Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2007, Том 9, Выпуск 4

УДК **517.927**

ПРИМЕНЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ НА ГРАФЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р. Ч. Кулаев

В работе приводится общая схема применения конечного интегрального преобразования на геометрическом графе (пространственной сети) для решения задач математической физики.

Ключевые слова: геометрический граф, краевая задача на графе, интегральное преобразование на графе.

Результаты данной работы развивают изложенную в [1] теорию конечных интегральных преобразований для линейного дифференциального оператора, порожденного дифференциальным выражением

$$Lu = A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x)\frac{\partial u}{\partial x} + C(x)u, \quad A(x) \neq 0, \ x \in \Gamma. \tag{1}$$

Оператор L действует на множестве функций, определенных на конечном геометрическом графе $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, которые удовлетворяют на границе $\partial\Gamma$ графа условиям

$$u(b) = 0, \quad b \in \partial\Gamma, \tag{2}$$

а в каждой внутренней вершине a графа — условиям

$$u_i(a) = \alpha_i(a)u_{i_0}(a), \quad i_0, i \in I(a), \qquad \sum_{i\in I(a)} \beta_i(a)\frac{\partial u_i}{\partial x}(a) = 0, \tag{3}$$

где $I(a)$ — индексы ребер, примыкающих к вершине a, $\{\alpha_i(a)\}_{i\in I(a)}$ и $\{\beta_i(a)\}_{i\in I(a)}$ — наборы чисел, свои для каждой вершины графа.

В выражении (1) A, B, $C : \Gamma \to \mathbb{R}$ функции равномерно непрерывные на каждом ребре графа.

1. Основные понятия

Напомним основные понятия и результаты из [1]. Открытый связный геометрический граф (в дальнейшем просто граф) состоит из конечного набора непересекающихся произвольно занумерованных интервалов $\{\gamma_i\}_1^m$ пространства $\mathbb{R}^n$ и совокупности $V(\Gamma)$ точек пространства $\mathbb{R}^n$, которые являются концевыми точками двух и более интервалов. При этом интервалы γ_i называются ребрами графа, а точки множества $V(\Gamma)$ его внутренними вершинами. Концы ребер графа, не принадлежащие $V(\Gamma)$ называются граничными вершинами и обозначаются $\partial\Gamma$. Если вершина a является концом ребра γ_i, то говорят, что ребро γ_i примыкает к вершине a.

Обозначим через $C[\Gamma]$ множество всех функций $u : \Gamma \to \mathbb{R}$, определенных на графе Γ и равномерно непрерывных на каждом ребре $\gamma_i \in \Gamma$. Во внутренних вершинах графа каждая функция из $C[\Gamma]$ может иметь различные пределы вдоль ребер, примыкающих к одной вершине. Если a — произвольная вершина (граничная или внутренняя), то под $u_i(a)$ понимается $\lim\limits_{x\to a} u_i(x)$, $x \in \gamma_i$.

Дифференцирование функции по переменной $x \in \gamma_i$ внутри каждого ребра γ_i осуществляется по параметру, причем предполагается, что для этого ребро γ_i параметризовано в одном из двух возможных направлений. Производная функции $u(x)$ определена на объединении всех ребер графа. Множество функций из $C[\Gamma]$, имеющих непрерывные производные на $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \gamma_i$, обозначим через $C^1[\Gamma]$, а множество функций из $C^1[\Gamma]$, непрерывно дифференцируемых на $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \gamma_i$ — через $C^2[\Gamma]$.

На графе Γ рассмотрим спектральную задачу

$$Lu = -\lambda r u \tag{4}$$

с условиями (2), (3).

Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — спектр задачи (4), (2), (3), $\{h_k(x)\}_1^\infty$ — корневые (собственные и присоединенные) функции, а $\{h_k^*(x)\}_1^\infty$ — корневые функции задачи сопряженной к задаче (4), (2), (3). Тогда [1], если D_L — множество всех функций пространства $C^2[\Gamma]$, удовлетворяющих условиям (2), (3), то под интегральным преобразованием, порожденным дифференциальным оператором L, понимаем интегральный оператор $\mathscr{L}_x : D_L \to l_2$, представляемый в виде счетной системы равенств

$$\bar{u}(\lambda_k) = \int\limits_{\Gamma} u(x) h_k^*(x) r(x)\, dx, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Здесь r — весовая функция, приводящая выражение L к самосопряженному виду. Оператор $\mathscr{L}_x$ ставит в соответствие каждой функции (оригиналу) из D_L последовательность (изображение) ее коэффициентов Фурье по системе корневых функций $\{h_k^*\}$. Обратное преобразование (формула обращения) $\mathscr{L}_x^{-1} : l_2 \supset \mathscr{L}_x(D_L) \to C^2[\Gamma]$ совместно с $\mathscr{L}_x$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие между оригиналами и изображениями. При этом $\mathscr{L}_x^{-1}$ определяется как разложение оригинала в ряд по системе $\{h_k\}$:

$$\mathscr{L}_x^{-1} \bar{u} = u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x) \bar{u}(\lambda_k). \tag{6}$$

