*Владикавказский математический журнал*
*Июль–сентябрь, 2000, Том 2, Выпуск 3*

*УДК* **511.3**

# ОЦЕНКИ В ЗАКОНАХ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ РЕГУЛЯРНЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ

**Ф. Х. Доев**

В большинстве работ, посвященных методам суммирования рассматривались частные методы. Этим исследованиям придается некоторый систематизированный характер. Рассмотрен класс регулярных методов суммирования, содержащий такие методы как Абеля, Чезаро, Бореля, Эйлера, скользящих сумм и др. Для взвешенных сумм с весами из этого класса получены оценки в законах больших чисел в виде сходимости интегралов от вероятностей больших уклонений. Установлена асимптотика по малому параметру этих интегралов.

В большинстве работ, посвященных методам суммирования (= м. с.) рассматривались частные методы. В данной работе попытаемся придать этим исследованиям некоторый систематизированный характер. Ниже рассмотрен класс регулярных методов суммирования, содержащий такие методы, как Абеля, Чезаро, Бореля, Эйлера, скользящих сумм и др. Для взвешенных сумм с весами из этого класса получены оценки в законах больших чисел в виде сходимости интегралов от вероятностей больших уклонений. Установлена асимптотика по малому параметру этих интегралов.

Пусть $0 < \alpha \leq 1$. Определим класс функций (или в случае дискретного параметра — класс матриц $c_k(n)$), задающий регулярные м. с.:

$$\begin{aligned} D_\alpha = \{0 \leq c_k(\lambda) \leq 1, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad \lambda > 0;\\ \sup_k c_k(\lambda) \sim b_1\lambda^{-\alpha} \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty;\\ \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\lambda) \to 1 \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty;\\ B^2(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(\lambda) \sim b_2^2\lambda^{-\alpha} \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty\}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что элементами $D_1$ являются м. с. Чезаро порядка $r \geq 1$ $(C, r)$, Абеля $(A)$. Множеству $D_{1/2}$ принадлежат методы Эйлера порядка $q > 0$ $(E, q)$, Бореля $(B)$ и др.

Пусть $X_1$, $X_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (н. о. р. с. в.). Обобщая классическую постановку задачи о законе больших чисел, рассмотрим взвешенные средние

$$S(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\lambda) X_k \quad \left(S(n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(n) X_k\right)$$

и выясним условия сходимости интеграла

$$\tau(\varepsilon, q, t) = \int_1^{\infty} \lambda^{\alpha q t - \alpha - 1} P(|S(\lambda)| \geq \varepsilon \lambda^{\alpha(q-1)})\, d\lambda,$$

а в случае дискретного параметра — ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha q t - \alpha - 1} P(|S(n)| \geq \varepsilon n^{\alpha(q-1)})$.

Сходимость этого интеграла трактуется как информация о скорости сходимости в законе больших чисел для метода суммирования $\{c_k(\lambda)\}$.

Для $c_k(\lambda) \in D_\alpha$ введем в рассмотрение следующий набор индексов по степени убывания $c_k(\lambda)$ по $\lambda$:

$$I = \{k : c_k(\lambda) = O(\lambda^{-\alpha}) \text{ при } \lambda \to \infty\}.$$

Через $c$, иногда с индексами, будем обозначать положительные постоянные.

**Теорема 1.** *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ последовательность н. о. р. с. в., $qt > 1$, $q > \frac{1}{2}$, $c_k(\lambda) \in D_\alpha$. Кроме того, пусть при $\lambda \to \infty$*

$$\sum_k c_k^t(\lambda) = O\left(\lambda^{\alpha(1-t)}\right) \quad (0 < t < 1). \tag{1}$$

*Для сходимости $\tau(\varepsilon, q, t)$ при любом $\varepsilon > 0$ достаточно, чтобы $E|X_1|^t < \infty$ и $EX_1 = 0$ в случае $t \geq 1$.*

*Эти условия необходимы, если при $\lambda \to \infty$*

$$\operatorname{card}(I) = O(\lambda^\alpha). \tag{2}$$

$\lhd$ Зафиксируем зависимость $\tau(\varepsilon, q, t)$ от $\alpha$ в виде нижнего индекса $\tau_\alpha(\varepsilon, q, t)$. Подстановкой $\lambda = y^\alpha$ выражение $\tau_1(\varepsilon, q, t)$ переводится в $\tau_\alpha(\varepsilon, q, t)$. Соответствующий вид приобретают и условия (1) и (2). Следовательно, доказательство теоремы 1 достаточно провести для случая $c_k(\lambda) \in D_1$.

