ и $H_2(D^-)$ следует, что существуют последовательности $\{u_m\} \in C_L(D^+)$, $\{u_m\} \in C_L(D^-)$ такие, что

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m^+ - u^+\|_{H_2(D^+)} = \lim_{m\to\infty} \|u_m^- - u^-\|_{H_2(D^-)} = 0.$$

Тогда из очевидных неравенств

$$\|u_m^+\|_{H_2(D^+)} \geqslant m\|L_1 u_m^+\|_{L_2(D^+)}, \quad \|u_m^-\|_{H_2(D^-)} \geqslant m\|L_1 u_m^-\|_{L_2(D^-)}$$

следует, что последовательности $\{L_1u_m^+\}$, $\{L_1u_m^-\}$ сходятся в пространствах $L_2(D^+)$, $L_2(D^-)$ к функциям $f_1 \in L_2(D^+)$, $f_1 \in L_2(D^-)$ соответственно. Таким образом, мы показали, что регулярные решения u^+, u^- являются сильными решениями в предположении $f_{1t}^+ \in L_2(D^+)$, $f_{1t}^- \in L_2(D^-)$. Построим последовательности функций $f_{1m}^+ \in W_2^1(D^+)$, $f_{1m}^- \in W_2^1(D^-)$, сходящиеся соответственно к функциям f_1^+, f_1^- в пространствах $L_2(D^+)$, $L_2(D^-)$. Тогда для любых функций f_{1m}^+, f_{1m}^- существуют сильные решения краевых задач (2.6), (6.1) из пространства $H_{2,L}(D^-)$. Таким образом, последовательности u_m^+, u_m^- сходятся к некоторым функциям $u^+ \in H_1(D^+) \cap L_{\rho_1}(D^+)$ и $u^- \in H_1(D^-) \cap L_{\rho_1}(D^-)$. $\rhd$

Замечание 6.1. Пусть функции $u^+(x,t) \in H_i(D^+)$, $u^-(x,t) \in H_i(D^-)$, $i = 1, 2$. Тогда функция

$$u(x,t) = \begin{cases} u^+(x,t), & (x,t) \in D^+, \\ u^-(x,t), & (x,t) \in D^- \end{cases}$$

также из класса $u(x,t) \in H_i(D)$, $i = 1, 2$.

Имеет место

Теорема 6.4. *Пусть выполнены условия лемм* 6.1, 6.2 *и теорем* 6.1, 6.2, 6.3. *Тогда для любых функций* $f_1, f_{1t} \in L_2(D)$ *существует и притом единственное обобщенное решение задачи* (2.6), (2.2) *из пространства* $H_2(D)$.

Для доказательства единственности решения достаточно взять два решения $u_1, u_2 \in H_2(D)$ и применить теоремы 4.1, 4.2. Аналогичным образом доказывается регулярность решения краевой задачи (2.6), (2.4). Затем мы можем заключить, что существует и притом единственное регулярное решение краевой задачи (2.1), (2.4), (2.6).

