Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2000, Том 2, Выпуск 4

УДК **517.98**

МОДУЛЯРНЫЕ ЛОКАЛЬНО ОГРАНИЧЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА ФЕНХЕЛЯ — ОРЛИЧА И КОНУСЫ В НИХ

В. Г. Фетисов, Н. П. Безуглова

Изучено поведение конуса неотрицательных функций в обобщенных пространствах Орлича, как известно, не являющихся в полной мере метрическими пространствами при соответствующем выборе определяющей фундаментальной функции. Рассматривается ряд основных свойств конусов в векторнозначных пространствах Фенхеля — Орлича.

В работе [1] было изучено поведение конуса неотрицательных функций в обобщенных пространствах Орлича, как известно, не являющихся в полной мере метрическими пространствами (при соответствующем выборе определяющей фундаментальной функции). Здесь мы рассматриваем ряд основных свойств конусов в векторнозначных пространствах Фенхеля — Орлича (см. [2], там же содержится и обширная библиография).

1. Основные определения и некоторые вспомогательные результаты

Допустим, что X — вещественное линейное нормированное пространство; обозначим $\mathbb{R}^+ = [0,\infty[$ (соответственно, $\overline{\mathbb{R}}^+ = [0,\infty]$). Всякая функция $\Phi : X \to \mathbb{R}^+$ называется функцией Орлича (в частности, если Φ — выпукла, то функцией Юнга), если $\Phi(0) = 0$ и, если элемент $x \in X, x \neq \Theta$ (Θ — ноль пространства X), то $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \Phi(\lambda x) = \infty$, где $\lambda \in \mathbb{R}$.

Примерами функций Орлича могут служить скалярная φ-функция $\Phi_1(u) = |u|^p$ $(0 < p < \infty)$ (определяющая классическое пространство Лебега L_p), N-функция $\Phi_2(u) = e^{|u|} - 1$ и т. д.

Определение 1. Пусть (Ω, Σ, μ) — измеримое пространство с σ-конечной сепарабельной неатомической полной мерой μ, X — линейное нормированное пространство, Φ — функция Орлича на X. *Пространством Фенхеля — Орлича* $L^\Phi(\mu, X)$ называется множество всех таких классов эквивалентности измеримых функций $u : \Omega \to X$, что существует $\lambda > 0$ такое, что $\int\limits_\Omega \Phi(\lambda u) d\mu < +\infty$.

Можно заметить, что пространство Фенхеля — Орлича представляет собой линейное пространство.

Определение 2. Функционал $\rho : X \to \overline{\mathbb{R}}^+$ называется *модуляром* [3], если выполняются условия:

(a) $(\rho(x) = 0) \Leftrightarrow (x = \Theta)$;

(в) $\rho(-x) = \rho(x)$;

(c) $\rho(\alpha x + \beta y) \le \rho(x) + \rho(y)$ $(x, y \in X;\ \alpha, \beta \ge 0;\ \alpha + \beta = 1)$.

Если условие (a) заменить условием

(d) $\rho(\Theta) = 0$,

то функционал ρ называется *псевдомодуляром.*

Пусть M — линейное пространство всех ограниченных μ-измеримых функций $u : \Omega \to X$. Функционал $\Gamma_\Phi : M \to \overline{\mathbb{R}}^+$ вида $\Gamma_\Phi = \int\limits_\Omega \Phi(u(s))d\mu$ есть пример интегрального модуляра на M, удовлетворяющего условиям (a)–(c).

Определение 3. Пространство μ-измеримых функций, определяемое интегральным модуляром Γ_Φ формулой

$$L^{*\Phi}(\mu, X) = \{x \in L^\Phi(\mu, X) : \lim_{\lambda \to 0} \Gamma_\Phi(\lambda x) = 0\}, \tag{1}$$

называется *модулярным пространством Фенхеля — Орлича.*

По поводу модулярных пространств подробнее см. монографию [3].

Определение 4. Функционал $\|\cdot;\Phi\|$, называется *F-нормой*, если он подчиняется условиям:

1. $\|u;\Phi\| = 0 \Leftrightarrow u = \Theta$ (Θ — ноль пространства);
2. $\|-u;\Phi\| = \|u;\Phi\|$;
3. $\|u+v;\Phi\| \le \|u;\Phi\| + \|v;\Phi\|$;
4. если $\lambda_k \to \lambda$ и $\|u_k - u;\Phi\| \to 0$ при $k \to \infty$, то $\|\lambda_k u_k - \lambda u;\Phi\| \to 0$, $k \to \infty$.

