Владикавказский математический журнал
Июль–сентябрь, 2002, Том 4, Выпуск 3

УДК **338.24.01**

ОДНОПРОДУКТОВАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ МОЩНОСТЕЙ

Л. А. Бекларян, С. В. Борисова

Описана однопродуктовая динамическая модель экономики, позволяющая исследовать характер оптимальных сроков функционирования производственных мощностей. Сформулирован принцип дифференциальной оптимизации, на основании которого выбирается оптимальная политика вывода старых и ввода новых, более совершенных фондов. Описаны все возможные варианты развития системы.

Введение

Производственная структура любой экономической системы подвержена изменениям во времени, обусловленным различными причинами, в том числе развитием научно-технического прогресса и ростом фондовооруженности. В связи с этим встают сложные задачи моделирования интенсивного развития экономических и научно-технических систем и управления этим развитием [1–4]. Большое значение в этом случае приобретает улучшение использования основных фондов и производственных мощностей. Величина производственной мощности формируется под влиянием множества производственно-технических и организационно-экономических факторов. Наибольшее же влияние на величину производственной мощности оказывает используемое в производстве оборудование, его количественный и качественный состав. Замена устаревшего оборудования на новое, более совершенное (обладающее большей производительностью и/или трудоемкостью) приводит к наращиванию производственной мощности. В этом случае одной из важнейших прикладных задач является моделирование и оптимизация сроков функционирования производственных мощностей экономических систем.

Такие модели имеют приложения на различных уровнях управления экономикой (экономика страны, региона, отрасли, отдельного предприятия и т. п.). На высоких уровнях управления такие модели оптимизируют как распределение ресурсов между отраслями, так и техническую политику. На более низких уровнях (отрасль, предприятие) они описывают процессы замены, обновления и распределения машин и оборудования в экономической системе и могут быть использованы для таких конкретных задач как расчет (и оптимизация) материально-технического снабжения, определения потребностей в машинах и оборудовании и др. Наиболее перспективным является применение данного класса моделей для задач прогнозирования и долгосрочного планирования в масштабах народного хозяйства или в фондоемких отраслях и производствах с интенсивным техническим прогрессом.

Наиболее известным примером макроэкономической модели с овеществленным техническим прогрессом является модель Солоу [6]. Согласно модели Солоу технический прогресс воплощен в основных производственных фондах: фонды, созданные недавно, более эффективны по сравнению с выпущенными в более ранние моменты времени, а фонды, созданные в одном году, имеют одинаковую эффективность.

В модели Солоу описывается только случай равномерных темпов износа и она не учитывает действительно динамическое, неравномерное развитие экономики.

Новым этапом в развитии таких моделей стали динамические модели, позволяющие управлять динамикой сворачивания устаревших основных фондов [7, 8]. Если раньше время службы фондов в основном определялось только лишь с точки зрения их физического износа, и это время значительно превышало срок службы любой единицы трудовых ресурсов, то теперь в связи с развитием научно-технического прогресса срок службы фондов в большей степени определяется их моральным износом. Появление новых, более совершенных технологий многократно сокращает срок службы фондов, а в отдельных отраслях это время составляет лишь несколько лет (например, в области электронной промышленности, компьютерных технологий). Поэтому, если в первом случае происходит всего лишь замена старого оборудования на новое, то во втором — полная реконструкция фондов, т. е. наименее эффективные выводятся из производства (и в дальнейшем не используются), а высвобождающиеся трудовые ресурсы направляются на вновь создаваемые фонды.

Такие модели впервые были введены Л. В. Канторовичем в 1959 г. Однако их дальнейшее исследование не проводилось, и только в 1973 г. появляется работа, в которой приведена однопродуктовая макроэкономическая динамическая модель.

Принципиально новым в модели Канторовича является введение новой функции — $m(t)$ — временной границы использования фондов: все фонды, созданные раннее момента $m(t)$, в момент t оказываются выведенными из производства.

Л. В. Канторовичем был предложен принцип дифференциальной оптимизации. Согласно этому принципу способ вывода устаревших и структура вновь созданных основных фондов являются оптимальными, если они обеспечивают максимальный темп роста национального дохода в текущий момент времени.

Независимо от работы [9] В. М. Глушков предложил в 1977 г. двухпродуктовую макроэкономическую модель [8], дополняющую модель Канторовича. Эта модель описывает две группы производства: А — производство средств производства и Б — производство предметов потребления.

В моделях Канторовича и Глушкова, в отличие от модели Солоу, наряду с овеществленным уровнем описания научно-технического прогресса, содержится возможность управления и оптимизации развития экономических систем за счет изменения политики обновления основных фондов.

Научно-технический прогресс ведет к высоким темпам обновления технологий и сопутствующих им расширению, реконструкции и техническому перевооружению действующих предприятий. В связи с этим встает вопрос не только о поиске оптимальных сроков службы фондов, но и режимов ввода новых фондов. Решение данной проблемы позволяет обеспечить научно обоснованный выбор политики развития производства в условиях научно-технического прогресса и роста фондовооруженности производства.

Данная работа посвящена проблеме поиска оптимальной политики вывода из производства устаревших фондов и ввода новых (более совершенных) в рамках построенной однопродуктовой модели. Для достижения этой цели в качестве критерия оптимальности используется «принцип дифференциальной оптимизации», предложенный Л. В. Канторовичем [10].

