Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2002, Том 4, Выпуск 4

УДК **517.958**

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОБЩЕЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ БКВ-УРАВНЕНИЯ

Г. Л. Луканкин, А. В. Латышев, С. В. Рындина

Доказана теорема о разложении решения общей граничной задачи для БКВ-уравнения по собственным векторам непрерывного и дискретного спектров. Условия разрешимости позволяют однозначно определить неизвестные коэффициенты разложения и свободные параметры решения векторной краевой задачи Римана — Гильберта.

Модельное уравнение Больцмана с интегралом столкновений в форме БКВ (Больцман, Крук, Веландер) и с частотой, произвольным образом зависящей от молекулярной скорости было построено в [1]. В настоящей работе продолжаются исследования начатые в [2], [3] и [4].

1. Постановка задачи. Линеаризованное БКВ-уравнение, одномерное и стационарное имеет вид

$$\xi_x \frac{\partial h}{\partial x} = \xi \int\limits_{-1}^{1} d\mu' \int\limits_{0}^{\infty} \exp(-\xi'^2) k(\mu,\xi;\mu',\xi') h(x,\xi',\xi')\, d\xi' - \xi h(x,\mu',\xi'), \tag{1}$$

где $k(\mu,\xi;\mu',\xi') = 1 + \frac{3}{2}\mu\xi\mu'\xi' + \frac{1}{2}(\xi^2-2)(\xi'^2-2)$ — ядро интегрального оператора. Функция h удовлетворяет следующим граничным условиям

$$h(0,\mu,\xi) = h_0(\mu,\xi), \quad 0<\mu<1, \tag{2}$$

$$h(x,\mu,\xi) = h_{as}(x,\mu,\xi) + o(1), \quad x\to+\infty, \quad -1<\mu<0. \tag{3}$$

Здесь $h_0(\mu,\xi) \in H(0,1)$ по переменной μ ($H(0,1)$ — класс функций, удовлетворяющих условию Гёльдера на отрезке [0,1]); асимптотическая часть функции h при $x\to\infty$ является линейной комбинацией дискретных решений уравнения (1).

Функцию h разлагаем по трем ортогональным направлениям $(1,\xi,\xi^2-2)$. Граничная задача (1)–(3) разбивается на три скалярные, которые можно объединить в одну векторную. Применение законов сохранения (числа частиц, x компоненты импульса, энергии) позволяет упростить ядро векторной граничной задачи. Получаем

$$\mu\frac{\partial h(x,\mu)}{\partial x} + h(x,\mu) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} K(\mu,\mu')h(x,\mu')\,d\mu', \quad K(\mu,\mu') = \begin{pmatrix} 1 & 4\alpha & 0 \\ 0 & 3c\mu\mu' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $x\in(0,+\infty)$, $\mu\in(-1,1)$, $\alpha\in R$, $c=1-9\alpha^2$. Граничные условия (2)–(3) принимают вид

$$h(x,\mu) = h_0(\mu) = (h_{01}(\mu), h_{02}(\mu), h_{03}(\mu))^T, \quad 0<\mu<1, \tag{5}$$

$$h(x,\mu) = h_{as}(x,\mu) + o(1), \quad x \to \infty, \quad -1 < \mu < 0, \tag{6}$$

где T — означает транспонирование, $h_{0i}(\mu) \in H(0,1)$ при $i = 1,2,3$, а функция $h_{as}(x,\mu)$ определяется ниже, как линейная комбинация собственных решений дискретного спектра уравнения (4). Решение граничной задачи (4)–(6) будем искать в классе вектор-функций $h(x,\mu) = (h_1(x,\mu), h_2(x,\mu), h_3(x,\mu))^T$ таких, что $h_i(x,\mu)$ $(i = 1,2,3)$ непрерывны по x на полуоси $x \in [0,+\infty]$ при всех $\mu \in (-1,1)$, имеют конечные пределы при $\mu \to \pm 1$ и $\mu \to 0$ для любого $x \in (0,+\infty)$, непрерывно дифференцируемы по x на полуоси $x \in (0,+\infty)$ при всех $\mu \in (-1,1)$ и интегрируемы по μ на $(-1,1)$ при всех $x \in (0,+\infty)$.