Если Φ — некоторая функция Орлича, $\Gamma_\Phi(u)$ — интегральный модуляр, определенный этой функцией, то с помощью формулы вида

$$\|u;\Phi\| = \inf\left\{\epsilon > 0 : \Gamma_\Phi\left(\frac{u}{\epsilon}\right) \le \epsilon\right\} \tag{2}$$

можно на модулярном пространстве Фенхеля — Орлича задать F-норму, превращающую его в F-нормированное модулярное пространство Фенхеля — Орлича.

Определение 5. Говорят (см. [3]), что функция Орлича $\Phi : X \to \mathbb{R}^+$ подчиняется *Δ_2-условию*, если существуют постоянные $k > 0$ и ω_0 такие, что $\Phi(2x) \le k\Phi(x)$ при $\|x;\Phi\| \ge \omega_0$ и $\sup\{\Phi(x) : \|x;\Phi\| = \omega\} < +\infty$.

Можно видеть, что, если функция Орлича Φ удовлетворяет Δ_2-условию, то класс $L^{*\Phi}(\mu, X)$ совпадает с F-нормированным пространством Фенхеля — Орлича. Отметим, что, если ρ — модуляр в смысле Х. Накано [4], то

$$\|u;\Phi\|_N = \inf\{\alpha > 0 : \rho(u/\alpha) \le \alpha\} \tag{3}$$

есть F-норма в пространстве X с константой $\lambda > 0$ в неравенстве треугольника (3), т. е. выполняется $\|u + \nu; \Phi\| \leq \lambda(\|u; \Phi\| + \|\nu; \Phi\|)$ для любых элементов $u, v \in X$.

Пусть X — вещественное банахово пространство. Как известно, множество $K \subset X$ называется *конусом*, если выполнены следующие условия (см. [5]):

(а) множество K замкнуто;

(б) из $w, v \in K$ вытекает, что $\alpha w + \beta v \in K$ при всех $\alpha, \beta \geq 0$;

(в) из каждой пары элементов $x, -x$ по крайней мере один не принадлежит K, если $x \neq \Theta$.

Всякий конус K является выпуклым множеством в X. Конус называется *воспроизводящим*, если каждый элемент $x \in X$ можно представить в виде $x = u - v$, где $u, v \in K$.

По аналогии с работой [1] будем называть положительный, не обязательно линейный функционал $\Gamma(u)$ $(u \in X)$, обусловленный интегральным модуляром, строго растущим, если для любых $u_n \in K$ $(n = \overline{1, \infty})$, где K — конус неотрицательных функций $u_n(s) \geq 0$ из пространства X, из $\|u_n; \Phi\| \geq \epsilon > 0$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \Gamma\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} u_i\Big) = \infty$.

Лемма 1. *Интегральный модуляр $\Gamma_p(u) = \int\limits_{\Omega} |u(s)|^p d\mu$ является строго растущим функционалом при каждом $0 < p < \infty$.*

$\lhd$ Доказательство леммы 1 можно посмотреть в работе [1]. $\rhd$

Определение 6. Элемент $u \in L^*(\Phi, \mu)$ называется элементом *с абсолютно непрерывной F-нормой*, если $\lim\limits_{\mu(D\to 0)} \|P_D u; D\| = 0$, P_D — оператор умножения на характеристическую функцию измеримого подмножества $D \subset \Omega$ (т. е. $P_D u = \chi_D u$, где $\chi_D(s) = 1$, если $s \in D \subset \Omega$ и, соответственно, $\chi_D(s) = 0$, если $s \in \Omega \backslash D$).

По аналогии с нашей работой [6] можно получить следующие предложения, носящие вспомогательный характер для дальнейших построений.

