Владикавказский математический журнал
2009, Том 11, выпуск 4, С. 22–31

УДК **519.46**

ТРАНСВЕКЦИИ В НАДГРУППАХ НЕРАСЩЕПИМОГО ТОРА

В. А. Койбаев, А. В. Шилов

Исследуются промежуточные подгруппы полной линейной группы $GL(n,k)$ степени n над произвольным полем k, содержащие нерасщепимый максимальный тор, связанный с расширением степени n основного поля k. Доказывается, что если надгруппа нерасщепимого максимального тора содержит одномерное преобразование, то она содержит элементарные трансвекции по крайней мере в двух позициях любой строки и любого столбца.

Ключевые слова: надгруппы, промежуточные подгруппы, нерасщепимый максимальный тор, трансвекция.

§ 1. Введение

Настоящая статья продолжает работу первого автора [8] и посвящена исследованию промежуточных подгрупп полной линейной группы $GL(n,k)$ степени n над произвольным полем k, содержащих нерасщепимый максимальный тор, связанный с расширением степени n основного поля k. Доказывается, что если надгруппа нерасщепимого максимального тора содержит одномерное преобразование, то она содержит элементарные трансвекции по крайней мере в двух позициях любой строки и любого столбца. Мы доказываем также, что если расширение основного поля k является простым, то надгруппа нерасщепимого максимального тора, содержащая одномерное преобразование, содержит элементарные трансвекции на всех позициях.

К настоящему времени полное описание надгрупп нерасщепимого тора получено лишь для некоторых специальных полей таких, как конечные или локальные. Для конечных полей это работы У. Кантора [13], Г. Зейтца [15, 16] и Р. Дая [10–12], в которых получены окончательные результаты для полей (характеристики, не равной 2 и 3), содержащих не менее 13 элементов. Важные результаты о надгруппах нерасщепимого тора для локальных и глобальных полей получены В. П. Платоновым [14]. В случае поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ надгруппы максимального тора замкнуты в вещественной топологии и, в частности, имеется только конечное число промежуточных подгрупп [9, 14].

В отличие от конечных полей, в случае бесконечных полей расположение надгрупп нерасщепимого тора определяется некоторым классом подколец основного поля (см. [1, 2, 5–7]). А именно, определяется некоторое наименьшее кольцо R_0 основного поля k так, что расположение всякой подгруппы, содержащей нерасщепимый тор, фиксируется элементарной сетевой группой, построенной (сетью идеалов) над промежуточным кольцом R, $R_0 \leqslant R \leqslant k$.

Для более подробного ознакомления с результатами данного направления мы рекомендуем обзоры [3, 4].

Ввиду сложности решения задачи описания надгрупп нерасщепимого тора, естественным первым шагом было бы рассмотрение класса надгрупп нерасщепимого тора, содержащих одномерное преобразование. Исследованию этого класса подгрупп посвящена настоящая работа.

Сформулируем основные результаты статьи (заметим, что теорема 1 доказана в [8], однако, здесь мы предлагаем несколько другое доказательство). Пусть K — конечное расширение степени n поля k нечетной характеристики. Пусть, далее, $T = T(K/k)$ — нерасщепимый максимальный тор, соответствующий расширению K/k.

Теорема 1 [8, теорема 1]**.** *Пусть H — промежуточная подгруппа, $T \leqslant H \leqslant GL(n,k)$, содержащая одномерное преобразование. Тогда для любых i, j найдутся r, s так, что элементарные трансвекции $t_{ir}(\xi)$, $t_{sj}(\zeta)$ содержатся в группе H для некоторых ненулевых элементов ξ, ζ поля k.*

Теорема 2. *Пусть K — простое расширение степени n бесконечного поля k нечетной характеристики; H — промежуточная подгруппа, $T \leqslant H \leqslant GL(n,k)$, содержащая одномерное преобразование. Тогда для любых i, j, $i \neq j$, элементарная трансвекция $t_{ij}(\xi)$ содержится в подгруппе H для некоторого ненулевого элемента ξ поля k.*

В работе приняты следующие обозначения:

K — расширение степени n поля k нечетной характеристики;

$e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис поля K над k;

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ — k-линейные функционалы (дуальный базис сопряженного пространства V^*, $V = K$), действующие из поля K в поле k, связанные с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$ следующим образом: $f_i(e_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$;

$f = f_1$;

$E = E_n$ — единичная матрица порядка n;

E_{ij} — матрица, у которой на позиции (i,j) стоит $1 \in k$, а на остальных местах нули;

$t_{ij}(\xi) = E + \xi E_{ij}$ — элементарная трансвекция, $\xi \in k$, $\xi \neq 0$, $i \neq j$;

δ_{ij} — символ Кронекера.

§ 2. Некоторые свойства промежуточных подгрупп

Рассмотрим регулярное вложение мультипликативной группы K^* поля K в группу всех k-линейных автоморфизмов

$$K \underset{t \dashrightarrow \hat{t}}{\longrightarrow} \mathrm{Aut}_k(K), \quad \hat{t}(x) = tx, \ x \in K.$$

Образ группы K^* при этом вложении обозначается через $T = T(K/k)$ и называется нерасщепимым максимальным тором, соответствующим расширению K/k. С точки зрения теории алгебраических групп эта группа является примером минизотропного тора.