2. Общая схема применения конечных интегральных преобразований к решению задач математической физики

Применение конечных интегральных преобразований для получения решений краевых задач математической физики проиллюстрируем на примере одномерной задачи.

Всюду далее нами рассматриваются функции $u : \Gamma \times [0, T] \to \mathbb{R}$, у которых первая (пространственная) переменная имеет областью своего изменения граф Γ, а вторая (временна́я) — отрезок $[0, T] \subset \mathbb{R}$. Для всякой такой функции $u(x,t)$ через $u_i(x,t)$ обозначается ее сужение на ребро γ_i, т. е. полагается $u_i(x,t) = u(x,t)$ при $x \in \gamma_i$ и $u_i(x,t) \equiv 0$ при $x \in \Gamma \setminus \gamma_i$. Все рассматриваемые ниже функции предполагаются равномерно непрерывными на каждом ребре графа.

Пусть требуется найти решение $u = u(x,t)$ дифференциального уравнения в частных производных

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t) \quad (a, b = \mathrm{const}) \tag{7}$$

со следующими краевыми и начальными условиями:

$$u(b,t) = 0, \quad b \in \partial\Gamma, \tag{8}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \tag{9}$$

где φ, ψ — заданные функции из $C[\Gamma]$. В каждой внутренней вершине $a \in V(\Gamma)$ решение $u(x,t)$ удовлетворяет при каждом $t \in [0,T]$ условиям (2), (3).

Уравнение (7) рассматривается на $\Gamma \times [0,T]$ и принимается по пространственной переменной $x \in \Gamma$ как уравнение на графе.

Применим к системе (7)–(9) конечное интегральное преобразование (5), другими словами, найдем результат действия на систему (7)–(9) оператора $\mathscr{L}_x$. При этом оригиналу $u(x,t)$ сопоставляется изображение

$$\bar{u}(\lambda_k, t) = \int\limits_\Gamma u(x,t) h_k^*(x) r(x)\, dx,$$

а исходной задаче (7)–(9) в пространстве оригиналов сопоставляются следующие краевые задачи в пространстве изображений [1]:

$$\mu \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} + \eta \frac{d\bar{u}}{dt} + \lambda_k \bar{u} = \bar{f}(\lambda_k, t), \tag{10}$$

$$\bar{u}(\lambda_k, 0) = \bar{\varphi}(\lambda_k), \quad \frac{d\bar{u}}{dt}(\lambda_k, 0) = \bar{\psi}(\lambda_k), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{f}(\lambda_k, t) &= \int\limits_\Gamma f(x,t) h_k^*(x) r(x)\, dx, \\ \bar{\varphi}(\lambda_k) &= \int\limits_\Gamma \varphi(x) h_k^*(x) r(x)\, dx, \\ \bar{\psi}(\lambda_k) &= \int\limits_\Gamma \psi(x) h_k^*(x) r(x)\, dx. \end{aligned} \tag{12}$$

Счетная система обыкновенных дифференциальных уравнений (10) с условиями (11) эквивалентна дифференциальному уравнению в частных производных (7) с условиями (8), (9). Таким образом в пространстве изображений мы имеем более простую задачу — задачу Коши (10), (11).

Решение задачи Коши (10), (11) задается равенством:

$$\begin{gathered}\bar{u}(\lambda_k,t)=\int\limits_0^t \bar{f}(\lambda_k,s)K(\lambda_k,t,s)\,ds\\ +\bar{\varphi}(\lambda_k)\left\{\mu\frac{\partial K}{\partial t}(\lambda_k,t,0)+\eta K(\lambda_k,t,0)\right\}+\bar{\psi}(\lambda_k)\mu K(\lambda_k,t,0).\end{gathered}\tag{13}$$

В формуле (13): $K(\lambda_k,t,s)$ — функция Коши (фундаментальное решение); интегралом задается решение уравнения (10), удовлетворяющее однородным начальным условиям

$$\bar{u}(\lambda_k,0)=0,\quad \frac{\partial\bar{u}}{\partial t}(\lambda_k,0)=0;$$

внеинтегральные слагаемые дают решение соответствующего (10) однородного уравнения с неоднородными условиями (11).

