

УДК 532.5

РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ВНУТРЕННИХ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ВОЛН НА
ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА СЛОЕВ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

В. Г. Созанов, И. Д. Музаев, Н. С. Шумаков

В статье поставлена и решена нестационарная краевая задача о внутренних магнитогидродинамических волнах на поверхности раздела слоев проводящей жидкости в скрещенных электрическом и магнитном полях. Задача поставлена в безиндукционном и линейном приближении для идеальной несжимаемой жидкости. Поставленная начально-краевая задача решена аналитически путем применения методов операционного исчисления и интегральных преобразований Фурье. В явном виде получено уравнение волновой поверхности раздела слоев, позволяющее определить критическое положение, при котором не происходит захвата стратифицированной жидкости из другого слоя.

Электромагнитные способы обогащений тесно связаны с магнитогидродинамическими задачами о слоистом течении проводящей жидкости в скрещенных электрическом и магнитном полях. При этом необходимо прежде всего определить критическое положение поверхности раздела, т. е. такое положение, при котором не происходит захвата жидкости из других слоев [1–3].

В случае, когда жидкость забирается из нижнего слоя, критическое положение поверхности раздела называется *верхним положением* (рис. 1), а при заборе из верхнего слоя — *нижним положением* (рис. 2).

В прямоугольной системе координат xOz часть пространства, ограниченная условиями $0 \leq x \leq l$, $0 \leq z \leq H_1$, представляет верхний слой несжимаемой проводящей жидкости, другая часть пространства — $0 \leq x \leq l$, $-H_2 \leq z \leq 0$ — нижний слой (l — длина ванны, H_1 и H_2 — глубины слоев, ось z — направлена вверх, плоскость $z = 0$ совмещена с поверхностью раздела слоев). Оба слоя жидкости помещены в скрещенных однородных электрическом и магнитном полях. Созданная электромагнитным полем пондеромоторная сила направлена вертикально сверху вниз и создает возможность гравитационного всплывания частиц примеси из нижнего слоя в верхний. Очищенный от примеси нижний слой жидкости через заборное окно вытекает из ванны. Заборное окно ограничено условиями $x = 0$, $-H_2 \leq z \leq -H_2 + h$, где h — высота окна. Для сохранения постоянных уровней слоев полагается, что в нижнем слое при $x = l$ по всей глубине размещены источники с суммарной мощностью равной расходу

жидкости через заборное окно. Жидкость считается идеальной, движение — безвихревым (потенциальным).

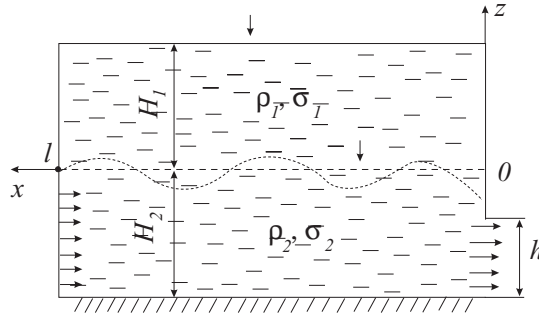


Рис. 1.

В безиндукционном и линейном приближении сформулированная контактная задача магнитной гидродинамики сводится к решению дифференциальных уравнений Лапласа

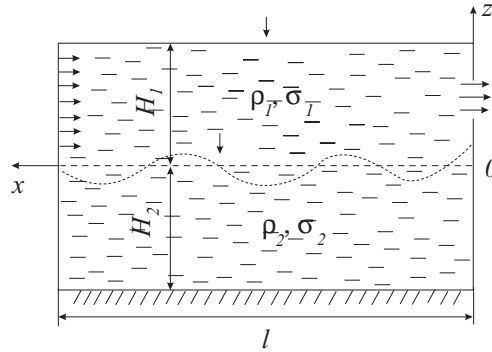


Рис. 2.

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0 \quad \text{при } 0 \leq z \leq H_1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} = 0 \quad \text{при } -H_2 \leq z \leq 0 \quad (2)$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$\varphi_1|_{t=0} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad \varphi_2|_{t=0} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = -V(z) = \begin{cases} -V_0 & \text{при } -H_2 \leq z \leq -H_2 + h, \\ 0 & \text{при } -H_2 + h < z \leq 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \Big|_{x=l} = -V_l = -\frac{V_0 h}{H_2},$$

$$\rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \sigma_1 B_0^2 \varphi_1 + g_1^* \rho_1 H_1 = 0 \quad \text{при } z = H_1, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \quad \text{при } z = 0, \quad (7)$$

$$\rho_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + \frac{\sigma_1}{\rho_1} B_0^2 \varphi_1 + g_1^* \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} B_0^2 \varphi_2 + g_2^* \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right) \quad \text{при } z = 0, \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right|_{z=-H_2} = 0, \quad (9)$$

