Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2000, Том 2, Выпуск 4

УДК **517.55**

ВНУТРЕННЯЯ И ВНЕШНЯЯ ОДНОСТОРОННИЕ ОДНОРОДНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ДВОЯКОКРУГОВЫХ ОБЛАСТЕЙ ПРОСТРАНСТВА $\mathbb{C}^2$

Х. П. Дзебисов

Задачу нахождения пары функций $\Phi^+(z)$ и $\Psi^+(z)$ ($\Phi^-(z)$ и $\Psi^-(z)$), аналитических в $D^+(D^-)$, по краевому условию $A(t)\Phi^+(t) = \Psi^+(t) + \bar{f}(t)$ (соответственно $A(t)\Phi^-(t) = \Psi^-(t) + \bar{f}(t)$) называют внутренней (внешней) односторонней краевой задачей. В работе рассматривается более общий случай, когда в краевых условиях допускаются наряду со значениями функций значения их производных. Решение сводится к полным сингулярным интегральным уравнениям, решаемым известными методами.

0. Введение

В работе [4] были поставлены и решены некоторые двумерные краевые задачи типа задачи Римана для двоякокруговых областей пространства $\mathbb{C}^2$ двух комплексных переменных в классе функций $M^{\alpha,\beta}_{\sigma_1,\sigma_2}$ определенных интегралом

$$f(z) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\tau \int\limits_{0}^{2\pi} dt \int\limits_{|\xi|=1} \frac{F(t,\xi)\,d\xi}{\xi - u_1(\tau,\sigma)}, \tag{1}$$

где $(z) = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $u_1(\tau,\sigma) = \tau^{\sigma_1} z_1 + \tau^{\sigma_2} z_2 e^{it}$, $0 < \alpha < \beta < 1$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $F(t,\xi) \in \mathrm{Lip}^{\xi}_{\Delta}(\alpha)$, т. е. на множестве $\Delta = \{(t,\xi) : 0 \le t \le 2\pi, |\xi| = 1\}$ функция $F(t,\xi)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем $0 < \alpha \le 1$ по переменной ξ равномерно относительно t.

Приведем некоторые свойства функций класса $M^{\alpha,\beta}_{\sigma_1,\sigma_2}$ в пространстве $\mathbb{C}^2$ [4].

1. Функции класса $M^{\alpha,\beta}_{\sigma_1,\sigma_2}$ непрерывны в пространстве $\mathbb{C}^2$.
2. Функции класса $M^{\alpha,\beta}_{\sigma_1,\sigma_2}$ аналитические в областях (см. рис. 1)

$$K(\beta,\sigma_1,\sigma_2) = \{(z) : \beta^{\sigma_1}|z_1| + \beta^{\sigma_2}|z_2| < 1\},$$

$$\Gamma_1 = \{(z) : \lambda_2(\alpha) > 0,\ \lambda_2(\beta) > 0\}, \quad \Gamma_2 = \{(z) : \lambda_3(\alpha) < 0\},$$

где

$$\begin{aligned}\lambda_1(\tau) =&\tau^{\sigma_1}|z_1| + \tau^{\sigma_2}|z_2| - 1,\\ \lambda_2(\tau) =&\tau^{\sigma_1}|z_1| - \tau^{\sigma_2}|z_2| - 1,\\ \lambda_3(\tau) =&\tau^{\sigma_1}|z_1| - \tau^{\sigma_2}|z_2| + 1.\end{aligned}$$

3. Функции класса $M^{\alpha,\beta}_{\sigma_1,\sigma_2}$ неаналитические в области $\mathbb{C}^2\backslash(\overline{K \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2})$.