В случае $\mu\neq 0$ функция Коши определяется по правилу:

$$K(\lambda_k,t,s)=\frac{1}{\mu W(s)}\begin{vmatrix}\varphi_1(\lambda_k,s) & \varphi_2(\lambda_k,s)\\ \varphi_1(\lambda_k,t) & \varphi_2(\lambda_k,t)\end{vmatrix},$$

где $\varphi_1(\lambda_k,\cdot)$ и $\varphi_2(\lambda_k,\cdot)$ — фундаментальная система решений, соответствующего уравнению (10) однородного уравнения, $W(\cdot)$ — определитель Вронского.

В частности, в гиперболическом случае ($a\neq 0$, $b=0$)

$$K(\lambda_k,t,s)=\frac{1}{\sqrt{\mu\lambda_k}}\sin\sqrt{\frac{\lambda_k}{\mu}}(t-s).$$

Если $\mu\neq 0$, $\eta\neq 0$, то в силу $\lambda_k\to+\infty$ при $k\to+\infty$ [2], найдется такой номер N, что при $k>N$ будет выполняться неравенство $\lambda_k\geqslant\frac{\eta^2}{4\mu}$ и тогда

$$K(\lambda_k,t,s)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\eta^2-4\mu\lambda_k}}\,e^{-\frac{\eta}{2\mu}(t-s)}\mathrm{sh}\dfrac{\sqrt{\eta^2-4\mu\lambda_k}}{2\mu}(t-s), & \text{при } k<N,\\ \dfrac{2}{\sqrt{4\mu\lambda_k-\eta^2}}\,e^{-\frac{\eta}{2\mu}(t-s)}\sin\dfrac{\sqrt{4\mu\lambda_k-\eta^2}}{2\mu}(t-s), & \text{при } k>N,\\ \dfrac{t-s}{\mu}\,e^{-\frac{\eta}{2\mu}(t-s)}, & \text{при } \lambda_N=\frac{\eta^2}{4\mu}.\end{cases}$$

В параболическом случае ($\mu=0$, $\eta\neq 0$) левая часть (10) принимает вид $\eta\frac{d\bar{u}}{dt}+\lambda_k\bar{u}$ и $K(\lambda_k,t,s)=\frac{1}{\eta}\,e^{-\frac{\lambda_k}{\eta}(t-s)}$.

Возвращаясь теперь из пространства изображений $\bar{u}$ в пространство оригиналов, применим к (13) оператор L_x^{-1} — формулу обращения (6). Приходим, с учетом (12), к формальному решению исходной задачи (7)–(9):

$$\begin{gathered}u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}h_k(x)\bar{u}(\lambda_k,t)=\sum_{k=1}^{\infty}h_k(x)\int\limits_0^t\int\limits_\Gamma f(\xi,s)h_k^*(\xi)r(\xi)K(\lambda_k,t,s)\,d\xi\,ds\\ +\sum_{k=1}^{\infty}h_k(x)\int\limits_\Gamma\left[\varphi(\xi)\left(\mu\frac{\partial K}{\partial t}(\lambda_k,t,0)+\eta K(\lambda_k,t,0)\right)+\psi(\xi)\mu K(\lambda_k,t,0)\right]h_k^*(\xi)r(\xi)\,d\xi.\end{gathered}\tag{14}$$

В (14) первая сумма отражает вклад в решение от неоднородной части уравнения (7), а вторая — от начальных условий (9).

3. Обоснование метода интегрального преобразования

В этом пункте будет дано обоснование изложенного в п. 2 метода для следующей смешанной задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u + f(x,t) \equiv -L_0 u + f(x,t),\quad (x,t) \in \Gamma_T = \Gamma \times [0,T], \tag{15}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \quad x \in \Gamma, \tag{16}$$

$$u(b,t) = 0, \quad b \in \partial\Gamma. \tag{17}$$

В каждой внутренней вершине $a \in V(\Gamma)$ задаются условия непрерывности и условие согласования:

$$u_i(a,t) = u_j(a,t), \quad i,j \in I(a), \quad \sum_{i \in I(a)} p_i(a)\frac{\partial u_i}{\partial x}(a,t) = 0. \tag{18}$$

Предполагаем, что $p \in C^1[\Gamma]$, $\inf\limits_{x\in\Gamma} p(x) > p_0 > 0$, $q \in C[\Gamma]$, $q \geqslant 0$, $f \in C\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m} \gamma_i \times [0,T]\right)$, $\varphi \in C^1(\Gamma)$, $\psi \in C(\Gamma)$.