Достаточность. Пусть $E|X_1|^t < \infty$, $0 < t < 1$. Воспользуемся аналогами неравенств Нагаева — Фука [2]. Тогда для любого $\gamma > 0$

$$\begin{aligned}
\tau_1(\varepsilon, q, t) &= \int\limits_1^\infty \lambda^{qt-2} P\Big(\big|S(\lambda)\big| \geq \varepsilon \lambda^{q-1}\Big) d\lambda \\
&\leq \int\limits_1^\infty \lambda^{qt-2} \sum_k P\Big(c_k(\lambda)\big|X_k\big| \geq \varepsilon\gamma \lambda^{q-1}\Big) d\lambda \qquad (3)\\
+ \left(e\varepsilon^{-t}\gamma^{1-t} E|X_1|^t\right)^{1/\gamma} &\int\limits_1^\infty \lambda^{qt-2-(q-1)t/\gamma} \left[\sum_k c_k^t(\lambda)\right]^{1/\gamma} d\lambda = A_1 + A_2.
\end{aligned}$$

Так как нас интересует только сходимость интегралов, то при их оценке будем пользоваться асимптотическими свойствами $c_k(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$. Получающиеся при этом интегралы, сходятся и расходятся одновременно с исходными.

Преобразуем $A_1$:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int\limits_1^\infty \lambda^{qt-2} \sum_{k=1}^\infty \sum_{i=k}^\infty P\left(\frac{\varepsilon\gamma\lambda^{q-1}}{c_i(\lambda)} \leq |X_k| < \frac{\varepsilon\gamma\lambda^{q-1}}{c_{i+1}(\lambda)}\right) d\lambda \\
&= \int\limits_1^\infty \lambda^{qt-2} \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i P\left(\frac{\varepsilon\gamma\lambda^{q-1}}{c_i(\lambda)} \leq |X_k| < \frac{\varepsilon\gamma\lambda^{q-1}}{c_{i+1}(\lambda)}\right) d\lambda \qquad (4)\\
&\leq \int\limits_1^\infty \lambda^{qt-2} \sum_{i=1}^\infty i \int\limits_L dP\left(|X_1| \leq y\right) d\lambda,
\end{aligned}$$

где $L = \left(\frac{\varepsilon\gamma\lambda^{q-1}}{c_i(\lambda)} \leq y < \frac{\varepsilon\gamma\lambda^{q-1}}{c_{i+1}(\lambda)}\right)$.

Очевидно, $L$ не пусто, если $c_i(\lambda) > c_{i+1}(\lambda)$. Пусть $\{c'_k(\lambda)\} \subset \{c_k(\lambda)\}$ убывающая последовательность при фиксированных $\lambda$. Поскольку $\sum\limits_{k=n}^{2n} c'_k(\lambda) \to 0$ при $n \to \infty$ и при этом $\sum\limits_{k=n}^{2n} c'_k(\lambda) > nc'_{2n}(\lambda)$, то $c'_i(\lambda) = o(\frac{1}{i})$ при $i \to \infty$. Следовательно, из (4) имеем

$$
\begin{aligned}
A_1 &\le \frac{1}{\varepsilon\gamma}\int\limits_1^\infty \lambda^{q(t-1)-1}\sum_{i=1}^\infty \int\limits_L y dP\left(|X_1|\le y\right)d\lambda \\
&\le \frac{1}{\varepsilon\gamma}\int\limits_1^\infty \lambda^{q(t-1)-1}\int\limits_{y\ge\varepsilon\gamma\lambda^q/b_1} y dP\left(|X_1|\le y\right)d\lambda \\
&\le \frac{b_1}{(\varepsilon\gamma)^2}\int\limits_1^\infty \lambda^{q(t-2)-1}\int\limits_{y\ge\varepsilon\gamma\lambda^q/b_1} y^2 dP\left(|X_1|\le y\right)d\lambda \\
&= c\int\limits_{\varepsilon\gamma/b_1}^\infty y^2 \int\limits_1^{(yb_1/(\varepsilon\gamma))^{1/q}} \lambda^{q(t-2)-1} d\lambda dP(|X_1|\le y) \le cE|X_1|^t.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Перейдем к оценке $A_2$. По условию (1), $A_2$ сходится одновременно с интегралом

$$\int\limits_1^\infty \lambda^{qt-2-(qt-1)/\gamma} d\lambda.$$

Легко заметить, что при $\gamma < 1$

$$A_2 < \infty. \tag{6}$$

В силу произвольности $\gamma < 1$ из (3), (5) и (6), получаем доказательство достаточности для $0 < t < 1$.

При доказательстве достаточности для остальных значений параметра $t$ следует воспользоваться соответствующими вариантами неравенств Нагаева — Фука.