1. Описание характеристик модели

Будем рассматривать систему, производящую один продукт и обладающую высокими темпами обновления технологий, с двумя главными производственными факторами — производственные фонды (овеществленный капитал), дифференцированные по моментам их создания и измеряемые в единицах продукта, а также трудовые ресурсы, измеряемые количеством трудовых единиц.

Пусть эффективность производства в любой момент времени t определяется производственной функцией $U(x, y, \tau)$, выражающей количество чистого продукта, создаваемого трудом y (в единицу времени) при использовании производственных фондов объема x (созданных в момент τ ($\tau < t$)). Предполагается, что функция U монотонно возрастает по τ, что отражает увеличение эффективности более новых фондов под действием технического прогресса. Кроме того, предполагается, что по первым двум аргументам функция U является однородной (это отражает отсутствие эффекта масштаба производства) и вогнутой (т. е. функция U базируется на оптимальных способах производства).

Через $\chi(t)$ обозначим интенсивность ввода капиталовложений, идущих на увеличение фондов и замену выбывающих из производства фондов, т. е. объем фондов, введенных в производство во временном интервале $[t, t+dt]$, равен $\chi(t)dt$. Функция $\chi(t)$ предполагается либо экзогенной переменной модели, т. е. заданной изначально, либо предполагается, что она составляет постоянную часть производимого в момент времени t чистого продукта (эндогенная переменная). В случае экзогенно заданной функции $\chi(t)$ будем предполагать, что она является абсолютно непрерывной, с производной непрерывной справа.

Количество трудовых ресурсов, занятых на создаваемых фондах, определяется интенсивностью их ввода $\varphi(t)$, т. е. предполагается, что трудовые ресурсы, введенные во временном интервале $[t, t+dt]$, равняются $\varphi(t)dt$ единицам. Функцию $\varphi(t)$ необходимо найти. Предполагается, что $\varphi(t)$ — неотрицательная функция кусочно-непрерывная справа.

В модели предполагается, что технический прогресс и рост фондовооруженности приводят к ускорению темпов сменяемости технологий производства, и как следствие к необходимости замены устаревших фондов. В результате наименее эффективные фонды непрерывно выводятся из производства (и в дальнейшем не используются), а высвобождающиеся трудовые ресурсы направляются на вновь создаваемые фонды. Наиболее старые фонды (имеющие самый ранний период создания среди фондов, занятых в процессе производства на момент t) будут выводиться в первую очередь. Политика вывода из производства устаревших фондов характеризуется функцией $m(t)$, определяющей момент создания фондов, выводимых из производства в момент времени t ($m(t) < t$). Функцию $m(t)$ необходимо найти. Предполагается, что $m(t)$ — абсолютно непрерывная функция, с производной непрерывной справа. Кроме того, при выводе старых фондов существуют ограничения, которые выражаются в скорости замещения устаревших фондов во времени, т. е. существует константа M ($M \gg 1$) такая, что $m'(t) \leqslant M$ (т. е. устаревшие к моменту времени t фонды не могут быть выведены все одновременно). Кроме того, из смысла $m(t)$ следует, что $m'(t) \geqslant 0$ и $m(t) < t$.

Будем предполагать, что во времени существует некий ряд различных технологий. В каждый момент времени t встает вопрос о выборе и внедрении в производство той или иной технологии. Политика ввода в производство новых мощностей характеризуется функцией $\alpha(t)$, определяющей момент запуска новой технологии, полностью осваиваемой к моменту времени t. Функция $\alpha(t)$ является неизвестной. Предполагается, что $\alpha(t)$ — абсолютно непрерывная функция, с производной непрерывной справа. Из смысла функций $m(t)$ и $\alpha(t)$ следует, они должны удовлетворять условиям $m(t) \leqslant \alpha(t) \leqslant t$, $\alpha'(t) \geqslant 0$.

Через $T_a(t)$ и $T_p(t)$ будем обозначать, соответственно, активные и пассивные трудовые ресурсы в момент времени t, т. е. $T_a(t)$ — это трудовые ресурсы, участвующие в производстве на действующих фондах в момент времени t, а $T_p(t)$ — трудовые ресурсы, которые задействованы в момент времени t на вводимых фондах (осваиваемых фондах). Будем предполагать, что трудовые ресурсы как активные, так и пассивные не убывают, т. е. $T_a'(t) \geqslant 0$, $T_p'(t) \geqslant 0$, и задаются абсолютно непрерывными функциями, с производной кусочно-непрерывной справа.

Обозначим через $P(t)$ количество чистого продукта, производимого на фондах, участвующих в производстве в момент времени t.

2. Постановка задачи.
Принцип дифференциальной оптимизации

Перейдем теперь к постановке задачи и формулировке принципа дифференциальной оптимизации.

Национальный доход в каждый момент времени t вычисляется по следующей формуле

$$P(t) = \int_{m(t)}^{\alpha(t)} U(\chi(\tau), \varphi(\tau), \tau) d\tau. \tag{2.1}$$

Уравнение баланса активных трудовых ресурсов:

$$\int_{m(t)}^{\alpha(t)} \varphi(\tau) d\tau = T_a(t).$$

Это уравнение может быть записано в дифференциальной форме:

$$\varphi(\alpha(t))\alpha'(t) - \varphi(m(t))m'(t) = T_a'(t). \tag{2.2}$$

Уравнение баланса пассивных трудовых ресурсов:

$$\int_{\alpha(t)}^{t} \varphi(\tau) d\tau = T_p(t).$$

В дифференциальной форме это уравнение будет иметь вид:

$$\varphi(t) = \varphi(\alpha(t))\alpha'(t) + T_p'(t). \tag{2.3}$$

Следует отметить, что выражения (2.2), (2.3) вообще говоря, не эквивалентны уравнениям баланса активных и пассивных трудовых ресурсов, записанным в интегральной форме (с точностью до начальных значений).

