Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2003, Том 5, Выпуск 4

УДК **517.98**

О КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЕ КОМПОЗИЦИИ

Е. К. Басаева, А. Г. Кусраев

Устанавливается, что композиция квазидифференцируемых отображений квазидифференцируема и выводится явная формула для вычисления квазидифференциала композиции. Используя технику дезинтегрирования, установлено, что в специальных случаях выполняется аналог классического «цепного правила» — квазидифференциал суперпозиции равняется суперпозиции квазидифференциалов. Получены следствия для вычисления квазидифференциалов супремума, инфимума и интегрального оператора.

Отображение называют квазидифференцируемым во внутренней точке области определения, если в этой точке существует производная по направлениям, которая представляет собой разность двух сублинейных операторов. Квазидифференцируемые функции и операторы введены в работах [2, 3]. Квазидифференциальное исчисление, построенное в работах Л. В. Васильева, В. Ф. Демьянова, Л. Н. Поляковой, А. М. Рубинова [1–5] и др. авторов, достаточно хорошо разработано для скалярных функций. В [5] показано как методы квазидифференциального исчисления могут быть применены к отображениям, действующим в банаховы K-пространства. В [6] введено понятие квазидифференциала отображения со значениями в произвольном K-пространстве и получены новые формулы для вычисления квазидифференциала произведения, супремума и инфимума.

Настоящая работа посвящена вычислению квазидифференциала композиции операторов, действующих в K-пространства. Устанавливается, что композиция квазидифференцируемых отображений квазидифференцируема и выводится явная формула для вычисления квазидифференциала композиции. Используя технику дезинтегрирования, установлено, что в специальных случаях выполняется аналог классического «цепного правила» — квазидифференциал суперпозиции равняется суперпозиции квазидифференциалов. Получены следствия для вычисления квазидифференциалов супремума, инфимума и интегрального оператора.

В статье использованы обозначения и терминология из [6–8].

1. Предварительные сведения

Пусть E — векторная решетка, а F — произвольное K-пространство. Сублинейный оператор $p : E \to F$ назовем *мажорируемым,* если существует линейный положительный оператор $\Lambda : E \to F$ такой, что $|p(x)| \leqslant \Lambda(|x|)$ для всех $x \in E$. При этом Λ именуют *мажорантой* оператора p. Множество операторов $\mathcal{U} \subset L^{\sim}(E,F)$ назовем *равномерно мажорируемым* (с *равномерной мажорантой* Λ), если $|Tx| \leqslant \Lambda(|x|)$ для всех $x \in E$ и $T \in \mathcal{U}$. Для $x \in E^+$ обозначим

$$C(x,p) := \left\{ \sum_{k=1}^{n} p(x_k) : \ x_1,\dots,x_n \in E, \ \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leqslant x, \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

1.1. *Для произвольного сублинейного оператора $p : E \to F$ равносильны следующие утверждения:*

(1) *оператор p мажорируем;*

(2) *существуют такие операторы $\Lambda_1, \Lambda_2 \in L^\sim(E,F)$, что $\Lambda_1(e) \leqslant -p(-e) \leqslant p(e) \leqslant \Lambda_2(e)$ для всех $e \in E^+$;*

(3) *опорное множество ∂p порядково ограничено в K-пространстве $L^\sim(E,F)$;*

(4) *опорное множество ∂p равномерно мажорируемо;*

(5) *для любого $x \in E^+$ множество $C(x,p)$ порядково ограничено в E.*

$\lhd$ (1) $\to$ (2): Если Λ — мажоранта оператора p, то p удовлетворяет условию (2) с операторами $\Lambda_1 := -\Lambda$ и $\Lambda_2 := \Lambda$.

(2) $\to$ (3): Если выполнено (2), то ∂p содержится в порядковом отрезке $[\Lambda_1,\,\Lambda_2]$.

(3) $\to$ (4): Если выполнено (3), то оператор $\Lambda := \sup\{|T| \,:\, T \in \partial p\}$, где супремум вычисляется в $L^\sim(E,F)$, будет равномерной мажорантой множества ∂p.

(4) $\to$ (5): Пусть $\Lambda \in L^+(E,F)$ — равномерная мажоранта множества ∂p. Возьмем такие элементы $x \in E^+$, $x_1,\dots,x_n \in E$, что $|x_1| + \dots + |x_n| \leqslant x$. Привлекая теорему Хана — Банаха — Канторовича, для каждого x_k подберем оператор $T_k \in \partial p$ так, чтобы $T_k x_k = p(x_k)$ (см. [7; 1.4.14 (1)]). Тогда справедливы соотношения

$$\sum_{k=1}^n p(x_k) = \sum_{k=1}^n T_k x_k \leqslant \sum_{k=1}^n \Lambda(|x_k|) \leqslant \Lambda(x),$$

что и доказывает порядковую ограниченность множества $C(x,p)$.

(5) $\to$ (1): Для каждого $x \in E^+$ положим $\Lambda(x) := \sup C(x,p)$. Покажем, что Λ — аддитивный оператор из E^+ в F. В самом деле, пусть $x = y + z$, где $y, z \in E^+$. Возьмем такие $y_1,\dots,y_n \in E$ и $z_1,\dots,z_m \in E$, что $|y_1| + \dots + |y_n| \leqslant y$ и $|z_1| + \dots + |z_m| \leqslant z$. Тогда $|y_1| + \dots + |y_n| + |z_1| + \dots + |z_m| \leqslant x$,

$$\sum_{k=1}^n p(y_k) + \sum_{l=1}^m p(z_l) \leqslant \Lambda(x).$$

Переход к супремуму в этом соотношении по указанным y_k и z_l дает $\Lambda(y) + \Lambda(z) \leqslant \Lambda(x)$.

Рассмотрим теперь произвольные элементы $x_1,\dots,x_n \in E$, для которых $|x_1| + \dots + |x_n| \leqslant x = y + z$. В силу леммы о двойном разбиении существуют такие $y_1,\dots,y_n \in E$ и $z_1,\dots,z_n \in E$, что $|y_1| + \dots + |y_n| \leqslant y$, $|z_1| + \dots + |z_n| \leqslant z$ и $x_k = y_k + z_k$ для всех $k = 1,\dots,n$. Учитывая определение Λ, можем написать

$$\sum_{k=1}^n p(x_k) = \sum_{k=1}^n p(y_k + z_k) \leqslant \sum_{k=1}^n p(y_k) + \sum_{k=1}^n p(z_k) \leqslant \Lambda(y) + \Lambda(z).$$

Тем самым $\Lambda x \leqslant \Lambda y + \Lambda z$. Очевидно, что оператор Λ также и положительно однороден, т. е. $\Lambda(\lambda x) = \lambda\Lambda(x)$ при $x \in E^+$ и $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Таким образом, существует положительный оператор из E в F, совпадающий с Λ на конусе E^+, который обозначим той же буквой Λ. Из определения Λ видно, что $p(x) \leqslant \Lambda(|x|)$ для произвольного $x \in E$. При замене x на $-x$ получим $p(-x) \leqslant \Lambda(|x|)$, поэтому, $|p(x)| \leqslant p(x) \vee p(-x) \leqslant \Lambda(|x|)$ $(x \in E)$. $\rhd$

1.2. Покажем теперь, что при некоторых условиях композиция квазилинейных операторов будет квазилинейной. В случае банаховых пространств это утверждение доказано в [5], см. также [4; Прил. 3].

Пусть X — векторное пространство, E — векторная решетка, а F — K-пространство. Рассмотрим сублинейные операторы $P, Q \in \mathrm{Sbl}(X, E)$ и $p, q \in \mathrm{Sbl}(E, F)$, причем предположим, что p и q мажорируемы. Тогда оператор $R = (p - q) \circ (P - Q)$ представим в виде разности двух сублинейных операторов.

$\lhd$ Рассмотрим сублинейный оператор $P \times Q : X \to E \times E$ и линейный оператор $\pi : E \times E \to E$, определенные формулами

$$(P \times Q)(x) = (P(x), Q(x)); \quad \pi(e_1, e_2) = e_1 - e_2.$$

Декартовы произведения $E \times E$ и $F \times F$ рассматриваются, как обычно, с покоординатными операциями и порядком. Как видно, имеет место представление $R = p\pi(P \times Q) - q\pi(P \times Q)$.