Необходимость. Нам понадобится

**Лемма** [7]. *Если $\{X_n\}$ последовательность симметричных независимых с. в., то при $0 \le |a_k| \le d_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$, для любого $\varepsilon > 0$*

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^n a_k X_k\right| \ge \varepsilon\right) \le 2P\left(\left|\sum_{k=1}^n d_k X_k\right| \ge \varepsilon\right).$$

Обозначим через $\widetilde{X}_n$ — симметризованные с. в. $\widetilde{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \widetilde{X}_k$, $\widetilde{S}(\lambda) = \sum\limits_k c_k(\lambda)\widetilde{X}_k$. По неравенствам симметризации

$$\widetilde{\tau}(\varepsilon, q, t) = \int\limits_1^\infty \lambda^{qt-2} P\left(|\widetilde{S}(\lambda)| \geq \varepsilon\lambda^{q-1}\right) d\lambda < \infty.$$

Применив лемму с

$$d_k = c_k(\lambda) \qquad \text{и} \qquad a_k = \begin{cases} c_k(\lambda), & k \in I, \\ 0, & k \overline{\in} I, \end{cases}$$

получим

$$\widetilde{\tau}(\varepsilon, q, t) \geq \frac{1}{2} \int\limits_1^\infty \lambda^{qt-2} P\left(\left|\sum_{k \in I} c_k(\lambda)\widetilde{X}_k\right| \geq \varepsilon\lambda^{q-1}\right) d\lambda.$$

Следовательно, сходится интеграл

$$A = \int\limits_1^\infty \lambda^{qt-2} P\left(\left|\sum_{k \in I} \widetilde{X}_k\right| \geq c\varepsilon\lambda^{q}\right) d\lambda.$$

С учетом условия (2) будем иметь

$$A = \sum_{n=1}^\infty \int\limits_n^{n+1} \lambda^{qt-2} P\left(\left|\widetilde{S}_{[\lambda]}\right| \geq c\varepsilon\lambda^{q}\right) d\lambda$$

$$\geq \sum_{n=1}^\infty n^{qt-2} P\left(\left|\widetilde{S}_n\right| \geq n^q\left[c\varepsilon\left(1+\frac{1}{n}\right)^q\right]\right)$$

$$\geq \sum_{n=1}^\infty n^{qt-2} P\left(\left|\widetilde{S}_n\right| \geq \varepsilon_1 n^q\right),$$

где $\varepsilon_1 = 2^q c\varepsilon$.

Отсюда по известной теореме Баума — Каца [5] следует $E\left|\widetilde{X}_1\right|^t < \infty$.

Согласно следствию из неравенств симметризации получаем $E\left|X_1\right|^t < \infty$. Теорема 1 доказана. ▷

Если вместо $\{c_k(\lambda)\}$ взять метод средних арифметических $(C,1)$, то из теоремы 1 получаем теорему Баума — Каца из [5]. Теорема 1 для м. с. $(A)$ была доказана в [4] для $q=1$, $t=2$.

Теперь рассмотрим асимптотику $\tau(\varepsilon,q,t)$ при $\varepsilon\to 0$. Очевидно, для м. с. из $D_\alpha$ выполнен аналог условия Линдеберга:

$$\frac{1}{B^2(\lambda)}\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2(\lambda)\int\limits_{|y|\geq\varepsilon\frac{B(\lambda)}{c_k(\lambda)}} y^2dP(X_k\leq y)\to 0 \text{ при } \quad \lambda\to\infty.$$

Таким образом, справедлива центральная предельная теорема (ц. п. т.) для $S(\lambda)$. Легко устанавливается оценка, аналогичная известной оценке А. Бикялиса из [1].

Если $EX_1=0$, $EX_1^2=1$, то

$$|P(S(\lambda)\leq xB(\lambda))-\Phi(x)|\leq c\frac{\rho(\lambda,x)\sup\limits_k c_k(\lambda)}{(1+|x|)^3B(\lambda)}, \tag{7}$$

где

$$\rho(\lambda,x)\leq\int\limits_{|u|\leq\frac{(1+|x|)B(\lambda)}{\sup\limits_k c_k(\lambda)}}|u|^3dP(X_1\leq u)+(1+|x|)B(\lambda)\int\limits_{|u|\geq\frac{(1+|x|)B(\lambda)}{\sup\limits_k c_k(\lambda)}}u^2dP(X_1\leq u).$$

Обозначим $,_l=\frac{\Gamma(l-1/2)}{(l-1)\sqrt{\pi}}$, $\frac{qt-\alpha}{2q-\alpha}=s$, где $,(z)$ — гамма-функция.