Далее, под одномерным преобразованием мы понимаем отображение вида $1 + t \cdot \varphi$, где $t \in K$, φ — ненулевой k-линейный функционал, причем $\varphi(t) \neq -1$. В этом случае преобразование является обратимым. Отображение $1 + t \cdot \varphi$ действует следующим образом: $(1 + t \cdot \varphi)(x) = x + t \cdot \varphi(x)$, $x \in K$. Одномерное преобразование $1 + t \cdot \varphi$ называется общей трансвекцией (или просто трансвекцией), если $\varphi(t) = 0$.

При фиксированном базисе $e_1, \ldots, e_n$ поля K над k группа $\mathrm{Aut}_k(K)$ изоморфна полной линейной группе $GL(n,k)$. При этом изоморфизме тору $T = T(K/k)$ будет соответствовать некоторая матричная подгруппа в $GL(n,k)$, которую мы также будем называть нерасщепимым максимальным тором и обозначать через T. Матрицу из $GL(n,k)$, соответствующую элементу $\hat{t}$, будем обозначать через $C(t)$. Таким образом, под тором T мы будем понимать подгруппу

$$T = \{C(x) : x \in k^n \setminus 0\}$$

полной линейной группы $G = GL(n,k)$.

Найдем матрицу из $GL(n,k)$, которая соответствует одномерному преобразованию $1 + t \cdot \varphi$. Пусть $t = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$; $\varphi(e_1) = \beta_1$, $\varphi(e_2) = \beta_2, \dots, \varphi(e_n) = \beta_n$, $\alpha_i, \beta_i \in k$. Положим $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$, $\overline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)^T$. Тогда одномерному преобразованию $1 + t \cdot \varphi$ соответствует матрица

$$E + \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}^T = E + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 & \dots & \alpha_1\beta_n \\ \alpha_2\beta_1 & 1+\alpha_2\beta_2 & \dots & \alpha_2\beta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n\beta_1 & \alpha_n\beta_2 & \dots & 1+\alpha_n\beta_n \end{pmatrix}.$$

При этом $\varphi(t) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n \neq -1$. В том случае, когда $t = \xi e_m$, $\varphi = f_s$, $\xi \in k^*$, $s \neq m$, трансвекции $1 + t \cdot \varphi = 1 + \xi e_m \cdot f_s$ будет соответствовать элементарная трансвекция $t_{ms}(\xi)$.

Предложение 1. *Пусть φ, ψ — ненулевые k-линейные функционалы; тогда найдется $t \in K$, $t \neq 0$, такой, что $\varphi \cdot \widehat{t} = \psi$.*

$\lhd$ Заметим, что для произвольного k-линейного функционала φ и для $t \in K$ композиция $\varphi \cdot \widehat{t}$ также является k-линейным функционалом. Для базиса $e_1, \dots, e_n$ поля K над k функционалы $\varphi \cdot \widehat{e}_1, \dots, \varphi \cdot \widehat{e}_n$ являются базисом линейного пространства всех k-линейных функционалов. Поэтому произвольный функционал ψ можно получить с помощью линейной комбинации $\psi = \lambda_1 \varphi \cdot \widehat{e}_1 + \dots + \lambda_n \varphi \cdot \widehat{e}_n = \varphi \cdot \widehat{t}$, где $t = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$. $\rhd$

Предложение 2. *Пусть i — фиксированный индекс, $1 \leqslant i \leqslant n$, $t \in K^*$. Положим $L = \langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle$ — k-линейное подпространство, порожденное базисными элементами $e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n$. Если для любого j, $1 \leqslant j \leqslant n$, $j \neq i$, выполняется включение $te_j \in L$, то $t \in k$.*

$\lhd$ Рассмотрим линейный функционал $f_i \cdot \widehat{t}$. Из условия $te_j \in L$ следует, что этот функционал имеет ядро L, также как и функционал f_i, поэтому они отличаются лишь множителем из поля k: $f_i \cdot \widehat{t} = \lambda f_i$. Откуда $f_i \cdot \left(\widehat{t - \lambda}\right) = 0$, следовательно, $t - \lambda = 0$, поэтому $t = \lambda \in k$. $\rhd$

При переходе к $GL(n,k)$ предложение 2 принимает следующий вид.

Предложение 2$'$. *Если все элементы (кроме диагонального) какой-либо строки матрицы $C(t)$ равны нулю, то $C(t)$ — скалярная матрица.*

Аналогичное утверждение справедливо для столбцов матрицы $C(t)$: если все элементы (кроме диагонального) какого-либо столбца матрицы $C(t)$ равны нулю, то $C(t)$ — скалярная матрица. Действительно, пусть все элементы (кроме диагонального) i-го столбца равны нулю. Тогда, так как элементы i-го столбца являются коэффициентами разложения элемента te_i по базису $e_1, \dots, e_n$, то $te_i = \lambda e_i$, откуда $t = \lambda \in k$. А если $t \in k$, то $C(t) = tE$ — скалярная матрица.