Это соотношение не дает нам требуемого представления в виде разности сублинейных операторов, так как $p\pi$ и $q\pi$ не являются возрастающими операторами. Следовательно, нужно последние заменить на возрастающие операторы $\widetilde{p}$ и $\widetilde{q}$ так, чтобы сохранить представление $R = \widetilde{p}(P \times Q) - \widetilde{q}(P \times Q)$. Сначала заметим, что сублинейный оператор r из предупорядоченного векторного пространства Z в F будет возрастающим в том и только в том случае, если $r(z) \leqslant 0$ при $z \leqslant 0$. В самом деле, последнее условие, очевидно, необходимо. Если же оно выполнено, то всякий оператор $T \in \partial r$ положителен, так как $-Tz \leqslant p(-z) \leqslant 0$ для $z \in Z^+$, см. [7; 2.1.1 (2)].

Пусть теперь регулярные операторы $\Lambda_1, \Lambda_2 \in L^\sim(E, F)$ таковы, что для каждого из операторов p и q выполнено условие 1.1 (2). Тогда для $e_1, e_2 \in E^+$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} p(e_2 - e_1) &\leqslant p(e_2) + p(-e_1) \leqslant \Lambda_2(e_2) - \Lambda_1(e_1), \\ q(e_2 - e_1) &\leqslant q(e_2) + q(-e_1) \leqslant \Lambda_2(e_2) - \Lambda_1(e_1). \end{aligned}$$

Эти неравенства можно переписать в виде

$$p\pi(-(e_1, e_2)) - \Lambda(-(e_1, e_2)) \leqslant 0, \quad q\pi(-(e_1, e_2)) - \Lambda(-(e_1, e_2)) \leqslant 0,$$

где оператор $\Lambda : E \times E \to F$ определяется формулой $\Lambda(a_1, a_2) := \Lambda_1(a_1) - \Lambda_2(a_2)$ $(a_1, a_2 \in E)$. Последние соотношения показывают, что сублинейные операторы $\widetilde{p} = p\pi - \Lambda$ и $\widetilde{q} = q\pi - \Lambda$ возрастающие. Кроме того, очевидным образом выполняется равенство $R = \widetilde{p}(P \times Q) - \widetilde{q}(P \times Q)$. $\rhd$

2. Дифференцируемость по Адамару

2.1. Пусть E и F — некоторые K-пространства. Рассмотрим отображение $g : E \to F^{\cdot}$, дифференцируемое по направлениям в точке $e_0 \in \mathrm{core}\,(\mathrm{dom}\, g)$. Возьмем направление $u \in E$ и элемент $d \in F$. Предположим, что для любой последовательности $(e_n) \subset E$, $e_n \downarrow 0$ имеет место соотношение

$$\inf_{m \in \mathbb{N}} \sup_{0 < \alpha < 1/m,\, |u' - u| \leqslant e_m} \left| \frac{g(e_0 + \alpha u') - g(e_0)}{\alpha} - d \right| = 0.$$

Тогда d называют *производной Адамара g в точке e_0 по направлению u* и обозначают $g'(e_0)u := d$. Такое обозначение оправдано тем очевидным наблюдением, что если существует производная Адамара, то существует и производная Дини (в той же точке по тому же направлению) и их значения совпадают. Таким образом, производную Адамара g в точке e_0 по направлению u можно определить формулами

$$g'(e_0)u := \inf_{m\in\mathbb{N}} \sup_{\substack{0<\alpha<1/m,\\ |u'-u|\leqslant e_m}} \frac{g(e_0+\alpha u')-g(e_0)}{\alpha} = \sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{\substack{0<\alpha<1/m,\\ |u'-u|\leqslant e_m}} \frac{g(e_0+\alpha u')-g(e_0)}{\alpha}.$$

Если производная Адамара $g'(e_0)u$ существует для каждого направления $u \in E$, то говорят, что отображение g *дифференцируемо по Адамару* в точке e_0.

Определение производной Адамара упрощается, если F — регулярное K-пространство. Напомним, что K-пространство F называют *регулярным*, если для любой последовательности вложенных подмножеств $F \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ таких, что $a = \inf_n \sup(A_n)$, существуют конечные подмножества $A'_n \subset A_n$, для которых $o\text{-}\lim_{n\to\infty} \sup(A'_n) = a$. Можно показать, что K-пространство F будет регулярным, если оно удовлетворяет двум требованиям: 1) F имеет *счетный тип*, т. е. любое подмножество, состоящее из попарно дизъюнктных множеств, не более чем счетно; 2) в F выполняется *принцип диагонали*, т. е. для любой двойной последовательности $(e_{n,k}) \subset F$, имеющей пределы $e_n := o\text{-}\lim_{k\to\infty} e_{n,k}$ $(n \in \mathbb{N})$ и $e := o\text{-}\lim_{n\to\infty} e_n$, существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел (k_n) такая, что $e = o\text{-}\lim_{n\to\infty} e_{n,k_n}$. (подробности см., например, в [8]).

2.2. *Пусть F — регулярное K-пространство. Элемент $d \in F$ будет производной Адамара отображения $g : E \to F^{\cdot}$ в точке $e_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom} g)$ по направлению $u \in E$ в том и только в том случае, если для любых последовательностей $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}$ и $(u_n) \subset E$ таких, что $\alpha_n \downarrow 0$ и $u_n \xrightarrow{(o)} u$ имеет место соотношение*

$$d = o\text{-}\lim_{n\to\infty} \frac{g(e_0+\alpha_n u_n)-g(e_0)}{\alpha_n} = \inf_{m\in\mathbb{N}} \sup_{n\geqslant m} \frac{g(e_0+\alpha_n u_n)-g(e_0)}{\alpha_n}$$
$$= \sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{n\geqslant m} \frac{g(e_0+\alpha_n u_n)-g(e_0)}{\alpha_n}.$$

$\lhd$ Необходимость очевидна и верна даже без предположения о регулярности F. Докажем достаточность. Предположим, что для d выполняется указанное в формулировке условие. Возьмем последовательность $(e_n) \subset E$, $e_n \downarrow 0$, и обозначим

$$c_m := \sup_{0<\alpha<1/m,\, |u'-u|\leqslant e_m} \left| \frac{g(e_0+\alpha u')-g(e_0)}{\alpha} - d \right|.$$

Нужно доказать, что $c := \inf_m c_m = 0$. В силу регулярности F для каждого $m \in \mathbb{N}$ существуют конечные подмножества $\{\alpha_{m,1}, \ldots, \alpha_{m,l(m)}\} \subset (0, 1/m)$ и $\{u_{m,1}, \ldots, u_{m,l(m)}\} \subset [u - e_m, u + e_m]$ такие, что

$$c'_m := \sup_{0\leqslant l\leqslant l(m)} \left| \frac{g(e_0+\alpha_{m,l} u_{m,l})-g(e_0)}{\alpha_{m,l}} - d \right| \xrightarrow{(o)} c.$$

Построим новую последовательность $(u_n) \subset E$, занумеровав подряд сначала группу $\{u_{1,1}, \ldots, u_{1,l(1)}\}$, затем $\{u_{2,1}, \ldots, u_{2,l(2)}\}$ и т. д. Точнее, полагаем $u_n := u_{m,k}$ при $n = l(m-1) + k$, где $m \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant l(m)$ и $l(0) := 0$. Очевидно, что последовательность (u_n) o-сходится к u. Проделав то же самое с последовательностью конечных множеств $(\{\alpha_{m,1}, \ldots, \alpha_{m,l(m)}\})_{m\in\mathbb{N}}$, получим сходящуюся к нулю числовую последовательность (α_n). Если при этом (α_n) не является убывающей, то заменим α_n на $\sup_{k\geqslant n} \alpha_k$.

Итак, $\alpha_n \downarrow 0$ и $u_n \xrightarrow{(o)} u$, поэтому в соответствии с нашим предположением

$$0 = o\text{-}\lim_{n\to\infty} \left| \frac{g(e_0 + \alpha_n u_n) - g(e_0)}{\alpha_n} - d \right| = o\text{-}\lim_{n\to\infty} c'_n = c. \ \rhd$$

2.3. В рассматриваемой ситуации дифференцируемость по Адамару отображения g не гарантирует непрерывности производной по направлениям $g'(e_0)(\cdot)$ в отличие от случая, когда $E = \mathbb{R}^n$ и $F = \mathbb{R}$ [4]. Рассмотрим два случая, когда дифференцируемое по Адамару отображение имеет производную по направлениям, непрерывную в следующем смысле. Отображение $\varphi : E \to F$ назовем *то-непрерывным* в точке $u_0 \in E$, если для любой последовательности $(e_n) \subset E$, $e_n \downarrow 0$ выполняется

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{|u-u_0|\leqslant e_n} |\varphi(u) - \varphi(u_0)| = 0.$$

Из соображений, сходных с 2.2 можно получить, что если F — регулярное K-пространство, то *то*-непрерывность означает секвенциальную o-непрерывность. Напомним, что множество $U \subset E$ называют *нормальным*, если для любых $u_1, u_2 \in U$, $e \in E$ из $u_1 \leqslant e \leqslant u_2$ следует $e \in U$.

