Владикавказский математический журнал
январь–март, 2007, Том 9, Выпуск 1

УДК **513.03+517.944**

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИЗГИБАНИЙ ПОВЕРХНОСТИ

Тюриков Е. В.

В работе рассматривается задача об отыскании бесконечно малых изгибаний регулярной выпуклой поверхности с кусочно-гладким краем при заданной вариации геодезического кручения в направлении края. Найден класс поверхностей, для которых поставленная задача является безусловно разрешимой.

В настоящей работе рассматривается задача об отыскании бесконечно малых изгибаний регулярной односвязной выпуклой поверхности с кусочно-гладким краем, совместимых с граничным условием $\delta\tau_g = \sigma$ (задача A_g), где σ — наперед заданная функция точек края, $\delta\tau_g$ — вариация геодезического кручения в направлении края. Ранее в работах автора [1, 2] был рассмотрен случай граничного условия $\delta k_n = \sigma$ (задача A_n), где δk_n — вариация нормальной кривизны в направлении края. Впервые задачи A_g и A_n для поверхностей с гладким краем и их приложения к геометрии и механике были рассмотрены И. Н. Векуа [3, 4]. При этом содержание полученных в [4] геометрических результатов определяется тем обстоятельством, что задачи A_g и A_n для односвязных поверхностей с гладким краем не являются безусловно разрешимыми. Интерес к задаче A_g (A_n) в предлагаемой ниже постановке вызван следующими причинами:

1. существуют классы односвязных выпуклых поверхностей с кусочно-гладким краем, для которых задачи A_g и A_n безусловно разрешимы, что позволяет получить ряд новых геометрических результатов;

2. задачи A_g (A_n) согласно [3, 4] можно рассматривать как геометрический аналог задачи о реализации безмоментного напряженного состояния равновесия упругой выпуклой оболочки при условии равенства нулю нормальных (касательных) усилий на границе ее срединной поверхности, что в случае безусловной разрешимости позволяет сформулировать некоторые новые результаты, относящиеся к безмоментной теории оболочек (см. [5]).

1. Постановка задачи A_g

Пусть S_0 — строго внутренняя часть замкнутой выпуклой поверхности в E^3, принадлежащей классу регулярности $W^{3,p}$, $p > 2$. Через S_ν, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, обозначим односвязную поверхность, являющуюся строго внутренней частью поверхности S_0, с кусочно-гладким краем $L = \bigcup\limits_{j=1}^{n} L_j$, состоящим из конечного числа дуг L_j класса регулярности $C^{1,\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$, и содержащим n угловых точек c_j с внутренними углами $\nu_j\pi$, $0 < \nu_j < 2$, соответственно, образованными векторами $\bar{s}_j^{(1)}$, $\bar{s}_j^{(2)}$ с началом в точке c_j $(j = 1, \dots, n)$ и задающими направления дуг, сходящихся в этой точке. Здесь точки c_j и c_{j+1} — начало и конец дуги L_j $(j = 1, \dots, n-1)$ соответственно, а началом и концом дуги L_n являются точки c_n и c_1. Рассматривая на поверхности S_0 некоторую сопряженно изометрическую систему координат (u^1, u^2), отобразим поверхность S_ν на область D_θ, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, плоскости (u^1, u^2), ограниченную кусочно-гладкой кривой $\Gamma = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \Gamma_j$, содержащей угловые точки q_i с внутренними углами $\theta_j \pi$ $(0 < \theta_j < 2,\ j = 1, \dots, n)$. При этом набор $\theta \equiv \omega(\nu)$ вполне определен выбором направлений $\bar{s}_j^{(1)}$, $\bar{s}_j^{(2)}$ в точках c_j на поверхности S_0 (см. [4, гл. 2, § 6]) и заданием условий

$$\begin{aligned} &0 < \theta_j < 1, \qquad \text{если} \quad 0 < \nu_j < 1; \\ &1 < \theta_j < 2, \qquad \text{если} \quad 1 < \nu_j < 2 \qquad (1 \leqslant j \leqslant n). \end{aligned} \tag{$*$}$$

Замечание. Как нетрудно показать, последнее условие выполнено, если поверхность S_ν отображается на ограниченную область D_θ плоскости (u^1, u^2).