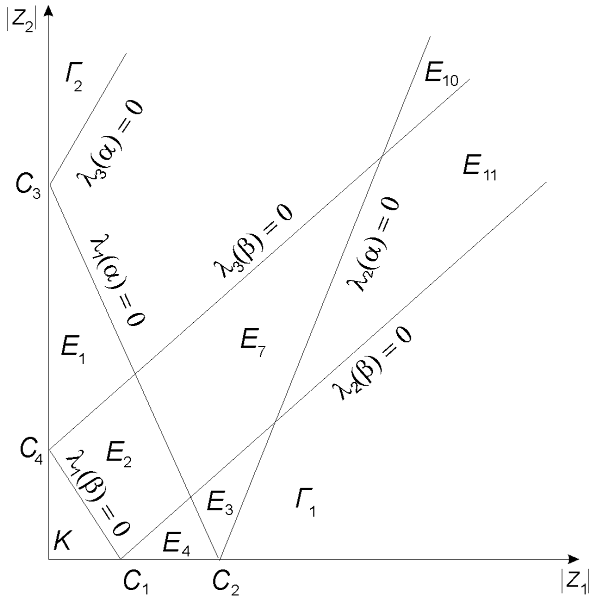

Рис. 1

Пусть $D = \sum\limits_{k=1}^{2} \sigma_k \left(\frac{\partial}{\partial z_k} z_k + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \bar{z}_k \right)$ линейный дифференциальный оператор. Функции, определяемые соотношением

$$L[f](z) = f(z) + D[f(z)] \quad (z) \in \mathbb{C}^2$$

отнесем к классу $P^{\alpha,\beta}_{\sigma_1,\sigma_2}$, см. [5].

Рассмотрим еще функции классов Q и Q_1, определенных соответственно интегралами

$$\gamma(z) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int\limits_0^{2\pi} dt \int\limits_{|\xi|=1} \frac{F(t,\xi)\, d\xi}{\xi - u_1(\beta,\sigma)} \quad (z) \in \mathbb{C}^2, \tag{2}$$

$$\gamma_1(z) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int\limits_0^{2\pi} dt \int\limits_{|\xi|=1} \frac{F(t,\xi)\, d\xi}{\xi - u_1(\alpha,\sigma)} \quad (z) \in \mathbb{C}^2,$$

где $u_1(\beta,\sigma) = \beta^{\sigma_1} z_1 + \beta^{\sigma_2} z_2 e^{it}$, $u_1(\alpha,\sigma) = \alpha^{\sigma_1} z_1 + \alpha^{\sigma_2} z_2 e^{it}$.

Отметим следующие свойства функций классов $P^{\alpha,\beta}_{\sigma_1,\sigma_2}$, Q и Q_1 [1, 4].

1. Функции классов $P^{\alpha,\beta}_{\sigma_1,\sigma_2}$ непрерывны в пространстве $\mathbb{C}^2$ за исключением точек двумерных множеств (рис. 1)

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{(z) : |z_1| = \beta^{-\sigma_1},\ z_2 = 0\},\\
C_2 &= \{(z) : |z_1| = \alpha^{-\sigma_1},\ z_2 = 0\},\\
C_3 &= \{(z) : |z_1| = 0,\ |z_2| = \beta^{-\sigma_2}\},\\
C_4 &= \{(z) : |z_1| = 0,\ |z_2| = \alpha^{-\sigma_2}\}.
\end{aligned}$$

2. Функции классов Q (Q_1) непрерывны в пространстве $\mathbb{C}^2$ за исключением точек двумерных множеств C_1 и C_3 (C_2 и C_4).

3. Функции классов $P^{\alpha,\beta}_{\sigma_1,\sigma_2}$, Q и Q_1 в области $K(\beta,\sigma_1,\sigma_2)$ связаны соотношением

$$L[f](z) = \beta\gamma^+(z) - \alpha\gamma_1^+(z), \tag{4}$$

где $\gamma^+(z)$ и $\gamma_1^+(z)$ определяются по формулам (2) и (3), в которых $|u_1(\beta,\sigma)| < 1$ и $|u_1(\alpha,\sigma)| < 1$.

4. Предельные значения функций классов $P^{\alpha,\beta}_{\sigma_1,\sigma_2}$, Q и Q_1 из области $K(\beta,\sigma_1,\sigma_2)$ на множестве C_1 определяются по следующим формулам

$$\begin{aligned}
L[f^+](z^0) = {} & \frac{\beta}{4\pi^2 i}\int_0^{2\pi} dt \int_{|\xi|=1} \frac{F(t,\xi)\,d\xi}{\xi - \xi_0}\\
& + \frac{\beta}{4\pi}\int_0^{2\pi} F(t,\xi_0)\,dt - \frac{\alpha}{4\pi^2 i}\int_0^{2\pi} dt \int_{|\xi|=1} \frac{F(t,\xi)\,d\xi}{\xi - u_1^0(\alpha,\sigma)},
\end{aligned}\tag{5}$$