Пусть отображение $g : E \to F^{\cdot}$ дифференцируемо по Дини в точке $e_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom} g)$. Предположим, что существуют нормальное множество $U \subset E$ и то-непрерывный сублинейный оператор $p : E \to F$ такие, что $e_0 \in \operatorname{core}(U)$ и

$$|g(u_1) - g(u_2)| \leqslant p(u_1 - u_2) \quad (u_1, u_2 \in U).$$

Тогда g дифференцируемо по Адамару в точке e_0 и производная по направлениям $g'(e_0)(\cdot)$ то-непрерывна.

$\lhd$ Возьмем направление $u \in E$, последовательности $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}$ и $(e_n) \subset E$, для которых $\alpha_n \downarrow 0$ и $e_n \downarrow 0$. Легко видеть справедливость соотношений

$$\sup_{0<\alpha<1/n,\, |u'-u|\leqslant e_n} \left| \frac{g(e_0 + \alpha u') - g(e_0)}{\alpha} - g'(e_0)u \right|$$
$$\leqslant \sup_{0<\alpha<1/n} \left| \frac{g(e_0 + \alpha u) - g(e_0)}{\alpha} - g'(e_0)u \right| + \sup_{0<\alpha<1/n,\, |u'-u|\leqslant e_n} \left| \frac{g(e_0 + \alpha u') - g(e_0 + \alpha u)}{\alpha} \right|$$
$$\leqslant \sup_{0<\alpha<1/n} \left| \frac{g(e_0 + \alpha u) - g(e_0)}{\alpha} - g'(e_0)u \right| + \sup_{|u'-u|\leqslant e_n} p(u'-u) \xrightarrow{(o)} 0,$$

из которых видна дифференцируемость по Адамару отображения g в точке e_0 по направлению u.

По условию $e_0 \in \operatorname{core}(U)$, стало быть, существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $e_0 + \varepsilon(u \pm e_1) \in U$ для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Если $|u' - u| \leqslant e_n$, то с учетом нормальности U для тех же ε можем написать $e_0 + \varepsilon u' \in e_0 + \varepsilon[u - e_n, u + e_n] \subset e_0 + [\varepsilon(u - e_1), \varepsilon(u + e_1)] \subset U$. Итак, если $0 < \alpha < 1/m < \varepsilon_0$ и $|u' - u| \leqslant e_n$, то $e_0 + \alpha u' \in U$ и справедливы оценки, показывающие *то*-непрерывность $g'(e_0)$:

$$|g'(e_0)u' - g'(e_0)u| \leqslant \sup_{0<\alpha<1/m} \left| \frac{g(e_0 + \alpha u') - g(e_0)}{\alpha} - \frac{g(e_0 + \alpha u) - g(e_0)}{\alpha} \right|$$
$$\leqslant p(u'-u) \leqslant \sup_{|u'-u|\leqslant e_n} p(u'-u) \xrightarrow{(o)} 0. \ \rhd$$

2.4. *Пусть K-пространство F регулярно. Если отображение $g : E \to F^{\cdot}$ дифференцируемо по Адамару в точке $e_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom} g)$, то производная по направлениям $g'(e_0)(\cdot)$ секвенциально o-непрерывна.*

$\lhd$ Воспользуемся установленным в 2.2 вариантом дифференцируемости по Адамару в случае регулярного K-пространства F. Возьмем последовательности $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}$ и $(u_n) \subset E$, для которых $\alpha_n \downarrow 0$ и $u_n \xrightarrow{(o)} u$. Положим

$$d_{k,n} := \sup_{m \geqslant n} \left| \frac{g(e_0 + \alpha_m u_k) - g(e_0)}{\alpha_m} - g'(e_0)u_k \right|.$$

По определению производной по направлениям o-$\lim_{n\to\infty} d_{k,n} = 0$ для каждого фиксированного $k \in \mathbb{N}$. В силу предположения о регулярности F существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел (n_k) такая, что o-$\lim_{k\to\infty} d_{k,n_k} = 0$. Отсюда выводим

$$\begin{aligned} |g'(e_0)u_k - g'(e_0)u| \leqslant \left| \frac{g(e_0 + \alpha_{n_k} u_k) - g(e_0)}{\alpha_{n_k}} - g'(e_0)u_k \right| \\ + \left| \frac{g(e_0 + \alpha_{n_k} u_k) - g(e_0)}{\alpha_{n_k}} - g'(e_0)u \right| \leqslant d_{k,n_k} + w_k \xrightarrow{(o)} 0, \end{aligned}$$

где $w_k := \sup_{m \geqslant k} |\alpha_{n_m}^{-1}\big(g(e_0 + \alpha_{n_m} u_m) - g(e_0)\big) - g'(e_0)u| \xrightarrow{(o)} 0$ по определению производной Адамара. $\rhd$

3. Квазидифференциал композиции

Квазидифференцируемость композиции (теоремы 3.1 и 3.2) отображений действующих из банахова пространства в банахово K-пространство установлена в работе В. Ф. Демьянова и А. М. Рубинова [5]. Ниже этот результат обобщен на отображения действующие в произвольные K-пространства.

Квазидифференцируемость супремума и инфимума получена как следствие теоремы о композиции, независимое доказательство этого факта имеется в [6]. Скалярный вариант теоремы 3.5 имеется, например, в [3, 4].

3.1. *Теорема.* *Пусть X — векторное пространство, E, F — K-пространства. Пусть отображение $f : X \to E^{\cdot}$ дифференцируемо по направлениям в точке $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom} f)$, а отображение $g : E \to F^{\cdot}$ дифференцируемо по Адамару в точке $f(x_0) \in \operatorname{core}(\operatorname{dom} g)$, причем $g'(f(x_0))(\cdot)$ — mo-непрерывное отображение. Тогда отображение $g \circ f$ дифференцируемо по направлениям в точке x_0 и*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \circ f'(x_0).$$

$\lhd$ Возьмем произвольное направление $h \in X$ и для $\alpha > 0$ обозначим

$$\begin{aligned} v(\alpha, h) &:= \alpha^{-1}\big(f(x_0 + \alpha h) - f(x_0) - \alpha f'(x_0)h\big), \\ w(\alpha, u) &:= \alpha^{-1}\big(g(f(x_0) + \alpha u) - g(f(x_0)) - \alpha g'(f(x_0))u\big). \end{aligned}$$

Так как отображение f дифференцируемо по направлениям в точке x_0, то o-$\lim_{\alpha\downarrow 0} v(\alpha, h) = 0$ и, значит, $u(\alpha, h) := f'(x_0)h + v(\alpha, h) \xrightarrow{(o)} f'(x_0)h$ при $\alpha \downarrow 0$. Последнее означает, что $e_n := \sup_{0<\alpha<1/n} |u(\alpha,h) - f'(x_0)h| \downarrow 0$. Используя введенные обозначения можем написать

$$
\begin{aligned}
(g\circ f)(x_0+\alpha h) &= g(f(x_0+\alpha h)) = g\big(f(x_0)+\alpha f'(x_0)h+\alpha v(\alpha,h)\big)\\
&= g\big(f(x_0)+\alpha u(\alpha,h)\big) = g(f(x_0)) + \alpha g'(f(x_0))u(\alpha,h) + \alpha w(\alpha,u(\alpha,h)).
\end{aligned}
$$

Учитывая только что установленное соотношение, $m o$-непрерывность $g'(e_0)(\cdot)$ и определение дифференцируемости по Адамару, выводим