Рассматриваемая задача является частным случаем задачи (7)–(9) ($\mu = 1$, $\eta = 0$, $\alpha_i(a) = 1$, $\beta_i(a) = p_i(a) = \lim\limits_{x\to a} p(x)$, $x \in \gamma_i$) и имеет естественную физическую интерпретацию [3]. Она моделирует процесс малых поперечных колебаний натянутой сетки из струн, копирующей в состоянии покоя плоский граф Γ. Эта же задача описывает малые продольные деформации сетки из упругих стержней. В обоих случаях сетка закреплена на границе, что выражается условиями (17). Условия (18) дают непрерывность деформации в узлах сетки и условия баланса сил, действующих на узел со стороны каждой из примыкающих струн (стержней). Задача (15)–(18) получается вследствие применения вариационного принципа минимизации энергетического функционала [3].

3.1. Классическое решение. Единственность и непрерывная зависимость классического решения. Для задачи (15)–(18) формальное решение (14) принимает вид

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}(\lambda_k,t)h_k(x), \tag{19}$$

где

$$\bar{u}(\lambda_k,t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_0^t \bar{f}(\lambda_k,s)\sin\sqrt{\lambda_k}(t-s)\,ds + \bar{\varphi}(\lambda_k)\cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\bar{\psi}(\lambda_k)\sin\sqrt{\lambda_k}t, \tag{20}$$

$\bar{f}(\lambda_k,t)$, $\bar{\varphi}(\lambda_k)$, $\bar{\psi}(\lambda_k)$ определяются равенствами (12), а h_k — нормированные корневые функции спектральной задачи

$$L_0 h = -\lambda h, \quad x \in \Gamma,\qquad h|_{\partial\Gamma} = 0, \quad h_i(a) = h_j(a), \quad i,j \in I(a), \quad \sum_{i\in I(a)} p_i(a)h_i(a) = 0, \quad a \in V(\Gamma). \tag{21}$$

Задача (21) является самосопряженной, поэтому все функции h_k являются собственными и, в силу теоремы разложения [2], образуют полную ортонормированную систему в $L_2(\Gamma)$ — пространстве суммируемых на Γ с квадратом функций.

Определение. Функцию $u(x,t) \in C^2[\Gamma_T] \cap C^1[\Gamma_T \cup \partial\Gamma_T]$, удовлетворяющую в Γ_T уравнению (15), начальным условиям (16), условиям (17) на $\partial\Gamma_T = \partial\Gamma \times [0,T]$ и условиям (18) на $V(\Gamma) \times [0,T]$ назовем классическим решением смешанной задачи (15)–(18).

В дальнейших рассуждениях очень важную роль играет интеграл энергии

$$\mathscr{I}^2(t) = \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + p\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + qu^2\right] dx,$$

представляющей собой сумму кинетической и потенциальной энергий колеблющейся системы.

Лемма 1. *Пусть* $u(x,t)$ *— классическое решение* (15)–(18). *Тогда*

$$\mathscr{I}^2(t) = \mathscr{I}^2(0) + \int\limits_0^t \int\limits_\Gamma f(x,s)\frac{\partial u}{\partial t}(x,s)\,dx\,ds, \tag{22}$$

где

$$\mathscr{I}^2(0) = \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma [\psi^2 + p\,\varphi'^2 + q\varphi^2]\,dx, \quad t \in [0,T].$$

$\lhd$ Умножим уравнение (15) на $\frac{\partial u}{\partial t}$ и проинтегрируем по Γ_T:

$$\int\limits_{\Gamma_T} f\frac{\partial u}{\partial t}dx\,dt = \int\limits_{\Gamma_T} \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + L_0 u\right) dx\,dt = \int\limits_\Gamma \int\limits_0^T \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dt\,dx + \int\limits_0^T \int\limits_\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} L_0 u\,dx\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\Bigg|_0^T + \int\limits_0^T \Bigg\{\sum_{i=1}^m \int\limits_{\gamma_i}\left[p_i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x} + q_i u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}\right] dx$$

$$- \sum_{a_j \in V(\Gamma)} \sum_{i \in I(a_j)} \frac{\partial u_i}{\partial t}(a_j,t) p_i(a_j)\frac{\partial u_i}{\partial x}(a_j,t) - \sum_{b_j \in \partial\Gamma} \frac{\partial u_i}{\partial t}(b_j,t)p_i(b_j)\frac{\partial u_i}{\partial x}(b_j,t)\Bigg\}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + p\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + qu^2\right]\Bigg|_0^T dx - \sum_{a_j \in V(\Gamma)} \int\limits_0^T \left[\frac{\partial u_i}{\partial t}(a_j,t)\sum_{i \in I(a_j)} p_i(a_j)\frac{\partial u_i}{\partial x}(a_j,t)\right] dt$$

$$- \sum_{b_j \in \partial\Gamma} \int\limits_0^T \frac{\partial u_i}{\partial t}(b_j,t)p_i(b_j)\frac{\partial u_i}{\partial x}(b_j,t)\,dt.$$