Предложение 3. *Пусть трансвекция $1 + t\varphi$ содержится в промежуточной подгруппе $H : T \leqslant H \leqslant \mathrm{Aut}_k(K)$. Тогда для всякого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, найдется такой элемент $a \in K$, что трансвекция $1 + af_i$ содержится в H.*

$\lhd$ Из предложения 1 следует, что найдется $z \in K$, для которого $\varphi \cdot \widehat{z} = f_i$. Тогда $\widehat{z}^{-1} \cdot (1 + t\varphi) \cdot \widehat{z} = 1 + a \cdot f_i$, где $a = z^{-1}t$. $\rhd$

В дальнейшем, через f мы будем обозначать функционал f_1, $f = f_1$. Таким образом, можно считать, что если промежуточная подгруппа H содержит произвольную трансвекцию, то H содержит и трансвекцию $1 + t \cdot f$.

Обозначим
$$A(H) = \{a \in K : 1 + a \cdot f \in H,\ f(a) = 0\}$$
— модуль трансвекций. Заметим, что если a, b содержатся в $A(H)$, то сумма $a + b$ и противоположный элемент $(-a)$ также содержатся в $A(H)$.

Предложение 4. *Пусть трансвекция $1+t\cdot f$ содержится в промежуточной подгруппе H, $T \leqslant H \leqslant \mathrm{Aut}_k(K)$. Если для отображения $s \in H$ выполняется равенство $f \cdot s = f$, то элемент $t - s(t) \in A(H)$.*

$\lhd$ Рассмотрим коммутатор $[1+t\cdot f, s] = (1+t\cdot f)s(1-t\cdot f)s^{-1} = (s+t\cdot f)(s^{-1}-t\cdot f) = 1 + (t - s(t)) \cdot f \in H$. При этом $f(t - s(t)) = f(t) - fs(t) = f(t) - f(t) = 0$. Следовательно, $t - s(t) \in A(H)$. $\rhd$

Предложение 5. *Пусть $t \in A(H)$, $z \in K^*$; тогда отображение $s = (z^{-1} - f(z^{-1}t)) \cdot (1 + t \cdot f) \cdot z$ удовлетворяет условиям предложения 4, т. е. $s \in H$ и $f \cdot s = f$.*

$\lhd$ Так как $H \geqslant T$, то для доказательства того, что $s \in H$, достаточно проверить, что $z^{-1} - f(z^{-1}t) \neq 0$. Действительно, в противном случае получаем, что $z^{-1} = f(z^{-1}t) \in k$. Тогда $z^{-1} = z^{-1}f(t) = z^{-1} \cdot 0 = 0$. Докажем, что $f \cdot s = f$. Имеем
$$s = 1 + z^{-1}t \cdot f \cdot z - f(z^{-1}t)z - f(z^{-1}t)t \cdot f \cdot z. \tag{1}$$
Откуда $(f(t) = 0)$
$$f \cdot s = f + f(z^{-1}t) \cdot f \cdot z - f(z^{-1}t) \cdot f \cdot z - f(z^{-1}t)f(t) \cdot f \cdot z = f. \rhd$$

Предложение 6. *Пусть трансвекция $1 + t \cdot f$ содержится в подгруппе H, $T \leqslant H \leqslant \mathrm{Aut}_k(K)$. Тогда $A(H)$ содержит следующие элементы:*
$$2\left[z^{-1}f(zt) - zf(z^{-1}t)\right]t, \quad 2f(zt)f\left(z^{-1}t\right)t, \quad z \in K^*. \tag{2}$$

$\lhd$ Из предложений 4 и 5 следует, что $A(H)$ содержит элементы (см. (1))
$$s(t) - t = z^{-1}tf(zt) - f\left(z^{-1}t\right)zt - f\left(z^{-1}t\right)tf(zt),$$
$$s(-t) - (-t) = z^{-1}tf(zt) - f\left(z^{-1}t\right)zt + f\left(z^{-1}t\right)tf(zt).$$
Складывая и вычитая два последних равенства, получим, что $A(H)$ содержит искомые элементы. $\rhd$

Положим
$$b(z,t) = f(zt)z^{-1} - f\left(z^{-1}t\right)z. \tag{3}$$
Таким образом, мы получили, что если $t \in A(H)$, то
$$2b(z,t) \cdot t \in A(H) \quad \forall\, z \in K^*. \tag{4}$$

Замечание 1. Если степень расширения $(K : k) \geqslant 3$, то найдется элемент $a \in K$, который не содержится в квадратичном расширении поля k. Действительно, если $x, y \in K$ и $\langle x, k\rangle$, $\langle y, k\rangle$ — квадратичные расширения поля k, причем $y \in K \backslash \langle x, k\rangle$, то элемент $a = x \pm y$ не содержится в квадратичном расширении поля k.

Лемма 1. *Пусть степень расширения $n = (K : k) \geqslant 3$. Рассмотрим преобразование $b : K \to K$,*

$$b(z) = \psi(z)z^{-1} - \xi\psi\left(z^{-1}\right)z,$$

где ψ — ненулевой линейный функционал, $\xi \in k$.

Тогда существует $z \in K$ такое, что $b(z) \notin k$.

$\lhd$ Для произвольного элемента $z \in K$ существует неприводимый многочлен $\varphi(x) \in k[x]$ такой, что $\varphi(z) = 0$. Обозначим $\deg z = \deg\varphi(x)$.