**Теорема 2**. *Пусть $EX_1=0$, $EX_1^2=1$. Тогда справедливы соотношения:*

а) $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\dfrac{\tau(\varepsilon,1,1)}{ln\frac{1}{\varepsilon}}=\frac{2}{\alpha}$;

б) $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon^{2s}\tau(\varepsilon,q,t)=\frac{(\sqrt{2}b_2)^{2s}}{\alpha(2q-1)},\ _{s+1}$ *при* $E|X_1|^t<\infty$.

$\lhd$ Ввиду схожести рассуждений, ограничимся докажзательством пункт а). Представим $\tau(\varepsilon,1,1)$ в виде суммы двух интегралов

$$\begin{aligned}\tau(\varepsilon,1,1)=\int\limits_1^\infty\frac{1}{\lambda}\left[P\left(|S(\lambda)|\geq\varepsilon\right)-2\Phi\left(-\frac{\lambda^{1/\alpha}}{b_2}\varepsilon\right)\right]d\lambda\\+\int\limits_1^\infty\frac{1}{\lambda}\Phi\left(-\frac{\lambda^{1/\alpha}}{b_2}\varepsilon\right)d\lambda=\tau_1+\tau_2.\end{aligned} \tag{8}$$

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\tau_1}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}=0. \tag{9}$$

Выберем $n_0(\varepsilon)>0$ так, чтобы $n_0(\varepsilon)\to\infty$, $\frac{n_0(\varepsilon)}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Тогда

$$\tau_1=\int\limits_{1\le\lambda<\exp n_0(\varepsilon)}+\int\limits_{\lambda\ge\exp n_0(\varepsilon)}=\tau_1'+\tau_2''. \tag{10}$$

Очевидно, что

$$\tau_1'\le 2\int\limits_{1\le\lambda<\exp n_0(\varepsilon)}\frac{1}{\lambda}d\lambda=2n_0(\varepsilon).$$

Следовательно, при $\varepsilon\to 0$ выполняется

$$\frac{\tau_1'}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}\to 0. \tag{11}$$

Рассмотрим $\tau_1''$ и разобъем его на два интеграла по областям $(\exp n_0(\varepsilon),\,\varepsilon^{-2/\alpha})$ и $(\varepsilon^{-2/\alpha},\infty)$:

$$\tau_1''=\int\limits_{\exp n_0(\varepsilon)\le\lambda\le\varepsilon^{-2/\alpha}}+\int\limits_{\varepsilon^{-2/\alpha}\le\lambda}=\tau_{11}+\tau_{12}. \tag{12}$$

Обозначим $\Delta(\lambda)=\sup_x\left|P\left(S(\lambda)\le xB(\lambda)\right)-\Phi(x)\right|$. По ц. п. т. для $S(\lambda)$, $\Delta(\lambda)\to 0$ при $\lambda\to\infty$. Поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\exp n_0(\varepsilon)\le\lambda\le\varepsilon^{-2/\alpha}}\Delta(\lambda)=0.$$

С учетом этого, легко получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned}\tau_{11}&\le\sup_{\exp n_0(\varepsilon)\le\lambda\le\varepsilon^{-2/\alpha}}\Delta(\lambda)\int\limits_{\exp n_0(\varepsilon)}^{\varepsilon^{-2/\alpha}}\frac{d\lambda}{\lambda}\\&=\sup_{\exp n_0(\varepsilon)\le\lambda\le\varepsilon^{-2/\alpha}}\Delta(\lambda)\left(\frac{2}{\alpha}\ln\frac{1}{\varepsilon}-n_0(\varepsilon)\right).\end{aligned}$$

Следовательно, при $\varepsilon\downarrow 0$

$$\frac{\tau_{11}}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}\to 0. \tag{13}$$

Для оценки $\tau_{12}$ воспользуемся неравенством Нагаева — Фука со вторым моментом. При этом, для любого $\gamma > 0$ получим

$$\tau_{12} \le \int\limits_{\lambda \ge \varepsilon^{-2/\alpha}} \frac{1}{\lambda} \sum_k P\left(c_k(\lambda)|X_1| \ge \varepsilon\gamma\right) d\lambda$$
$$+ c\varepsilon^{-1/\gamma} \int\limits_{\lambda \ge \varepsilon^{-2/\alpha}} \frac{1}{\lambda} \left[\sum_k c_k^2(\lambda)\right]^{\frac{1}{2\gamma}} d\lambda$$
$$+ 2 \int\limits_{\lambda \ge \varepsilon^{-2/\alpha}} \frac{1}{\lambda} \Phi\left(-\varepsilon \frac{\lambda^{\alpha/2}}{b_2}\right) d\lambda = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3. \tag{14}$$