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0<\alpha<1/n}\left|\frac{(g\circ f)(x_0+\alpha h)-(g\circ f)(x_0)}{\alpha} - g'(f(x_0))(f'(x_0)h)\right|\\
&\leqslant \sup_{0<\alpha<1/n}\Big(\big|g'(f(x_0))u(\alpha,h) - g'(f(x_0))(f'(x_0)h)\big| + \big|w(\alpha,u(\alpha,h))\big|\Big)\\
&\leqslant \sup_{|u-f'(x_0)h|\leqslant e_n} |g'(f(x_0))u - g'(f(x_0))(f'(x_0)h)| + \sup_{\substack{0<\alpha<1/n,\\ |u-f'(x_0)h|\leqslant e_n}} |w(\alpha,u)| \xrightarrow{(o)} 0.
\end{aligned}
$$

Отсюда следует существование производной $(g\circ f)(x_0)(h)$ и справедливость равенства $(g\circ f)(x_0)(h) = g'(f(x_0))(f'(x_0)(h))$. $\rhd$

3.2. Теорема. *Пусть X — векторное пространство, E и F — K-пространства. Пусть отображение $f : X \to E^{\cdot}$ квазидифференцируемо в точке $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom} f)$, а отображение $g : E \to F^{\cdot}$ квазидифференцируемо и одновременно дифференцируемо по Адамару в точке $e_0 := f(x_0) \in \operatorname{core}(\operatorname{dom} g)$, причем производная $g'(e_0)(\cdot)$ $m o$-непрерывна. Предположим, сверх того, что квазидифференциал $\mathcal{D}g(e_0)$ определяется парой порядково ограниченных в $L^{\sim}(E,F)$ опорных множеств $\underline{\partial}g(e_0)$ и $\overline{\partial}g(e_0)$. Тогда отображение $g\circ f$ квазидифференцируемо в точке x_0. Если $\underline{\partial}g(e_0)\cup\overline{\partial}g(e_0)\subset[\Lambda_1,\Lambda_2]$ для некоторых $\Lambda_1,\Lambda_2\in L^{\sim}(E,F)$, то квазидифференциал $\mathcal{D}(g\circ f)(x_0) = [\underline{\partial}(g\circ f)(x_0), \overline{\partial}(g\circ f)(x_0)]$ может быть вычислен по следующим формулам:*

$$
\underline{\partial}(g\circ f)(x_0) = \bigcup_{C\in\underline{\partial}g(e_0)} \partial(P_C), \qquad \overline{\partial}(g\circ f)(x_0) = \bigcup_{C\in\overline{\partial}g(e_0)} \partial(P_C),
$$

где

$$
P_C(x_0) := (C-\Lambda_1)\sup_{S\in\underline{\partial}f(x_0)} S(x_0) + (\Lambda_2 - C)\sup_{T\in\overline{\partial}f(x_0)} T(x_0).
$$

$\lhd$ Согласно 1.2 и теореме 3.1 отображение $g\circ f$ квазидифференцируемо в точке x_0 и справедливо равенство

$$
(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\circ f'(x_0) = (p-q)\circ(P-Q),
$$

где операторы $P,Q\in\operatorname{Sbl}(X,E)$ и $p,q\in\operatorname{Sbl}(E,F)$ удовлетворяют соотношениям

$$
\partial p = \underline{\partial}g(e_0), \quad \partial q = \overline{\partial}g(e_0), \qquad \partial P = \underline{\partial}f(x_0), \quad \partial Q = \overline{\partial}f(x_0),
$$

а операторы p и q можно выбрать еще и мажорируемыми. Так же, как и в 1.2, положим $\Lambda := (\Lambda_1, -\Lambda_2)$ $(\Lambda : (a_1,a_2)\mapsto \Lambda_1(a_1) - \Lambda_2(a_2))$, $\widetilde{p} = p\pi - \Lambda$, $\widetilde{q} := q\pi - \Lambda$, $\pi(e_1,e_2) = e_1 - e_2$. В соответствии с 1.2 $(g\circ f)'(x_0) = \widetilde{p}(P\times Q) - \widetilde{q}(P\times Q)$, следовательно, $\underline{\partial}(g\circ f)(x_0) = \partial p_1$ и $\overline{\partial}(g\circ f)(x_0) = \partial q_1$, где $p_1 := \widetilde{p}(P\times Q)$ и $q_1 := \widetilde{q}(P\times Q)$. Здесь как и в 1.2 $(P\times$

$Q)(x) = (P(x), Q(x))$. Так как $\widetilde{p}$ — возрастающий сублинейный оператор, то справедливо равенство (см. [7; 2.1.6 (3)])

$$\partial p_1 = \bigcup_{S \in \underline{\partial}\tilde{p}} \underline{\partial}(S(P \times Q)).$$

Применим теперь формулу [7; 1.4.14 (4)]:

$$\partial \widetilde{p} = \partial(p\pi - \Lambda) = \{(C \circ \pi - \Lambda) : \ C \in \partial p\}.$$

Таким образом, справедливо представление

$$\partial p_1 = \bigcup_{C \in \partial p} \partial\big((C - \Lambda_1)P + (\Lambda_2 - C)Q\big).$$

Аналогично устанавливается представление

$$\partial q_1 = \bigcup_{C \in \partial q} \partial\big((C - \Lambda_1)P + (\Lambda_2 - C)Q\big).$$

Остается обозначить

$$P_C(x_0) := (C - \Lambda_1) \sup_{S \in \underline{\partial} f(x_0)} S(x_0) + (\Lambda_2 - C) \sup_{T \in \overline{\partial} f(x_0)} T(x_0). \ \triangleright$$

3.3. *Пусть отображения $f_1, \dots, f_n : X \to E^{\cdot}$ дифференцируемы по направлениям в точке x_0. Тогда отображение $f := f_1 \vee \dots \vee f_n$ также дифференцируемо по направлениям в точке x_0 и имеет место формула*

$$f'(x_0)h = \bigvee_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Gamma_n(x_0)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i'(x_0)h \right\},$$

где

$$\Gamma_n(x_0) := \Gamma_n(x_0; f_1, \dots, f_n) := \Big\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \ \alpha_k \in \mathrm{Orth}^+(E), \\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = I_E, \ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x_0) = f(x_0) \Big\}.$$

$\triangleleft$ Конечнопорожденный канонический сублинейный оператор $\varepsilon_n : E^n \to E$, очевидно, *то*-непрерывен и удовлетворяет неравенству

$$|\varepsilon_n(u) - \varepsilon_n(u')| \leqslant p(u - u') \quad (u, u' \in E^n),$$

где $p(u) := \varepsilon_n|u|$ (см. [7; 2.1.1]). В соответствии с 2.3 ε_n дифференцируем по Адамару в любой точке, а его производная по направлениям *то*-непрерывна. Для $x \in X$ положим $\varphi(x) := (f_1(x), \dots, f_n(x))$, считая $\varphi(x) = +\infty$, если $f_k(x) = +\infty$ хотябы для одного k. Ясно, что полученное отображение $\varphi : X \to (E^n)^{\cdot}$ дифференцируемо по направлениям в точке x_0 и $\varphi'(x_0)h = (f_1'(x_0)h, \dots, f_n'(x_0)h)$ для всех $h \in X$. Таким образом, к композиции $\varepsilon_n \circ \varphi$ применима теорема 3.1. Так как $f = \varepsilon_n \circ \varphi$, то получим формулу

$$f'(x_0)h = \varepsilon_n'(\varphi(x_0)) \circ \varphi'(x_0)h \quad (h \in X).$$

Остается заметить, что $\partial(\varepsilon_n'(\varphi(x_0)) = \Gamma_n(x_0)$, следовательно,

$$\varepsilon_n'(\varphi(x_0))u = \bigvee_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\,\in\,\Gamma_n(x_0)} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \quad (u = (e_1,\dots,e_n) \in E^n). \ \triangleright$$

3.4. *Пусть отображения $f_1,\dots,f_n : X \to E^{\cdot}$ дифференцируемы по направлениям в точке x_0. Тогда отображение $g := f_1 \wedge \dots \wedge f_n$ также дифференцируемо по направлениям в точке x_0 и имеет место формула*

$$g'(x_0)h = \bigwedge_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\,\in\,\Delta_n(x_0)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i'(x_0)h \right\},$$

где

$$\Delta_n(x_0) := \Delta_n(x_0; f_1,\dots,f_n) := \Bigg\{ (\alpha_1,\dots,\alpha_n) : \ \alpha_k \in \mathrm{Orth}^+(E), \\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = I_E, \ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x_0) = g(x_0) \Bigg\}.$$