Пусть элемент $z \in K$ такой, что $\deg z \geqslant 3$ и $\psi(z) \neq 0$. Очевидно, что тогда $b(z) \notin k$. Покажем, что такой элемент z существует. Действительно, если таких z не существует, то должно выполняться следующее включение:

$$\{z : \deg z \geqslant 3\} \subseteq \{z : \psi(z) = 0\}.$$

Множество $\{z : \deg z \geqslant 3\} = K\backslash\big(\{z : \deg z = 1\} \cup \{z : \deg z = 2\}\big) = K\backslash(k \cup M)$, где $M = \{z : \deg z = 2\}$. Множество $\{z : \psi(z) = 0\}$ есть ядро функционала ψ. Обозначим его через V. Таким образом, получаем включение $K \setminus (k \cup M) \subseteq V$.

Воспользуемся следующим свойством для произвольных множеств A, B и C: $A\backslash B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq (B \cup C)$. Тогда получим, что $K \subseteq (k \cup M) \cup V$ или $K = V \cup (k \cup M)$.

Далее, обозначим $M' = (k \cup M) \setminus V$; тогда из последнего равенства следует, что $K = V \cup M'$. Покажем, что это невозможно. Рассмотрим два случая.

1. Пусть M' не содержит 3 линейно независимых вектора, тогда размерность линейной оболочки $L(M')$ не превосходит 2. Из равенства $K = V \cup M'$ следует, что $K = V \cup L(M')$. Но тогда мы получаем, что линейное пространство можно представить в виде объединения двух собственных подпространств, а это не верно.

2. Пусть M' содержит 3 линейно независимых вектора. Обозначим их через u_1, u_2, u_3. Если один из u_1, u_2, u_3 принадлежит полю k (например, u_1), то тогда u_2, u_3 не принадлежат полю k, следовательно, $u_2, u_3 \in M$, причем $u_2 \notin \langle k, u_3\rangle$. Тогда, согласно замечанию 1, $u_2 \pm u_3 \notin (M \cup k)$. Поэтому $u_2 \pm u_3 \in V$, откуда следует, что $u_2, u_3 \in V$, а это противоречит условию $u_1, u_2, u_3 \in M' = (k \cup M) \setminus V$.

Пусть все три элемента u_1, u_2, u_3 не принадлежат полю k, следовательно, $u_1, u_2, u_3 \in M$. Найдется такой $u_s \in \{u_2, u_3\}$, что $u_s \notin \langle k, u_1\rangle$. Тогда, согласно замечанию 1, $u_1 \pm u_s \notin (M \cup k)$. Как было показано выше, это противоречит условию $u_1, u_2, u_3 \in M' = (k \cup M) \setminus V$. $\rhd$

Для доказательства следующего следствия надо воспользоваться леммой 1, положив (см. (3)) $\xi = 1$, $\psi = f \cdot t$.

Следствие 1. *Для определенного выше элемента $b(z, t) = f(zt)z^{-1} - f(z^{-1}t)z$ существует такой элемент $z \in K$, что $b(z, t) \notin k$.*

§ 3. Подгруппа с одномерным преобразованием содержит трансвекцию

В этом параграфе мы покажем, что если промежуточная подгруппа H, $T \leqslant H \leqslant \mathrm{Aut}_k(K)$, содержит одномерное преобразование, то она содержит трансвекцию.

Пусть H содержит одномерное преобразование $1 + t \cdot f$, $f(t) \neq -1$, $f(t) \neq 0$.

Предложение 7. *Пусть для отображения $s \in H$ выполняются следующие свойства:*

1. $f \cdot s = f$;
2. $t \neq s(t)$.

Тогда H содержит трансвекцию.

◁ Рассмотрим коммутатор $[1+t\cdot f, s] = (1+t\cdot f)s\left(1-\frac{1}{1+f(t)}t\cdot f\right)s^{-1} = 1+\left(t-\frac{s(t)}{1+f(t)}-\frac{tf(t)}{1+f(t)}\right)\cdot f$. Данное отображение является трансвекцией. Действительно, $f\left(t-\frac{s(t)}{1+f(t)}-\frac{tf(t)}{1+f(t)}\right) = f(t)-\frac{f(t)}{1+f(t)}-\frac{f(t)f(t)}{1+f(t)} = 0$. Заметим, что элемент $t-\frac{s(t)}{1+f(t)}-\frac{tf(t)}{1+f(t)} \neq 0$, так как $t \neq s(t)$. ▷

Предложение 8. *Пусть промежуточная подгруппа H содержит одномерное преобразование $1+t\cdot f$, тогда H содержит трансвекцию.*