Следуя [4], систему уравнений бесконечно малых изгибаний поверхности S_ν в вариациях δb_{ij} коэффициентов второй основной формы $b_{ij} du^i du^j$ запишем в виде

$$\partial_{\overline{\zeta}} w(\zeta) - B(\zeta)\overline{w}(\zeta) = 0, \quad \zeta \in D_\theta, \tag{1}$$

$\zeta = u^1 + iu^2$, $i^2 = -1$, $\partial_{\overline{\zeta}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u_1} + i\frac{\partial}{\partial u_2}\right)$ — оператор комплексного дифференцирования, $w = g^{-\frac{1}{2}}(\delta b_{22} + i\delta b_{12})$ — комплекснозначная функция изгибаний, $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$, g_{ij} $(i, j = 1, 2)$ — коэффициенты метрической формы поверхности S_0, $B(\zeta)$ — вполне определенная поверхностью S_ν функция класса $L_p(D_\theta)$, $p > 2$. Внешняя связь вида $\delta\tau_g = \sigma$ при бесконечно малых изгибаниях поверхности порождает для комплексной функции изгибаний условие

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{d\zeta}{ds} \cdot \frac{d\zeta}{dn} w(\zeta)\right\} = g^{-\frac{1}{2}}\sigma(\zeta), \quad \zeta \in \bigcup_{j=1}^{n} \Gamma_j, \tag{2}$$

$\frac{d\zeta}{ds} \equiv s_1(\zeta) + is_1(\zeta)$, s_1, s_2 — координаты касательного к Γ орта, $\frac{d\zeta}{dn} \equiv n_1(\zeta) + in_2(\zeta)$, n_1, n_2 — координаты орта направления на плоскости ζ, являющегося образом направления на поверхности S_0, ортогонального направлению кривой L, $\sigma(\zeta)$ — заданная на Γ функция, допускающая разрывы первого рода в точках ζ_j, и гёльдерова на каждой из замкнутых дуг Γ_j. При этом точки ζ_j и ζ_{j+1} есть начало и конец дуги Γ_j $(j = 1, \dots, n-1)$ соответственно, а концом дуги Γ_n является точка ζ_1. Задача (1), (2) есть задача Римана — Гильберта (задача R_g) с коэффициентом $\overline{\frac{d\zeta}{ds}} \cdot \overline{\frac{d\zeta}{dn}}$ граничного условия, имеющим разрывы 1-го рода в точках ζ_j $(j = 1, \dots, n)$ комплексной плоскости $\zeta = u^1 + iu^2$.

2. Вспомогательная задача Римана — Гильберта

Пусть $\lambda(\zeta) = \lambda_1(\zeta) + i\lambda_2(\zeta)$ — гёльдерова на каждой из дуг Γ_j функция, имеющая разрывы 1-го рода в точках ζ_j $(j = 1, \dots, n)$, $|\lambda(\zeta)| = 1$. Введем следующие обозначения: $\overline{\ell}_{(-j)}$, $\overline{\ell}_{(+j)}$ — предельные значения векторного поля $\overline{\ell} = \{\lambda_1(\zeta), \lambda_2(\zeta)\}$ в точке ζ_j, $\varphi_j = (\overline{\ell}_{(-j)}, \overline{\ell}_{(+j)})$ — величина угла между векторами $\overline{\ell}_{(-j)}$ и $\overline{\ell}_{(+j)}$, $-\pi \leqslant \varphi_j \leqslant \pi$; при этом отсчет производится от $\overline{\ell}_{(-j)}$ до $\overline{\ell}_{(+j)}$, а угол считается положительным, если отсчет ведется против часовой стрелки. Обозначим через $\mathscr{L}$ множество векторных полей $\overline{\ell}$ на Γ, удовлетворяющих условиям:

1) Для любого поля $\overline{\ell} \in \mathscr{L}$ в точках гладкости Γ угол между вектором $\overline{\ell}$ и вектором $\overline{s}$ направления касательной к Γ удовлетворяет условию $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, а отсчет угла производится от $\overline{\ell}$ к $\overline{s}$ против хода часов.

