Владикавказский математический журнал
Январь–март, 2000, Том 2, Выпуск 1

УДК **532(075.8)**

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ВОДОЕМЕ ПРИ СЕЛЕКТИВНОМ ВОДОЗАБОРЕ

И. Д. Музаев, Ж. Д. Туаева

В статье поставлена и решена контактная начально-краевая задача колебания поверхности раздела разноплотностных слоев воды при селективном водозаборе из верхнего слоя. Использована линейная теория поверхностных и внутренних гравитационных волн малой амплитуды. Глубины слоев являются конечными величинами. При решении учитывается волнообразование на поверхности верхнего слоя. Для определения колебаний поверхности раздела слоев в явном виде получено выражение, которое позволяет установить нижнее критическое положение поверхности раздела слоев (так называемое нижнее «стояние»).

Как известно, при водоснабжении промышленных предприятий, тепловых и атомных электростанций в ряде случаев необходимо обеспечить селективный водозабор, то есть забор воды из определенного слоя водоема — источника водоснабжения. В случае сильного загрязнения нижних или верхних слоев водоема жидкость забирается из такого слоя водоема, где вода более чистая. При этом необходимо предотвратить попадание воды из других слоев в окна водозаборного сооружения. Для обеспечения селективного водозабора из стратифицированного водоема требуются гидродинамические расчеты по определению критического положения поверхности раздела, так называемое «стояние», при котором не происходит захвата воды из других слоев.

Предположим, что часть пространства, ограниченная условиями $0 \leq x \leq L, 0 \leq z \leq H_1$, представляет слой осветленной воды с плотностью ρ_1, а слой мутной воды с плотностью $\rho_2 \geq \rho_1 : 0 \leq x \leq L, -H_2 \leq z \leq 0$. Плоскость $z = 0$ — невозмущенная горизонтальная поверхность раздела слоев, $z = -H_2$ — дно водоема, $z = H_1$ — невозмущенная свободная поверхность верхнего слоя. На участке $x = 0$, $z_0 - a \leq z \leq z_0 + a$ помещено окно водозаборного сооружения, через которое забирается вода из верхнего слоя водоема со скоростью v_0. В приближении линейной теории поверхностных и внутренних гравитационных волн малой амплитуды движение в слоях воды моделируется контактной начально-краевой задачей математической физики для потенциалов скоростей в верхнем и нижнем слоях соответственно:

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial dz^2}=0 \quad \text{при} \qquad -h_1<z\le 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}=0 \quad \text{при} \qquad 0\le z\le h_2. \tag{2}$$

Граничные условия выглядят следующим образом: на верхнем слое (условие Коши-Пуассона) —

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}+g\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}=0 \qquad \text{при } z=h_1; \tag{3}$$

на поверхности раздела (условия склейки) —

$$\rho_1\Big(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}+g\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\Big)=\rho_2\Big(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}+g\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\Big) \quad \text{при } z=0; \tag{4}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \quad \text{при } z=0; \tag{5}$$

на нижнем слое —

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}=0 \quad \text{при } z=-h_2; \tag{6}$$

горизонтальные скорости —

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=\nu_1(z)=\begin{cases}\nu_0, \; z_0-a\le z\le z_0+a,\\ 0, \; z<z_0-a, z>z_0+a\end{cases} \qquad \text{при } x=0; \tag{7}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=0 \qquad \text{при } x=L; \tag{8}$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=0 \qquad \text{при } x=0; \tag{9}$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=0 \qquad \text{при } x=L. \tag{10}$$

Начальные условия имеют вид:

$$\varphi_1=\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}=\varphi_2=\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} \qquad \text{при } t=0. \tag{11}$$

Волны на поверхности раздела слоев определяются следующей зависимостью:

$$\eta(x,t)=\frac{\rho_1}{(\rho_1-\rho_2)g}\frac{\partial\varphi_1(x,0,t)}{\partial t}-\frac{\rho_2}{(\rho_1-\rho_2)g}\frac{\partial\varphi_2(x,0,t)}{\partial t}. \tag{12}$$