где $L[f^+(z^0)] = \lim\limits_{(z)\to(z^0)}$, $u_1^0(\alpha,\sigma) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\sigma_1}\xi_0$, $|\xi_0| = 1$, $(z) \in K(\beta,\sigma_1,\sigma_2)$, $(z^0) \in (\beta^{-\sigma_1}\xi_0, 0)$;

$$\gamma^+(z^0)] = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{2\pi} dt \int_{|\xi|=1} \frac{F(t,\xi)\,d\xi}{\xi - \xi_0} + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} F(t,\xi_0)\,dt, \tag{6}$$

где $\lim\limits_{(z)\to(z^0)} \gamma(z) = \gamma^+(z^0)$, внутренний интеграл $\int\limits_{|\xi|=1} \frac{F(t,\xi)\,d\xi}{\xi-\xi_0}$ является особым и понимается в смысле главного значения по Коши.

1. Внутренняя односторонняя однородная краевая задача

Свойства функций классов $M^{\alpha,\beta}_{\sigma_1,\sigma_2}$, $P^{\alpha,\beta}_{\sigma_1,\sigma_2}$, Q и Q_1 в области $K(\beta,\sigma_1,\sigma_2)$ обеспечивают постановку и решение односторонней внутренней однородной задачи сопряжения с краевым условием, содержащим частные производные искомых функций. Сформулируем ее.

Краевая задача 1. *Найти две функции $f_1^+(z)$ и $f_2^+(z)$ аналитические в области $K(\beta,\sigma_1,\sigma_2)$, удовлетворяющие на двумерном множестве C_1 краевому условию*

$$L[f_1^+](z^0) = G(\xi_0) f_2^+(z^0), \tag{7}$$

где $G(\xi_0)$ — непрерывная на C_1 функция, удовлетворяющая условию $\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha \le 1)$.

Решение. Решение краевой задачи 1 будем искать в классе функций $M^{\alpha,\beta}_{\sigma_1,\sigma_2}$ $(f_1^+ \in M^{\alpha,\beta}_{\sigma_1,\sigma_2})$, и в классе Q $(f_2^+ \in Q)$. С учетом принятых нами обозначений, краевое условие (7) перепишем в виде

$$L[f^+](z^0) = G(\xi_0)\gamma^+(z^0). \tag{8}$$

Подставляя предельные значения (5) и (6) в краевое условие (8), получим

$$\frac{\beta}{4\pi^2 i}\int\limits_0^{2\pi} dt \int\limits_{|\xi|=1} \frac{F(t,\xi)\,d\xi}{\xi-\xi_0} + \frac{\beta}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(t,\xi_0)\,dt - \frac{\alpha}{4\pi^2 i}\int\limits_0^{2\pi} dt \int\limits_{|\xi|=1} \frac{F(t,\xi)\,d\xi}{\xi-u_1^0(\alpha,\sigma)}$$
$$= G(\xi_0)\left(\frac{1}{4\pi^2 i}\int\limits_0^{2\pi} dt \int\limits_{|\xi|=1} \frac{F(t,\xi)\,d\xi}{\xi-\xi_0} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(t,\xi_0)\,dt\right)$$

или

$$\frac{1}{4\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\beta-G(\xi_0)}{\pi i}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{F(t,\xi)}{\xi-\xi_0}\,d\xi + (\beta-G(\xi_0))F(t,\xi_0)\right.\right.$$
$$\left.\left. -\frac{\alpha}{\pi i}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{F(t,\xi)\,d\xi}{\xi-u_1^0(\alpha,\sigma)}\right)dt\right) = 0.$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned}\frac{\beta-G(\xi_0)}{\pi i}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{F(t,\xi)\,d\xi}{\xi-\xi_0} &+ (\beta-G(\xi_0))F(t,\xi_0)\\ &- \frac{\alpha}{\pi i}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{F(t,\xi)\,d\xi}{\xi-u_1^0(\alpha,\sigma)} = \varphi(t,\xi),\end{aligned} \tag{9}$$

где $\int\limits_0^{2\pi} \varphi(t,\xi_0)\,dt = 0$, $\varphi(t,\xi_0)$ — некоторая непрерывная по t функция, удовлетворяющая по ξ условию Липшица с показателнм $(0 < \alpha \leq 1)$ независимо от t.