Пользуясь теми же приемами, что и при доказательстве достаточности теоремы 1, выводим

$$\Omega_1 \le \frac{1}{\varepsilon\gamma} \int\limits_{\lambda \ge \varepsilon^{-2/\alpha}} \lambda^{-1} \int\limits_{b_1 y \ge \varepsilon\gamma\lambda^\alpha} y dP\left(|X_1| \le y\right) d\lambda$$
$$= \frac{1}{\varepsilon\gamma} \int\limits_{\frac{\gamma\varepsilon^{-1}}{b_1}}^{\infty} y \int\limits_{\varepsilon^{-2/\alpha}}^{(b_1 y/(\varepsilon\gamma))^{1/\alpha}} \lambda^{-1} d\lambda dP\left(|X_1| \le y\right)$$
$$\le c\varepsilon \int\limits_{\frac{\gamma\varepsilon^{-1}}{b_1}}^{\infty} y \int\limits_{\varepsilon^{-2/\alpha}}^{(b_1 y/(\varepsilon\gamma))^{1/\alpha}} \lambda^{\alpha-1} d\lambda dP\left(|X_1| \le y\right)$$
$$= c \int\limits_{\frac{\gamma\varepsilon^{-1}}{b_1}}^{\infty} y^2 dP\left(|X_1| \le y\right) + c\frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\frac{\gamma\varepsilon^{-1}}{b_1}}^{\infty} y dP\left(|X_1| \le y\right)$$
$$\le c \int\limits_{\frac{\gamma\varepsilon^{-1}}{b_1}}^{\infty} y^2\, dP\left(|X_1| \le y\right).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Omega_1 = 0. \tag{15}$$

Используя свойства $c_k(\lambda)$, будем иметь

$$\Omega_2 \le c\varepsilon^{-\frac{1}{\gamma}} \int\limits_{\lambda \ge \varepsilon^{-2/\alpha}} \lambda^{-1-\frac{\alpha}{2\gamma}} d\lambda = c \int\limits_1^{\infty} y^{-1-\frac{1}{2\gamma}} dy < \infty,$$

поскольку $\gamma > 0$ произвольно. Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\Omega_2}{\ln\frac{1}{\varepsilon}} = 0. \tag{16}$$

Очевидно и для $\Omega_3$ выполнено соотношение

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\Omega_3}{\ln\frac{1}{\varepsilon}} = 0. \tag{17}$$

Из (10)–(17) следует (9).

Рассмотрим интеграл $\tau_2$, который подстановкой $\frac{1}{b_2}\lambda^{\alpha/2}\varepsilon = \sqrt{x}$ приводится к виду

$$\begin{aligned}\tau_2 &= 2\int\limits_1^\infty \frac{1}{\lambda}\Phi\left(-\frac{\lambda^{\alpha/2}}{b_2}\varepsilon\right)d\lambda = \frac{2}{\alpha}\int\limits_{\varepsilon^2/b_2^2}^\infty \frac{1}{x}\Phi(-\sqrt{x})dx\\ &= \frac{2}{\alpha\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon/b_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\int\limits_{\varepsilon^2/b_2^2}^{t^2}\frac{1}{x}dx\,dt\\ &= \frac{2}{\alpha\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon/b_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\ln t^2 dt + \frac{4}{\alpha\sqrt{2\pi}}\ln\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon/b_2} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\\ &+ \frac{4\ln b_2}{\alpha\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon/b_2} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \sim c + \frac{2}{\alpha}\ln\frac{1}{\varepsilon}\end{aligned} \tag{18}$$

при $\varepsilon \to 0$.

Из (8), (9) и (18) получаем утверждение пункта а). Теорема 2 доказана. $\rhd$

При $t = 2$ и $q = 1$ для м. с. $(C, 1)$ из пункта б) теоремы получаем результат Хейди [6]. При $t \geq 2$ и $q = 1$ для м. с. $(C, 1)$ теорема 2 доказана в [4].

Справедлив равномерный (в смысле исходного распределения) вариант теоремы 2.

Пусть $\mathbb{F}_t$ — класс функций распределения $F(x) = P(X \leq x)$ обладающих свойствами:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = 0,\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) = 1,$$

$$\lim_{a\to\infty}\sup_{F\in\mathbb{F}}\int\limits_{|x|>a} x^2 dF(x) = 0,\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|^t dF(x) < \infty.$$

Обозначим

$$\tau^{(F)}(\varepsilon,q,t)=\int\limits_1^\infty \lambda^{\alpha qt-\alpha-1}P_F(|S_{(\lambda)}|\geq\varepsilon\lambda^{\alpha(q-1)})d\lambda,$$

где $P_F$ — вероятностная мера, соответствующая функции распредления $F(x)$.