$\triangleleft$ Доказательство проводится так же, как и в 3.3, но с той разницей, что формула дифференцирования по направлениям из 3.1 применяется к композиции $\psi\circ\varphi$, где $\psi(u) := -\varepsilon_n(-u) = e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ $(u = (e_1,\dots,e_n) \in E^n)$. $\triangleright$

3.5. *Теорема.* *Пусть отображения $f_1,\dots,f_m : X \to E^{\cdot}$ квазидифференцируемы в точке $x_0 \in \mathrm{core}\,(\mathrm{dom}\, f)$. Положим $f := f_1 \vee \dots \vee f_n$ и $g := f_1 \wedge \dots \wedge f_n$. Тогда отображения f и g квазидифференцируемы в точке x_0 и для квазидифференциалов $\mathcal{D}f(x_0) = [\underline{\partial} f(x_0), \overline{\partial} f(x_0)]$ и $\mathcal{D}g(x_0) = [\underline{\partial} g(x_0), \overline{\partial} g(x_0)]$ имеют место представления*

$$\underline{\partial} f(x_0) = \bigcup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\,\in\,\Gamma_n(x_0)} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Big(\underline{\partial} f_k(x_0) + \sum_{l\neq k} \overline{\partial} f_l(x_0) \Big), \qquad \overline{\partial} f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \overline{\partial} f_k(x_0),$$

$$\underline{\partial} g(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \underline{\partial} f_k(x_0), \qquad \overline{\partial} g(x_0) = \bigcup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\,\in\,\Delta_n(x_0)} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Big(\overline{\partial} f_k(x_0) + \sum_{l\neq k} \underline{\partial} f_l(x_0) \Big).$$

$\triangleleft$ Ограничимся доказательством для отображения f; отображение g рассматривается аналогично. Из предложения 3.3 следует дифференцируемость по направлениям отображения f в точке x_0, причем

$$f'(x_0)h = \bigvee_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\,\in\,\Gamma_n(x_0)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i'(x_0)h \right\} \quad (h \in X).$$

В силу квазидифференцируемости отображений f_i в точке x_0 имеют место представления $f_k'(x_0)h = p_k(h) - q_k(h)$ $(k = 1,\dots,n;\ h \in X)$, где p_k, q_k — сублинейные операторы. Введем следующие обозначения:

$$Q(h) := \sum_{k=1}^{n} q_k(h), \quad p_k'(h) := p_k(h) + \sum_{l\neq k} q_l(h), \quad P(h) := (p_1'(h),\dots,p_n'(h)) \in E^n \quad (h \in X).$$

Как видно, $P : X \to E^n$ и $Q : X \to E$ — сублинейные операторы. Учитывая введенные обозначения, напишем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
f'(x_0)h &= \sup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\,\in\,\Gamma_n(x_0)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bigl(p_i(h) - q_i(h)\bigr) \right\} \\
&= \sup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\,\in\,\Gamma_n(x_0)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bigl(p_i(h) - q_i(h)\bigr) \right\} + \sum_{i=1}^{n} q_i(h) - Q(h) \\
&= \sup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\,\in\,\Gamma_n(x_0)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Bigl(\alpha_i p_i(h) - \alpha_i q_i(h) + q_i(h)\Bigr) \right\} - Q(h) \\
&= \sup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\,\in\,\Gamma_n(x_0)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Biggl(\alpha_i p_i(h) + \sum_{j\neq i} \alpha_j q_i(h)\Biggr) \right\} - Q(h) \\
&= \sup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\,\in\,\Gamma_n(x_0)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i'(h) - Q(h) = \varepsilon_n'(\varphi(x_0)) \circ P(h) - Q(h),
\end{aligned}$$

где $\varphi(x_0) := (f_1(x_0), \dots, f_n(x_0))$. Итак, $f'(x_0) = \varepsilon_n'(\varphi(x_0)) \circ P - Q$, следовательно, отображение f квазидифференцируемо в точке x_0, причем $\underline{\partial} f(x_0) = \partial\Bigl(\varepsilon_n'(\varphi(x_0)) \circ P\Bigr)$ и $\overline{\partial} f(x_0) = \partial Q$. Остается вычислить соответствующие субдифференциалы $\partial\Bigl(\varepsilon_n'(\varphi(x_0))\circ P\Bigr)$ и ∂Q, что несложно сделать привлекая формулы 2.1.6 (3) и 1.4.12 (1) из [7]:

$$\partial\Bigl(\varepsilon_n'(\varphi(x_0)) \circ P\Bigr) = \bigcup_{A\in\varepsilon_n'(\varphi(x_0))} \partial(A \circ P) = \bigcup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\,\in\,\Gamma_n(x_0)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Bigl(\partial p_i + \sum_{j\neq i} \partial q_j\Bigr),$$

$$\partial Q = \partial \sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n} \partial q_i.$$

Полученные соотношения совпадают с требуемыми с точностью до обозначений. $\triangleright$

4. Дезинтегрирование квазидифференциалов

В текущем параграфе техника дезинтегрирования применяется к квазидифференциалам. Устанавливается, что в специальных случаях выполняется аналог классического «цепного правила» исчисления — квазидифференциал суперпозиции равняется суперпозиции квазидифференциалов.

4.1. ***Теорема.*** *Пусть выполнены условия теоремы 3.2 и, сверх того, общая нижняя граница Λ_1 и общая верхняя граница Λ_2 множеств $\underline{\partial} g(e_0)$ и $\overline{\partial} g(e_0)$ входят в полосу, порожденную оператором Магарам. Тогда квазидифференциал $\mathcal{D}\varphi(x_0) = [\underline{\partial}\varphi(x_0), \overline{\partial}\varphi(x_0)]$ может быть вычислен по формулам*

$$\underline{\partial}(g \circ f)(x_0) = (\underline{\partial} g(x_0) \circ \pi - \Lambda) \circ (\underline{\partial} f(x_0) \times \overline{\partial} f(x_0)),$$

$$\overline{\partial}(g \circ f)(x_0) = (\overline{\partial} g(x_0) \circ \pi - \Lambda) \circ (\underline{\partial} f(x_0) \times \overline{\partial} f(x_0)).$$

$\triangleleft$ В 3.2 было установлено представление $(g\circ f)'(x_0) = \widetilde{p}\circ(P\times Q) - \widetilde{q}\circ(P\times Q)$. Отсюда видно, что если $\widetilde{p}$ и $\widetilde{q}$ — сублинейные операторы Магарам, то в силу теоремы 4.5.2 из [7] имеют место формулы

$$\underline{\partial}(g \circ f)(x_0) = \partial\widetilde{p} \circ \partial(P \times Q) - \partial\widetilde{q} \circ \partial(P \times Q) = \partial\widetilde{p} \circ (\partial P \times \partial Q) - \partial\widetilde{q} \circ (\partial P \times \partial Q).$$

Вспомним, что $\widetilde{p}= p\circ\pi-\Lambda$ и $\widetilde{q}:= q\circ\pi-\Lambda$, где $\Lambda((a_1,a_2)) = \Lambda_1(a_1)-\Lambda_2(a_2)$ и $\pi(e_1,e_2) = e_1-e_2$. Поэтому, учитывая линейность $\pi : E^2\to E$ и $\Lambda : E^2\to F$ и привлекая формулу [7; 1.4.14 (4)], получим $\partial\widetilde{p} = (\partial p)\circ\pi-\Lambda$ и $\partial\widetilde{q} = (\partial q)\circ\pi-\Lambda$. Тем самым, приходим к соотношениям

$$\underline{\partial}(g\circ f)(x_0) = (\partial p\circ\pi-\Lambda)\circ(\partial P\times\partial T),\qquad \overline{\partial}(g\circ f)(x_0) = (\partial q\circ\pi-\Lambda)\circ(\partial P\times\partial T),$$

эквивалентным требуемым. Итак, остается показать, что $\widetilde{p}$ — оператор Магарам, так как магарамовость оператора $\widetilde{q}$ устанавливается точно так же. Но согласно теореме [7; 4.4.7] нужно лишь показать, что опорное множество $\partial\widetilde{p}$ состоит из операторов Магарам.

В силу наших предположений $S_0 := |\Lambda_1|+|\Lambda_2|$ — оператор Магарам. Так как $\partial p\subset[-S_0,S_0]$, то в силу теоремы [7; 4.4.7] p — также оператор Магарам. Рассмотрим оператор $\widetilde{P} = P\pi-(\Lambda_1,-\Lambda_2)$. Так как Λ_1 и Λ_2 операторы Магарам, то P — сублинейный оператор Магарам.

