Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2004, Том 6, Выпуск 2

УДК **517.5 + 517.98**

ПРОДОЛЖЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ДО ЦЕЛЫХ С СОГЛАСОВАННЫМИ ОЦЕНКАМИ РОСТА И ТЕОРЕМЫ ТИПА ПЭЛИ — ВИНЕРА — ШВАРЦА[1]

А. В. Абанин, Ю. С. Налбандян, И. С. Шабаршина

Рассматривается задача о взаимосвязи между оценками роста целых функций в $\mathbb{C}^N$ и роста всех последовательных производных их сужений на $\mathbb{R}^N$. Указаны применения полученных на пути ее решения результатов к новым, не выходящим за рамки действительного анализа формулировкам теорем типа Пэли — Винера — Шварца для ультрараспределений с носителями в выпуклых симметричных относительно всех координатных гиперплоскостей $\mathbb{R}^N$ компактах.

Введение

В работе [1] был установлен следующий результат (мы используем стандартную терминологию и обозначения теории распределений из [2]).

Теорема М. *Пусть K — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^N$, симметричный относительно всех координатных гиперплоскостей. Тогда следующие условия на распределение $u \in D'(\mathbb{R}^N)$ эквивалентны:*

(i) *носитель u лежит в K;*

(ii) *преобразование Фурье — Лапласа $\widehat{u}$ распределения u удовлетворяет при некоторых $C > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ оценке*

$$|\widehat{u}(z)| \leqslant C(1+|z|)^m e^{H_K(\operatorname{Im} z)} \qquad (\forall z \in \mathbb{C}^N),$$

где $H_K(\cdot)$ — опорная функция K;

(iii) *имеется такое $m \in \mathbb{N}$, при котором преобразование Фурье $\widehat{u}$ распределения u удовлетворяет условию: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $C = C(\varepsilon) < \infty$, что при каждом $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$*

$$|\widehat{u}^{(\alpha)}(\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^m \max_{x\in K}(|x_1|+\varepsilon)^{\alpha_1}\dots(|x_N|+\varepsilon)^{\alpha_N} \qquad (\forall \xi \in \mathbb{R}^N).$$

Утверждение об эквивалентности (i) и (ii) составляет содержание классической теоремы Пэли — Винера — Шварца (см. [2; теорема 7.3.1]), а новым моментом, появившимся в [1], было доказательство равносильности (i) (или (ii)) условию (iii). Недавно в [3] были установлены аналогичные теореме М результаты для пробных ультрадифференцируемых функций, ультрараспределений и гиперфункций из пространств, рассматриваемых в рамках подхода, известного в литературе под названием подхода Данжуа — Карлемана

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 02-01-00372.

(см. по этому поводу, например, [4]). Они были названы в [3] вещественными версиями теорем типа Пэли — Винера.

На самом деле рассмотренные в [1] и [3] задачи имеют лишь косвенное отношение к теориям ультрараспределений или гиперфункций, а прямо они связаны со следующим вопросом. Имеется целая в $\mathbb{C}^N$ функция $f(z)$, рост модуля которой во всем $\mathbb{C}^N$ ограничен некоторым весом $\lambda_1(z)$. Берется сужение $f(x)$ этой функции на вещественное подпространство $\mathbb{R}^N$ и требуется найти такую мажоранту $\mu_1(x,\alpha)$, которая подавляла бы $|f^{(\alpha)}(x)|$ при каждом $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ и всех $x \in \mathbb{R}^N$. Обратно, имея бесконечно дифференцируемую на $\mathbb{R}^N$ функцию $f(x)$ с оценкой $|f^{(\alpha)}(x)|$ через $\mu_2(x,\alpha)$, нужно выяснить условия, при которых она продолжается до целой в $\mathbb{C}^N$ функции с ростом, не превышающим какого-либо веса $\lambda_2(z)$. Ясно, что нас должны интересовать такие мажоранты роста, что совершив полный цикл ($\mathbb{C}^N \downarrow \mathbb{R}^N \uparrow \mathbb{C}^N$ или $\mathbb{R}^N \uparrow \mathbb{C}^N \downarrow \mathbb{R}^N$), мы не слишком «испортим» первоначальную оценку.