◁ В силу предложения 7 достаточно указать пример отображения s, удовлетворяющего условиям этого предложения. В качестве такого отображения возьмем $s = \left(z^{-1}-\frac{f(z^{-1}t)}{1+f(t)}\right)(1+t\cdot f)z$, $z \in K^*$. Проверим для s выполнение условий предложения 7. Равенство $f\cdot s = f$ проверяется непосредственно. Далее, $s(t)-t = t\left[z^{-1}f(zt)-\frac{f(z^{-1}t)}{1+f(t)}z-\frac{f(z^{-1}t)f(zt)}{1+f(t)}\right]$. Положим $\psi = f\cdot\widehat{t}$, $\xi = \frac{1}{1+f(t)}$. Согласно лемме 1 найдется $z \in K$, для которого $z^{-1}\psi(z)-\xi\psi(z^{-1}t)z \notin k$. Для данного z выражение $z^{-1}f(zt)-\frac{1}{1+f(t)}f(z^{-1}t)z$ не принадлежит полю k, следовательно, выражение в квадратных скобках $\left[z^{-1}f(zt)-\frac{f(z^{-1}t)}{1+f(t)}z-\frac{f(z^{-1}t)f(zt)}{1+f(t)}\right] \notin k$, в частности, оно не равно нулю. Поэтому $s(t) \neq t$. ▷

§ 4. Техника извлечения элементарных трансвекций

В этом параграфе мы строим технику извлечения элементарных трансвекций в промежуточных подгруппах H, $T \leqslant H \leqslant G$, содержащих одномерное преобразование. Согласно § 3 можно считать, что промежуточная подгруппа H содержит общую трансвекцию. Далее, согласно предложению 3 в качестве трансвекции мы можем взять $1+tf$.

Предложение 9. *Пусть $t \in A(H)$, если для некоторого m, $m \geqslant 2$, $f\left(t^2e_m^{-1}\right) \neq 0$ (или, что то же самое, $t^2e_m^{-1}$ не содержится в k-подпространстве $L = \langle e_2,\dots,e_n\rangle$). Тогда H содержит трансвекцию $1+\xi e_m f$ для некоторого $\xi \in k^*$, матрица которой в выбранном базисе совпадает с $t_{m1}(\xi)$.*

◁ Положим $z = te_m^{-1}$. Тогда, так как $f(e_m)=0$, то из (3) следует, что $A(H)$ содержит элемент $b(z,t)t = f(zt)z^{-1}t - f(z^{-1}t)zt = f(t^2e_m^{-1})e_m = \xi e_m$, $\xi = f(t^2e_m^{-1}) \neq 0$. Таким образом, H содержит (коэффициент 2 мы опускаем) трансвекцию $1+\xi e_m f$. ▷

Предложение 10. *Пусть промежуточная подгруппа H содержит трансвекцию $1+tf$, $f(t)=0$, $m \geqslant 2$. Если один из элементов*

$$t^2e_m^{-1},\quad b(z,t)t^2e_m^{-1},\quad b^2(z,t)t^2e_m^{-1}$$

не содержится в k-подпространстве $L = \langle e_2,\dots,e_n\rangle$, то H содержит трансвекцию $1+\xi e_m f$, $\xi \in k^*$.

◁ Из предложения 6 следует, что $b(z,t)t$ содержится в $A(H)$. Поэтому согласно предложению 9, если один из элементов $t^2e_m^{-1}$, $b^2(z,t)t^2e_m^{-1}$ не содержится в L, то H содержит трансвекцию $1+\xi e_m\cdot f$.

Пусть теперь $b(z,t)t^2e_m^{-1}$ не содержится в L, а $t^2e_m^{-1}$, $b^2(z,t)t^2e_m^{-1}$ содержатся в L. Рассмотрим элемент $(t+b(z,t)t)^2e_m^{-1}$. Так как t и $b(z,t)t \in A(H)$, то их сумма $t+b(z,t)t \in A(H)$. Далее, этот элемент не содержится в подпространстве L. Действительно, в противном случае получим, что $\left(t^2+2b(z,t)t^2+b^2(z,t)t^2\right)e_m^{-1} \in L$, а так как $t^2e_m^{-1}$,

$b^2(z,t)t^2e_m^{-1} \in L$, то $2b(z,t)t^2e_m^{-1} \in L$, что противоречит предположению $b(z,t)t^2e_m^{-1} \notin L$. Следовательно, элемент $(t + b(z,t)t)^2e_m^{-1}$ не содержится в подпространстве L. Поэтому, согласно предложению 9, H содержит трансвекцию $1 + \xi e_m \cdot f$. $\triangleright$

§ 5. Доказательство теорем 1 и 2

Данный параграф посвящен доказательству теорем 1 и 2.

Доказательство теорем 1 и 2 мы будем вести в терминах группы $\mathrm{Aut}_k(K)$. Таким образом, нам надо доказать наличие в промежуточной подгруппе H трансвекций $1 + \xi e_m \cdot f_i$, $1 + \zeta e_s \cdot f_i$ для соответствующих m, s, i.

Далее, достаточно рассмотреть случай $i = 1$, т. е. рассмотреть трансвекции $1+\xi e_m \cdot f$, $1 + \zeta e_s \cdot f$, так как остальные случаи рассматриваются аналогично.

$\triangleleft$ Доказательство теоремы 1. Пусть H содержит одномерное преобразование. Согласно § 3 и предложению 3 можно считать, что H содержит трансвекцию $1 + tf$. Покажем, что для некоторого $m \geqslant 2$ трансвекция $1 + \xi e_m \cdot f \in H$.