Субдифференциал $\partial\widetilde{p}$ в более подробной записи имеет вид

$$\partial\widetilde{p} = \{\mathcal{T} := (T_1,T_2)\in L^+(E\times E\to E) : \mathcal{T} = S\circ\pi-(\Lambda_1,-\Lambda_2),\ S\in\partial p\},$$

причем $\mathcal{T}(e_1,e_2) = T(e_1)+T(e_2)$. Отсюда видно, что $T_1 = S-\Lambda_1$ и $T_2 = \Lambda_2-S$. Таким образом,

$$|T_i|\leqslant|S|+|\Lambda_i|\leqslant 2S_0\quad(i = 1,2),$$

и, следовательно, T_1 и T_2 — операторы Магарам.

Возьмем теперь элементы $d\in F$ и $e_1,e_2\in E^+$ такие, что $0\leqslant d\leqslant\mathcal{T}(e_1,e_2) = T_1e_1+T_2e_2$. Тогда $d = d_1+d_2$ для некоторых $0\leqslant d_i\leqslant T_ie_i$ $(i = 1,2)$. Так как T_i — операторы Магарам, то существуют $e_i'\in E$ такие, что $T_i(e_i') = d_i$ и, следовательно, $\mathcal{T}(e_1',e_2') = d$. $\triangleright$

4.2. Для дальнейшего необходимо придать смысл выражениям вида $\sum_\xi\mathcal{D}f_\xi(x_0)$ в том случае, если (f_ξ) — бесконечное семейство квазидифференцируемых в точке x_0 отображений. Воспользуемся тем, что оператор суммирования является оператором Магарам на K-пространстве $l_\infty(A,E)$ (см. [7; 4.4.2 (3)]). Пусть, как обычно, X — векторное пространства, а E и F — некоторые K-пространства.

(1) *Возьмем такой регулярный оператор $T : E\to F$, что $S := |T|$ — оператор Магарам. Обозначим символом A_0 f-алгебру $Z(F_T)$, где $F_T := T(E)^{dd}$. Тогда $[\mathrm{CS}_c(X,E)]$ и $[\mathrm{CS}_c(X,F)]$ можно снабдить структурой решеточно упорядоченного A_0-модуля. Более того, существует единственное A_0-линейное регулярное отображение $[h_T] : [\mathrm{CS}_c(X,E)]\to[\mathrm{CS}_c(X,F)]$, для которого $[h_T]([\mathcal{U},\{0\}]) = [T^+\circ\mathcal{U},T^-\circ\mathcal{U}]$ при всех $\mathcal{U}\in\mathrm{CS}_c(X,E)$.*

$\triangleleft$ Пусть сначала оператор Магарам $T = S$ положителен. Для опорного множества $\mathcal{U}\in\mathrm{CS}_c(X,E)$, $\mathcal{U} = \partial p$, множество $T\circ\mathcal{U} := \{S\circ U : U\in\mathcal{U}\}$ также будет опорным, поскольку $S\circ\mathcal{U} = S\circ\partial p = \partial(S\circ p)$ в силу [7; теорема 4.5.2]. Тем самым возникает отображение $h := h_S : \mathrm{CS}_c(X,E)\to\mathrm{CS}_c(X,F)$, действующее по правилу $h_S(\mathcal{U}) = S\circ\mathcal{U}$. Несомненно, что это отображение аддитивно. Кроме того, оно будет и A_0^+-однородно, где $A_0 := Z(F_S)$. В самом деле, согласно [7; 4.4.3 (2, 3)] существует кольцевой и решеточный изоморфизм h' из f-алгебры $Z(F_S)$ на правильную подрешетку и подкольцо в $Z(E_S)$ такой, что $\pi\circ S = S\circ h(\pi)$ для всех $\alpha\in Z(F_S)$. Таким образом оператор S будет A_0-линейным, если рассматривать E и F с естественной структурой A_0-модуля. Так как $A_0\subset A := \mathrm{Orth}(F)$, то A-коническая решетка $\mathrm{CS}_c(X,F)$ будет также и A_0-конической решеткой. В то же время, структуру A_0-конической решетки в $\mathrm{CS}_c(X,E)$ можно определить, полагая $\alpha\mathcal{U} := h'(\alpha)\mathcal{U}$ для всех $\pi\in Z(F_S)$. При этом h_S станет A_0-полулинейным отображением.

Можно построить A_0-модуль $[\mathrm{CS}_c(X,E)]_{A_0}$ и $\mathrm{Orth}(E)$-модуль $[\mathrm{CS}_c(X,E)]$ так, что эти два модуля будут совпадать по запасу элементов, а модульные структуры согласованы, т. е. умножение на элементы A_0 индуцируется умножением на элементы $\mathrm{Orth}(E)$ (см. [7; теорема 1.5.6]). То же самое справедливо и относительно A_0-конической решетки $\mathrm{CS}_c(X,F)$. Согласно теореме [7; 1.5.6] существует единственное A_0-линейное отображение $[h_S] : [\mathrm{CS}_c(X,E)] \to [\mathrm{CS}_c(X,F)]$, для которого $[h_S]([\mathcal{U},\{0\}]) = [S \circ \mathcal{U},\{0\}]$ при всех $\mathcal{U} \in \mathrm{CS}_c(X,E)$.

Возьмем теперь регулярный оператор $T : E \to F$ такой, что $S := |T|$ — оператор Магарам. Вновь по теореме [7; 4.4.3] операторы T^+ и T^- также будут A_0-линейными. В соответствии со сказанным выше существуют A_0-линейные положительные операторы $[h_{T^+}], [h_{T^-}] : [\mathrm{CS}_c(X,E)] \to [\mathrm{CS}_c(X,F)]$. Положив $[h_T] := [h_{T^+}] - [h_{T^-}]$, получим A_0-линейный регулярный оператор из $[\mathrm{CS}_c(X,E)]$ в $[\mathrm{CS}_c(X,F)]$. $\triangleright$

(2) *Пусть T, S, A_0 — те же, что и в* (1). *Тогда $\mathrm{QL}(X,E)$ и $\mathrm{QL}(X,F)$ можно снабдить структурой решеточно упорядоченного A_0-модуля. Более того, существует единственное A_0-линейное регулярное отображение $[h^T] : \mathrm{QL}(X,E) \to \mathrm{QL}(X,F)$, для которого $[h^T](p) = T^+ \circ p - T^- p$ при всех $p \in \mathrm{Sbl}(X,E)$.*

$\triangleleft$ Если $T = S$, то очевидно, что отображение $[h^S] : \mathrm{QL}(X,E) \to \mathrm{QL}(X,F)]$, действующее по правилу $l \mapsto S \circ l$, является A_0-линейным и положительным. В общем случае полагаем $[h^T] := [h^{T^+}] - [h^{T^-}]$. $\triangleright$

Оператор $\mathcal{D}$, действующий на $\mathrm{QL}(X,E)$ и $\mathrm{QL}(X,F)$ обозначим соответственно символами $\mathcal{D}_E$ и $\mathcal{D}_F$.

(3) *Пусть $T : E \to F$ — регулярный оператор, причем $|T|$ — оператор Магарам. Тогда*

$$\mathcal{D}_F \circ [h^T] = [h_T] \circ \mathcal{D}_E.$$

$\triangleleft$ Возьмем квазилинейный оператор $l := p - q$, где $p, q \in \mathrm{Sbl}(X,E)$. Тогда, используя (1), (2) и [7; 4.5.3], последовательно выводим:

$$\begin{aligned}
\circ\mathcal{D}_E(l) &= [h_T]([\partial p, \partial q]) = [h_T]([\partial p, \{0\}]) - [h_T]([\partial q, \{0\}]) \\
&= [T^+ \circ \partial p, T^- \circ \partial p] - [T^+ \circ \partial q, T^- \circ \partial q] \\
&= [\partial(T^+ \circ p), \partial(T^- \circ p)] - [\partial(T^+ \circ q), \partial(T^- \circ q)] \\
&= \mathcal{D}_F(T^+ \circ p - T^- \circ p) - \mathcal{D}_F(T^+ \circ q - T^- \circ q) \\
&= \mathcal{D}_F(T^+(p-q)) - \mathcal{D}_F(T^-(p-q)) = \mathcal{D}_F \circ [h^T]. \ \triangleright
\end{aligned}$$

В дальнейшем для простоты и выразительности обозначений пишем $\mathcal{D}$ вместо $\mathcal{D}_E$ и $\mathcal{D}_F$, а также $T \circ \mathcal{D}$ вместо $[h_T] \circ \mathcal{D}_E$ и $\mathcal{D} \circ T$ вместо $\mathcal{D}_F \circ [h^T]$.