2) В угловых точках выполняются неравенства

$$0 \leqslant (\overline{\ell}_{(-j)}, \overline{s}_{(-j)}) \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant (\overline{\ell}_{(+j)}, \overline{s}_{(+j)}) \leqslant \pi, \quad |\varphi_j| \neq \pi \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Пусть $\zeta_{i_1}, \ldots, \zeta_{i_r}$ — произвольно отмеченные точки ($1 \leqslant i_r \leqslant n$, $1 \leqslant r \leqslant n$), $\zeta_{k_1}, \ldots, \zeta_{k_q}$ — оставшиеся точки из числа $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ ($r + q = n$), $\alpha = (i_1, \ldots, i_r)$, $\beta = (k_1, \ldots, k_q)$ — сочетания соответствующих индексов.

Через $\mathscr{L}^{r,q}_{\alpha,\beta}(\Gamma)$ ($r + q = n$) обозначим подмножество множества $\mathscr{L}$ векторных полей на Γ, для которых выполнены условия

3) $0 < \varphi_j < \pi$, $j = i_1, \ldots, i_r$ ($1 \leqslant i_r \leqslant n$);

4) $-\pi < \varphi_j < 0$, $j = k_1, \ldots, k_q$ ($1 \leqslant k_q \leqslant n$).

Рассмотрим пару вектор-функций $\overline{\ell}, \overline{t} \in \mathscr{L}^{r,q}_{\alpha,\beta}(\Gamma)$, обозначив через $\overline{t}_{(-j)}$, $\overline{t}_{(+j)}$ предельные значения векторного поля $\overline{t} = (\tau_1(\zeta), \tau_2(\zeta))$ в точке ζ_j, ψ_j — величину угла между векторами $\overline{t}_{(-j)}$ и $\overline{t}_{(+j)}$. Всюду ниже полагаем $|\overline{\lambda}| = |\overline{t}| = 1$.

Для удобства дальнейшего изложения введем обозначения: $p(\overline{\ell}_{(\pm j)})$, $p(\overline{t}_{(\pm j)})$ ($j = 1, \ldots, n$) — прямые в плоскости (u^1, u^2), проходящие через точку ζ_j в направлении векторов $\overline{\ell}_{(\pm j)}$, $\overline{t}_{(\pm j)}$ соответственно.

Точку ζ_k ($1 \leqslant k \leqslant n$) назовем *особенной точкой пары* $(\overline{\ell}, \overline{t})$, если пара прямых $p(\overline{\ell}_{(\pm k)})$ совпадает с парой $p(\overline{t}_{(\pm k)})$.

Неособенную точку ζ_k назовем *нормальной точкой пары* $(\overline{\ell}, \overline{t})$ (или *нормальной точкой*), если выполнено одно из следующих условий:

1° векторы $\overline{\ell}_{(\pm k)}$ с началом в точке ζ_k лежат по одну сторону от каждой из прямых $p(\overline{t}_{(\pm k)})$, а векторы $\overline{t}_{(\pm k)}$ лежат по одну сторону от каждой из прямых $p(\overline{\ell}_{(\pm k)})$;

2° векторы $\overline{\ell}_{(\pm k)}$ лежат по разные стороны от каждой из прямых $p(\overline{t}_{(\pm k)})$, а векторы $\overline{t}_{(\pm k)}$ лежат по разные стороны от каждой из прямых $p(\overline{\ell}_{(\pm k)})$.

Пару $(\overline{\ell}, \overline{t})$ будем называть *парой нормального типа* (*нормальной парой*), если каждая неособенная точка есть *нормальная точка*, а в особенных точках ζ_q ($1 \leqslant q \leqslant n$) выполняются условия: $\overline{\ell}_{(+q)} \neq \overline{t}_{(+q)}$, $\overline{\ell}_{(-q)} \neq \overline{t}_{(-q)}$.