**Теорема 3**. *Пусть $c_k(\lambda)\in D_\alpha$. Тогда верны соотношения*

а) $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sup_{F\in\mathbb{F}_2}\left|\frac{\tau^{(F)}(\varepsilon,1,1)}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}-\frac{2}{\alpha}\right|=0$;

б) $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sup_{F\in\mathbb{F}_t}\left|\varepsilon^{2s}\tau^{(F)}(\varepsilon,q,t)-\frac{(\sqrt{2}b_2)^{2s}}{\alpha(2q-1)}A_{s+1}\right|=0,\quad t\geq 2.$

В отличие от теоремы 1, рассмотрим критерий сходимости интегралов в терминах весовой функции и границы.

Пусть на $[1,\infty)$ заданы строго положительные и неубывающие функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, удовлетворяющие условиям

$$\frac{f(x)}{\varphi^2(x)}\uparrow,\quad \frac{f(x)}{\varphi^3(x)}\downarrow. \tag{19}$$

Обозначим

$$H(\lambda)=\lambda^{\alpha/2}\varphi(\lambda),\quad \chi(f,H)=\int\limits_1^\infty\frac{f(\lambda)}{\lambda}P\left(|\lambda^\alpha S(\lambda)|\geq b_2H(\lambda)\right)d\lambda,$$

где $b_2$ из определения класса $D_\alpha$, $H^{-1}(x)$ — функция обратная к $H(x)$.

**Теорема 4**. *Пусть $X_1,X_2,\ldots$ — последовательность н. о. р. с. в. Предположим, что выполнены условия (19), $EX_1=0,\ EX_1^2=1,\ c_k(\lambda)\in D_\alpha$, кроме того,*

$$E[H^{-1}(|X_1|)]^\alpha f(H^{-1}(|X_1|))lnH^{-1}(|X_1|)<\infty. \tag{20}$$

*Тогда равносильны условия*

а) $\chi(f,H)<\infty$;

б) $\int\limits_1^\infty\frac{f(\lambda)}{\lambda^{1-\alpha/2H(\lambda)}}e^{-\frac{H^2(\lambda)}{2\lambda^\alpha}}d\lambda<\infty.$

$\lhd$ Запишем $\chi(f,H)$ в виде суммы двух интегралов:

$$\chi(f,H)=\int\limits_1^\infty\frac{f(\lambda)}{\lambda}\Big|P\big(|\lambda^\alpha S(\lambda)|\geq b_2H(\lambda)\big)-2\Phi\big(-\varphi(\lambda)\big)\Big|d\lambda$$

$$+2\int\limits_{1}^{\infty}\frac{f(\lambda)}{\lambda}\Phi\bigl(-\varphi(\lambda)\bigr)d\lambda = I_1 + I_2. \tag{21}$$

Воспользовавшись неравенством (7), выводим

$$I_1 \le c\int\limits_{1}^{\infty}\frac{f(\lambda)}{\lambda}\frac{\lambda^{-\alpha/2}}{\varphi^3(\lambda)}\int\limits_{0}^{H(\lambda)}u^3dP\bigl(|X_1|\le u\bigr)d\lambda$$

$$+\int\limits_{1}^{\infty}\frac{f(\lambda)}{\lambda}\frac{1}{\varphi^2(\lambda)}\int\limits_{H(\lambda)}^{\infty}u^2dP\bigl(|X_1|\le u\bigr)d\lambda = I_1' + I_1''. \tag{22}$$

Меняя порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned}
I_1' &= c\int\limits_{H(1)}^{\infty}u^3\int\limits_{H^{-1}(u)}^{\infty}\lambda^{-\alpha/2-1}\frac{f(\lambda)}{\varphi^3(\lambda)}d\lambda dP\bigl(|X_1|\le u\bigr)\\
&\le c\int\limits_{H(1)}^{\infty}u^3\frac{f\bigl(H^{-1}(u)\bigr)}{\varphi^3\bigl(H^{-1}(u)\bigr)}\left[H^{-1}(u)\right]^{-\alpha/2}dP\bigl(|X_1|\le u\bigr)\\
&= c\int\limits_{H(1)}^{\infty}f\bigl(H^{-1}(u)\bigr)\left[H^{-1}(u)\right]^{\alpha}dP\bigl(|X_1|\le u\bigr)\\
&\le cEf\Bigl(H^{-1}\bigl(|X_1|\bigr)\Bigr)\Bigl[H^{-1}\bigl(|X_1|\bigr)\Bigr]^{\alpha} < \infty.
\end{aligned} \tag{23}$$