Соотношение (9) есть интегральное уравнение с искомой функцией $F(t,\xi)$. Перепишем его в виде

$$(\beta - G(\xi_0))F(t,\xi_0) + \frac{\beta - G(\xi_0)}{\pi i} \int\limits_{|\xi|=1} \frac{F(t,\xi)\,d\xi}{\xi - \xi_0} \\ - \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\xi|=1} r(\xi_0,\xi)F(t,\xi_0)\,d\xi = \varphi(t,\xi_0), \tag{10}$$

где $r(\xi_0,\xi) = \alpha(\xi - u_1^0(\alpha,\sigma))^{-1}$.

Поскольку $u_1^0(\alpha,\beta) = (\frac{\alpha}{\beta})^{\sigma_1}\xi_0$, $|\xi_0| = 1$, то $|u_1^0(\alpha,\sigma)| < 1$ для всех $t \in [0,2\pi]$ и $\tau \in [\alpha,\beta]$. Следовательно, $r(\xi_0,\xi)$ допускает оценку

$$|r(\xi_0,\xi)| < \frac{A}{|\xi - \xi_0|^{1-\lambda}}, \quad 0 < \lambda \leq 1.$$

Таким образом, уравнение (10) является полным особым интегральным уравнением, относящимся к исключительным случаям, для которого применима приведенная в [3] теория решения указанных уравнений.

2. Внешняя односторонняя однородная краевая задача

Теорема. *Пусть* $F(t,\xi) \in \mathrm{Lip}_\Delta^\xi(\alpha)$. *Тогда в неограниченной области* Γ_1 *(рис. 1) функции классов* $M_{\sigma_1,\sigma_2}^{\alpha,\beta}$ *и* Q *удовлетворяют соотношению*

$$L[f](z) = \beta\gamma^-(z) - \alpha_1^-(z), \tag{11}$$

где $\gamma^-(z)$ *и* $\gamma_1^-(z)$ *определяются по формулам* (2) *и* (3), *в которых* $|u_1(\beta,\sigma)| > 1$ *и* $|u_1(\alpha,\sigma)| > 1$.

$\lhd$ Доказательство равенства (11) аналогично доказательству равенства (4), которое приводится в [4]. $\rhd$

Из соотношения (11) получим формулу предельного значения $L[f](z)$ в точках двумерного множества

$$C_2 = \{(z) : z_1^0 = \alpha^{-\sigma_1}\xi_0, z_2^0 = 0\}, \quad |\xi_0| = 1.$$

а) Учитывая формулы Сохоцкого [3], выводим

$$\lim_{(z)\to(z^0)}\gamma_1^-(z)=\gamma_1^-(z^0)=\frac{1}{4\pi^2 i}\int\limits_0^{2\pi}dt\int\limits_{|\xi|=1}\frac{F(t,\xi)\,d\xi}{\xi-\xi_0}-\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}F(t,\xi_0)\,dt. \tag{12}$$

б) Учитывая, что $\gamma(z)$ непрерывна в $\Gamma_1\cup C_2$,

$$\gamma^-(z_0)=\lim_{(z)\to(z^0)}\gamma^-(z)=\frac{1}{4\pi^2 i}\int\limits_0^{2\pi}dt\int\limits_{|\xi|=1}\frac{F(t,\xi)\,d\xi}{\xi-u_1^0(\beta,\sigma)}, \tag{13}$$

где $u_1^0(\beta,\sigma)=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\xi_0$, $|\xi_0|=1$, получим

$$L[f^-(z^0)]=\frac{-\alpha}{4\pi^2 i}\int\limits_0^{2\pi}dt\int\limits_{|\xi|=1}\frac{F(t,\xi)\,d\xi}{\xi-\xi_0}+\frac{\alpha}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}F(t,\xi_0)\,dt$$

$$+\frac{\beta}{4\pi^2 i}\int\limits_0^{2\pi}dt\int\limits_0^{2\pi}\frac{F(t,\xi)\,d\xi}{\xi-u_1^0(\beta,\sigma)}.$$

Сформулируем теперь внешнюю одностороннюю краевую задачу сопряжения.