Из условий (17), (18) следует равенство нулю всех сумм, поэтому

$$\int\limits_{\Gamma_T} f\frac{\partial u}{\partial t}\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + p\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + qu^2\right]\Bigg|_0^T dx.$$

Заменяя T на t, получим (22). $\rhd$

Для доказательства единственности и непрерывной зависимости классического решения задачи (15)–(18) применим метод интегралов энергии.

Предположим, что $u = u(x,t)$ является классическим решением гиперболической задачи. Так как $p(x) > p_0 > 0$ на Γ, то

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Gamma)}(t) \leqslant \frac{1}{p_0}\int\limits_{\Gamma} p\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \leqslant \frac{2}{p_0}\mathscr{I}^2(t),$$

т. е.

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L_2(\Gamma)}(t) \leqslant \sqrt{\frac{2}{p_0}}\mathscr{I}(t).$$

Аналогично,

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_2(\Gamma)}(t) \leqslant \sqrt{2}\mathscr{I}(t).$$

Дифференцируя равенство (22) по t и применяя неравенство Коши — Буняковского, имеем

$$2|\mathscr{I}(t)\mathscr{I}'(t)| \leqslant \|f\|_{L_2(\Gamma)}(t)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_2(\Gamma)}(t) \leqslant \|f\|_{L_2(\Gamma)}(t)\sqrt{2}\,\mathscr{I}(t),$$

$$\mathscr{I}'(t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\|f\|_{L_2(\Gamma)}(t).$$

Отсюда получаем оценку для $\mathscr{I}(t)$:

$$\mathscr{I}(t) \leqslant \mathscr{I}(0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^t \|f\|_{L_2(\Gamma)}(s)\,ds.$$

Из этой оценки выводим неравенства:

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_2(\Gamma)}(t) \leqslant \sqrt{2}\mathscr{I}(0) + \int\limits_0^t \|f\|_{L_2(\Gamma)}(s)\,ds, \tag{23}$$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L_2(\Gamma)}(t) \leqslant \sqrt{\frac{2}{p_0}}\,\mathscr{I}(0) + \int\limits_0^t \|f\|_{L_2(\Gamma)}(s)\,ds, \tag{24}$$

Аналогично, дифференцируя функцию $\|u\|^2_{L_2(\Gamma)}(t)$, применяя неравенство Коши — Буняковского и неравенство (23), получается оценка:

$$\|u\|_{L_2(\Gamma)}(t) \leqslant \|\varphi\|_{L_2(\Gamma)} + \sqrt{2}\,\mathscr{I}(0)\,t + \int\limits_0^t (t-s)\,\|f\|_{L_2(\Gamma)}(s)\,ds. \tag{25}$$

Теперь, используя полученные оценки, докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Классическое решение задачи* (15)–(18) *единственно и непрерывно зависит от начальных данных в том смысле, что*

$$\begin{gathered}\|u-\tilde u\|_{L_2(\Gamma)}(t) + \left\|\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \tilde u}{\partial t}\right\|_{L_2(\Gamma)}(t) + \left\|\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \tilde u}{\partial x}\right\|_{L_2(\Gamma)}(t) \\ \leqslant C\big(\|\varphi-\tilde\varphi\|_{C[\Gamma]} + \|\varphi'-\tilde\varphi'\|_{L_2(\Gamma)} + \|f-\tilde f\|_{L_2(\Gamma)}(t)\big), \quad t\in[0,T].\end{gathered} \tag{26}$$

Здесь u, $\tilde u$ — классические решения, а $C = \mathrm{const}$ не зависит от t.

◁ Единственность решения вытекает из того, что, в силу неравенства (25), однородная задача (15)–(18) (при $\varphi \equiv 0$, $\psi \equiv 0$, $f \equiv 0$) имеет только нулевое решение.

Докажем непрерывную зависимость решения от начальных данных.