Настоящая статья посвящена решению поставленной задачи для мажорант достаточно общего вида и ее приложениям. Отметим, что по сравнению с [1] и [3] мы существенно расширяем классы целых и соответствующих им бесконечно дифференцируемых функций. В частности, если в [1, 3] речь идет лишь о целых функциях экспоненциального типа, то в данной статье изучаются функции произвольного положительного порядка. Последнее представляет интерес хотя бы потому, что в аналогах теоремы Пэли — Винера — Шварца для некоторых типов пространств бесконечно дифференцируемых функций фигурируют целые функции порядка выше первого (см., например, [5]).

1. Согласованные оценки роста следов и продолжений

1.1. Обозначения. Будем использовать следующие стандартные обозначения многомерного анализа: $\langle z,\zeta\rangle := z_1\zeta_1 + \cdots + z_N\zeta_N$ для $z = (z_1,\ldots,z_N)$ и $\zeta = (\zeta_1,\ldots,\zeta_N)$ из $\mathbb{C}^N$; $\|z\| := \max\{|z_j| : 1 \leqslant j \leqslant N\}$ и $\operatorname{abs} z := (|z_1|,\ldots,|z_N|)$ для $z = (z_1,\ldots,z_N) \in \mathbb{C}^N$; $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$ — длина мультииндекса $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$, где $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_N!$, $r^\alpha := (r_1^{\alpha_1} \ldots r_N^{\alpha_N})$ для $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ и $r = (r_1,\ldots,r_N) \in [0,\infty)^N$; $f^{(\alpha)} := \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}$.

Любую функцию $v : [0,\infty)^N \to [0,\infty)$, которая непрерывна и не убывает по каждой переменной на $[0,\infty)^N$, будем называть *весовой* (или просто *весом*). Их совокупность обозначим символом V^N.

Начнем с более простого по методу исследования вопроса о «спуске» оценок из $\mathbb{C}^N$ на $\mathbb{R}^N$, который относится к так называемым теоремам о следах.

Теорема 1.2 (о следах). *Пусть весовые функции u, v из V^N и ω из V^{2N} таковы, что*

$$\omega(s+r,r) \leqslant u(s) + u(r) + v(r), \quad s,r \in [0,\infty)^N. \tag{1}$$

Тогда для всякой целой в $\mathbb{C}^N$ функции f, для которой

$$|f(z)| \leqslant e^{\omega(\operatorname{abs} x, \operatorname{abs} y)}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}^N, \tag{2}$$

имеет место оценка

$$|f^{(\alpha)}(x)| \leqslant e^{u(\operatorname{abs} x)} \inf_{r\in(0,\infty)^N} \frac{\alpha! \exp(u(r)+v(r))}{r^\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^N,\ \alpha \in \mathbb{N}_0^N. \tag{3}$$

$\lhd$ Применив к f в каждой точке $x \in \mathbb{R}^N$ интегральную формулу Коши и воспользовавшись (1) и (2), получим при каждом $r \in (0,\infty)^N$:

$$\begin{aligned}|f^{(\alpha)}(x)| &= \frac{\alpha!}{(2\pi)^N}\left|\int\limits_{|\zeta_1-x_1|=r_1}\cdots\int\limits_{|\zeta_N-x_N|=r_n}\frac{f(\zeta_1,\ldots,\zeta_N)\,d\zeta_1\ldots d\zeta_N}{(\zeta_1-x_1)^{\alpha_1+1}\ldots(\zeta_N-x_N)^{\alpha_N+1}}\right|\\ &\leqslant \frac{\alpha!}{r^\alpha}\max\Big\{|f(\zeta_1,\ldots,\zeta_N)| : \ |\zeta_k-x_k|=r_k,\ 1\leqslant k\leqslant N\Big\}\\ &\leqslant \frac{\alpha!}{r^\alpha}e^{\omega(\operatorname{abs}x+r,r)}\leqslant\frac{\alpha!}{r^\alpha}e^{u(\operatorname{abs}x)+u(r)+v(r)}.\end{aligned}$$