Лемма 2. *Функция $u(s) \in L^*(\Phi, \mu)$ имеет абсолютно непрерывную F-норму тогда и только тогда, когда $u(s) \in E(\Phi, \mu)$, где $E(\Phi, \mu)$ означает замыкание в $L^*(\Phi, \mu)$ совокупности всех ограниченных на множестве Ω функций.*

Лемма 3. *Совокупность $L_0^*(\Phi, \mu)$ всех элементов из $L^*(\Phi, \mu)$ с абсолютно непрерывной F-нормой является сепарабельным замкнутым подпространством пространства $L^*(\Phi, \mu)$.*

Лемма 4. *Если определяющая функция Орлича $\Phi(u)$ подчиняется Δ_2-условию, то справедливо равенство $L^*(\Phi, \mu) = E(\Phi, \mu)$.*

Отметим еще несколько утверждений, носящих прикладной характер в теории нелинейных операторов.

Лемма 5. *Пусть* $\mu(\Omega) < \infty$ *и* $\chi_\Omega \in L^*(\Phi,\mu)$. *Тогда* $L^*(\Phi,\mu)$ *сепарабельно* $\Leftrightarrow L^*(\Phi,\mu) = L_0^*(\Phi,\mu)$.

$\triangleleft$ Наметим идею доказательства. Если предположить, что $L^*(\Phi,\mu) \neq L_0^*(\Phi,\mu)$, то можно указать элемент $x_0 \in L^*(\Phi,\mu)\backslash L_0^*(\Phi,\mu)$, где $x \geq 0$ почти везде на μ-измеримом множестве Ω. По заданной функции $x_0(s)$ можно найти $\epsilon_0 > 0$ и последовательность измеримых подмножеств $\{\Omega_i\}_{i\in N} \subset \Omega$ такие, что $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$ и $\|\chi_{\Omega_i} x_0; \Phi\| \geq \epsilon_0$ (в силу условия $x_0 \notin L_0^*(\Phi,\mu)$). Обозначим через $w_J = \sum\limits_{k\in J} x\chi_{\Omega_k}$, где $J \in \mathbb{N}$. Если наборы $J_1 \neq J_2$, где $J_1, J_2 \subset \mathbb{N}$, тогда $\|w_{J_1} - w_{J_2}\| \geq \epsilon_0$. А так как $\{J : J \subset \mathbb{N}\}$ — несчетное множество наборов, то пространство $L^*(\Phi,\mu)$, очевидным образом, является несепарабельным модулярным пространством Фенхеля — Орлича.

Обратный факт: Предполагая теперь, что $L^*(\Phi,\mu)$ сепарабельное модулярное пространство Фенхеля — Орлича и $\chi_\Omega \in L_0^*(\Phi,\mu)$, возьмем некоторую функцию $u(s) \geq 0$, $u(s) \in E(\Omega)$. Аппроксимируя ее последовательностью непрерывных функций $(x_n)_{n\in N}$ и, используя теорему Егорова, можно с помощью аппроксимации рассмотреть произвольную функцию $x(s) \in L^*(\Phi,\mu)$ и убедиться, что $x(s) \in L_0^*(\Phi,\mu)$. $\triangleright$

Банаховы пространства Фенхеля — Орлича достаточно полно исследованы в докторской диссертации Тюррета [2]. Что же касается модулярных пространств Фенхеля — Орлича $L^*(\Phi,\mu)$, определяемых вогнутыми функциями Орлича, то к настоящему времени мало что известно в этом направлении. Используя идеи работ [7] и [8], можно рассмотреть локально ограниченные модулярные пространства Фенхеля — Орлича (т. е. пространства, которые обладают ограниченной окрестностью нуля Θ). Ясно, что такое пространство имеет базис окрестностей Θ, состоящий из ограниченных множеств. В частности, лебеговы пространства L_p $(0 < p < \infty)$ локально ограничены.

Лемма 6. *Если* $\mu(\Omega) < \infty$ *и существует* $p > 0$ *такое, что*

$$\lim_{\substack{u\to+\infty\\ w\to+\infty}} \frac{\Phi(uw)}{u^p\cdot\Phi(w)} > 0, \tag{4}$$

то модулярное пространство Фенхеля — Орлича $L^*(\Phi,\mu)$ *будет локально ограниченным.*