Функция $u - \tilde{u}$ является классическим решением задачи (15)–(18) с заменой f, φ, ψ на $f - \tilde{f}$, $\varphi - \tilde{\varphi}$, $\psi - \tilde{\psi}$ соответственно. Для решения $u - \tilde{u}$ оценим величину $\tilde{\mathscr{I}}(0)$:

$$\tilde{\mathscr{I}}^2(0) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} \left[(\psi - \tilde{\psi})^2 + p\,(\varphi' - \tilde{\varphi}')^2 + q\,(\varphi - \tilde{\varphi})^2\right] dx$$

$$\leqslant C_1 \left(\|\psi - \tilde{\psi}\|^2_{L_2(\Gamma)} + \|\varphi' - \tilde{\varphi}'\|^2_{L_2(\Gamma)} + \|\varphi - \tilde{\varphi}\|^2_{C[\Gamma]}\right).$$

Применяя теперь к решению $u - \tilde{u}$ оценку (25) и последнее неравенство, получим:

$$\|u - \tilde{u}\|_{L_2(\Gamma)}(t) \leqslant C\big(\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C[\Gamma]} + \|\varphi' - \tilde{\varphi}'\|_{L_2(\Gamma)} + \|\psi - \tilde{\psi}\|_{L_2(\Gamma)} + \|f - \tilde{f}\|_{L_2(\Gamma)}(t)\big).$$

Аналогично, используя неравенства (23), (24) и оценку для $\tilde{\mathscr{I}}(0)$, устанавливаются неравенства:

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\right\|_{L_2(\Gamma)}(t) \leqslant C\big(\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C[\Gamma]} + \|\varphi' - \tilde{\varphi}'\|_{L_2(\Gamma)} + \|\psi - \tilde{\psi}\|_{L_2(\Gamma)} + \|f - \tilde{f}\|_{L_2(\Gamma)}(t)\big),$$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right\|_{L_2(\Gamma)}(t) \leqslant C\big(\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C[\Gamma]} + \|\varphi' - \tilde{\varphi}'\|_{L_2(\Gamma)} + \|\psi - \tilde{\psi}\|_{L_2(\Gamma)} + \|f - \tilde{f}\|_{L_2(\Gamma)}(t)\big).$$ ▷

3.2. Обобщенное решение.

Определение. Пусть существуют последовательности $f_n \in C\left[\bigcup_{i=1}^m \gamma_i \times [0,T]\right]$, $\varphi_n \in C^1[\Gamma]$, $\psi_n \in C[\Gamma]$, $n \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\begin{aligned} &1)\ f_n \rightrightarrows f \text{ в } L_2[\Gamma] \text{ равномерно по } t \text{ на } [0,T];\\ &\quad \varphi_n \to \varphi \text{ в } C[\Gamma],\ \psi_n \to \psi \text{ в } L_2[\Gamma],\ \varphi_n' \to \varphi' \text{ в } L_2[\Gamma]; \end{aligned} \tag{27}$$

2) при каждом $k \in \mathbb{N}$ существует классическое решение $u_n(x,t)$ смешанной задачи

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = L_0 u_n + f_n(x,t),\\ u_n(x,0) = \varphi_n(x), \quad \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,0) = \psi_n(x), \end{gathered} \tag{28}$$

удовлетворяющие условиям (17), (18).

Тогда, если существует функция $u(x,t)$, непрерывная в $L_2(\Gamma)$ по t на $[0,T]$ и такая, что $u_n \rightrightarrows u$ в $L_2(\Gamma)$ равномерно по t, то функцию u назовем *обобщенным решением* задачи (15)–(18).

Теорема 2. *Обобщенное решение задачи* (15)–(18) *единственно.*

◁ Пусть $u_n(x,t)$ — последовательность классических решений, сходящаяся к обобщенному решению $u(x,t)$ в смысле определения. Применяя к функциям u_n оценку (25) и переходя к пределу с учетом (27), (28), убеждаемся в справедливости оценки (25) для обобщенного решения. Аналогично для обобщенного решения устанавливаются оценки (23), (24), откуда уже следует единственность обобщенного решения. ▷

Теорема 3. *Если $\varphi \in D_{L_0}$, $\psi \in L_2(\Gamma)$ и f непрерывна по t в $L_2(\Gamma)$, то обобщенное решение задачи* (15)–(18) *существует и представляется рядом* (19) — *формальным решением.*

$\triangleleft$ Пользуясь теоремой разложения [2], представим функцию φ в виде равномерно сходящегося ряда

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\varphi}(\lambda_k) h_k(x), \tag{29}$$

а функции ψ и f в виде рядов

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\psi}(\lambda_k) h_k(x), \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}(\lambda_k, t) h_k(x), \tag{30}$$

сходящихся к ним в $L_2(\Gamma)$, причем последний ряд сходится равномерно по t. Это следует из непрерывности функции f по t.