4.3. *Теорема.* *Пусть $f : X \to E^{\cdot}$ квазидифференцируемое в точке x_0 отображение и $T : E \to F$ регулярный порядково непрерывный оператор такой, что $|T|$ — оператор Магарам. Тогда $T \circ f$ также квазидифференцируемо в точке x_0 и*

$$\mathcal{D}(T \circ f)(x_0) = T \circ \mathcal{D}f(x_0).$$

Иначе говоря, для квазидифференциала $\mathcal{D}(T \circ f)(x_0) = [\underline{\partial}(T \circ f)(x_0), \overline{\partial}(T \circ f)(x_0)]$ имеют место представления

$$\underline{\partial}(T \circ f)(x_0) = T^+ \circ \underline{\partial} f(x_0) + T^- \circ \overline{\partial} f(x_0), \quad \overline{\partial}(T \circ f)(x_0) = T^+ \circ \overline{\partial} f(x_0) + T^- \circ \underline{\partial} f(x_0).$$

$\triangleleft$ Из теоремы 3.1 немедленно следует справедливость формулы $(T \circ f)'(x_0) = T \circ f'(x_0)$; требуемые при этом условия выполняются тривиальным образом, так как

T линеен, регулярен и порядково непрерывен. По условию $f'(x_0) \in \mathrm{QL}(X, E)$, а ввиду 4.2 (2) $T \circ f'(x_0) \in \mathrm{QL}(X, F)$. таким образом, отображение $T \circ f'$ квазидифференцируемо в точке x_0. Остается применить оператор $\mathcal{D}$ к равенству $(T \circ f)'(x_0) = T \circ f'(x_0)$ и воспользоваться предложением 4.2 (3). $\triangleright$

(2) Стоит выделить частный случай формул квазидифференцирования из (1), когда $T : E \to F$ — линейный оператор Магарам. В этом случае формулы для вычисления $\mathcal{D}(T \circ f)(x_0) = [\underline{\partial}(T \circ f)(x_0), \overline{\partial}(T \circ f)(x_0)]$ упрощаются:

$$\underline{\partial}(T \circ f)(x_0) = T \circ \underline{\partial} f(x_0), \qquad \overline{\partial}(T \circ f)(x_0) = T \circ \overline{\partial} f(x_0).$$

4.4. Рассмотрим вопрос о квазидифференцируемости бесконечной суммы. Зафиксируем непустое множество A. Символом $l_1(\mathrm{A}, E)$, как обычно, обозначим совокупность всех o-суммируемых семейств элементов E, индексованных посредством A. Возьмем семейство отображений $f_\alpha : X \to E^{\cdot}$ $(\alpha \in \mathrm{A})$ и пусть $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom} f_\alpha)$ для всех $(\alpha \in \mathrm{A})$. Будем говорить, что это семейство *равностепенно квазидифференцируемо* в точке x_0 по направлению $h \in X$, если существует убывающая к нулю последовательность $(c_n(\cdot)) \subset l_1(\mathrm{A}, E)$ такая, что

$$\sup_{0<t<1/n} \left| \frac{f_\alpha(x_0 + th) - f_\alpha(x_0)}{t} \right| \leqslant c_n(\alpha)$$

для всех $\alpha \in \mathrm{A}$ и $n \in \mathbb{N}$.

В следующей теореме выражение $o\text{-}\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathcal{D} f_\alpha(x_0)$ следует понимать в соответствии с 4.2. Точнее, если

$$o\text{-}\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathcal{D} f_\alpha = \left[o\text{-}\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \underline{\partial} f_\alpha(x_0), o\text{-}\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \overline{\partial} f_\alpha(x_0) \right],$$

причем $o\text{-}\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathcal{U}_\alpha$ — множество линейных операторов $T \in L(X, E)$, представимых в виде $Tx = o\text{-}\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} T_\alpha x$ $(x \in X)$, где $T_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha$ для всех $\alpha \in \mathrm{A}$.

Теорема. *Пусть X — векторное пространство, E — произвольное K-пространство, A — произвольное множество. Пусть $f_\alpha : X \to E$ $(\alpha \in \mathrm{A})$ — o-суммируемое семейство отображений и определим отображение $f : X \to E^{\cdot}$ равенством*

$$f(x) = o\text{-}\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} f_\alpha(x) \quad (x \in X).$$

Предположим, что $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom} f_\alpha)$ для всех $\alpha \in \mathrm{A}$ и семейство $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ равностепенно квазидифференцируемо по направлениям в точке x_0. Если для любого $\alpha \in \mathrm{A}$ существуют $p_\alpha, q_\alpha \in \mathrm{Sbl}(X, E)$ такие, что $f'_\alpha(x_0) = p_\alpha - q_\alpha$ $(\alpha \in \mathrm{A})$ и при этом $(p_\alpha(h))_{\alpha \in \mathrm{A}}, (q_\alpha(h))_{\alpha \in \mathrm{A}} \in l_1(A, E)$, то отображение f квазидифференцируемо в точке x_0 и справедлива формула

$$\mathcal{D} f(x_0) = \mathcal{D}\left(o\text{-}\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} f_\alpha \right)(x_0) = o\text{-}\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathcal{D} f_\alpha(x_0).$$

Таким образом, если $\mathcal{D} f(x_0) = [\underline{\partial} f(x_0), \overline{\partial} f(x_0)]$, то

$$\underline{\partial} f(x_0) = \underline{\partial}\left(o\text{-}\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} f_\alpha(x_0) \right) = o\text{-}\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \underline{\partial} f_\alpha(x_0), \quad \overline{\partial} f(x_0) = \overline{\partial}\left(o\text{-}\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} f_\alpha(x_0) \right) = o\text{-}\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \overline{\partial} f_\alpha(x_0).$$

$\lhd$ Рассмотрим оператор Магарам Σ из $l_1(\mathrm{A}, E)$ в E, определяемый формулой

$$\Sigma : (e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}} \mapsto o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} e_\alpha.$$

Определим оператор $\varphi : X \to l_1(\mathrm{A}, E)$ равенством

$$\varphi(x) := (f_\alpha(x))_{\alpha\in\mathrm{A}}.$$

Ясно, что дифференцируемость φ по направлениям в точке x_0 вытекает из предположения о равностепенной дифференцируемости по направлениям в силу следующей оценки:

$$\sup_{0<t<1/n} \left| \frac{\varphi(x_0+th)-\varphi(x_0)}{t} \right| \leqslant (c_n(\alpha))_{\alpha\in\mathrm{A}} \quad (n\in\mathbb{N}).$$

При этом производная по направлениям имеет вид

$$\varphi'(x_0)h = \Big(f'_\alpha(x_0)h\Big)_{\alpha\in\mathrm{A}} = P(h) - Q(h),$$

где $P : h \mapsto (p_\alpha(h))_{\alpha\in\mathrm{A}}$ и $Q : h \mapsto (q_\alpha(h))_{\alpha\in\mathrm{A}}$. Ввиду наших предположений последние соотношения корректно определяют сублинейные операторы $P, Q : X \to l_1(\mathrm{A}, E)$, следовательно, φ квазидифференцируемо в точке x_0. Так как $f := \Sigma\circ\varphi$, то согласно 4.3 отображение f также квазидифференцируемо в точке x_0 и его квазидифференциал вычисляется с помощью формул

$$\underline{\partial} f(x_0) = \underline{\partial}(\Sigma\circ F)(x_0) = \Sigma\circ\underline{\partial}F(x_0) = o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \underline{\partial} f_\alpha(x_0),$$

$$\overline{\partial} f(x_0) = \overline{\partial}(\Sigma\circ F)(x_0) = \Sigma\circ\overline{\partial}F(x_0) = o\text{-}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \overline{\partial} f_\alpha(x_0). \ \rhd$$

4.5. В заключение параграфа займемся условиями квазидифференцируемости интегрального оператора. Пусть (Ω, Σ, μ) — вероятностное пространство, X — сепарабельное банахово пространство, а E — порядково полная банахова решетка с порядково непрерывной нормой. Рассмотрим семейство $(f_\omega)_{\omega\in\Omega}$ отображений $f_\omega : X \to E^{\cdot}$ квазидифференцируемых в точке $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom} f_\omega)$. Предположим, что при любом x из некоторого множества $U \subset X$ отображение $\omega \mapsto f_\omega(x)$ почти всюду принимает значения из E и интегрируемо по Бохнеру. Тогда можно определить отображение $f : X \to E^{\cdot}$, полагая

$$f(x) := \int_\Omega f_\omega(x)\, d\mu(\omega)$$

при $x \in U$ и $f(x) = +\infty$ при $x \notin U$. Выясним при каких условиях отображение f квазидифференцируемо в точке $x_0 \in \operatorname{core}(U)$. Пусть $f'_\omega(x_0)h$ производная f_ω в точке x_0 по направлению h. В силу квазидифференцируемости f_ω справедливо представление

$$f'_\omega(x_0) = p_\omega - q_\omega,$$

где $p_\omega, q_\omega : X \to E$ — сублинейные операторы при любом $\omega\in\Omega$.