$\triangleleft$ Пусть выполнено условие (4) (без ограничения общности можно считать, что существует $p > 0$ такое, что $\lim\limits_{\substack{u\to+\infty\\ w\to+\infty}} \frac{\Phi(uw)}{u^p\cdot\Phi(w)} = \infty$. Тогда существует $t > 1$ такое, что

$$\Phi(uw) > u^p\Phi(w) \tag{5}$$

при $uw > w > t_0$. Зададим функцию Ψ следующим образом:

$$\Psi(t) = \begin{cases} \Phi(t_0) \cdot \left(\frac{t}{t_0}\right)^p, & \text{если } \ t \in [0, t_0], \\ \Phi(t_0^{n+1}) \cdot \left(\frac{t}{t_0^{n+1}}\right)^p, & \text{если } \ t \in]t_0^n, t_0^{n+1}] \ \ (n \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Можно заметить, что $\Psi(t)$ есть функция Орлича, непрерывная при $t > 0$. Учитывая условие (5), при $t_0^n < t$ получим $\Psi(t) > \Psi(t_0^n)$. Кроме того, функция $\Psi(t)$ подчиняется условию

$$\Psi(u \cdot w) > y^p \cdot \Psi(w) \tag{6}$$

при $uw > w > 0$. Действительно, пусть $t_0^n < w \leq t_0^{n+1}$, $t_0^s < uw \leq t_0^{s+1}$, где $s = n + r \geq n$. Тогда

$$\Psi(uw) > \Phi(t_0^{n+1}) \cdot t_0^{rp} \cdot \left(\frac{uw}{t_0^{s+1}}\right)^p = u^p \cdot \Phi(t_0^{n+1}) \cdot \left(\frac{w}{t_0^{n+1}}\right)^p = u^p \cdot \Psi(w).$$

Аналогично, $\Phi/\Psi(l) < t_0^p$ и $\Psi/\Phi(t_0) < 1$, а это означает, что пространства $L^*(\Phi, \mu)$ и $L^*(\Psi, \mu)$ топологически эквивалентны. Но пространство $L^*(\Psi, \mu)$ является локально ограниченным. Значит, и $L^*(\Phi, \mu)$ — локально ограниченное пространство.

Можно заметить, что $\{V_r = r \cdot B^{\Psi}(r)\}_{r>0}$ образует базу окрестностей нуля Θ в модулярном пространстве $L^*(\Psi, \mu)$. Доказательство этого факта аналогично доказательству теоремы 3 из работы [7], и мы его не приводим. $\rhd$

Лемма 7. *Если $\mu(\Omega) < \infty$ и для всех $p > 0$ выполняется условие $\lim\limits_{\substack{u \to +\infty \\ w \to +\infty}} \frac{\Phi(uw)}{u^p \cdot \Phi(w)} = 0$, то модулярное пространство Фенхеля — Орлича $L^*(\Phi, \mu)$ не является локально ограниченным.*

$\lhd$ Доказательство леммы 7 аналогично доказательству теоремы 7 из работы [7], поэтому мы его не приводим. $\rhd$

Лемма 8. *Пусть $L^*(\Phi, \mu)$ — модулярное пространство Фенхеля — Орлича и $0 < \alpha \leq 1$. Тогда для каждого элемента $u_0 \in L^*(\Phi, \mu)$, минорированного почти всюду на Ω и для каждого подмножества $C \subset L^*(\Phi, \mu)$, удовлетворяющего соотношению*

$$\lim_{h \to \infty} \sup_{x \in C} \|P_{D_{u_0}(x,h)} x; \Phi\| = 0, \tag{7}$$

существует возрастающая функция $\varphi : \overline{\mathbb{R}}^+ \to \overline{\mathbb{R}}^+$ такая, что

$$\lim_{u \to \infty} \frac{\varphi(u)}{u^\alpha} = \infty, \quad \sup_{x \in C} \left\| \varphi \left[\frac{|x(s)|}{u_0(s)} \right] u_0^\alpha(s); \Phi \right\| < +\infty. \tag{8}$$

$\lhd$ Так как $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sup\limits_{x\in C}\|P_{D_{u_0}(x,\lambda)}x;\Phi\| = 0$ (вытекает из условия (7)), то существует функция $\psi(\lambda)$ такая, что

$$\|P_{D_{u_0}(x,\lambda)}x;\Phi\| \le \psi(\lambda), \quad \forall x\in C, \quad \text{где} \quad \lim_{\lambda\to\infty}\psi(\lambda) = 0.$$

Если $\psi(\lambda)\to 0$ при $\lambda\to\infty$, то существует последовательность $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lambda_n\uparrow \lambda_0 = 0$ такая, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\psi(\lambda_n) < +\infty$, и также можно утверждать, что существует некоторая возрастающая функция $\delta:\overline{\mathbb{R}}^+\to\overline{\mathbb{R}}^+$, $\delta(\lambda)\to\infty$ при $\lambda\to\infty$, $\delta(\lambda_n) = M_n\in\mathbb{N}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ такая, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n\psi(\lambda_{n-1}) < \infty$.