Обозначим через u_n, φ_n, ψ_n, f_n частичные суммы рядов (19), (29) и (30) соответственно. Из определения функций $\bar{u}(\lambda_k, t)$ следует, что $u_n(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \bar{u}(\lambda_k, t) h_k(x)$ принадлежит $C^2[\Gamma_T] \cap C^1[\Gamma_T \cup \partial\Gamma_T]$. Далее,

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} + L_0 u_n = \sum_{k=1}^{n} (\bar{u}''(\lambda_k, t) h_k(x) + \bar{u}(\lambda_k, t) L_0 h_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}(\lambda_k, t) h_k(x) = f_n(x,t),$$

$$u_n(x,0) = \varphi_n(x), \quad \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,0) = \psi_n(x),$$

т. е. функции u_n, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяют (28).

Таким образом, построена последовательность $u_n(x,t)$ классических решений задачи (28) таких, что выполнены соотношения (27). Остается показать, что последовательность u_n сходится в $L_2(\Gamma)$ равномерно по t. Но это сразу следует, если примерить к разности $u_n - u_p$ оценку (26) и привлечь соотношения (27). $\triangleright$

3.3. Существование классического решения. Пусть $G(x,s)$ — функция Грина интегрального оператора, обращающего дифференциальный оператор L_0, действующий на множестве функций из $C^2[\Gamma]$, удовлетворяющих условиям (2), (3) [3]. Тогда собственные функции $\{h_k\}$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{h_k(x)}{\lambda_k} = \int\limits_{\Gamma} G(x,s) h_k(s)\, ds$$

и равенству

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|h_k(x)|^2}{\lambda_k} = G(x,x). \tag{31}$$

Причем последний ряд сходится равномерно на $\bar{\Gamma}$. Докажем равномерную сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|h_k'(x)|^2}{\lambda_k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|h_k''(x)|^2}{\lambda_k^3}. \tag{32}$$

Равномерная сходимость первого ряда вытекает из равенства

$$\frac{h_k'(x)}{\lambda_k} = \int\limits_{\Gamma} G_x'(x,s) h_k(s)\, ds = (G_x', h_k),$$

свойств функции Грина, равенства Парсеваля для G_x и леммы Дини.

Равномерная сходимость второго ряда вытекает из равномерной сходимости ряда (31), первого ряда (32) и дифференциального уравнения

$$h_k''(x) = -\frac{p'(x)}{p(x)}h_k'(x) + \frac{q(x)-\lambda_k}{p(x)}h_k(x).$$

Лемма 2. *Пусть* φ, $L_0\,\varphi$, $\psi \in D_{L_0}$ *и* f, $\frac{\partial f}{\partial t} \in L_2(\Gamma_T)$. *Тогда ряд* (19) *и ряды, полученные из него почленным дифференцированием по* t *один и два раза, сходятся равномерно на* Γ_T.

$\lhd$ Рассмотрим функции $\bar{u}(\lambda_k, t)$, определяемые равенством (20). Так как

$$\bar{u}(\lambda_k,t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_0^t \bar{f}(\lambda_k,s)\sin\sqrt{\lambda_k}(t-s)\,ds + \bar{\varphi}(\lambda_k)\cos\sqrt{\lambda_k}\,t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\bar{\psi}(\lambda_k)\sin\sqrt{\lambda_k}\,t$$

$$= \frac{1}{\lambda_k}\Big(\bar{f}(\lambda_k,t) - \bar{f}(\lambda_k,0)\cos\sqrt{\lambda_k}\,t\Big) - \frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^t \bar{f}'(\lambda_k,s)\cos\sqrt{\lambda_k}(t-s)\,ds$$

$$+\,\bar{\varphi}(\lambda_k)\cos\sqrt{\lambda_k}\,t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\bar{\psi}(\lambda_k)\sin\sqrt{\lambda_k}\,t,$$

$$\bar{u}'(\lambda_k,t) = \int\limits_0^t \bar{f}(\lambda_k,s)\cos\sqrt{\lambda_k}(t-s)\,ds - \sqrt{\lambda_k}\,\bar{\varphi}(\lambda_k)\sin\sqrt{\lambda_k}\,t + \bar{\psi}(\lambda_k)\cos\sqrt{\lambda_k}\,t$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\bar{f}(\lambda_k,0)\sin\sqrt{\lambda_k}\,t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_0^t \bar{f}'(\lambda_k,s)\sin\sqrt{\lambda_k}(t-s)\,ds$$