Замечание. Из определения $\mathscr{L}^{r,q}_{\alpha,\beta}$ следует, что в особенной точке ζ_s нормальной пары выполняются соотношения

3° $\overline{\ell}_{(+s)} = -\overline{t}_{(-s)}$, $\overline{\ell}_{(-s)} = \overline{t}_{(+s)}$ ($\overline{\ell}_{(+s)} = \overline{t}_{(-s)}$, $\overline{\ell}_{(-s)} = -\overline{t}_{(+s)}$), если $s \in \alpha$ ($s \in \beta$).

Рассмотрим граничную задачу Римана — Гильберта (задача R_g)

$$\operatorname{Re}\bigl\{\lambda(\zeta)\tau(\zeta)w(\zeta)\bigr\} = 0, \quad \zeta \in \Gamma = \bigcup_{j=1}^{n} \Gamma_j, \tag{3}$$

для уравнения (1) в области D_θ, $\lambda(\zeta) = \lambda_1(\zeta) + i\lambda_2(\zeta)$, $\tau(\zeta) = \tau_1(\zeta) + i\tau_2(\zeta)$, где $\overline{\ell}(\zeta), \overline{t}(\zeta) \in \mathscr{L}^{r,q}_{\alpha,\beta}(\Gamma)$, $r + q = n$, причем пара вектор-функций $\overline{\ell} = \bigl\{\lambda_1(\zeta), \lambda_2(\zeta)\bigr\}$, $\overline{t} = \bigl\{\tau_1(\zeta), \tau_2(\zeta)\bigr\}$ есть пара нормального типа. Согласно [6], индекс $\varkappa$ граничного условия (3) в классе ограниченных решений определяется соотношением

$$\varkappa = \sum_{j=1}^{n} \varkappa_j, \tag{4}$$

где $\varkappa_j = \left[\frac{\omega_j}{2\pi}\right]$, ω_j — скачок аргумента функции $\Lambda(\zeta) = \frac{\overline{\lambda}(\zeta)\overline{\tau}(\zeta)}{\lambda(\zeta)\tau(\zeta)}$ в точке разрыва ζ_j, взятый с обратным знаком, $[a]$ — целая часть числа a. Введем следующую классификацию точек разрыва ζ_k $(k = 1, \ldots, n)$ граничного условия (3). Неособенную точку ζ_j $(j = i_1, \ldots, i_r)$ отнесем к 1-му (2-му) типу, если пара векторов $\overline{\ell}_{(-j)}$, $\overline{\ell}_{(+j)}$ разделяет (не разделяет) пару $\overline{t}_{(-j)}$, $\overline{t}_{(+j)}$. Неособенную точку ζ_i $(i = k_1, \ldots, k_q)$ отнесем к 3-му (4-му) типу, если пара $\overline{\ell}_{(-j)}$, $\overline{\ell}_{(+j)}$ не разделяет (разделяет) пару $\overline{t}_{(-i)}$, $\overline{t}_{(+i)}$. Особенную точку ζ_i отнесем к 1-му (3-му) типу, если $i \in \alpha$ $(i \in \beta)$. Следствием условий 1°–3° и соотношений 3), 4) являются неравенства

$$\begin{array}{lll} \pi \leqslant \varphi_i + \psi_i < 2\pi & \text{для точек 1-го типа} & (i \in \alpha); \\ 0 < \varphi_j + \psi_j < \pi & \text{для точек 2-го типа} & (i \in \alpha); \\ -\pi \leqslant \varphi_k + \psi_k < 0 & \text{для точек 3-го типа} & (k \in \beta); \\ -2\pi < \varphi_s + \psi_s < -\pi & \text{для точек 4-го типа} & (s \in \beta). \end{array} \tag{5}$$

При этом $\varphi_i + \psi_i = \pi$ в особенной точке 1-го типа $(i \in \alpha)$ и $\varphi_j + \psi_j = -\pi$ в особенной точке 3-го типа $(j \in \beta)$.