Отсюда следует требуемая оценка (3). $\rhd$

Замечание. Напомним, что сопряженной по Юнгу (говорят также по Лежандру — Юнгу — Фенхелю, см. [6; стр. 10]) к функции $\varphi :\ \mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ называют

$$\varphi^*(y) := \sup(\langle x,y\rangle-\varphi(x) : x\in\mathbb{R}^N), \qquad y\in\mathbb{R}^N.$$

В свете этого понятия оценку (3) можно дать в такой интерпретации:

$$|f^{(\alpha)}(x)|\leqslant \alpha!e^{-\varphi^*_{u+v}(\alpha)}e^{u(\operatorname{abs}x)}, \quad x\in\mathbb{R}^N,\ \alpha\in\mathbb{N}_0^N, \tag{3'}$$

где φ^*_{u+v} — сопряженная по Юнгу к $\varphi_{u+v}(x) := u(e^{x_1},\ldots,e^{x_N})+v(e^{x_1},\ldots,e^{x_N})$.

Перед формулировкой результата, обратного к теореме 1.2 характера, который естественно классифицировать как теорему о продолжении, введем следующее определение. Будем говорить, что функция $v :\ [0,\infty)^N\to[0,\infty)$ *позитивно полуоднородна порядка* $\rho>0$, если $v(tr)\leqslant t^\rho v(r)$ при всех $t>0$ и всех $r\in[0,\infty)^N$.

Теорема 1.3 (о продолжении). *Пусть u, v — весовые функции из V^N, причем v позитивно полуоднородна порядка $\rho>0$. Тогда всякая бесконечно дифференцируемая на $\mathbb{R}^N$ функция f, для которой*

$$|f^{(\alpha)}(x)|\leqslant e^{u(\operatorname{abs}x)}\inf_{r\in(0,\infty)^N}\frac{\alpha!\exp v(r)}{r^\alpha}, \quad x\in\mathbb{R}^N,\ \alpha\in\mathbb{N}_0^N, \tag{4}$$

однозначно продолжается до целой в $\mathbb{C}^N$ функции $f(z)$, удовлетворяющей оценке

$$|f(z)|\leqslant C_{N,\rho}(1+\sqrt{v(\operatorname{abs}y)})^{2N-1}e^{u(\operatorname{abs}x)+v(\operatorname{abs}y)}, \quad z=x+iy\in\mathbb{C}^N, \tag{5}$$

где $C_{N,\rho}$ — постоянная, зависящая лишь от размерности пространства $\mathbb{R}^N$ и числа ρ.

$\lhd$ Прежде всего отметим, что позитивная полуоднородность v при порядке ρ влечет, что

$$\inf_{r\in(0,\infty)}\frac{\exp v(r)}{r^\alpha}\leqslant\inf_{r\in(0,\infty)^N}\frac{1}{r^\alpha}\inf_{t>0}\frac{\exp t^\rho v(r)}{t^{|\alpha|}}=\inf_{r\in(0,\infty)^N}\frac{1}{r^\alpha}\left(\frac{e\,\rho\,v(r)}{|\alpha|}\right)^{|\alpha|/\rho}.$$

Отсюда и из (4) заключаем, что при любом $r\in(0,\infty)^N$

$$|f^{(\alpha)}(x)|\leqslant\alpha!e^{u(\operatorname{abs}x)}\frac{1}{r^\alpha}\left(\frac{e\,\rho\,v(r)}{|\alpha|}\right)^{|\alpha|/\rho}, \quad x\in\mathbb{R}^N,\ \alpha\in\mathbb{N}_0^N. \tag{4'}$$

Здесь и ниже считаем, что $0^0=1$.

Далее, из (4) следует, что при каждом $R>0$ и всех $x\in\mathbb{R}^N$ с $\|x\|\leqslant R$

$$|f^{(\alpha)}(x)|\leqslant A_R\,\alpha!, \quad \text{где} \quad A_R := e^{u(R,\ldots,R)+v(1,\ldots,1)}.$$

Поэтому f продолжается до целой в $\mathbb{C}^N$ функции, за которой мы сохраним то же самое обозначение f (см., например, [7; предложение 1.1.14 и лемма 1.1.5]). Однозначность продолжения вытекает из теоремы единственности для голоморфных функций многих переменных (см. [8; стр. 32]).