$$-\,\sqrt{\lambda_k}\,\bar{\varphi}(\lambda_k)\sin\sqrt{\lambda_k}\,t + \bar{\psi}(\lambda_k)\cos\sqrt{\lambda_k}\,t,$$

$$\bar{u}''(\lambda_k,t) = \bar{f}(\lambda_k,t) - \lambda_k\bar{u}(\lambda_k,t) = \bar{f}(\lambda_k,0)\cos\sqrt{\lambda_k}\,t + \int\limits_0^t \bar{f}'(\lambda_k,s)\cos\sqrt{\lambda_k}(t-s)\,ds$$

$$-\,\lambda_k\bar{\varphi}(\lambda_k)\cos\sqrt{\lambda_k}\,t - \lambda_k\bar{\psi}(\lambda_k)\sin\sqrt{\lambda_k}\,t,$$

то

$$\lambda_k^2|\bar{u}(\lambda_k,t)|^2 \leqslant C\big(|\bar{f}(\lambda_k,t)|^2 + |\bar{f}(\lambda_k,0)|^2 + T\int\limits_0^T |\bar{f}'(\lambda_k,s)|^2\,ds + \lambda_k^2|\bar{\varphi}(\lambda_k)|^2 + \lambda_k|\bar{\psi}(\lambda_k)|^2\big), \quad (33)$$

$$\lambda_k|\bar{u}'(\lambda_k,t)|^2 \leqslant C\big(|\bar{f}(\lambda_k,0)|^2 + T\int\limits_0^T |\bar{f}'(\lambda_k,s)|^2\,ds + \lambda_k^3|\bar{\varphi}(\lambda_k)|^2 + \lambda_k^2|\bar{\psi}(\lambda_k)|^2\big),$$

$$|\bar{u}''(\lambda_k,t)|^2 \leqslant C\big(|\bar{f}(\lambda_k,0)|^2 + T\int\limits_0^T |\bar{f}'(\lambda_k,s)|^2\,ds + \lambda_k^2|\bar{\varphi}(\lambda_k)|^2 + \lambda_k|\bar{\psi}(\lambda_k)|^2\big).$$

Так как f, $\frac{\partial f}{\partial t} \in L_2(\Gamma_T)$, то ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\bar{f}(\lambda_k,t)|^2 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^T |\bar{f}'(\lambda_k,t)|^2\,dt \quad (34)$$

сходятся равномерно по t (напомним, что $\bar{f}(\lambda_k,t) = (f, h_k')$).

Так как $L_0\,\varphi \in D_{L_0}$, то $L_0^2\,\varphi \in L_2(\Gamma)$ и

$$\lambda_k^2 \bar{\varphi}(\lambda_k) = \lambda_k^2(\varphi, h_k) = \lambda_k(L_0\,\varphi, h_k) = (L_0^2\varphi, h_k).$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^4 |\bar{\varphi}(\lambda_k)|^2 = \|L_0^2\,\varphi\|_{L_2(\Gamma)}. \tag{35}$$

Аналогично

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |\bar{\psi}(\lambda_k)|^2 = \|L_0\psi\|_{L_2(\Gamma)}. \tag{36}$$

Из оценок (33) и сходимости рядов (34)–(36) следует утверждение леммы. $\rhd$

Теорема (существование классического решения). *Пусть* φ, $L\,\varphi$, $\psi \in D_{L_0}$ *и* f, $\frac{\partial f}{\partial t} \in L_2(\Gamma_T)$. *Тогда ряд* (14) *представляет классическое решение задачи* (15)–(19).

$\lhd$ Из сходимости рядов (31), (32) и леммы 2 следует равномерная сходимость на Γ_T ряда (19) и всех рядов, полученных почленным дифференцированием по x и t один и два раза. $\rhd$

Литература

1. *Кулаев Р. Ч.* Интегральное преобразование на графе для дифференциального оператора второго порядка // Владикавк. мат. журн.—2005.—Т. 7, вып. 2.—С. 78–85.
2. *Завгородний М. Г.* Спектральная полнота корневых функций краевой задачи на графе // ДАН.—1994.—Т. 335, № 3.—С. 281–282.
3. *Покорный Ю. В.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах.—М.: Физматлит, 2004.—272 с.

Статья поступила 3 сентября 2007 г.

Кулаев Руслан Черменович, к. ф.-м. н.
Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН
Владикавказ, 362027, РОССИЯ