Обозначим через $n^{(k)}$ $(k = 1, \ldots, 4)$ число точек разрыва k-го типа граничного условия (3). Имеет место

Лемма 1. *Индекс $\varkappa$ граничного условия* (3) *в классе ограниченных в $\overline{D}_\theta$ решений вычисляется по формуле*

$$\varkappa = n^{(1)} - n^{(3)} - 2n^{(4)} - 4. \tag{6}$$

◁ Обозначим через $\Delta_j\lambda$ $(\Delta_j\tau)$ приращение $\arg\lambda(\zeta)$ $(\arg\tau(\zeta))$ по дуге Γ_j $(j = 1, \ldots, n)$ при обходе Γ в положительном направлении. По определению $\mathscr{L}^{r,q}_{\alpha,\beta}$

$$\sum_{j=1}^{n}(\Delta_j\lambda + \varphi_j) = 2\pi, \quad \sum_{j=1}^{n}(\Delta_j\tau + \psi_j) = 2\pi. \tag{7}$$

Полагая $\mu = \lambda \cdot \tau$ и выбрав $\arg\lambda(\zeta_1 + 0) = \alpha_0$, $\arg\tau(\zeta_1 + 0) = \beta_0$, получаем

$$\begin{aligned} &\arg\mu(\zeta_k - 0) = \alpha_0 + \beta_0 + \sum_{j=1}^{k-1}\Delta_j(\mu + \tau) + \sum_{j=2}^{k-1}(\varphi_j + \psi_j), \\ &\arg\mu(\zeta_k + 0) = \alpha_0 + \beta_0 + \sum_{j=1}^{k-1}\Delta_j(\mu + \tau) + \sum_{j=2}^{k}(\varphi_j + \psi_j) \quad (k = 2, \ldots, n), \\ &\arg\mu(\zeta_k - 0) - \arg\mu(\zeta_k + 0) = -(\varphi_k + \psi_k) \quad (k = 2, \ldots, n), \\ &\arg\mu(\zeta_k - 0) = \alpha_0 + \beta_0 + \sum_{j=1}^{n}\Delta_j(\mu + \tau) + \sum_{j=2}^{n-1}(\varphi_j + \psi_j), \end{aligned}$$

отсюда из (7)

$$\arg\mu(\zeta_1 - 0) - \arg\mu(\zeta_1 + 0) = 4\pi - (\varphi_1 + \psi_1).$$

Далее, выбирая $\Lambda(\zeta) = -2\arg\mu(\zeta)$, имеем

$$\omega_1 = 2(\varphi_1 + \psi_1 - 4\pi), \quad \omega_j = 2(\varphi_j + \psi_j),$$

откуда

$$\varkappa = \sum_{j=2}^{n}\left[\frac{\varphi_j + \psi_j}{\pi}\right] + \left[\frac{\varphi_1 + \psi_1}{\pi} - 4\right]. \tag{8}$$

Формула (6) есть следствие равенства (8) и неравенств (5). ▷

Замечание. Так как в особенной точке ζ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ пары $(\bar{\ell}, \bar{t})$ величина $\left[\frac{\omega_j}{2\pi}\right]$ — целое число, то согласно [6] точка ζ_i является особенной точкой граничного условия (3) и, следовательно, любое решение задачи (3) ограничено в окрестности этой точки (см. [1]).

3. Разрешимость задачи A_g. Геометрические результаты

Ниже мы следуем обозначениям, используемым в теории кусочно-гёльдеровой задачи Римана — Гильберта для аналитических функций, а также в теории соответствующей задачи для обобщенных аналитических функций (см. [1, 6]). Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$ — произвольно отмеченные неособенные точки из числа $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Введем в рассмотрение решение класса $h(\zeta_1, \ldots, \zeta_m)$ задачи R_g, т. е. решение $w(\zeta)$, ограниченное в точках $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ и допускающее в $D_\theta \cup U(\zeta_j)$, где $U(\zeta_j)$ — некоторая окрестность точки ζ_j $(j = m+1, \ldots, n)$, оценку $|w(\zeta)| \leqslant A|\zeta - \zeta_j|^{-\alpha_j}$, $0 < \alpha_j < 1$, $A = \text{const}$, а величины α_j вполне определены парой функций $\lambda(\zeta)$, $\tau(\zeta)$. Класс решений, ограниченных во всех точках $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, обозначим через h^0.