Обозначим $D_n(x) = \{s\in\Omega : \lambda_{n-1}u_0(s) < x(s) < \lambda_n u_0(s)\}$. Пусть $\varphi(\lambda) = \delta(\lambda)\cdot\lambda^\alpha$. Ясно, что функция $\varphi(\lambda)$ возрастает. Кроме того,

$$\left\|\varphi\left[\frac{|x(s)|}{u_0(s)}\right]u_0^\alpha(s);\Phi\right\| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left\|P_{D_n(x)}\varphi\left[\frac{|x(s)|}{u_0(s)}\right]u_0^\alpha(s);\Phi\right\|.$$

Так как $\lambda_n\uparrow$ и $u_0(s)$ минорирована положительным числом, то существует $N_0\in\mathbb{N}$ такое, что при $n\ge N_0$ выполнено $|x(s)| > \lambda_{n-1}u_0(s)\ge 1$ почти везде на множестве $D_n(x)$.

Отсюда можно получить оценку:

$$\begin{aligned}\sum_{n\ge N_0}\left\|P_{D_n(x)}\varphi\left[\frac{|x(s)|}{u_0(s)}\right]u_0(s);\Phi\right\| &= \sum_{n\ge N_0}\left\|P_{D_n(x)}\delta\left[\frac{|x(s)|}{u_0(s)}\right]|x(s)|^\alpha;\Phi\right\| \\ &\le \sum_{n\ge N_0}\|P_{D_n(x)}\delta(\lambda_n)|x(s)|^\alpha;\Phi\| \le \sum_{n\ge N_0}\|P_{D_n(x)}M_n|x(s)|;\Phi\| \\ &\le \sum_{n\ge N_0}M_n\|P_{D_{u_0}(x,\lambda_{n-1})}x(s);\Phi\| \le \sum_{n\ge N_0}M_n\cdot\psi(\lambda_{n-1}) \le C_1,\end{aligned}$$

где C_1 — некоторая постоянная. Аналогично оценивается часть ряда для $n < N_0$:

$$\begin{aligned}\sum_{n<N_0}\left\|P_{D_n(x)}\varphi\left[\frac{|x(s)|}{u_0(s)}\right]u_0(s);\Phi\right\| &\le \sum_{n<N_0}\|P_{D_n(x)}\varphi(\lambda_{N_0})u_0^\alpha(s);\Phi\| \\ &\le \sum_{1\le n<N_0}\|P_{D_n(x)}M_{N_0}\lambda_{N_0}(\chi_\Omega + u_0)(s);\Phi\| \\ &\le N_0\cdot M_{N_0}\cdot E[\lambda_{N_0}+1]\cdot[\|\chi_{\Omega;\Phi}\| + \|u_0;\Phi\|] \le C_2,\end{aligned}$$

где C_2 — некоторая постоянная. $\rhd$

2. Структурные свойства конусов в модулярных пространствах Фенхеля — Орлича

Сначала мы рассмотрим вопрос о том, какие дополнительные условия гарантируют существование предела у монотонной последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов модулярного пространства Фенхеля — Орлича, полуупорядоченного конусом K положительных элементов. Без ограничения общности можно рассмотреть случай неубывающей последовательности $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \leq ...$ Последовательность $(x_n)_{n\in N}$ называется *ограниченной*, если существует элемент y такой, что $x_n \leq y$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

Существуют пространства, в которых из монотонности и ограниченности $(x_n)_{n\in N}$ вытекает сходимость по F-норме. Например, если пространство $X = L_p$ упорядочено при помощи конуса неотрицательных функций, то для каждой неубывающей ограниченной последовательности $(x_n)_{n\in N}$ функция $x^*(s) = \sup\limits_n x_n(s)$ $(s \in \Omega)$ также принадлежит L_p.