Краевая задача 2. *Найти две функции $f_1^-(z)$ и $f_2^-(z)$ аналитические в области Γ_2, непрерывные на $\Gamma_1\cup C_2$, обращающиеся на двумерном многообразии бесконечно удаленных точек в ноль и удовлетворяющие на C_2 краевому условию*

$$L[f_1^-](z^0)=G(\xi_0)f_2^-(z^0), \tag{14}$$

где $G(\xi_0)$ — непрерывная на Γ_2 функция, удовлетворяющая условию Липшица с показателем $0<\alpha\le 1$.

Решение. Решение краевой задачи 2 будем искать в классах функций $M^{\alpha,\beta}_{\sigma_1,\sigma_2}$ и Q_1 $\left(f_1^-\in M^{\alpha,\beta}_{\sigma_1,\sigma_2},\ f_2^-\in Q_1\right)$. С учетом принятых нами обозначений, краевое условие (14) перепишем в виде

$$L[f_1^-](z^0)=G(\xi_0)\gamma_1^-(z^0). \tag{15}$$

Подставляя предельные значения $L[f_1^-](z^0)$ и $\gamma_1^-(z^0)$ в краевое условие (15), решение задачи сведем к решению полного особого интегрального уравнения, относящегося к исключительным случаям [3] и, имеющего вид

$$\big(G(\xi_0)+\beta\big)F(t,\xi_0)-\frac{G(\xi_0)+\beta}{\pi i}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{F(t,\xi)\,d\xi}{\xi-\xi_0}+\frac{\beta}{\pi i}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{F(t,\xi)\,d\xi}{\xi-u_1^0(\beta,\sigma)}=\varphi(t,\xi_0), \tag{16}$$

где $\int\limits_0^{2\pi}\varphi(t,\xi_0)\,dt=0, \varphi(t,\xi_0)$ — некоторая непрерывная по t функция в промежутке $[0,2\pi]$, удовлетворяющая по ξ условию Липшица с показателем $(0<\alpha\le 1)$ независимо от t.

Соотношение (16) перепишем следующим образом

$$(G(\xi_0)+\beta)-\frac{G(\xi_0)+\beta}{\pi i}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{F(t,\xi)\,d\xi}{\xi-\xi_0}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\xi|=1}\tilde r(\xi_0,\xi)F(t,\xi_0)\,d\xi=\varphi(t,\xi_0), \tag{17}$$

где $\tilde r(\xi_0,\xi)=\beta(\xi-u_1^0(\beta,\sigma))^{-1}$.

Поскольку $u_1^0(\beta,\sigma)=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\sigma_1}\xi_0, |\xi_0|=1$, то для всех $t\in[0,2\pi]$ и $\tau\in[\alpha,\beta]-|u_1^0(\beta,\sigma)|>1$. Следовательно, $\tilde r(\xi_0,\xi)$ допускает оценку

$$|\tilde r(\xi_0,\xi)|<\frac{A}{|\xi-\xi_0|^{1-\lambda}},\quad (0<\lambda\le 1).$$

Литература

1. *Айзенберг А. А.* О граничных свойствах функций аналитических в двоякокруговых областях // Докл. АН СССР.—1969.—Т. 125, № 5.—С. 959–962.
2. *Какичев В. А.* Методы решения некоторых краевых задач для аналитических функций двух комплексных переменных.—Тюмень: Изд-во Тюменского гос. ун-та, 1978.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.— М.: Физматгиз, 1963.
4. *Дзебисов Х. П.* Интегральные представления голоморфных функций в специальных областях пространства $\mathbb{C}^2$ двух комплексных переменных // Межвуз. сб. трудов «Аналитические функции и их приложения» Северо-Осетинского ун-та.—1984.—С. 28–48.
5. *Дзебисов Х. П.* Об одной внутренней односторонней краевой задаче типа задачи Римана // Проблемы математического анализа. Конференция по

итогам НИР за 1994 г. Тезисы докл.—Владикавказ: Изд-во СОГУ, 1995.—С. 18–20.

6. *Дзебисов Х. П.* Внутренняя односторонняя краевая задача для гиперконуса // Проблемы математического анализа. Конференция по итогам НИР СОГУ за 1995 г. Тезисы докл.—Владикавказ: Изд-во СОГУ, 1996.—С. 10.

г. Владикавказ *Статья поступила 20 ноября 2000 г.*