Литература

1. *Tricomi F. G.* Sulle equazional lineari alle derivate parzialli di secondo ordinee, di tipo snisto // Atti Accad. Naz. Lincei.—1923.—Vol. 14.—P. 133–247.
2. *Frankl F. I.* On the problems of Chapligin for mixed subsonic and supersonic flows // Izv. Akad. Nauk USSR. Ser. Math.—1945.—Vol. 9, № 2.—P. 121–143.
3. *Bers L.* Results and conjectures in the mathematical theory of subsonic and transonic gaz flows // Comm. on Pure and Appl. Math.—1954.—Vol. 7, № 1.—P. 79–104.
4. *Bers L.* Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics.—New York: Wiley, 1958.—180 p.
5. *Франкл Ф. И.* Избранные труды по газовой динамике.—М: Наука, 1973.—711 с.
6. *Pini B.* Un problema di valori al contorno por un'equazional a derivative puzziali del terzo ordinee con parto principale di tipo composito // Rend. Sem. Fus. Sci. Univ.—Cagliari, 1957.—Vol. 27, № 114.—P. 61.
7. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.—М: Мир, 1972.—587 с.
8. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Е.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.—М: Мир, 1971.—372 с.
9. *Berazinski Yu. M.* Expansion of eigenvalues functions for self-adjoint operators.—Kiev: Naukova Dumka, 1965.—800 p.
10. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике.—Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.—255 с.
11. *Врагов В. Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики.—Новосибирск: Изд-во Новосибирского гос. ун-та, 1983.—84 с.
12. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.—М.: Наука, 1973.—576 с.
13. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики.—М.: Наука, 1973.—408 с.
14. *Нурмамедов М. А.* Об одной задаче для вырождающегося квазилинейного уравнения смешанного типа // Неклассические уравнения математической физики.—Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1986.—P. 175–178.
15. *Нурмамедов М. А.* Первая краевая задача для уравнения смешанного типа высокого порядка с меняющимся направлением времени // Тез. докл. Второго Сибирского конгресса по прикл. и индустр. мат-ке—Новосибирск: ИМ СО РАН, 1996.—С. 93.

16. *Nurmamedov M. A.* On the theory of well-posed boundary value problems for degenerating nonlinear equation mixed type with changing time direction // Sakarya Math. Symposium.—Turkey, 1997.—P. 74.
17. *Нурмамедов М. А.* Краевые задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с несколькими плоскостями вырождения // Нелинейные проблемы мат. физики: Докл. VI республ. конф.—Донецк, 1986.—С. 104.
18. *Нурмамедов М. А.* Некоторые корректные постановки краевых задач для уравнений смешанного типа с меняющимся направлением времени // Неклассические уравнения математической физики.—Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1987.—P. 161–169.
19. *Дубинский Ю. А.* Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка // Успехи мат. наук.—1968.—Т. 23, № 1.—С. 45–90.
20. *Morawetz C. S.* A weak solution for a system of equation of elliptic-hyperbolic type // Comm. on Pure and Appl. Math.—1955.—Vol. 9, № 1.—P. 45–68; 1957.—Vol. 10, № 1.—P. 107–131; 1958.—Vol. 11, № 1.—P. 129–144.
21. *Morawetz C. S.* Mixed equations and transonic flow // J. Hyperbolic Differ. Equat.—2004.—Vol. 1.—P. 1–26.
22. *Canic S., Keyfitz B. L., Kim E. H.* Mixed hyperbolic-elliptic systems in self-similar flows // Bulletin Brazilian Math. Soc.—2001.—Vol. 32.—P. 377–399.
23. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения.—М: Наука, 1966.—292 с.
24. *Врагов В. Н.* К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения.—1977.—Т. 13, № 6.—С. 1098–1105.
25. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР.—1951.—Т. 77, № 2.—С. 11–14.
26. *Фикера Г.* К единой теории краевых задач эллиптико-параболических уравнений второго порядка // Сб. переводов. Математика.—1963.—Т. 7, № 6.—С. 99–121.

Статья поступила 9 ноября 2008 г.

Нурмамедов Магаммед Ахмед
Ленкоранский государственный университет, *доцент*
АЗЕРБАЙДЖАН, 4200, Гази Асланов - 50
E-mail: `nurmamedov@mail.ru`

ON THE SOLVABILITY OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR QUASI-LINEAR SYSTEM EQUATIONS OF MIXED AND COMPOSITE TYPE IN A MULTIDIMENSIONAL DOMAIN

Nurmamedov M. A.

Quasi-linear system of mixed-composite type with changing time direction in multidimensional domain is studied. The existence and uniqueness of generalized and regular solutions of boundary value problem are proved in weighted Sobolev space.

Key words: systems of mixed-composite type, forward-backward equation, weighted Sobolev space, regular and generalized solution, methods of continuation by parameter.