Уравнение баланса по фондам в случае, когда $\chi(t)$ равна постоянной части национального дохода, т. е. $\chi(t) = \lambda P(t)$ ($0 < \lambda < 1$ — постоянная норма накопления). Используя формулу (2.1), уравнение баланса по фондам будет иметь вид

$$\chi(t) = \lambda \int\limits_{m(t)}^{\alpha(t)} U(\chi(\tau), \varphi(\tau), \tau) d\tau,$$

а в дифференциальной форме:

$$\chi'(t) = \lambda\bigl[U\bigl(\chi(\alpha(t)), \varphi(\alpha(t)), \alpha(t)\bigr)\alpha'(t) - U\bigl(\chi(m(t)), \varphi(m(t)), m(t)\bigr)m'(t)\bigr]. \qquad (2.4)$$

Ограничения на скорость процедуры замещения устаревших фондов и ввода новых:

$$0 \leqslant m'(t) \leqslant M, \quad \alpha'(t) \geqslant 0. \qquad (2.5)$$

В модели Л. В. Канторовича [10] инерционность при вводе новых фондов не учитывается, считается, что вводимые фонды имеют мгновенную отдачу, т. е. $\alpha(t) \equiv t$.

Кроме того, в модели Канторовича нет ограничения на скорость процедуры вывода устаревших фондов, т. е. фонды могут быть выведены из производства сколь угодно быстро.

Пусть $\hat{t}$ — начальный момент времени. Введем вектор-функции $\gamma(\cdot) = \{m(\cdot), \alpha(\cdot), \varphi(\cdot)\}$, где $m(t)$, $\alpha(t)$ — абсолютно непрерывные на $[\hat{t}, +\infty[$ функции с непрерывной справа производной; $\varphi(t)$, $t \in [\hat{t}, +\infty[$ — функция ограниченной вариации, непрерывная справа (в случае, если $\chi(t)$ является экзогенной переменной). Если $\chi(t)$ задается эндогенно, то будем рассматривать вектор-функцию $\gamma(\cdot) = \{m(\cdot), \alpha(\cdot), \chi(\cdot), \varphi(\cdot)\}$, где $\chi(t)$, $t \in [\hat{t}, +\infty[$ — абсолютно непрерывная функция с производной непрерывной справа.

Вектор-функции $\gamma(\cdot)$ будем называть траекториями.

Политика выбора оптимальной траектории основывается на следующем принципе.

Принцип дифференциальной оптимизации: *стратегия выбора переменных модели должна быть такова, чтобы в каждый момент времени обеспечить максимальный темп роста национального дохода.*

Ниже принцип дифференциальной оптимизации будет формализован для рассматриваемой задачи. При этом принцип дифференциальной оптимизации может быть сформулирован в виде уравнения дифференциальной оптимизации, которому должны удовлетворять переменные модели; формально, в каждый момент времени $t \geqslant \hat{t}$ (где t — начальный момент времени) вдоль траектории, удовлетворяющей принципу дифференциальной оптимизации, правая производная национального дохода $P_\gamma(t)$ должна принимать максимально возможное значение, а именно в каждой точке $t \geqslant \hat{t}$ функционал $P'_\gamma(t)$ относительно $\alpha'(t), m'(t), \varphi(t)$ должен принимать максимальное значение вдоль траектории $\gamma(t) = \{m(t), \alpha(t), \varphi(t)\}$ при $t \in [\hat{t}, +\infty[$, удовлетворяющей условиям (2.2), (2.3), (2.5) (в случае экзогенно заданной функции капитальных вложений $\chi(t)$; для эндогенно определяемой функции $\chi(t)$ — вдоль траектории $\gamma(t) = \{m(t), \alpha(t), \chi(t), \varphi(t)\}$ при $t \in [\hat{t}, \infty[$, удовлетворяющей условиям (2.2)–(2.5)).

3. Случай экзогенно заданной функции капиталовложений

В случае, когда интенсивность ввода капиталовложений $\chi(t)$ задается априори, модель описывается следующими уравнениями:

национальный доход в момент времени t:

$$P(t) = \int\limits_{m(t)}^{\alpha(t)} U(\chi(\tau), \varphi(\tau), \tau) d\tau; \tag{3.1}$$

уравнения баланса активных и пассивных трудовых ресурсов соответственно, записанные в дифференциальной форме:

$$\varphi(\alpha(t))\alpha'(t) - \varphi(m(t))m'(t) = T_a'(t), \tag{3.2}$$

$$\varphi(t) = \varphi(\alpha(t))\alpha'(t) + T_p'(t); \tag{3.3}$$

ограничения на скорость процедуры замещения устаревших фондов и ввода новых:

$$0 \leqslant m'(t) \leqslant M, \quad \alpha'(t) \geqslant 0; \tag{3.4}$$

информация о начальном состоянии системы задана в виде следующих данных:

1) начальные данные $\hat{t}$, $\hat{m} = m(\hat{t})$, $\hat{\alpha} = \alpha(\hat{t})$, причем $\hat{m} \leqslant \hat{\alpha} \leqslant \hat{t}$, $\hat{m} < \hat{t}$;

2) на интервале $[\hat{m}, \hat{t}]$ задана положительная непрерывная функция $\Delta(t)$ такая, что $\varphi(t)$ совпадает с $\Delta(t)$ на полуинтервале $[\hat{m}, \hat{t}[$;

3) на полупрямой $[\hat{m}, +\infty[$ задана функция капиталовложений $\chi(t)$ — положительная, непрерывная, монотонно возрастающая.