Мы предполагаем, что для нашего базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ элементы $e_2^{-1}, \ldots, e_n^{-1}$ линейно независимы над полем k. Согласно предложению 10 достаточно показать, что для некоторого $m \geqslant 2$ либо $t^2e_m^{-1}$, либо $b(z,t)t^2e_m^{-1}$ не содержится в k-подпространстве $L = \langle e_2, \ldots, e_n\rangle$. Предположим, что это не так. Пусть $t^2e_m^{-1}, b(z,t)t^2e_m^{-1} \in L$ для всех $m \geqslant 2$, причем согласно лемме 1 можно считать, что элемент $b(z,t) \notin k$. Положим $L_1 = \langle e_2^{-1}, \ldots, e_n^{-1}\rangle$. Тогда $t^2L_1 = L$, $b(z,t)t^2L_1 = L$, откуда $b(z,t)L = L$. Из предложения 2 следует, что $b(z,t) \in k$. Это противоречит тому, что элемент $b(z,t)$ не содержится в поле k. $\triangleright$

Замечание. В доказательстве теоремы 1 мы пользуемся условием линейной независимости обратных элементов базиса поля K. Следующий пример Михаила Бондарко, который сообщил нам профессор Востоков С. В., показывает существенность использования этого условия. Возьмем $K = k(x)$, x — корень уравнения степени 3 над k. Тогда $(1, 1/x, 1/1{+}x)$ — базис (так как иначе x — корень квадратного уравнения), а $(1, x, 1{+}x)$ — не базис.

Пусть $K = k(\theta)$ — простое расширение степени n бесконечного поля k; пусть, далее, $\varphi(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ — неприводимый многочлен над k степени n, для которого $\varphi(\theta) = 0$; $e_1 = 1$, $e_2 = \theta$, $e_3 = \theta^2$, …, $e_n = \theta^{n-1}$ — базис K над k.

Предложение 11. *Пусть m — целое число. Тогда существует элемент $\xi \in k$, $\xi \neq 0$, для которого $\theta^m(\xi + \theta)^{-1} = c_0 + c_1\theta + \cdots + c_{n-1}\theta^{n-1}$, причем все коэффициенты $c_i \in k$ не равны нулю.*

$\triangleleft$ Разделим $\varphi(x)$ на $(x{+}\xi) : \varphi(x) = g(x)(x{+}\xi){+}\varphi(-\xi)$, где $g(x) = b_{n-1}x^{n-1}{+}b_{n-2}x^{n-2}+ \cdots + b_1x + b_0$. Тогда $\varphi(\theta) = g(\theta)(\theta + \xi) + \varphi(-\xi)$. Так как $\varphi(x)$ — неприводимый над k многочлен, то $\varphi(-\xi) \neq 0$. Поэтому $(\theta{+}\xi)^{-1} = -g(\theta)\varphi^{-1}(\xi)$. При этом для коэффициентов $b_{n-1}, \ldots, b_0$ многочлена $g(x)$ выполняются следующие равенства:

$$\begin{cases} b_{n-1} = 1, \\ b_{n-2} = a_{n-1} - \xi b_{n-1} = a_{n-1} - \xi, \\ b_{n-3} = a_{n-2} - \xi b_{n-2} = a_{n-2} - \xi a_{n-1} + \xi^2, \\ \ldots \\ b_0 = a_1 - \xi b_1 = a_1 - \xi a_2 + \xi^2 a_3 - \cdots + (-1)^{n-1}\xi^{n-1}. \end{cases}$$

Под $b_i(x)$ обозначим соответствующий многочлен, т. е. $b_i(x) = a_{i+1} - a_{i+2}x + a_{i+3}x^2 - \dots + (-x)^{n-1-i}$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Заметим, что многочлены $b_0(x), b_1(x), \dots, b_{n-1}(x)$ линейно независимы над полем k. Рассмотрим $\theta^m(\xi+\theta)^{-1}$:

$$\theta^m(\xi+\theta)^{-1} = -\varphi^{-1}(-\xi)\cdot\theta^m\left(b_{n-1}\theta^{n-1} + b_{n-2}\theta^{n-2} + \dots + b_1\theta + b_0\right) = \\ = -\varphi^{-1}(-\xi)\cdot\left(c_0 + c_1\theta + \dots + c_{n-1}\theta^{n-1}\right).$$

Найдем коэффициенты c_s. Для этого надо разложить элементы θ^{m+n-1}, θ^{m+n-2}, ..., θ^m по базису $1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}$:

$$\begin{cases} \theta^{m+n-1} = a_{11} + a_{12}\theta + a_{13}\theta^2 + \dots + a_{1n}\theta^{n-1}, \\ \theta^{m+n-2} = a_{21} + a_{22}\theta + a_{23}\theta^2 + \dots + a_{2n}\theta^{n-1}, \\ \dots \\ \theta^m = a_{n1} + a_{n2}\theta + a_{n3}\theta^2 + \dots + a_{nn}\theta^{n-1}. \end{cases}$$

Коэффициенты a_{ij} образуют матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что матрица A является невырожденной. Тогда

$$\begin{cases} c_0 = a_{11}b_{n-1} + a_{21}b_{n-2} + \dots + a_{n1}b_0, \\ c_1 = a_{12}b_{n-1} + a_{22}b_{n-2} + \dots + a_{n2}b_0, \\ \dots \\ c_{n-1} = a_{1n}b_{n-1} + a_{2n}b_{n-2} + \dots + a_{nn}b_0. \end{cases}$$

Таким образом, c_s является линейной комбинацией элементов $b_0, \dots, b_{n-1}$, причем коэффициентами линейной комбинации являются элементы $s+1$ столбца матрицы A.