Зафиксируем, теперь, произвольное $y \in \mathbb{R}^N$ с ненулевыми координатами. Разложив $f(z)$ в ряд Тейлора с центром в точке $x \in \mathbb{R}^N$ и применив (4′) с $r = \operatorname{abs} y$, получим при $z = x + iy$:

$$|f(z)| \leqslant \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \frac{f^{(\alpha)}(x)}{\alpha!}|y^\alpha| \leqslant e^{u(\operatorname{abs} x)} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \left(\frac{e\,\rho\, v(\operatorname{abs} y)}{|\alpha|}\right)^{|\alpha|/\rho}$$
$$= e^{u(\operatorname{abs} x)} \sum_{n=0}^{\infty} C_{N,n} \left(\frac{e\,\rho\, v(\operatorname{abs} y)}{n}\right)^{n/\rho},$$

где $C_{N,n} := \sum\limits_{|\alpha|=n} 1 = \frac{N(N+1)\dots(N+n-1)}{n!}$ при $n \geqslant 1$ и $C_{N,0} = 1$. Ясно, что $C_{N,n} \leqslant (2n)^{N-1}$ при $n \geqslant 1$, и поэтому справедливо следующее продолжение предыдущей оценки (для простоты записи полагаем $0^{N-1} = 1$):

$$|f(z)| \leqslant 2^{N-1} e^{u(\operatorname{abs} x)} \sum_{n=0}^{\infty} n^{N-1} \left(\frac{e\,\rho\, v(\operatorname{abs} y)}{n}\right)^{n/\rho}. \tag{6}$$

Асимптотическое поведение суммы ряда, стоящего в правой части этого неравенства, при $v(\operatorname{abs} y) \to \infty$ известно. Именно, из [9; отдел четвертый, задачи 46, 47, 68 и 70] следует, что при $r \to \infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{N-1} \left(\frac{e\rho r}{n}\right)^{n/\rho} \sim \sqrt{2\pi r}\, r^{N-1} \rho^N e^r.$$

Поэтому существует $D_{N,\rho} < \infty$ такое, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{N-1} \left(\frac{e\rho r}{n}\right)^{n/\rho} \leqslant D_{N,\rho} (1 + \sqrt{r})^{2N-1} e^r \qquad (\forall r \geqslant 0).$$

Полагая $C_{N,\rho} = 2^{N-1} D_{N,\rho}$, получим отсюда и из (6) требуемую оценку (5). $\triangleright$

Покажем согласованность полученных нами в теоремах 1.2 и 1.3 оценок следов и продолжений на примере используемых в приложениях пространств целых в $\mathbb{C}^N$ и бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^N$ функций.

Пусть u и v — две весовые функции из V^N, $\rho > 0$ — фиксированное число. Положим

$$H_{u,v,\rho} := \Bigg\{ f \in H(\mathbb{C}^N) : \ (\forall \varepsilon > 0)$$
$$\|f\|_{u,v,\rho,\varepsilon} := \sup_{z \in \mathbb{C}^N} \frac{|f(z)|}{\exp\big(u(\operatorname{abs} x) + v(\operatorname{abs} y) + \varepsilon \|y\|^\rho\big)} < \infty \Bigg\},$$

где $H(\mathbb{C}^N)$ — пространство всех целых в $\mathbb{C}^N$ функций, и где, как и выше, $z = x + iy$. Определим далее такое подпространство пространства $A(\mathbb{R}^N)$ всех вещественно аналитических в $\mathbb{R}^N$ функций:

$$A_{u,v,\rho} := \Bigg\{ f \in A(\mathbb{R}^N) : \ (\forall \varepsilon > 0) \ \ |f|_{u,v,\rho,\varepsilon} := \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{|f^{(\alpha)}(x)|}{\alpha! \mu_v(\alpha, \varepsilon) e^{u(\operatorname{abs} x)}} < \infty \Bigg\},$$

где $\mu_v(\alpha,\varepsilon) := \inf\limits_{r\in(0,\infty)^N} \frac{1}{r^\alpha}\exp\bigl(v(r)+\varepsilon\|r\|^\rho\bigr)$.