Сведем задачу R_g к случаю, когда область D_θ — единичный круг. Пусть $\zeta = \varphi(z)$ — конформное преобразование единичного круга G на область D_θ, в результате которого уравнение (1) и условие (3) принимают вид:

$$\partial_{\bar{z}} w_0(z) + B_0(z)\bar{w}_0(z) = 0, \quad z \in G, \tag{9}$$

$$\operatorname{Re}\{\lambda_0(z) w_0(z)\} = 0, \quad z \in \partial G, \tag{10}$$

где $B_0(z) = \overline{\varphi'(z)} B[\varphi(z)]$, $\lambda_0(z) = \lambda[\varphi(z)]$, причем $\lambda_0(z)$ есть кусочно-гладкая функция с точками разрыва $z_j = \varphi^{-1}(\zeta_j)$, а производная $\varphi'(z)$ в окрестности точки z_j имеет вид (см. [3, гл. 1]) $\varphi'(z) = (z - z_j)^{1/\theta_j - 1}\psi_0^{(j)}(z)$, где $\psi_0^{(j)}(z)$ — непрерывная в окрестности точки z_j функция, причем $\psi_0^{(j)}(z_j) \neq 0$ $(j = 1, \ldots, n)$. Таким образом, $B_0(z) \in L_q(G)$, где $2 < q < \frac{2p}{2+p(1-1/\theta_0)}$ при $p > 2\theta_0$. Будем отыскивать решения задачи (9), (10), принадлежащие классу регулярности $W^{1,q}$, $2 < q < \frac{2p}{2+p(1-1/\theta_0)}$, в любой замкнутой подобласти области G и классу $h(z_1, \ldots, z_m)$, $1 \leqslant m \leqslant n$, где $z_1, \ldots, z_m$ — произвольно отмеченные неособенные точки из числа $z_1, \ldots, z_n$. Согласно [6], индекс $\varkappa$ граничного условия (10) в классе $h(z_1, \ldots, z_m)$ определяются равенством

$$\varkappa = \sum_{j=1}^{n} \varkappa_j,$$

где $\varkappa_j = [\frac{\omega_j}{2\pi}]$ при $j = 1, \ldots, m$, и $\varkappa_j = [\frac{\omega_j}{2\pi}] + 1$ при $j = m+1, \ldots, n$, ω_j — скачок аргумента функции $\Lambda_0(z) = \frac{\lambda_0(z)}{\bar{\lambda}_0(z)}$ в точке разрыва z_j, взятый с обратным знаком.

Лемма 2. *Если $\bar{\ell}, \bar{t} \in \mathscr{L}^{r,q}_{\alpha,\beta}(\Gamma)$, $(\bar{\ell}, \bar{t})$ — пара нормального типа, $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$ — произвольно отмеченные неособенные точки из числа $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, то индекс соответствующей задачи* (9), (10) *в классе $h(z_1, \ldots, z_m)$ находится по формуле*

$$\varkappa = n - m + n^{(1)} - n^{(3)} - 2n^{(4)} - 4, \tag{11}$$

где $n^{(k)}$ — число точек разрыва k-го типа $(k = 1, \ldots, 4)$.

$\lhd$ Доказательство следует из формулы (6) и конформной инвариантности индекса граничного условия. $\rhd$

Для формулировки результатов введем следующую классификацию угловых точек поверхности S_ν: точку c_j с внутренним углом $\nu_j\pi$ назовем неособенной точкой k-го типа задачи A_g (или *точкой k-го типа*), если

$$\frac{k-1}{2} < \nu_j < \frac{k}{2} \quad (k = 1, \dots, 4;\ 1 \leqslant j \leqslant n). \tag{12}$$

Если $\nu_j = k/2$ $(1 \leqslant k \leqslant 3)$, то точку c_j назовем особенной и будем относить к k-му типу. Очевидно, при $k = 2$ мы имеем точку гладкости, которую формально можно отнести ко 2-му типу.