Аналогично устанавливаются оценки

$$I_1'' = c\int\limits_{H(1)}^{\infty}u^2\int\limits_{1}^{H^{-1}(u)}\frac{f(\lambda)}{\lambda\varphi^2(\lambda)}d\lambda dP\bigl(|X_1|\le u\bigr)$$

$$\le c\int\limits_{H(1)}^{\infty}u^2\frac{f\bigl(H^{-1}(u)\bigr)}{\varphi^2\bigl(H^{-1}(u)\bigr)}\ln H^{-1}(u)dP\bigl(|X_1|\le u\bigr)$$

$$= c\int\limits_{H(1)}^{\infty}\left[H^{-1}(u)\right]^{\alpha}f\bigl(H^{-1}(u)\bigr)\ln H^{-1}(u)dP\bigl(|X_1|\le u\bigr)$$

$$\leq cE\left[H^{-1}\big(|X_1|\big)\right]^{\alpha} f\Big(H^{-1}\big(|X_1|\big)\Big)\ln H^{-1}\big(|X_1|\big) < \infty. \tag{24}$$

Следовательно, при условиях теоремы из (22)–(24) имеем

$$I_1 < \infty. \tag{25}$$

Так как $\Phi\big(-\varphi(\lambda)\big) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varphi(\lambda)} e^{\frac{-\varphi^2(\lambda)}{2}}$ при $\lambda \to \infty$, то одновременная сходимость и расходимость $I_2$ и интеграла из пункта б) очевидна.

Отсюда, учитывая (21) и (25), получаем утверждение теоремы. $\triangleright$

В частности, для м. с. средних арифметических, из теоремы 4 получаем соответствующую теорему из [4].

Рассмотрим частный случай, когда $\varphi^2(x) = (2+\varepsilon)\ln\ln x$, $\varepsilon > 0$, $f(x) = \varphi^2(x)$. Легко проверить, что при $x \to \infty$

$$H^{-1}(x) \sim \left[\frac{x^2}{(2+\varepsilon)\ln\ln x}\right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Тогда условие (20) теоремы 4 принимает вид

$$EX_1^2 \ln|X_1| < \infty. \tag{26}$$

Введем в рассмотрение с. в.

$$\lambda_\varepsilon = \int\limits_e^\infty \frac{\ln\ln\lambda}{\lambda} I\left\{|S(\lambda)| \geq b_2\sqrt{(2+\varepsilon)\lambda^{-\alpha}\ln\ln\lambda}\right\} d\lambda.$$

Из предыдущей теоремы следует, что при выполнении (26) $E\lambda_\varepsilon < \infty$ при каждом $\varepsilon > 0$, но в то же время $\lambda_\varepsilon$ растет при $\varepsilon \to 0$. Поэтому представляет интерес асимптотика $\lambda_\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$.

**Теорема 5**. *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность н. о. р. с. в., $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1$, выполнено (26). Тогда при $\varepsilon \to 0$*

$$E\lambda_\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}(1 + o(1)).$$

$\triangleleft$ Представим $E\lambda_\varepsilon$ в виде суммы двух интегралов

$$E\lambda_\varepsilon = \int\limits_e^\infty \frac{\ln\ln\lambda}{\lambda}\left[P\left(|S(\lambda)| \geq b_2\sqrt{(2+\varepsilon)\lambda^{-\alpha}\ln\ln\lambda}\right)\right.$$

$$-2\Phi(-\sqrt{(2+\varepsilon)\ln\ln\lambda})\Big]\,d\lambda$$

$$+2\int\limits_{e}^{\infty}\frac{\ln\ln\lambda}{\lambda}\Phi(-\sqrt{2+\varepsilon\ln\ln\lambda})\,d\lambda = A(\varepsilon)+2D(\varepsilon). \tag{27}$$

Покажем, что $\varepsilon\sqrt{\varepsilon}A(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Для этого разобъем $A(\varepsilon)$ на два интеграла

$$A(\varepsilon)=\int\limits_{e}^{\exp(\varepsilon^{-3/4})}\frac{\ln\ln\lambda}{\lambda}\Big[P\left(|S(\lambda)|\geq b_2\sqrt{(2+\varepsilon)\lambda^{-\alpha}\ln\ln\lambda}\right)$$

$$-2\Phi\Big(-\sqrt{(2+\varepsilon)\ln\ln\lambda}\Big)\Big]d\lambda$$

$$+\int\limits_{\exp(\varepsilon^{-3/4})}^{\infty}\frac{\ln\ln\lambda}{\lambda}\Big[P\left(|S(\lambda)|\geq b_2\sqrt{(2+\varepsilon)\lambda^{-\alpha}\ln\ln\lambda}\right)$$

$$-2\Phi\Big(-\sqrt{(2+\varepsilon)\ln\ln\lambda}\Big)\Big]d\lambda = A_1(\varepsilon)+A_2(\varepsilon). \tag{28}$$

Очевидно

$$A_1(\varepsilon)\leq 2\int\limits_{e}^{\exp(\varepsilon^{-3/4})}\frac{\ln\ln\lambda}{\lambda}d\lambda\leq 2\varepsilon^{-3/4}\ln\varepsilon^{-3/4}.$$