Наделенные топологиями, задаваемыми наборами норм $\bigl(\|\cdot\|_{u,v,\rho,\varepsilon}\bigr)_{\varepsilon>0}$ и $\bigl(|\cdot|_{u,v,\rho,\varepsilon}\bigr)_{\varepsilon>0}$, соответственно, пространства $H_{u,v,\rho}$ и $A_{u,v,\rho}$ являются пространствами Фреше.

Из теорем 1.2 и 1.3 легко следует такой результат.

Теорема 1.4. *Пусть u, v — весовые функции из V^N, причем u полуаддитивна сверху, v позитивно полуоднородна порядка $\rho>0$, и $u(r)=o(\|r\|^\rho)$ при $\|r\|\to\infty$. Тогда оператор сужения $f\in H_{u,v,\rho}\mapsto f(x)\in A_{u,v,\rho}$ является топологическим изоморфизмом пространства $H_{u,v,\rho}$ на $A_{u,v,\rho}$.*

$\lhd$ Пусть $f\in H_{u,v,\rho}$, т. е. для любого $\varepsilon>0$

$$|f(z)|\leqslant \|f\|_{u,v,\rho,\varepsilon}\, e^{u(\operatorname{abs}x)+v(\operatorname{abs}y)+\varepsilon\|y\|^\rho}, \qquad z=x+iy\in\mathbb{C}^N.$$

Применив теорему 1.2 с $\omega(s,r)=u(s)+v(r)+\varepsilon\|r\|^\rho$ (условие (1) выполняется в силу полуаддитивности u) и воспользовавшись тем, что $u(r)=o(\|r\|^\rho)$ при $\|r\|\to\infty$, получим при некотором $C_\varepsilon<\infty$, что при всех $x\in\mathbb{R}^N$ и $\alpha\in\mathbb{N}_0^N$

$$\begin{aligned}|f^{(\alpha)}(x)| &\leqslant \|f\|_{u,v,\rho,\varepsilon}\, e^{u(\operatorname{abs}x)} \inf_{r\in(0,\infty)^N}\frac{\alpha!\exp(u(r)+v(r)+\varepsilon\|r\|^\rho)}{r^\alpha}\\ &\leqslant C_\varepsilon\|f\|_{u,v,\rho,\varepsilon}\, e^{u(\operatorname{abs}x)} \inf_{r\in(0,\infty)^N}\frac{\alpha!\exp(v(r)+2\varepsilon\|r\|^\rho)}{r^\alpha} = C_\varepsilon\alpha!\mu_v(\alpha,2\varepsilon)e^{u(\operatorname{abs}x)}.\end{aligned}$$

Отсюда $|f|_{u,v,\rho,2\varepsilon}\leqslant C_\varepsilon\|f\|_{u,v,\rho,\varepsilon}$ для всех f из $H_{u,v,\rho}$. Таким образом, оператор сужения действует непрерывно из $H_{u,v,\rho}$ в $A_{u,v,\rho}$. Его инъективность следует из упомянутой ранее теоремы единственности.

Остается установить сюръективность обратного оператора (оператора продолжения), так как его непрерывность следует из теоремы Банаха об обратном операторе для пространств Фреше. А сюръективность легко получается из теоремы 1.3, если заметить, что появляющиеся после ее применения множители вида $C_{N,\rho}(1+\sqrt{v(\operatorname{abs}y)+\varepsilon\|y\|^\rho})^{2N-1}$ являются $O(e^{\varepsilon\|y\|^\rho})$ во всем $\mathbb{R}^N$. $\rhd$

2. Вещественная трактовка аналогов теоремы Пэли — Винера — Шварца

Доказанная нами в предыдущем параграфе теорема о следах и продолжениях получена для мажорант, подчиняющихся достаточно общим по характеру ограничениям. Это обстоятельство позволяет применять их для широкого спектра задач, посвященных, прежде всего, двойственной взаимосвязи между различными пространствами бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^N$ и целых в $\mathbb{C}^N$ функций. Например, с их помощью легко получить все результаты работ [1, 3], касающиеся вещественных версий теорем Пэли — Винера, Пэли — Винера — Шварца и их аналогов для ультрадифференцируемых функций, ультрараспределений и гиперфункций. Здесь мы ограничимся демонстрацией использования теорем 1.2 и 1.3 в теории ультрараспределений Бёрлинга — Бьорка [10, 11], точнее, в одном из вариантов этой теории, разработанном в [12].