Теперь для задачи (3.1)–(3.4) дадим точное определение принципа дифференциальной оптимизации.

Правая производная $P_\gamma'(t)$ для траектории $\gamma(t) = \{m(t), \alpha(t), \varphi(t)\}$, в произвольной точке $t \in [\hat{t}, +\infty[$ имеет вид

$$P_\gamma'(t) = U\big(\chi(\alpha(t)), \varphi(\alpha(t)), \alpha(t)\big)\alpha'(t) - U\big(\chi(m(t)), \varphi(m(t)), m(t)\big)m'(t). \tag{3.5}$$

При каждом фиксированном $[\hat{t}, +\infty[$ рассмотрим экстремальную задачу:

Задача (А).

$$U\big(\chi(\alpha(t)), \varphi(\alpha(t)), \alpha(t)\big)u - U\big(\chi(m(t)), \varphi(m(t)), m(t)\big)v \to \max_{u,v,w}, \tag{3.6}$$

$$\varphi(\alpha(t))u - \varphi(m(t))v = T_a'(t), \tag{3.7}$$

$$w = \varphi(\alpha(t))u + T_p'(t), \tag{3.8}$$

$$0 \leqslant v \leqslant M, \quad u \geqslant 0, \quad w \geqslant 0. \tag{3.9}$$

(Если в (3.6)–(3.8) $\alpha(t) = t$ или $m(t) = t$, то значение $\varphi(t)$ заменяется на w.)

Теперь мы можем дать формальное определение принципа дифференциальной оптимизации.

Принцип дифференциальной оптимизации. *Траектория $\gamma(\cdot) = \{m(\cdot), \alpha(\cdot), \varphi(\cdot)\}$ в точке $t \in [\hat{t}, +\infty[$ удовлетворяет принципу дифференциальной оптимизации, если в точке $t \in [\hat{t}, +\infty[$ она удовлетворяет ограничениям (3.2)–(3.4), а решение (v^*, u^*, w^*) экстремальной задачи (3.6)–(3.9) существует и равно $u^* = \alpha'(t)$, $v^* = m'(t)$, $w^* = \varphi(t)$.*

Более того, если старые производственные фонды оказываются сравнимыми с вводимыми (а именно, имеют одинаковую производительность), то предпочтение отдается новым фондам, при этом устаревшие фонды выводятся максимально быстро, т. е. $v^* = \mathrm{M}$.

Будем говорить, что траектория $\gamma(\cdot)$ удовлетворяет принципу дифференциальной оптимизации, если она удовлетворяет ему в любой точке $t \in [\hat{t}, +\infty[$.

В качестве производственной функции будем рассматривать хорошо известную функцию Кобба — Дугласа $U(\chi, \varphi, t) = f(t)\chi^{\beta}(t)\varphi^{\delta}(t)$, $\delta + \beta = 1$, для которой непрерывно-дифференцируемая функция $f(t)$ удовлетворяет условиям $f(t) > 0$, $f'(t) > 0$ и отражает уровень состояния научно-технического прогресса в момент t. Функция Кобба — Дугласа является однородной и вогнутой.

Принцип дифференциальной оптимизации приводит к сложной системе функционально-дифференциальных уравнений (системе уравнений дифференциальной оптимизации). Выделяются два основных режима поведения системы:

1. Случай отсутствия инерционности при вводе новых фондов: $\alpha(t) = t$, т. е. вводимые в момент времени t фонды начинают давать отдачу мгновенно (при этом режиме объем пассивных трудовых ресурсов не меняется; если же при этом режиме изменяется объем пассивных трудовых ресурсов $T_p'(t) \neq 0$, то происходит переход на режим 2);

2. Учет инерционных свойств при вводе новых фондов: $\alpha(t) < t$, т. е. вводимые в момент времени t фонды начинают давать отдачу не сразу, а требуют времени на ввод и освоение.

Переменные системы уравнений дифференциальной оптимизации в каждый момент времени $t \in [\hat{t}, +\infty[$ должны удовлетворять следующей системе уравнений

$$m'(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \alpha(t) = t,\ \varphi(m(t)) \neq 0, \\ & \quad \frac{\varphi_{\max}(t)}{\varphi(m(t))} - \frac{T_a'(t)+T_p'(t)}{\varphi(m(t))} \leqslant 0; \\ \frac{\varphi_{\max}(t)}{\varphi(m(t))} - \frac{T_a'(t)+T_p'(t)}{\varphi(m(t))}, & \text{если} \quad \alpha(t) = t,\ \varphi(m(t)) \neq 0, \\ & \quad 0 < \frac{\varphi_{\max}(t)}{\varphi(m(t))} - \frac{T_a'(t)+T_p'(t)}{\varphi(m(t))} < M; \\ M, & \text{если} \quad \alpha(t) = t,\ \varphi(m(t)) \neq 0, \\ & \quad \frac{\varphi_{\max}(t)}{\varphi(m(t))} - \frac{T_a'(t)+T_p'(t)}{\varphi(m(t))} \geqslant M; \\ 0, & \text{если} \quad \alpha(t) = t,\ \varphi(m(t)) = 0; \\ 0, & \text{если} \quad \alpha(t) < t,\ \varphi(m(t)) \neq 0, \varphi(\alpha(t)) \neq 0, \\ & \quad \frac{F(\alpha(t))}{\varphi(\alpha(t))} < \frac{F(m(t))}{\varphi(m(t))}; \\ M, & \text{если} \quad \alpha(t) < t,\ \varphi(m(t)) \neq 0, \varphi(\alpha(t)) \neq 0, \\ & \quad \frac{F(\alpha(t))}{\varphi(\alpha(t))} \geqslant \frac{F(m(t))}{\varphi(m(t))}; \\ 0, & \text{если} \quad \alpha(t) < t,\ \varphi(m(t)) = 0. \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