где приняты следующие обозначения: $\varphi_1(x, z, t)$ и $\varphi_2(x, z, t)$ — потенциалы скоростей в верхнем и нижнем слоях соответственно, ρ_1 и ρ_2 — плотности, σ_1 и σ_2 — электропроводности в верхнем и нижнем слоях жидкости,

$$g_1^* = g + \frac{\sigma_1}{\rho_1} E_0 B_0, \quad g_2^* = g + \frac{\sigma_2}{\rho_2} E_0 B_0, \quad (10)$$

$E_0 = E_y$ — напряженность электрического поля, $B_0 = B_x$ — индукция магнитного поля.

Относительно граничного условия (6) отметим, что волнообразование на свободной поверхности верхнего слоя не учитывается.

Волновая поверхность раздела слоев при $z = 0$

$$\begin{aligned} \eta(x, t) = & \frac{\rho_1}{\rho_2 g_2^* - \rho_1 g_1^*} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{\rho_2}{\rho_2 g_2^* - \rho_1 g_1^*} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \\ & + \frac{\sigma_1 B_0^2}{\rho_2 g_2^* - \rho_1 g_1^*} \varphi_1 - \frac{\sigma_2 B_0^2}{\rho_2 g_2^* - \rho_1 g_1^*} \varphi_2 \end{aligned} \quad (11)$$

или

$$\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} = \left. \frac{\partial \varphi_1(x, z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \varphi_2(x, z, t)}{\partial z} \right|_{z=0}. \quad (12)$$

Для непроводящей жидкости эта задача поставлена и решена в [4].

Приступая к решению поставленной начально-краевой задачи (1)–(9), применим интегральное преобразование Лапласа относительно времени t .

$$\tilde{\varphi}_{1,2}(x, z, p) = \int_0^{+\infty} \varphi_{1,2}(x, z, t) e^{-pt} dt. \quad (13)$$

В результате преобразования (13) выражения (1)–(9) в изображениях запишутся следующим образом

$$\Delta \tilde{\varphi}_1(x, z) = 0, \quad (14)$$

$$\Delta \tilde{\varphi}_2(x, z) = 0, \quad (15)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad (16)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_2}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{V(z)}{p}, \quad \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_2}{\partial x} \right|_{x=l} = -\frac{V_l}{p}, \quad (17)$$

$$\rho_1 p \tilde{\varphi}_1 + \sigma_1 B_0^2 \tilde{\varphi}_1 + \frac{g_1^* \rho_1 H_1}{p} = 0 \quad \text{при } z = H_1, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{\varphi}_2}{\partial z} \quad \text{при } z = 0, \quad (19)$$

$$\rho_1 \left[\left(p^2 + \frac{\sigma_1}{\rho_1} B_0^2 p \right) \tilde{\varphi}_1 + g_1^* \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial z} \right] = \rho_2 \left[\left(p^2 + \frac{\sigma_2}{\rho_2} B_0^2 p \right) \tilde{\varphi}_2 + g_2^* \frac{\partial \tilde{\varphi}_2}{\partial z} \right] \quad \text{при } z = 0, \quad (20)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_2}{\partial z} \right|_{z=-H_2} = 0. \quad (21)$$

Применим конечное косинус-преобразование Фурье относительно переменной x :

$$\tilde{\varphi}_{1,2,n}(z) = \int_0^l \tilde{\varphi}_{1,2}(x, z) \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx, \quad (22)$$

$$\frac{d^2 \tilde{\varphi}_{1,n}}{dz^2} - a_n^2 \tilde{\varphi}_{1,n} = 0 \quad \text{при } 0 \leq z \leq H_1, \quad (23)$$

$$\frac{d^2 \tilde{\varphi}_{2,n}}{dz^2} - a_n^2 \tilde{\varphi}_{2,n} = \frac{V_l (-1)^n}{p} - \frac{V(z)}{p} \quad \text{при } -H_2 \leq z \leq 0, \quad (24)$$

$$\tilde{\varphi}_{1,0}(z) \Big|_{z=H_1} = -g_1^* \frac{H_1 L}{p(p + \frac{\sigma_1 B_0^2}{\rho_1})}, \quad \tilde{\varphi}_{1,n} \Big|_{z=H_1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3 \dots), \quad (25)$$

$$\frac{d\tilde{\varphi}_{1,n}}{dz} = \frac{d\tilde{\varphi}_{2,n}}{dz} \quad \text{при } z = 0, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \rho_1 \left[\left(p^2 + \frac{\sigma_1}{\rho_1} B_0^2 p \right) \tilde{\varphi}_{1,n} + g_1^* \frac{d\tilde{\varphi}_{1,n}}{dz} \right] \\ & = \rho_2 \left[\left(p^2 + \frac{\sigma_2}{\rho_2} B_0^2 p \right) \tilde{\varphi}_{2,n} + g_2^* \frac{d\tilde{\varphi}_{2,n}}{dz} \right] \quad \text{при } z = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\left. \frac{d\tilde{\varphi}_{2,n}}{dz} \right|_{z=-H_2} = 0. \quad (28)$$