Под $c_s(x)$ обозначим многочлен $c_s(x) = a_{1,s+1}b_{n-1}(x) + a_{2,s+1}b_{n-2}(x) + \dots + a_{n,s+1}b_0(x)$. Таким образом, надо показать, что существует такой ненулевой элемент $\xi \in k$, что $c_s(\xi) \neq 0$ для всех s. Заметим, что каждый многочлен $c_s(x)$ не равен тождественно нулю. Действительно, допустим противное. Тогда из линейной независимости многочленов $b_0(x), \dots, b_{n-1}(x)$ следует, что все элементы $s+1$ столбца матрицы A равны нулю, а это противоречит невырожденности матрицы A.

Каждый ненулевой многочлен имеет конечное число корней в поле k. Поэтому в силу бесконечности поля k существует $\xi \in k$, $\xi \neq 0$, для которого $c_0(\xi) \neq 0, \dots, c_{n-1}(\xi) \neq 0$. $\rhd$

Замечание 1. Пусть f_i — фиксированный функционал (напомним, что f_i определялся через базис $1, \theta, \dots, \theta^{n-1}$ следующим образом: $f_i(\theta^{i-1}) = 1$, $f_i(\theta^k) = 0$, $k \neq i-1$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$). Тогда из предложения следует, что существует такой элемент $\xi \in k$, $\xi \neq 0$, что $f_i(\theta^m(\xi+\theta)^{-1}) \neq 0$, в частности, $f(\theta^m(\xi+\theta)^{-1}) \neq 0$, где $f = f_1$.

Замечание 2. Пусть $t \in A(H)$. Положим $t' = \lambda t$, где λ — ненулевой элемент поля k. Если $b(z,t')t'^2e_m^{-1} \notin L = \langle e_2, \dots, e_n\rangle$, то H содержит трансвекцию вида $1+\xi e_m f$. Действительно, $b(z,t') = f(zt')z^{-1} - f(z-1t')z = \lambda b(z,t)$. Далее, $b(z,t')t'^2e_m^{-1} = \lambda^3 b(z,t)t^2e_m^{-1} \notin L$. Отсюда $b(z,t)t^2e_m^{-1} \notin L$. Следовательно, по предложению 10 H содержит трансвекцию $1+\xi e_m f$. Поэтому при использовании предложения 10 мы можем брать не только $t \in A(H)$, но и произвольный элемент $t' = \lambda t$, где $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0$, $t \in A(H)$.

$\lhd$ Доказательство теоремы 2. Для $n = 2$ теорема вытекает из [7], поэтому будем предполагать, что $n \geqslant 3$. Теорему будем доказывать в терминах группы $\mathrm{Aut}_k(K)$. Достаточно показать (см. теорему 1), что элементарные трансвекции всех позиций первого столбца содержатся в подгруппе H. Напомним, что

$$A(H) = \{a \in K : 1 + a \cdot f \in H,\ f(a) = 0\},$$

где $f = f_1$. Таким образом, нам нужно показать, что для произвольного i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, справедливо включение

$$1 + \xi\theta^i f \in H, \tag{5}$$

где $\xi \in k^*$ или, что тоже самое, $\xi\theta^i \in A(H)$. Согласно теореме 1 будем считать, что

$$1 + \xi\theta^s f \in H \tag{6}$$

для некоторого s, $1 \leqslant s \leqslant n-1$.

Мы предлагаем следующую схему доказательства: докажем справедливость включения (5) для $i = 1$, а затем покажем, что из справедливости включения (6) следует справедливость включения $1 + \xi\theta^{s+1} f \in H$. Заметим, что в силу замечания 2 коэффициентами из k^* при θ мы можем пренебрегать. Итак, проведем указанную схему.

а) Докажем справедливость включения (5) для $i = 1$, т. е. покажем, что $\theta \in H$. Если в (6) $s = 1$, то доказывать нечего. Предположим, что $2 \leqslant s \leqslant n-1$. Имеем $t = \theta^s \in A(H)$. Положим $z = (\xi + \theta)\theta^{-s}$, тогда $zt = \xi + \theta$, $f(zt) = \xi$. Пусть $\gamma = f(z^{-1}t)$. Тогда

$$b(z,t) = f(zt)z^{-1} - f\left(z^{-1}t\right)z = \xi z^{-1} - \gamma z = \xi(\xi+\theta)^{-1}\theta^s - \gamma(\xi+\theta)\theta^{-s}.$$

Далее,

$$b(z,t)t^2\theta^{-1} = \xi(\xi+\theta)^{-1}\theta^{3s-1} - \gamma(\xi+\theta)^{s-1}.$$

Последнее слагаемое содержится в $\ker f$, так как $s \geqslant 2$. Согласно предложению 11 выберем ξ таким образом, что $f((\xi+\theta)^{-1}\theta^{3s-1}) \neq 0$. Тогда $f(b(z,t)t^2\theta^{-1}) \neq 0$, а потому согласно предложению 10 мы имеем $\theta \in A(H)$.