Определение 2.1. *Весовой функцией в смысле Брауна — Майзе — Тейлора* (см. [13]) будем называть непрерывную неубывающую на $[0,\infty)$ функцию $\omega:\ [0,\infty)\to[0,\infty)$, которая обладает следующими свойствами:

(α) $\omega(2t)=O(\omega(t))$ на $[0,\infty)$;

(β) $\int\limits_1^{\infty} t^{-2}\omega(t)dt < \infty$;

(γ) $\ln t = o(\omega(t))$, $t \to +\infty$;

(δ) $\varphi_\omega(t) := \omega(e^t)$ выпукла на $[0, \infty)$.

Определение 2.2. Пусть $\Omega = (\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность весовых в смысле Брауна — Майзе — Тейлора функций. Будем говорить, что Ω — *весовая последовательность типа Бёрлинга,* если для любого $n \in \mathbb{N}$ имеются такие $m = m(n) \in \mathbb{N}$ и $C = C(n) < \infty$, что

(1) $\omega_n(s + r) \leqslant \omega_m(s) + \omega_m(r) + C$ для любых $s, r \geqslant 0$;

(2) $\omega_n(r) + \ln(1 + r) \leqslant \omega_m(r) + C$ для любого $r \geqslant 0$.

Определение 2.3. Пусть G — открытое в $\mathbb{R}^N$ множество и $\Omega = (\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ — весовая последовательность, введенная в предыдущем определении. Следующее пространство называют *пространством ультрадифференцируемых функций типа Бёрлинга*:

$$\mathcal{E}_{(\Omega)}(G) := \left\{ f \in \mathbb{C}^{\infty}(G) : \ (\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall K \Subset G)\ \|f\|_{n,K} := \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}\sup_{x\in K} \frac{|f^{(\alpha)}(x)|}{\exp\varphi_n^*(|\alpha|)} < \infty \right\},$$

где φ_n^* — функция, сопряженная по Юнгу с φ_{ω_n}.

Нетрудно видеть, что в определении $\mathcal{E}_{(\Omega)}(G)$ можно ограничиться любой последовательностью $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ компактов, исчерпывающей G изнутри (напомним определяющие свойства таких последовательностей: $K_n \subset \mathrm{int} K_{n+1}$ $(n = 1, 2, \dots)$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n = G$). Поэтому в топологии, задаваемой набором преднорм $\|\cdot\|_{n,K}$, когда n пробегает $\mathbb{N}$, а K — все компакты, лежащие в G, оно является пространством Фреше.

В [12; теорема 3] был доказан такой аналог теоремы Пэли — Винера — Шварца:

Теорема AT. *Пусть G — выпуклая в $\mathbb{R}^N$ область, а $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность выпуклых компактов, исчерпывающая G изнутри. Тогда преобразование Фурье — Лапласа функционалов является топологическим изоморфизмом сильно сопряженного к $\mathcal{E}_{(\Omega)}(G)$ пространства на пространство целых в $\mathbb{C}^N$ функций*

$$H_{(\Omega,G)}(\mathbb{C}^N) := \left\{ g \in H(\mathbb{C}^N) : \ (\exists n \in \mathbb{N})\ \|g\|_n := \sup_{z\in\mathbb{C}^N} \frac{|g(z)|}{\exp\bigl(H_n(\operatorname{Im} z) + \omega_n(\|\operatorname{Re} z\|)\bigr)} < \infty \right\},$$

наделенное естественной топологией внутреннего индуктивного предела. Здесь $H_n(\cdot)$ — опорная функция компакта K_n.

Отметим, что для последовательности $\Omega = (n\omega)_{n=1}^{\infty}$, задаваемой одной весовой в смысле Брауна — Майзе — Тейлора функцией, этот результат был установлен в [13].