$$
\alpha'(t) = \begin{cases}
1 - \frac{T'_p(t)}{T'_a(t)+T'_p(t)}, & \text{если} \quad \alpha(t) = t,\ \varphi(m(t)) \neq 0,\\
& \qquad \frac{\varphi_{\max}(t)}{\varphi(m(t))} - \frac{T'_a(t)+T'_p(t)}{\varphi(m(t))} \leqslant 0;\\
1 - \frac{T'_p(t)}{\varphi_{\max}(t)}, & \text{если} \quad \alpha(t) = t,\ \varphi(m(t)) \neq 0,\\
& \qquad 0 < \frac{\varphi_{\max}(t)}{\varphi(m(t))} - \frac{T'_a(t)+T'_p(t)}{\varphi(m(t))} < M;\\
1 - \frac{T'_p(t)}{\varphi(m(t))M+T'_a(t)+T'_p(t)}, & \text{если} \quad \alpha(t) = t,\ \varphi(m(t)) \neq 0,\\
& \qquad \frac{\varphi_{\max}(t)}{\varphi(m(t))} - \frac{T'_a(t)+T'_p(t)}{\varphi(m(t))} \geqslant M;\\
\begin{cases}
\frac{T'_a(t)}{T'_a(t)+T'_p(t)}, & \\
& \\
1, & \\
&
\end{cases} & \begin{array}{l} \text{если} \quad \alpha(t) = t,\ \varphi(m(t)) = 0,\\ \qquad T'_a(t) + T'_p(t) \neq 0,\\ \text{если} \quad \alpha(t) = t,\ \varphi(m(t)) = 0,\\ \qquad T'_a(t) + T'_p(t) = 0; \end{array}\\
\frac{T'_a(t)}{\varphi(\alpha(t))}, & \text{если} \quad \alpha(t) < t,\ \varphi(m(t)) \neq 0,\ \varphi(\alpha(t)) \neq 0,\\
& \qquad \frac{F(\alpha(t))}{\varphi(\alpha(t))} < \frac{F(m(t))}{\varphi(m(t))};\\
\frac{\varphi(m(t))}{\varphi(\alpha(t))}M + \frac{T'_a(t)}{\varphi(\alpha(t))}, & \text{если} \quad \alpha(t) < t, \varphi(m(t)) \neq 0, \varphi(\alpha(t)) \neq 0,\\
& \qquad \frac{F(\alpha(t))}{\varphi(\alpha(t))} \geqslant \frac{F(m(t))}{\varphi(m(t))};\\
\begin{cases}
\frac{T'_a(t)}{\varphi(\alpha(t))}, & \\
& \\
1, & \\
&
\end{cases} & \begin{array}{l} \text{если} \quad \alpha(t) < t,\ \varphi(m(t)) = 0,\\ \qquad \varphi(\alpha(t)) \neq 0;\\ \text{если} \quad \alpha(t) < t,\ \varphi(m(t)) = 0,\\ \qquad \varphi(\alpha(t)) = 0; \end{array}
\end{cases} \tag{II}
$$

$$
\alpha'(t) = \begin{cases}
T'_a(t) + T'_p(t), & \text{если} \quad \alpha(t) = t,\ \varphi(m(t)) \neq 0,\\
& \qquad \frac{\varphi_{\max}(t)}{\varphi(m(t))} - \frac{T'_a(t)+T'_p(t)}{\varphi(m(t))} \leqslant 0;\\
\varphi_{\max}(t), & \text{если} \quad \alpha(t) = t,\ \varphi(m(t)) \neq 0,\\
& \qquad 0 < \frac{\varphi_{\max}(t)}{\varphi(m(t))} - \frac{T'_a(t)+T'_p(t)}{\varphi(m(t))} < M;\\
\varphi(m(t))M + T'_a(t) + T'_p(t), & \text{если} \quad \alpha(t) = t, \varphi(m(t)) \neq 0,\\
& \qquad 0 < \frac{\varphi_{\max}(t)}{\varphi(m(t))} - \frac{T'_a(t)+T'_p(t)}{\varphi(m(t))} \geqslant M;\\
T'_a(t) + T'_p(t), & \text{если} \quad \alpha(t) = t,\ \varphi(m(t)) = 0;\\
T'_a(t) + T'_p(t), & \text{если} \quad \alpha(t) < t,\ \varphi(m(t)) \neq 0, \varphi(\alpha(t)) \neq 0,\\
& \qquad \frac{F(\alpha(t))}{\varphi(\alpha(t))} < \frac{F(m(t))}{\varphi(m(t))};\\
\varphi(m(t))M + T'_a(t) + T'_p(t), & \text{если} \quad \alpha(t) < t,\ \varphi(m(t)) \neq 0, \varphi(\alpha(t)) \neq 0,\\
& \qquad \frac{F(\alpha(t))}{\varphi(\alpha(t))} \geqslant \frac{F(m(t))}{\varphi(m(t))};\\
T'_a(t) + T'_p(t), & \text{если} \quad \alpha(t) < t,\ \varphi(m(t)) = 0;
\end{cases} \tag{III}
$$