2. Краевая задача Римана — Гильберта. В уравнении (4) переменные x и μ — независимые. Применяя метод разделения переменных Фурье, получим векторное характеристическое уравнение

$$(\eta - \mu)\Phi(\eta,\mu) = \frac{1}{2}\eta \int\limits_{-1}^{1} K(\mu,\mu')\Phi(\eta,\mu)\, d\mu', \tag{7}$$

в котором производные по пространственной переменной отсутствуют. Фактически задача (7) — задача на собственные значения для интегрального оператора. Спектр данного оператора включает в себя непрерывную часть, состоящую из континуума значений спектрального параметра $\eta \in [-1,1]$, и дискретную, состоящую из нулей дисперсионной функции

$$\lambda_c(z) = \det \Lambda_c(z) = \lambda_0^2(z)\omega_c(z),$$

где

$$t(z) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\mu}{\mu - z}, \quad \lambda_0(z) = 1 + \frac{1}{2}zt(z), \quad \omega_c(z) = 1 + 3cz^2\lambda_0(z),$$

а $\Lambda_c(z)$ — дисперсионная матрица, имеющая вид

$$\Lambda_c(z) = \begin{pmatrix} \lambda_0(z) & 2\alpha z t(z) & 0 \\ 0 & \omega_c(z) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0(z) \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы, отвечающие непрерывному спектру, являются сингулярными и принадлежат пространству обобщенных функций [5]

$$\Phi(\eta,\mu) = \frac{1}{2}\eta K(\mu,\eta) P\frac{1}{\eta - \mu} n(\eta) + \Lambda_c(\eta) n(\eta) \delta(\eta - \mu), \quad \mu,\eta \in (-1,1), \tag{8}$$

$$n(\eta) = \int\limits_{-1}^{1} \Phi(\eta,\mu')\, d\mu'.$$

Собственные значения дискретного спектра являются решениями совокупности
$$\left[\begin{array}{l} \lambda_0^2(z) = 0, \\ \omega(z) = 0. \end{array}\right.$$

При любом $c \in (-\infty, 1]$ имеем четыре собственных решения уравнения (7), отвечающих дискретному спектру:
$$h^{(1)}(x,\mu) = (1,0,0)^T;$$
$$h^{(2)}(x,\mu) = (0,0,1)^T;$$
$$h^{(i)}(x,\mu) = (x-\mu)h^{(i-2)}(x,\mu),\ i = 3,4.$$

В случае $0 < c \leqslant 1$ к ним добавляется еще два решения, отвечающих значениям дискретного спектра $\pm\eta_0$
$$h_{\pm\eta_0}(x,\mu) = \exp\left(\frac{-x}{\pm\eta_0}\right)\Phi(\pm\eta_0,\mu), \quad 0 < c < 1,$$
где
$$\Phi(\pm\eta_0,\mu) = \frac{1}{2}(\pm\eta_0)\frac{K(\mu,\pm\eta_0)}{\pm\eta_0-\mu}n(\pm\eta_0), \quad n(\eta_0) = \begin{pmatrix} 2\alpha\eta_0 t(\eta_0) \\ -\lambda_c(\eta_0) \\ 0 \end{pmatrix},$$
и при $c = 1$ $(\pm\eta_0 = \infty)$:
$$h^{(5)}(x,\mu) = (0,\mu,0)^T,$$
$$h^{(6)}(x,\mu) = (x-\mu)h^{(5)}(x,\mu).$$

Используя идею К. Кейза, который предложил искать общее решение скалярных уравнений переноса в виде сингулярного интегрального оператора типа Коши [6], найдем решение задачи (4)–(6) в виде интегрального разложения по системе собственных функций. Доказательству существования и единственности такого разложения предпошлем решение соответствующей уравнению (7) вспомогательной краевой задачи Римана — Гильберта
$$X^+(\mu) = G(\mu)\cdot X^-(\mu), \quad \mu \in (0,1), \tag{9}$$
где $X(z)$ — неизвестная матрица-функция, аналитическая в комплексной плоскости с разрезом $[0,1]$, $X^{\pm}(\mu)$ — граничные значения соответственно сверху и снизу на разрезе $(0,1)$, $G(\mu) = [\Lambda_c^+(\mu)]^{-1}\Lambda_c^-(\mu)$ — матричный коэффициент задачи. Граничные значения дисперсионной матрицы на разрезе $(-1,1)$ находятся согласно формулам Сохоцкого [7].

Решение задачи (9) — фактор-матрица
$$X(z) = \begin{pmatrix} U(z) & 4\alpha(U(z)-V(z)) & 0 \\ 0 & V(z) & 0 \\ 0 & 0 & U(z) \end{pmatrix},$$
элементы которой определены формулами $U(z) = z\cdot\exp(-u(z))$ и $V(z) = z\cdot\exp(-v(z))$, где
$$u(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\theta(\mu)-\pi}{\mu-z}\,d\mu, \quad v(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\varepsilon(\mu)-\pi}{\mu-z}\,d\mu,$$
$\theta(\mu) = \arg\lambda_0^+(\mu)$ — главное значение аргумента функции $\lambda_0^+(\mu)$, $\varepsilon(\mu) = \arg\omega_x^+(\mu)$ — главное значение аргумента функции $\omega_c^+(\mu)$.