Решения дифференциальных уравнений (23) и (24) с граничными условиями (25) и (28) имеют следующий вид:

$$\tilde{\varphi}_{1,n}(z) = \tilde{c}_{1,n} \operatorname{sh}(a_n(z - H_1)), \quad (29)$$

$$\tilde{\varphi}_{2,n}(z) = \tilde{c}_{2,n} \operatorname{ch}(a_n(z + H_2)) + \frac{1}{a_n} \int_{H_1}^z \left(\frac{V_l(-1)^n}{p} - \frac{V(\xi)}{p} \right) \operatorname{sh}(a_n(z - \xi)) d\xi. \quad (30)$$

Постоянные c_1 и c_2 определяются из граничных условий (26) и (27).

Для $\tilde{c}_{1,n}$ и $\tilde{c}_{2,n}$ получаются следующие выражения:

$$\tilde{c}_{1,n} = \frac{\rho_2 p \left(p + \frac{\sigma_2}{\rho_2} B_0^2 \right) \frac{1}{a_n} \int_{-H_2}^0 \left(\frac{V_l(-1)^n}{p} - \frac{V(\xi)}{p} \right) \operatorname{ch}(a_n(H_2 + \xi)) d\xi}{\left(\rho_2 \operatorname{ch}(a_n H_1) \operatorname{ch}(a_n H_2) + \rho_1 \operatorname{sh}(a_n H_2) \operatorname{sh}(a_n H_1) \right) (p^2 + sp + q)}, \quad (31)$$

$$s = \frac{\sigma_2 B_0^2 \operatorname{ch}(a_n H_1) \operatorname{ch}(a_n H_2) + \sigma_1 B_0^2 \operatorname{sh}(a_n H_2) \operatorname{sh}(a_n H_1)}{\rho_2 \operatorname{ch}(a_n H_1) \operatorname{ch}(a_n H_2) + \rho_1 \operatorname{sh}(a_n H_1) \operatorname{sh}(a_n H_2)}, \quad (32)$$

$$q = \frac{(\rho_2 g_2^* - \rho_1 g_1^*) a_n \operatorname{sh}(a_n H_2) \operatorname{ch}(a_n H_1)}{\rho_2 \operatorname{ch}(a_n H_1) \operatorname{ch}(a_n H_2) + \rho_1 \operatorname{sh}(a_n H_1) \operatorname{sh}(a_n H_2)},$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{2,n} = & \left(\operatorname{ch}(a_n H_1) \left[-\rho_2 p \left(p + \frac{\sigma_2}{\rho_2} B_0^2 \right) \frac{1}{a_n} \int_{-H_2}^0 \left(\frac{V_l(-1)^n}{p} - \frac{V(\xi)}{p} \right) \operatorname{sh}(a_n \xi) d\xi \right. \right. \\ & + \rho_2 g_2^* \int_{-H_2}^0 \left(\frac{V_l(-1)^n}{p} - \frac{V(\xi)}{p} \right) \operatorname{ch}(a_n \xi) d\xi \left. \right] + \rho_1 \left[p \left(p + \frac{\sigma_1}{\rho_1} B_0^2 \right) \operatorname{sh}(a_n H_1) \right. \\ & \left. \left. - g_1^* a_n \operatorname{ch}(a_n H_1) \right] \frac{1}{a_n} \int_{H_2}^0 \left(\frac{V_l}{p} - \frac{V(\xi)}{p} \right) \operatorname{ch}(a_n \xi) d\xi \right) \\ & \times \frac{1}{\left(\rho_2 \operatorname{ch}(a_n H_1) \operatorname{ch}(a_n H_2) + \rho_1 \operatorname{sh}(a_n H_1) \operatorname{sh}(a_n H_2) \right) (p^2 + sp + q)}. \end{aligned} \quad (33)$$

В результате применимых интегральных преобразований (13) и (22) выражение (12) принимает вид

$$p\tilde{\eta}_n = \left. \frac{d\tilde{\varphi}_{1,n}}{dz} \right|_{z=0}. \quad (34)$$