где $F(t) = f^{1/\beta}(t)\chi(t)$ — монотонно возрастающая функция, $\varphi_{\max}(t)$ — решение уравнения:

$$F^{\beta}(t)\varphi_{\max}^{-\beta}(t)\left(\delta+\beta\frac{T'_p(t)}{\varphi_{\max}(t)}\right)-F^{\beta}(m(t))\varphi^{-\beta}(m(t))=0. \qquad (3.10)$$

Уравнение (3.10) имеет единственное положительное решение [11] $\varphi_{\max}(t)$, имеющее представление

$$\varphi_{\max}(t)=y(t,m(t)).$$

Сформулируем теорему эквивалентности.

Теорема 1 (теорема эквивалентности)*. Пусть заданы начальные данные* $\hat{m},\hat{\alpha},\hat{t}$ $\hat{m}<\hat{\alpha}\leqslant\hat{t}$, *краевая непрерывная функция* $\Delta(t)>0$, $t\in[\hat{m},\hat{t}]$ *и траектория* $\gamma(\cdot)=\{m(\cdot),\alpha(\cdot),\varphi(\cdot)\}$, *где* $m(t)$, $\alpha(t)$, $t\in[\hat{t},+\infty[$ *— абсолютно непрерывные функции с производными непрерывными справа, удовлетворяющие условиям* $m(t)\leqslant\alpha(t)\leqslant t$, $m(t)<t$ *и начальным значениям* $m(\hat{t})=\hat{t}$, $\alpha(\hat{t})=\hat{\alpha}$; $\varphi(t)$ *— кусочно-непрерывная справа функция, удовлетворяющая начальному условию* $\varphi(t)\equiv\Delta(t)$, $t\in[\hat{m},\hat{t}]$*. Тогда для любого* $t\in[\hat{t},+\infty[$ *траектория* $\gamma(t)$ *удовлетворяет принципу дифференциальной оптимизации тогда и только тогда, когда в точке* t *справедлива система уравнений* (I)–(III).

Теорема 2 (теорема существования и единственности)*. Пусть заданы начальные данные* $\hat{m}$, $\hat{\alpha}$, $\hat{t}$ *такие, что* $\hat{m}<\hat{\alpha}\leqslant\hat{t}$ *и краевая непрерывная функция* $\Delta(t)>0$, $t\in[\hat{m},\hat{t}]$*. Тогда существует, причем единственное, решение системы* (I)–(III)*, где* $m(t)$, $\alpha(t)$, $t\in[\hat{t},+\infty[$ *— абсолютно непрерывные функции,* $\varphi(t)$ $t\in[\hat{m},+\infty[$ *— кусочно-непрерывная справа функция, удовлетворяющая краевому условию* $\varphi(t)=\Delta(t)$, $t\in[\hat{m},\hat{t}[$ *и начальным данным* $m(\hat{t})=\hat{m}$, $\alpha(\hat{t})=\hat{\alpha}$*. Более того, функции* $m(t)$, $\alpha(t)$ *таковы, что* $m(t)\leqslant\alpha(t)\leqslant t$, $m(t)<t$.

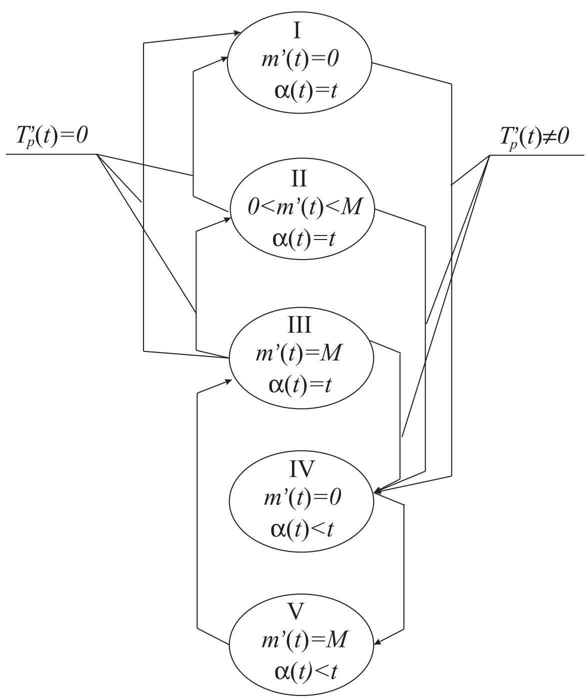

Рис. 1.

Доказательство теорем 1 и 2 приведено в [11]. Переходы с одного режима на другой представлены диаграммой, см. рис. 1.

Дадим некоторое пояснение к диаграмме. Заметим, что в первых трех случаях условие $\mathrm{T}'_p(t) = 0$ (т. е. пассивные трудовые ресурсы не вводятся) является необходимым условием того, что $\alpha(t) = t$, если $T'_p(t) \neq 0$, то происходит переход на режим $\alpha(t) < t$ (IV и V)).