Рассмотрим граничное условие (2), задаваемое парой $\bar{s} = \{s_1(\zeta), s_2(\zeta)\}$, $\bar{n} = \{n_1(\zeta), n_2(\zeta)\}$, где $\bar{s}(\zeta)$ — касательный к Γ в точке ζ единичный вектор, $\bar{n}(\zeta)$ — единичный вектор, задающий в каждой точке ζ кривой Γ направление, являющееся образом ортогонального к L направления на поверхности S_0 в соответствующей точке. Не нарушая общности, будем полагать, что направление вектора $\bar{s}(\zeta)$ в каждой точке совпадает с положительным направлением обхода границы $\Gamma = \partial D_\theta$, а вектор $\bar{n}(\zeta)$ с началом в соответствующей точке границы направлен вне области D_θ. При указанном выборе направлений векторов $\bar{s}(\zeta)$ и $\bar{n}(\zeta)$ с учетом $(*)$ имеем:

$$0 < (\bar{s}_{(-i)}, \bar{s}_{(+i)}) < \pi, \quad 0 < (\bar{n}_{(-i)}, \bar{n}_{(+i)}) < \pi$$

в точках ζ_i, соответствующих угловым точкам c_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 1-го и 2-го типа поверхности S_ν;

$$-\pi < (\bar{s}_{(-j)}, \bar{s}_{(+j)}) < 0, \quad -\pi < (\bar{n}_{(-j)}, \bar{n}_{(+j)}) < 0$$

в точках ζ_j, соответствующих угловым точкам c_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ 2-го и 3-го типа.

Следовательно, $\bar{s}, \bar{n} \in \mathscr{L}^{r,q}_{\alpha,\beta}$, $q+r = n$, $r = m^{(1)}+m^{(2)}$, $q = m^{(3)}+m^{(4)}$, где $m^{(k)}$ — число угловых точек k-го типа $(k = 1, 2, 3, 4)$ поверхности S_ν, $\alpha = (i_1, \dots, i_r)$, $\beta = (k_1, \dots, k_q)$ — сочетания соответствующих индексов. По построению $(\bar{s}(\zeta), \bar{n}(\zeta))$ в точке разрыва ζ_i, соответствующей особенной угловой точке c_i, пара прямых $p(\bar{s}_{(-i)})$, $p(\bar{s}_{(+i)})$ совпадает с парой $p(\bar{n}_{(-i)})$, $p(\bar{n}_{(+i)})$, причем $\bar{s}_{(-i)} = \bar{n}_{(+i)}$, $\bar{s}_{(+i)} = -\bar{n}_{(-i)}$, если c_i — точка 1-го типа $(\nu_i = 1/2)$, и $\bar{s}_{(+i)} = \bar{n}_{(-i)}$, $\bar{s}_{(-i)} = -\bar{n}_{(+i)}$, если c_i — точка 2-го типа $(\nu_i = 3/2)$. Таким образом, если в точке c_i выполняется одно из двух неравенств $0 < \nu_i < 1/2$, $0 < \nu_i < 3/2$ $(1/2 < \nu_i < 1,\ 3/2 < \nu_i < 2)$, то векторы $\bar{s}_{(\pm i)}$ и $\bar{n}_{(\pm i)}$ находятся по разные стороны (по одну сторону) от прямых $p(\bar{n}_{(\pm i)})$ и $p(\bar{s}_{(\pm i)})$ соответственно, и, следовательно, $(\bar{s}(\zeta), \bar{n}(\zeta))$ — пара нормального типа. Далее, непосредственной проверкой убеждаемся, что в точке разрыва ζ_i, соответствующей неособенной точке c_i 1-го или 4-го типа (2-го или 3-го типа), пара $\bar{\ell}_{(\pm i)}$ разделяет (не разделяет) пару $\bar{n}_{(\pm i)}$. Итак, задача (1), (2) есть задача R_g, причем угловой точке c_i k-го типа (особенной или неособенной) поверхности S_ν соответствует точка разрыва k-го типа (особенная или неособенная соответственно) граничного условия (2) $(1 \leqslant k \leqslant 4)$.

Пусть S_ν — заданная выше поверхность положительной гауссовой кривизны с краем L, содержащим n угловых точек c_i $(i = 1, \dots, n)$, и пусть $c_1, \dots, c_m$ — произвольно отмеченные неособенные угловые точки из числа $c_1, \dots, c_n$. Следуя [2], введем в рассмотрение бесконечно малые изгибания класса $H(c_1, \dots, c_m)$, а именно: будем говорить, что поверхность S_ν допускает бесконечно малые изгибания класса $H(c_1, \dots, c_m)$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$, если на $S_\nu \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{m} c_k$ определено поле изгибаний, порожденное решением класса $h(\zeta_{m+1}, \dots, \zeta_n)$ соответствующей задачи A_g. Через H^0 обозначим класс бесконечно малых изгибаний поверхности S_ν, задаваемых решениями класса h^0 задачи A_g.