Семейство $(f_\omega)_{\omega\in\Omega}$ назовем *равностепенно квазидифференцируемым* в точке x_0 по направлению $h \in X$, если существует последовательность интегрируемых отображений

(ψ_n), $\psi:\Omega\to E$, убывающая и o-сходящаяся к нулю почти всюду, для которой выполнена оценка

$$\sup_{0<t<1/n}\left|\frac{f_\omega(x_0+th)-f_\omega(x_0)}{t}\right|\leqslant\psi_n(\omega)$$

для всех $\omega\in\Omega$ и $n\in\mathbb{N}$.

Теорема. *Пусть X — банахово пространство, а E — порядково полная банахова решетка с порядково непрерывной нормой. Пусть $(f_\omega)_{\omega\in\Omega}$ и f — те же, что и выше. Отображение $\varphi:X\to L^1(\Omega,\Sigma,\mu,E)^{\cdot}$ определим сопоставив $x\in U$ класс эквивалентности интегрируемой вектор-функции $\omega\mapsto f_\omega(x)$ и положив $\varphi(x)=+\infty$ при $x\notin U$. Предположим, что семейство $(f_\omega)_{\omega\in\Omega}$ равностепенно дифференцируемо по направлениям в точке x_0 и для любого $\omega\in\Omega$ производная по направлениям $f'_\omega(x_0)$ допускает такое представление в виде разности сублинейных операторов $f'_\omega(x_0)=p_\omega-q_\omega$, что отображения $\omega\mapsto p_\omega(h)$ и $\omega\mapsto q_\omega(h)$ интегрируемы по Бохнеру при всех $h\in X$. Тогда отображение f квазидифференцируемо в точке x_0 и имеет место представление*

$$\mathcal{D}f(x_0)=\int_\Omega\mathcal{D}\varphi(x_0)\,d\mu.$$

Точнее, квазидифференциал $\mathcal{D}f(x_0)=[\underline{\partial}f(x_0),\overline{\partial}f(x_0)]$ описывается следующим образом:

$$\underline{\partial}f(x_0)=\int_\Omega\underline{\partial}\varphi(x_0)\,d\mu,\quad \overline{\partial}f(x_0)=\int_\Omega\overline{\partial}\varphi(x_0)\,d\mu.$$

$\lhd$ При сделанных допущениях оператор $I_\mu:L^1(\Omega,\Sigma,\mu,E)\to E$, определяемый интегралом Бохнера

$$I_\mu(u):=\int_\Omega u(\omega)\,d\mu(\omega)\quad(u\in L^1(\Omega,\Sigma,\mu,E)),$$

является линейным оператором Магарам (см. [7; 4.4.2 (5)]). Введем два новых оператора $P,Q:X\to L^1(\Omega,\Sigma,\mu,E)$ посредством формул

$$P(h):\omega\mapsto p_\omega(h),\quad Q(h):\omega\mapsto q_\omega(h)\quad(h\in X).$$

Из условия равностепенной дифференцируемости по направлениям следует

$$\sup_{0<t<1/n}\left|\frac{\varphi(x_0+th)-\varphi(x_0)}{t}\right|\leqslant\psi_n\xrightarrow{(o)}0,$$

откуда видно, что φ дифференцируемо по направлениям в точке x_0 и при этом для любого $h\in X$ производная по направлению $\varphi'(x_0)h$ представляет собой отображение $\omega\mapsto f'_\omega(x_0)h$. Но это влечет справедливость представления $\varphi'(x_0)=P-Q$, означающего квазидифференцируемость отображения φ в точке x_0. Так как $f=I_\mu\circ\varphi$, то применима теорема 4.3 (1), в соответствии с которой f квазидифференцируемо в точке x_0 и

$$\mathcal{D}f(x_0)=I_\mu\circ\mathcal{D}\varphi(x_0)=I_\mu\circ[\partial P,\partial Q],$$

что и требовалось. $\rhd$

4.6. В случае сепарабельного X установленную теорему удается уточнить с помощью теоремы Штрассена. Если $(\mathcal{U}_\omega)_{\omega\in\Omega}$ — семейство опорных множеств $\mathcal{U}_\omega\in\mathrm{CS}_c(X,E)$, то символом $\int_\Omega \mathcal{U}_\omega \, d\mu(\omega)$ обозначаем множество всех линейных операторов $T \in L(X, E)$, представимых в виде

$$Tx = \int_\Omega T_\omega(x) \, d\mu(\omega) \quad (x \in X),$$

где $(T_\omega)_{\omega \in \Omega}$ — такое семейство линейных операторов из X в E, что $T_\omega \in \mathcal{U}_\omega$ для почти всех $\omega \in \Omega$ и для любого $x \in X$ отображение $\omega \mapsto T\omega(x)$ интегрируемо по Бохнеру.

Теорема. *Пусть $(f_\omega)_{\omega \in \Omega}$ и f — те же, что и выше. Предположим, что семейство (f_ω) равностепенно дифференцируемо по направлениям в точке x_0 и для любого $\omega \in \Omega$ производная по направлениям $f'_\omega(x_0)$ допускает такое представление в виде разности сублинейных операторов $f'_\omega(x_0) = p_\omega - q_\omega$, что отображения $\omega \mapsto p_\omega(h)$ и $\omega \mapsto q_\omega(h)$ интегрируемы по Бохнеру при всех $h \in X$. Тогда отображение f квазидифференцируемо в точке x_0 и имеет место представление*

$$\mathcal{D}f(x_0) = \int_\Omega \mathcal{D}f_\omega(x_0) \, d\mu(\omega).$$

Точнее, квазидифференциал $\mathcal{D}f(x_0) = [\underline{\partial} f(x_0), \overline{\partial} f(x_0)]$ описывается следующим образом:

$$\underline{\partial} f(x_0) = \int_\Omega \underline{\partial} f_\omega(x_0) \, d\mu(\omega), \quad \overline{\partial} f(x_0) = \int_\Omega \overline{\partial} f_\omega(x_0) \, d\mu(\omega).$$

$\lhd$ Так как выполнены все условия теоремы 3.6, то $\mathcal{D}f(x_0) = I_\mu \circ (x_0) = [\partial P, \partial Q] = [\partial(I_\mu \circ P), \partial(I_\mu \circ Q)]$. Остается привлечь теорему Штрассена о дезинтегрировании [7; 4.5.8]. $\rhd$

Литература

1. *Демьянов В. Ф., Полякова Л. Н., Рубинов А. М.* Об одном обобщении понятия субдифференциала // В кн.: Тез. всес. конф. по динамическому управлению. Свердловск.—1979.—С. 79–84.
2. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* О квазидифференцируемых функционалах // Докл. АН СССР.—1980.–Т. 250, № 1.—С. 21–25.
3. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация.—М.: Наука.—1981.—384 с.
4. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.—М.: Наука.—1990.—432 с.
5. *Demyanov V. F., Rubinov A. M.* On quasidifferentiable mappings // Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optimization.—1983.—V. 14.—P. 3–21.
6. *Басаева Е. К.* Квазидифференциалы в K-пространствах // Владикавк. мат. журн.—2003.—Т. 5, вып. 3.—С. 14-30.
7. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы. Теория и приложения. Ч. I.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2002.—viii+372 с.
8. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.

Статья поступила 7 сентября 2003 г.

Басаева Елена Казбековна
г. Владикавказ, Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН
E-mail: helen@alanianet.ru

Кусраев Анатолий Георгиевич, д.ф.-м.н.
г. Владикавказ, Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН
E-mail: kusraev@alanianet.ru