Рассмотрим режим I. Если объем пассивных трудовых ресурсов меняется ($T'_p(t) \neq 0$), то происходит переход на режим IV (переход на режим V невозможен, т. к. $M \gg 1$ и в этом случае нарушится условие $\alpha(t) \leqslant t$). С этого момента вводятся фонды, требующие времени на освоение, поэтому имеющиеся фонды не выводятся $m'(t) = 0$, т. е. происходит накопление основных фондов. Когда капиталовооруженность трудовых ресурсов на накапливаемых фондах сравнятся с капиталовооруженностью задействованных в производстве трудовых ресурсов, т. е. $\frac{F(\alpha(t))}{\varphi(\alpha(t))} = \frac{F(m(t))}{\varphi(m(t))}$, происходит переход на режим V: старые фонды при этом будут выводиться с максимальной скоростью ($m'(t) = \mathrm{M}$), и интенсивно будут вводиться новые фонды

$$\alpha'(t) = \varphi(m(t))M + T'_a(t) + T'_p(t). \tag{3.11}$$

Новые фонды вводятся с достаточно большой скоростью (3.11), поэтому за конечное время $\alpha(t)$ достигает t и система переходит на режим III. В доказательстве теоремы 2 (см. [11]) показано, что в режиме III система не может развиваться вплоть до бесконечности, за конечное время происходит переход либо на режим II (если $T'_p(t) = 0$), либо на режим IV (если $\mathrm{T}'_p(t) \neq 0$).

Предположим теперь, что $T'_p(t) = 0$, и система начинает развиваться согласно режиму II. Если $T'_p(t) \neq 0$, то с режима II происходит переход на режим IV, дальнейшее развитие было рассмотрено выше. Если объем пассивных ресурсов не меняется ($T'_p(t) = 0$) и интенсивность ввода активных трудовых ресурсов ($T'_a(t)$) резко возрастает, то система переходит на режим I. Если объем пассивных ресурсов меняется ($T'_p(t) \neq 0$), то происходит переход на режим (такой вариант уже был рассмотрен). Если $T'_p(t) = 0$ и $T'_a(t) \neq 0$, то для функции $\varphi_{\max}(t)$ справедливо неравенство $\frac{\varphi_{\max}(t)}{\varphi(m(t))} \leqslant \frac{T'_a(t)}{\varphi(m(t))}$. Используя уравнение (3.10), получаем

$$\frac{\varphi_{\max}(t)}{\varphi(m(t))} = \delta^{1/\beta} \frac{F(t)}{F(m(t))} \leqslant \frac{T'_a(t)}{\varphi(m(t))}. \tag{3.12}$$

Так как фонды не выводятся $m'(t) = 0$, то $m(t) = \mathrm{const} = \bar{m}$ и $F(m(t)) = F(\bar{m})$, $\varphi(m(t)) = \varphi(\bar{m})$ есть величины постоянные. Из (3.12) получаем следующее неравенство

$$\frac{F(t)}{T'_a(t)} = \frac{F(t)}{\varphi(t)} \leqslant \delta^{1/\beta} \frac{F(\bar{m})}{\varphi(\bar{m})} = \mathrm{const}\ . \tag{3.13}$$

Таким образом, до тех пор, пока капиталовооруженность трудовых ресурсов не превосходит некоторой постоянной величины, система будет развиваться в режиме I.

Отдельно рассмотрим случай, когда $\varphi(m(t)) = 0$. Тогда переменные модели определяются уравнениями:

$$m'(t) = 0,$$

$$\alpha'(t) = \begin{cases} \frac{T'_a(t)}{T'_a(t)+T'_p(t)}, & \text{если } \ \alpha(t) = t \text{ и } T'_a(t) + T'_p(t) \neq 0; \\ 1, & \text{если } \ \alpha(t) = t \text{ и } T'_a(t) + T'_p(t) = 0; \\ \frac{T'_a(t)}{\varphi(\alpha(t))}, & \text{если } \ \alpha(t) < t \text{ и } \varphi(\alpha(t)) \neq 0; \\ 1, & \text{если } \ \alpha(t) < t \text{ и } \varphi(\alpha(t)) = 0; \end{cases}$$

$$\varphi(t) = T'_a(t) + T'_p(t).$$

Если $T'_a(t) = 0$ и $T'_p(t) = 0$, то $\varphi(t) = 0$ и система попадает в режим «ожидания», т. е. в таком состоянии (фонды не выводятся и нет движения трудовых ресурсов) система будет находится до тех пор, пока не изменятся внешние характеристики системы $T'_a(t)$, $T'_p(t)$ (интенсивность ввода активных и/или пассивных трудовых ресурсов).

Рассмотрим один частный случай. Сделаем следующее предположение: объем трудовых ресурсов как активных, так и пассивных не меняется, т. е. $T_a(t) = \mathrm{const}$, $T_p(t) = \mathrm{const}$, и вводимые фонды имеют мгновенную отдачу, т. е. $\alpha(t) = t$. В этом случае система развивается по одному из режимов I, II или III.

Наиболее интересным является режим II. В [10] показано, что если функция $F(t)$ имеет экспоненциальный вид, т. е. $F(t) = f^{1/\beta}(t)\chi(t) = Ce^{\rho t}$, то функция $m(t)$ при $t \to +\infty$ выходит на режим с постоянным запаздыванием $m(t) \approx t - A$, а функция $\varphi(t)$ со временем выходит на периодический режим.

На рисунках 2, 3 представлена численная реализация данного случая.