3. Решение граничной задачи. Для значений параметра $c \in (-\infty, 0)$ и $c \in (0,1)$ определим $h_{as}(x,\mu)$ как комбинацию первых четырех собственных решений, отвечающих дискретному спектру

$$h_{as}(x,\mu) = (q_1 + q_2(x-\mu),\, 0,\, q_3 + q_4(x-\mu))^T,$$

где q_2 и q_4 — заданные постоянные, q_1 и q_3 — неизвестные константы.

Для $c = 1$ решение $h_{as}(x,\mu)$ определяется как комбинация всех шести дискретных решений, соответствующих этому случаю

$$h_{as}(x,\mu) = \big(j_1 + j_2(x-\mu),\, j_3\mu + j_4\mu(x-\mu),\, j_5 + j_6(x-\mu)\big)^T,$$

где j_2, j_4 и j_6 — заданные постоянные, j_1, j_3 и j_5 — неизвестные константы.

Теорема 1. *Граничная задача (4)–(6) при $0 < c < 1$ имеет единственное решение, представимое в виде разложения по собственным векторам дискретного спектра и собственным матрицам непрерывного спектра:*

$$h(x,\mu) = h_{as}(x,\mu) + A_0 h_{\eta_0}(x,\mu) + \int\limits_0^1 \exp(-x/\eta)\Phi(\eta,\mu)A(\eta)\,d\eta, \tag{10}$$

где q_2 и q_4 — постоянные, а собственные векторы $\Phi(\eta,\mu)$ находятся по формуле (8).

В разложении (10) неизвестными являются коэффициенты A_0, q_1, q_3 — отвечающие дискретному спектру и вектор-функция $A(\eta)$, являющаяся коэффициентом непрерывного спектра.

В разложении решения граничной задачи используется невозрастающее собственное решение, соответствующее значению η_0, поэтому разложение (10) автоматически удовлетворяет граничному условию (6).

$\lhd$ Используя граничное условие (5), перейдем от разложения (10) к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши:

$$h_{as}(0,\mu) + A_0 h_{\eta_0}(0,\mu) + \Lambda_c(\mu)A(\mu) + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \eta K(\mu,\eta)A(\eta)\frac{d\eta}{\eta-\mu} = h_0(\mu). \tag{11}$$

Введем вспомогательную вектор-функцию

$$N(z) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \eta K(z,\eta)A(\eta)\frac{d\eta}{\eta-z}, \tag{12}$$

аналитическую всюду в комплексной плоскости с разрезом $[0,1]$. Ее граничные значения сверху и снизу на разрезе $(0,1)$

$$N^{\pm}(\mu) = \lim_{\substack{y\to 0\pm \\ x\to\mu}} N(z), \quad z = x + iy, \quad \mu \in (0,1)$$

связаны между собой формулами Сохоцкого [7].

Умножим обе части уравнения (11) на $\pi i\mu K(\mu^2)$. Получим

$$[\Lambda^+(\mu)-\Lambda^-(\mu)](h_{as}(0,\mu)+A_0h_{\eta_0}(0,\mu))+\frac{1}{2}[\Lambda^+(\mu)-\Lambda^-(\mu)][N^+(\mu)+N^-(\mu)]$$
$$+K(\mu^2)\Lambda(\mu)K^{-1}(\mu^2)\pi i\mu K(\mu^2)A(\mu)=\pi i\mu K(\mu^2)h_0(\mu).$$

Заменим разность $\Lambda^+(\mu)-\Lambda^-(\mu)$ на равное выражение $K(\mu^2)\Lambda^+(\mu)K^{-1}(\mu^2)-K(\mu^2)\Lambda^-(\mu)K^{-1}(\mu^2)$ и умножим обе части полученного равенства слева на матрицу-функцию $K^{-1}(\mu^2)$. В результате получим векторную краевую задачу Римана — Гильберта

$$P^+(\mu)(N^+(\mu)+h_{as}(0,\mu)+A_0h_{\eta_0}(0,\mu))-P^-(\mu)(N^-(\mu)+h_{as}(0,\mu)$$
$$+A_0h_{\eta_0}(0,\mu))=\pi i\mu K(\mu^2)h_0(\mu),\quad \mu\in(0,1),\qquad(13)$$

где $P(z)=\Lambda(z)K^{-1}(z^2)$.