Легко заметить, что если G есть выпуклая симметричная относительно всех координатных гиперплоскостей область в $\mathbb{R}^N$, то и компакты, фигурирующие в определении введенных выше пространств, можно брать с такими же свойствами. Тогда $H_n(y) = H_n(\mathrm{abs}\, y)$ всюду в $\mathbb{R}^N$ $(n = 1, 2, \dots)$, причем эти функции позитивно однородны порядка 1. Далее, из ограничения (β) на весовые функции ω_n следует, что $\omega_n(t) = o(t)$ при $t \to \infty$, $n = 1, 2, \dots$. Поэтому условие (1) определения 2.2 влечет, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют $m \in \mathbb{N}$, $C < \infty$ такие, что

$$\omega_n(\|s + r\|) + H_n(r) \leqslant \omega_m(\|s\|) + H_m(r) + C, \qquad s, r \in [0, +\infty)^N.$$

Это дает возможность провести практически те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1.4, и придти к следующей, вещественной трактовке теоремы AT.

Теорема 2.4. *Пусть Ω и G те же, что в теореме АТ. Тогда преобразование Фурье функционалов устанавливает топологический изоморфизм между пространством, сильно сопряженным к $E_{(\Omega)}(G)$, и пространством вещественно аналитических в $\mathbb{R}^N$ функций*

$$A_{(\Omega,G)}(\mathbb{R}^N) := \left\{g \in A(\mathbb{R}^N) : \ (\exists n \in \mathbb{N}) \ |g|_n := \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \frac{|f^{(\alpha)}(x)|}{\alpha!\mu_n(\alpha)\exp\omega_n(\|x\|)} < \infty\right\},$$

наделенным естественной топологией внутреннего индуктивного предела. Здесь $\mu_n(\alpha) = \inf\limits_{r\in(0,\infty)^N} \dfrac{\exp(H_n(r))}{r^\alpha}$.

Литература

1. *Mandache N.* A Paley–Wiener theorem and pseudolocal operators // Rev. Roumaine Math. Pures Appl.—1990.—V. 35.—P. 321–328.
2. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье.—М.: Мир, 1986.— 464 с.
3. *Chung J., Chung S.-Y., Kim D.* Real version of Paley–Wiener theorem for hyperfunctions and ultradistributions.—Seoul, 2002.—13 с.—(Preprint).
4. *Komatsu H.* Ultradistributions I. Structure theorems and a characterization // J. Fac. Sci. Tokyo, Sec. IA.—1973.—V. 20.—P. 25–105.
5. *Мусин И. Х.* О преобразовании Фурье — Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций // Матем. сб.—2000.—Т. 191, № 10.—С. 57–86.
6. *Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 14.—М.: ВИНИТИ, 1987.—С. 5–101.
7. *Нарасимхан Р.* Анализ на действительных и комплексных многообразиях.—М.: Мир, 1971.—232 с.
8. *Шабат В. Б.* Введение в комплексный анализ. Часть II. Функции нескольких переменных.—М.: Наука, 1976.—400 с.
9. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Часть II.—М.: Наука, 1978.—431 с.
10. *Beurling A.* Quasi-analyticity and general distributions. Lectures 4 and 5.—Stanford: AMS Summer Institute, 1961.
11. *Björck G.* Linear partial differential operators and generalized distributions // Ark. Mat.—1966.—V. 6.—P. 351–407.
12. *Абанин А. В., Тищенко Е. С.* Пространства ультрадифференцируемых функций и обобщение теоремы Пэли — Винера — Шварца // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки.—1997.—№ 2.—С. 5–8.
13. *Braun R., Meise R., Tailor B. A.* Ultradifferentiable functions and Fourier analysis // Results Math.—1990.—V. 17.—P. 206–237.

Статья поступила 20 января 2004 г.

Абанин Александр Васильевич, д. ф.-м. н.
г. Ростов, Ростовский государственный университет;
E-mail: abanin@math.rsu.ru

Налбандян Юлия Сергеевна, к. ф.-м. н.
г. Ростов, Ростовский государственный университет
E-mail: nalb@math.rsu.ru

Шабаршина Ирина Сергеевна, к. ф.-м. н.
г. Ростов, Ростовский государственный университет
E-mail: shabarshina@math.rsu.ru