Теорема 1. *Пусть S_ν — заданная выше поверхность класса регулярности $W^{3,p}$, $p > 2\theta_0$, где $\theta_0 = \max\{1, \omega(\nu)\}$, край которой содержит $n^{(k)}$ неособенных угловых точек k-го типа соответственно $\left(1 \leqslant k \leqslant 4;\ \sum\limits_{k=1}^{4} n^{(k)} = n\right)$, а $c_1, \ldots, c_m$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$ — произвольно отмеченные неособенные точки из числа угловых точек $c_1, \ldots, c_n$. Если $N \equiv n^{(1)} - n^{(3)} - 2n^{(4)} > 3 - m$, то поверхность S_ν при условии стационарности геодезического кручения в направлении края ($\delta\tau_g = 0$) допускает точно $N + m - 3$ линейно независимых нетривиальных бесконечно малых изгибаний класса $H(c_1, \ldots, c_m)$ и является жесткой в том же классе, если $N \leqslant 3 - m$.*

Замечание. На основании выражения для функции напряжений можно допустить, что порождаемая соответствующим решением деформация класса $H(c_1, \ldots, c_m)$ сопровождается «скручиванием» поверхности в окрестности угловых точек $c_1, \ldots, c_n$.

Пусть $\sigma = \sigma(s)$ — произвольно заданная функция точек края L, имеющая разрывы первого рода в точках $c_1, \ldots, c_n$, $\sigma(s) \in C^\varepsilon$ на каждой из дуг L_j $(j = 1, \ldots, n)$, s — натуральный параметр. Имеет место

Теорема 2. *Если $N \geqslant 3$, то поверхность S_ν допускает $(N-3)$-параметрическое семейство нетривиальных бесконечно малых изгибаний класса H^0, совместимых с условием $\delta\tau_g = \sigma$.*

Теоремы 1 и 2 есть следствия лемм 1 и 2 и результатов (см. [1]) о разрешимости задачи Римана — Гильберта для обобщенных аналитических функций (по И. Н. Векуа) с разрывным граничным условием.

Пусть заданная на L функция σ в угловых точках c_i удовлетворяет дополнительному условию точечного типа $\sigma(c_j) = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$. Тогда имеет место

Теорема 3. *Если $N \geqslant 3$, то поверхность S_ν допускает $(N-3)$-параметрическое семейство нетривиальных бесконечно малых изгибаний класса H^0 и непрерывных в $\bar{D}_\theta$, совместимых с условием $\delta\tau_g = \sigma$.*

Теорема 3 есть следствие теоремы 2 и представления общего решения неоднородной задачи Римана — Гильберта для обобщенных аналитических функций (см. [3]).

Литература

1. *Тюриков Е. В.* Краевые задачи теории бесконечно малых изгибаний поверхностей // Мат. сб.—1977.—Т. 7, № 3.—С. 445–462.
2. *Тюриков Е. В.* Об одном расширенном классе бесконечно малых изгибаний регулярных локально выпуклых поверхностей // Владикавк. мат. журн.—2005.—Т. 7, № 1.—С. 61–66.
3. *Векуа И. Н.* Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек // Мат. сб.—1952.—Т. 31, № 2.—С. 217–314.
4. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции.—М.: Физматгиз, 1959.—628 с.
5. *Тюриков Е. В.* Об одной задаче теории бесконечно малых изгибаний поверхностей и ее приложении // Сб. трудов участников Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова, Абрау-Дюрсо, 5–11 сентября 2006.—С. 94–95.
6. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.—М.: Физматгиз, 1968.—513 с.

Статья поступила 8 февраля 2007 г.

Тюриков Евгений Владимирович
Южный федеральный университет,
Ростов-на-Дону, 344090, РОССИЯ
E-mail: tjurikov@newmail.ru