Пользуясь результатами предыдущего пункта преобразуем задачу (13) в векторную задачу по скачку

$$[X^+(\mu)]^{-1}(N^+(\mu)+h_{as}(0,\mu)+A_0h_{\eta_0}(0,\mu))$$
$$-[X^-(\mu)]^{-1}(N^-(\mu)+h_{as}(0,\mu)+A_0h_{\eta_0}(0,\mu))$$
$$=\pi i\mu[P^+(\mu)X^+(\mu)]^{-1}h_0(\mu),\quad \mu\in(0,1).\qquad(14)$$

Введем обозначение $B(\mu)=[P^+(\mu)X^+(\mu)]^{-1}$. Учитывая поведение входящих в краевое условие (14) функций и воспользовавшись обобщенной теоремой Лиувилля, получим

$$N(z)=-h_{as}(0,\mu)+\frac{1}{2}A_0\eta_0\frac{K(z,\eta_0)}{z-\eta_0}n(\eta_0)+X(z)\Big[\Psi(z)+\frac{C}{z-\eta_0}+D\Big].\qquad(15)$$

Здесь

$$\Psi(z)=\begin{pmatrix}\Psi_1(z)\\ \Psi_2(z)\\ \Psi_3(z)\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\mu B(\mu)h_0(\mu)\frac{d\mu}{\mu-z}$$

— интеграл типа Коши; C,D — векторы, компоненты которых c_i,d_i — произвольные константы ($i=1,2,3$).

Для корректности полученного решения (15) необходимо, чтобы равенства (12) и (15) определяли одну и ту же функцию. Это можно сделать за счет выбора свободных параметров — компонентов векторов C и D, а также за счет определения неизвестных коэффициентов A_0,q_1 и q_3 следующим образом. Векторное условие, устраняющее у решения (15) полюс в точке η_0, однозначно определяет элементы вектора C, а устраняющее полюс в бесконечно удаленной точке — элементы вектора D. Неизвестные коэффициенты A_0,q_1 и q_3 однозначно определяются из равенства пределов функций (12) и (15) в бесконечности.

Нахождение в явном виде всех неизвестных коэффициентов разложения (11) заканчивает построение решения задачи (4)–(6) (а, следовательно, доказывает и существование этого решения) для случая $c\in(0,1)$. Доказательство единственности основано на невозможности нетривиального разложения нуль-вектора по собственным векторам характеристического уравнения. $\triangleright$

Аналогичная теорема может быть доказана для отрицательных значений параметра c. В этом случае коэффициент дискретного спектра A_0 равен нулю. Следовательно, общая формула разложения решения граничной задачи при любом $c \in (-\infty, 1]$ $(c \neq 0)$ имеет вид

$$h(x,\mu) = h_{as}(x,\mu) + \chi_+(c) \cdot A_0 h_{\eta_0}(x,\mu) + \int\limits_0^1 \exp(-x/\eta)\Phi(\eta,\mu)A(\eta)\,d\eta,$$

где

$$\chi_+(c) = \begin{cases} 1, & 0 < c < 1, \\ 0, & c < 0,\ c = 1. \end{cases}$$

Случай $c = 0$ исключен из рассмотрения, как не представляющий интереса.

Литература

1. *Cercignani C.* The method of elementary solutions for kinetic models with velocity-dependent collision frequency // Ann. Phys.—1966.—V. 40, No. 3.—P. 469–481.
2. *Латышев А. В.* Применение метода Кейза к решению линеаризованного кинетического БГК-уравнения в задаче о температурном скачке // Прикл. математика и механика.—1990—Т. 54, Вып. 4—С. 581–586.
3. *Латышев А. В., Юшканов А. А.* Аналитическое решение модельного БГК-уравнения Больцмана в задаче о температурном скачке с учетом аккомодации энергии // Матем. моделирование.—1992.—Т. 4, вып. 10, С. 41–46.
4. *Latyshev A. V., Yushkanov A. A.* Boundary value problems for a model Boltzmann equation with froqueney proportional to the molekule velocity // Fluid Dynamics.—1996.—V. 31, No. 3.
5. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике.—М.: Наука, 1976.—80 с.
6. *Case K. M.* Elementary solutions of the transport equation and their applications // Ann. Phys. N. Y.—1960.—V. 9, V. 1.—P. 1–23.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.— М.: Наука, 1968.—512 с.

гг. Мытищи, Москва, Пенза *Статья поступила 16 сентября 2002 г.*