б) Покажем, что из справедливости включения (6) для $1 \leqslant s \leqslant n-2$ следует справедливость включения $1 + \xi\theta^{s+1} f \in H$. Положим $t = \theta^s$ и $z = (\xi+\theta)\theta^{-s+1}$. Тогда $zt = \theta(\xi+\theta)$, а потому $f(zt) = 0$. Далее, $z^{-1}t = (\xi+\theta)^{-1}\theta^{2s-1}$, поэтому, воспользовавшись предложением 11, подберем ξ так, чтобы $\gamma = f(z^{-1}t) \neq 0$. Тогда мы имеем $b(z,t) = f(zt)z^{-1} - f(z^{-1}t)z = -\gamma z = -\gamma(\xi+\theta)\theta^{-s+1}$. Следовательно,

$$b(z,t)t^2\theta^{-(1+s)} = -\gamma(\xi+\theta)\theta^{-s+1}\theta^{2s}\theta^{-(s+1)} = -\gamma(\xi+\theta),$$

но $-\gamma(\xi+\theta)$ (как и $(\xi+\theta)$) не содержатся в $\ker f$, поэтому $f(b(z,t)t^2\theta^{-(1+s)}) \neq 0$, а потому согласно предложению 10 мы имеем $\theta^{s+1} \in A(H)$. $\rhd$

Литература

1. *Бондаренко А. А.* Расположение подгрупп, содержащих неразветвленный квадратичный тор, в полной линейной группе степени 2 над локальным числовым полем ($p \neq 2$) // Зап. науч. семин. ПОМИ.—1994.—Т. 221.—С. 67–79.
2. *Боревич З. И., Койбаев В. А.* О кольцах множителей, связанных с промежуточными подгруппами, для квадратичных торов // Вестник СПбГУ.—1993.—Т. 1, № 2.—С. 5–10.
3. *Вавилов Н. А., Нестеров В. В.* Геометрия микровесовых торов // Владикавк. мат. журн.—2008.—Т. 10, вып. 1.—С. 10–23.

4. *Вавилов Н. А., Степанов А. В.* Надгруппы полупростых групп // Вестник СамГУ. Естеств.-науч. сер.—2008.—Т. 62, № 3.—С. 51–95.
5. *Дзигоева В. С., Койбаев В. А.* Промежуточные подгруппы в полной линейной группе второго порядка над полем рациональных функций, содержащие квадратичный тор // Владикавк. мат. журн.—2008.—Т. 10, вып. 1.—С. 27–34.
6. *Койбаев В. А.* Подгруппы группы $GL(2,\mathbb{Q})$, содержащие нерасщепимый максимальный тор // Докл. АН СССР.—1990.—Т. 312, № 1.—С. 36–38.
7. *Койбаев В. А.* Подгруппы группы $GL(2,k)$, содержащие нерасщепимый максимальный тор // Зап. науч. семин. ПОМИ.—1994.—Т. 221.—С. 136–145.
8. *Койбаев В. А.* Трансвекции в подгруппах полной линейной группы, содержащих нерасщепимый максимальный тор // Алгебра и анализ.—2009.—Т. 21, № 5.—С. 70–86.
9. *Djokovic D. Z.* Subgroups of compact Lie groups containing a maximal torus are closed // Proc. Amer. Math. Soc.—1981.—Vol. 83, № 2.—P. 431–432.
10. *Dye R. H.* Maximal subgroups of symplectic groups stabilizing spreads. I, II // J. Algebra.—1984.—Vol. 87, № 2.—P. 493–509; J. London. Math. Soc.—1989.—Vol. 40, № 2.—P. 215–226.
11. *Dye R. H.* Maximal subgroups of $\mathrm{PS}p_{6n}(q)$ stabilizing spreads of totally isotropic planes // J. Algebra.—1986.—Vol. 99.—P. 111–129.
12. *Dye R. H.* Spreads and classes of maximal subgroups of $\mathrm{GL}_n(q)$, $\mathrm{SL}_n(q)$, $\mathrm{PGL}_n(q)$ and $\mathrm{PSL}_n(q)$ // Ann. Math. Pure Appl.—1991.—Vol. 158.—P. 33–50.
13. *Kantor W. M.* Linear groups containing a Singer cycle // J. Algebra.—1980.—Vol. 62, № 1.—P. 232–234.
14. *Platonov V. P.* Subgroups of algebraic groups over local or a global field containing a maximal torus // C.R. Acad. Sci. Paris.—1994.—Vol. 318, № 10.—P. 899–903.
15. *Seitz G. M.* Subgroups of finite groups of Lie type // J. Algebra.—1979.—Vol. 61, № 1.—P. 16–27.
16. *Seitz G. M.* Root subgroups for maximal tori in finite groups of Lie type // Pacif. J. Math.—1983.—Vol. 106, № 1.—P. 153–244.

Статья поступила 5 ноября 2009 г.

Койбаев Владимир Амурханович
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова, *зав. каф. алгебры и геометрии*
Россия, 362040, Владикавказ, ул. Ватутина, 46;

Южный математический институт, *вед. науч. сотр.*
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `koibaev-K1@yandex.ru`

Шилов Александр Валентинович
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова, *аспирант каф. алгебры и геометрии*
Россия, 362040, Владикавказ, ул. Ватутина, 46