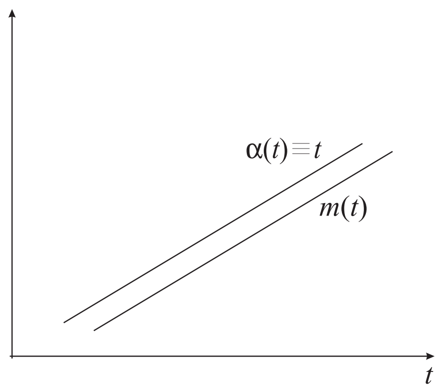

Рис. 2. Графики функций α(t), m(t).

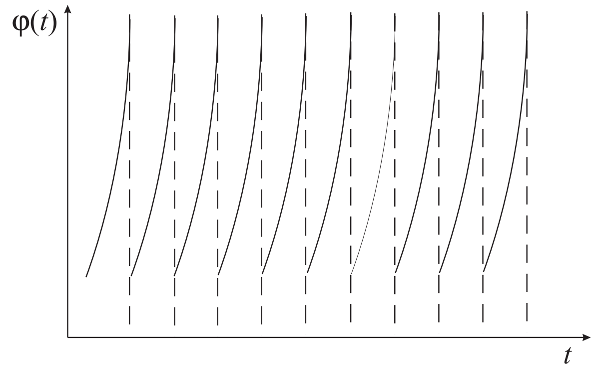

Рис. 3. График функции φ(t).

В том случае, когда функция $F(t)$ имеет степенной рост, функция $m(t)$ будет приближаться к линейной $m(t) \approx at + b$, $a < 1$ (рис. 4, 5).

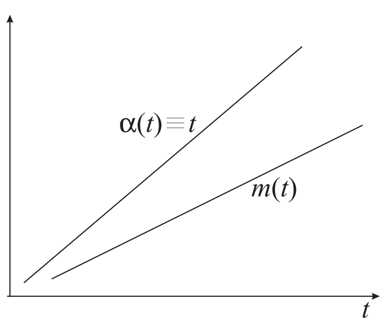

Рис. 4. Графики функций α(t), m(t).

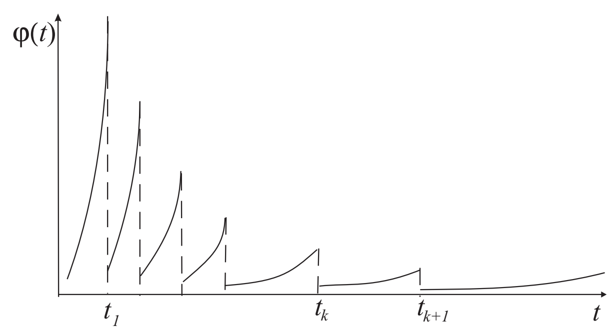

Рис. 5. График функции φ(t).

При этом, интервалы $[t_k, t_{k+1}]$, на которых продолжается функция $\varphi(t)$ со временем увеличиваются, однако объем вводимых на этих интервалах времени трудовых ресурсов, как показали расчеты, не меняется, т. е. интеграл от функции $\varphi(t)$ на любом отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ есть величина постоянная.

Литература

1. *Браун М.* Теория и измерение технического прогресса.—М.: Статистика, 1971.
2. *Лотов А. В.* Введение в экономико-математическое моделирование.—М.: 1984.
3. Математическое моделирование экономических процессов / Под ред. И. В. Котова.—Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
4. *Бескровный И. М.* Проблемы использования макроэкономических моделей для задач планирования в условиях интенсивного развития // Вопр. радио-электроники. Сер. АСУПР.—1984.— Вып. 2. С. 3–12.
5. *Глушков В. М., Иванов В. В., Яненко В. М.* Моделирование развивающихся систем.—М.: Наука, 1983.
6. *Sollow R.* Investment and Technical Progress // Mathematical Methods in the Social Science.— Stanford Univ. Press, 1960.—P. 89–104.
7. *Канторович Л. В., Горьков Л. И.* Функциональные уравнения однопродуктовой модели // Докл. АН СССР.—1959.—Т. 129, № 4.—С. 732–736.
8. *Глушков В. М.* Об одном классе динамических макроэкономических моделей // Управляющие машины и системы.—1977.—№ 2.—С. 3–6.
9. *Канторович Л. В., Жиянов В. И.* Однопродуктовая динамическая модель экономики, учитывающая структуру фондов при наличии технического прогресса // Докл. АН СССР.—1973.—Т. 211, № 6,—С. 1280–1283.
10. *Канторович Л. В., Жиянов В. И., Хованский А. Г.* Принцип дифференциальной оптимизации в применении к однопродуктовой динамической модели экономики // Сиб. мат. журн.—1978.— Т. 19, № 5.—С. 1053–1064.
11. *Бекларян Л. А., Борисова С. В.* Об одной динамической модели замещения производственных мощностей // Экономика и мат. методы.—2002.—Т. 38, № 3.
12. *Бекларян Л. А, Борисова С. В.* Однопродуктовая модель производства с учетом инерционных свойств вводимых и выводимых фондов // Препринт # WP/2000/093—М.: ЦЭМИ РАН, 2000.— 56 с.
13. *Бекларян Л. А, Борисова С. В.* Однопродуктовая динамическая модель производства с инерционными свойствами системы // Препринт # WP/98/045.—М.: ЦЭМИ РАН, 1998.—22 с.
14. *Борисова С. В.* Модель производства с учетом инерционных свойств вводимых и выводимых фондов // Аудит и финансовый анализ.—1999.—№ 2.—С. 5–18.

г. Москва *Статья поступила 27 мая 2002 г.*