Пространство, в котором каждая ограниченная монотонная последовательность имеет предел, будем называть в дальнейшем *правильно упорядоченным.* Соответственно, конус K, который порождает правильную упорядоченность в пространстве, будем называть *правильным.* Последовательность $(x_n)_{n\in N}$ ограничена по F-норме, если $\|x_n;\Phi\| \leq M$, где $M \in \mathbb{R}$. Наконец, конус K назовем *вполне правильным*, если каждая монотонная ограниченная по F-норме последовательность $(x_n)_{n\in N}$ сходится по F-норме к некоторому пределу.

Теорема 9. *Пусть на конусе K неотрицательных функций из модулярного пространства Фенхеля — Орлича $L^*(\Phi,\mu)$ определен строго растущий и ограниченный на каждом шаре в пространстве $L^*(\Phi,\mu)$ функционал $\Gamma(u)$, тогда конус K обладает свойством вполне правильности.*

$\lhd$ Предположим противное. Тогда найдется такая расходящаяся по F-норме (2) последовательность элементов $(w_n)_{n\in N} \in K$ такая, что

$$w_1 \leq w_2 \leq ... \leq w_n \leq ... \tag{9}$$

Будем считать для определенности, что $\|w_1;\Phi\| \geq \epsilon_0$, $\|w_{i+1} - w_i;\Phi\| \geq \epsilon_0 > 0$ $(i = \overline{1,\infty})$, так как в противном случае всегда можно перейти к подпоследовательности (w_{n_k}) в $L^*(\Phi,\mu)$, обладающей указанным свойством. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \Gamma(w_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \Gamma\Big[w_1 + \sum\limits_{i=1}^{n-1}(w_{i+1} - w_i)\Big] = \infty$, а это уже противоречит ограниченности функционала $\Gamma(u)$ на шаре $\|u;\Phi\| \leq M$. Отсюда вытекает, что последовательность $(w_n)_{n\in N} \in K$ сходится по F-норме (2) и, значит, конус K обладает свойством вполне правильности. $\rhd$

Следствие 10. *Конус K неотрицательных функций из p-однородного модулярного пространства $L_p(\Omega)$ $(0 < p < \infty)$ обладает свойством вполне правильности.*

Теорема 11. *Пусть на конусе K неотрицательных функций из модулярного пространства Фенхеля — Орлича $L^*(\Phi, \mu)$ определен монотонный строго растущий функционал. Тогда конус K обладает свойством правильности.*

$\lhd$ Доказательство аналогично доказательству теоремы 9, предоставляем провести его читателю. $\rhd$

Литература

1. *Фетисов В. Г.* К теории конусов в обобщенных пространствах Орлича // Дифференциальные и интегральные уравнения.—Орджоникидзе: Изд-во СОГУ, 1978.— С. 78–86.
2. *Turett B.* Fenchel-Orlicz spaces // Dissertationes Mathemat.—1980.—V. 181.—P. 1–60.
3. *Musielak J.* Przestranie modularne i ich zastosowanie // Spraw. PTPN.—Wydz. mat.—przyr.—1982 (1984).—V. 100.—P. 47–54.
4. *Nakano H.* On concave modulars // Math. Soc. Japan.—1956.—V. 5, № 1.—P. 29–49.
5. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений.—М.: 1962.—394 с.
6. *Фетисов В. Г.* Некоторые вопросы теории операторов в пространствах Орлича.—ЛГПИ, Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук, 1968.—109 с.
7. *Hernandez R. F.* Sobre espacios de Orlicz localmente acotados // Rev. Real Acad. Cienc. exact.—Madrid.—1980.—V. 74, № 2.—P. 321–327.
8. *Kalton N. J.* Transitivity and quotients of Orlicz spaces // Comment. math. Tom. spec. honor Ladislaw Orlicz.—Warszawa. —1978.—V. 1.—P. 159–172.
9. *Randriananja R. R.* Sur la théorie des opérateurs dans F-espaces. These doctorielle du III-sieme Cycle. Universite de Madagascar, 12 Jullet 1988.

г. Ростов *Статья поступила 26 ноября 2000 г.*