Отсюда следует, что при $\varepsilon\to 0$

$$\varepsilon^{3/2}A_1(\varepsilon)\to 0. \tag{29}$$

Для оценки $A_2(\varepsilon)$ воспользуемся неравенством (7):

$$A_2(\varepsilon)\leq c\int\limits_{\exp(\varepsilon^{-3/4})}^{\infty}\frac{\ln\ln\lambda}{\lambda}\frac{\lambda^{-\alpha/2}}{(\ln\ln\lambda)^{3/2}}\int\limits_{0}^{H(\lambda)}u^3dP(|X_1|\leq u)\,d\lambda$$

$$+c\int\limits_{\exp(\varepsilon^{-3/4})}^{\infty}\frac{\ln\ln\lambda}{\lambda}\frac{1}{\ln\ln\lambda}\int\limits_{H(\lambda)}^{\infty}u^2dP(|X_1|\leq u)\,d\lambda = A_2'+A_2''. \tag{30}$$

Меняя порядок интегрирования, будем иметь

$$A_2'=c\int\limits_{H(\exp\varepsilon^{-3/4})}^{\infty}u^3\int\limits_{H^{-1}(u)}^{\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{1+\alpha/2}\sqrt{\ln\ln\lambda}}\,dP(|X_1|\leq u).$$

Так как $\alpha > 0$, то

$$A_2' \le c \int\limits_{H(\exp \varepsilon^{-3/4})}^{\infty} \frac{u^3}{\sqrt{\ln\ln H^{-1}(u)}} \left[H^{-1}(u)\right]^{-\alpha/2} dP(|X_1| \le u).$$

Используя определение $H(\lambda)$, легко получаем, что

$$A_2' \le c \int\limits_{H(\exp \varepsilon^{-3/4})}^{\infty} u^2 dP(|X_1| \le u) \le cE|X_1|^2. \tag{31}$$

Аналогично для $A_2''$,

$$A_2'' = c \int\limits_{H(\exp \varepsilon^{-3/4})}^{\infty} u^2 \int\limits_{\exp \varepsilon^{-3/4}}^{H^{-1}(u)} \lambda^{-1} d\lambda dP(|X_1| \le u)$$

$$\le c \int\limits_{H(\exp \varepsilon^{-3/4})}^{\infty} u^2 \ln H^{-1}(u)\, dP(|X_1| \le u).$$

Поскольку $H(\exp \varepsilon^{-3/4}) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, то учитывая асимптотику $H^{-1}(\lambda)$, получаем

$$A_2'' \le c \int\limits_{H(\exp \varepsilon^{-3/4})}^{\infty} u^2 \ln u\, dP(|X_1| \le u) \le cEX_1^2 \ln|X_1|. \tag{32}$$

Итак, из (30)–(32) следует, что при $\varepsilon \to 0$

$$\varepsilon^{3/2} A_2(\varepsilon) \to 0. \tag{33}$$

Следовательно, из (28), (29), (33) имеем

$$\varepsilon^{3/2} A(\varepsilon) \to 0 \tag{34}$$

при $\varepsilon \to 0$.

С помощью элементарных преобразований получаем при $\varepsilon \to 0$

$$D(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\varepsilon}} + o(\varepsilon^{-3/2}).$$

Отсюда, с учетом (27) и (34), вытекает утверждение теоремы. ▷

## Литература

1. *Бикялис А. Т.* Асимптотические разложения для сумм независимых $m$-решетчатых случайных векторов // Лит. мат. сб.—1972.—Т. 12.—С. 118–189.
2. *Гафуров М. У.* Применение аналога неравенств Нагаева С. В. и Фука Д. Х. для взвешенных сумм независимых случайных величин по закону больших чисел // Banach center publication, Warszawa.—1979.—V. 5.—P. 260–271.
3. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.—М.: Физматгиз, 1963.—1514 с.
4. *Сираждинов С. Х., Гафуров М. У.* Метод рядов в граничных задачах для случайных блужданий.—Ташкент: ФАН, 1987.—140 с.
5. *Baum L. E, Katz M.* Convergence rates in the law of large numbers // Trans. Amer. Math. Soc.—1965.—V. 120, No. 1.—P. 108–123.
6. *Heyde C. C.* A supplement to the strong law of large numbers // J. Appl. Probab.—1975.—V. 12, No. 1.—P. 173–175.
7. *Sztencel R.* On Boundednes and convergence of some Banach space valued random series // Probab. Math. Statist.—1981.—V. 2, No. 1.—P. 83–88.

*г. Владикавказ* *Статья поступила 22 июля 2000 г.*