Подставив выражения (29) и (31) в (34), получим

$$\tilde{\eta}_n = \frac{\operatorname{ch}(a_n H_1) \rho_2 \left(p + \frac{\sigma_2}{\rho_2} B_0^2 \right) \alpha_n}{\left(\rho_2 \operatorname{ch}(a_n H_1) \operatorname{ch}(a_n H_2) + \rho_1 \operatorname{sh}(a_n H_1) \operatorname{sh}(a_n H_2) \right) p (p^2 + sp + q)}, \quad (35)$$

где

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_n = \frac{(-1)^n V_l}{a_n} \operatorname{sh}(a_n H_2) - \frac{V_0}{a_n} \operatorname{sh}(a_n h) \quad (n = 1, 2, 3 \dots). \quad (36)$$

Для $\tilde{\eta}_n$ обратное косинус интегральное преобразование Фурье имеет следующий вид

$$\tilde{\eta}(x, p) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(p) \operatorname{cosa}_n x. \quad (37)$$

Для нахождения оригинала функции $\eta(x, t)$ достаточно использовать таблицы операционного исчисления.

Уравнение волновой поверхности раздела слоев получается в следующем виде

$$\eta(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \cos \frac{n\pi}{l} x, \quad (38)$$

где

$$\eta_n(t) = \frac{\operatorname{ch}(a_n H_1)}{d_n \sqrt{q - \frac{s^2}{4}}} \rho_2 \alpha_n \left(e^{-\frac{s}{2} t} \sin \sqrt{q - \frac{s^2}{4}} t - e^{-\frac{s}{2} t} \frac{\frac{s}{2} \sin \sqrt{q - \frac{s^2}{4}} t + \sqrt{q - \frac{s^2}{4}} \cos \sqrt{q - \frac{s^2}{4}} t}{q} + \frac{\sqrt{q - \frac{s^2}{4}}}{q} \right), \quad (39)$$

$$d_n = \rho_2 \operatorname{ch}(a_n H_1) \operatorname{ch}(a_n H_2) + \rho_1 \operatorname{sh}(a_n H_1) \operatorname{sh}(a_n H_2). \quad (40)$$

С точки зрения реализации на ЭВМ целесообразно выражению (39) придать следующую форму:

$$\eta(x, t) = \frac{2V_0}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \frac{h}{H_2} \operatorname{th}(a_n H_2) - \frac{\operatorname{sh}(a_n h)}{\operatorname{ch}(a_n H_2)}}{d_n \sqrt{q_n - \frac{s_n^2}{4}} a_n} \left(e^{-\frac{s_n}{2} t} \sin \sqrt{q_n - \frac{s_n^2}{4}} t - e^{-\frac{s_n}{2} t} \frac{\frac{s_n}{2} \sin \sqrt{q_n - \frac{s_n^2}{4}} t + \sqrt{q_n - \frac{s_n^2}{4}} \cos \sqrt{q_n - \frac{s_n^2}{4}} t}{q_n} + \frac{\sqrt{q_n - \frac{s_n^2}{4}}}{q_n} \right), \quad (41)$$

где

$$d_n = 1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{th}(a_n H_1) \operatorname{th}(a_n H_2),$$

$$q_n = g_2^* a_n \frac{\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{g_1^*}{g_2^*} \operatorname{th}(a_n H_2) \right)}{1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{th}(a_n H_1) \operatorname{th}(a_n H_2)}, \quad (42)$$

$$s_n = \frac{\sigma_2 B_0^2}{\rho_2} \cdot \frac{1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{th}(a_n H_1) \operatorname{th}(a_n H_2)}{1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{th}(a_n H_1) \operatorname{th}(a_n H_2)},$$

$$\operatorname{th}(a_n H_1) = \frac{1 - e^{-2a_n H_1}}{1 + e^{-2a_n H_1}}, \quad \operatorname{th}(a_n H_2) = \frac{1 - e^{-2a_n H_2}}{1 + e^{-2a_n H_2}},$$

$$\frac{\operatorname{sh}(a_n h)}{\operatorname{ch}(a_n H_2)} = \frac{e^{-a_n(H_2-h)} - e^{-a_n(H_2+h)}}{1 + e^{-2a_n H_2}}, \quad h < H_2.$$

Литература

1. Повх И. Л. Техническая гидромеханика.—Л.: Машиностроение, 1976.—501 с.
2. Повх И. Л., Капуста А. Б., Чекин Б. В. Магнитная гидродинамика в металлургии.—М.: Металлургия, 1974.—240 с.
3. Справочник по гидравлике под редакцией В. А. Большакова.—Киев: Вища школа, 1977.—278 с.
4. Созанов В. Г., Музаев И. Д., Туаева Ж. Д., Музаева Т. В. Постановка и решение начально-краевой задачи внутренних волн при селективном водозаборе из стратифицированного водоема // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион, естественные науки. Ростов-на-Дону.—2001.—№ 1.—С. 104–106.

г. Владикавказ

Статья поступила 26 сентября 2001