В результате применения интегрального преобразования Лапласа относительно времени t выражения в изображениях принимают следующий вид:

$$\frac{\partial^2\tilde\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tilde\varphi_1}{\partial z^2}=0 \qquad \text{при} \quad -h_1<z\le 0; \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2\tilde\varphi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tilde\varphi_2}{\partial z^2}=0 \qquad \text{при} \quad 0\le z\le h_2; \tag{14}$$

$$p^2\tilde\varphi_1+g\frac{\partial\tilde\varphi_1}{\partial z}=0 \qquad \text{при} \quad z=h_1; \tag{15}$$

$$\rho_1\Big(p^2\tilde\varphi_2+g\frac{\partial\tilde\varphi_2}{\partial z}\Big)=\rho_2\Big(p^2\tilde\varphi_2+g\frac{\partial\tilde\varphi_2}{\partial z}\Big) \quad \text{при } z=0; \tag{15$'$}$$

$$\frac{\partial\tilde\varphi_1}{\partial z}=\frac{\partial\tilde\varphi_2}{\partial z} \qquad \text{при} \quad z=0; \tag{16}$$

$$\frac{\partial\tilde\varphi_2}{\partial z}=0 \qquad \text{при} \quad z=-h_2; \tag{17}$$

$$\frac{\partial\tilde\varphi_1}{\partial x}=\frac{\nu_1(z)}{p} \qquad \text{при} \quad x=0; \tag{18}$$

$$\frac{\partial\tilde\varphi_1}{\partial x}=0 \qquad \text{при} \quad x=L; \tag{19}$$

$$\frac{\partial\tilde\varphi_2}{\partial x}=0 \qquad \text{при} \quad x=0; \tag{20}$$

$$\frac{\partial\tilde\varphi_2}{\partial x}=0 \qquad \text{при} \quad x=L; \tag{21}$$

$$\tilde\eta(x,p)=\frac{\rho_1}{(\rho_1-\rho_2)g}p\tilde\varphi_1(x,0,p)-\frac{\rho_2}{(\rho_1-\rho_2)g}p\tilde\varphi_2(x,0,p),$$

где

$$\tilde\varphi_1(x,z,p)=\int\limits_0^\infty\varphi_1(x,z,t)e^{-pt}dt,$$

$$\tilde\varphi_2(x,z,p)=\int\limits_0^\infty\varphi_2(x,z,t)e^{-pt}dt, \quad p\in C,\ \operatorname{Re}p>0.$$

Применим в выражениях (13)–(21) конечное интегральное косинус-преобразование Фурье относительно переменной x. Получим

$$\frac{d^2\varphi_{n,1}}{dz^2} - a_n^2\varphi_{n,1} = \frac{\nu_1(z)}{p} \qquad \text{при} \quad -h_1 < z \leq 0; \tag{22}$$

$$\frac{d^2\varphi_{n,2}}{dz^2} - a_n^2\varphi_{n,2} = 0 \qquad \text{при} \quad 0 \leq z \leq h_2; \tag{23}$$

$$p^2\varphi_{n,1} + g\frac{d\varphi_{n,1}}{dz} = 0 \qquad \text{при} \quad z = h_1; \tag{24}$$

$$\rho_1\Big(p^2\varphi_{n,1} + g\frac{d\varphi_{n,1}}{dz}\Big) = \rho_2\Big(p^2\varphi_{n,2} + g\frac{d\varphi_{n,2}}{dz}\Big) \qquad \text{при } z = 0; \tag{25}$$

$$\frac{d\varphi_{n,1}}{dz} = \frac{d\varphi_{n,2}}{dz} \qquad \text{при} \quad z = 0; \tag{26}$$

$$\frac{d\varphi_{n,2}}{dz} = 0 \qquad \text{при} \quad z = -h_2; \tag{27}$$

$$\tilde{\eta}_n(p) = \frac{\rho_1}{(\rho_1 - \rho_2)g}p\varphi_{n,1}(0) - \frac{\rho_2}{(\rho_1 - \rho_2)g}p\varphi_{n,2}(0), \tag{28}$$

где

$$\varphi_{n,1}(z) = \int\limits_0^L \tilde{\varphi}_1(x,z,p)\cos(a_n x)\,dx,$$

$$\varphi_{n,2}(z) = \int\limits_0^L \tilde{\varphi}_2(x,z,p)\cos(a_n x)\,dx \quad (a_n = n\pi/L).$$

Решения дифференциальных уравнений (22) и (23) с граничными условиями (24)–(28) имеют следующие представления

$$\varphi_{n,1}(z) = C_{n,1}\operatorname{ch}(a_n z) + C_{n,2}\operatorname{sh}(a_n z) + \frac{1}{pa_n}\int\limits_0^z \nu(s)\operatorname{sh}(a_n(z-s))\,ds,$$

$$\varphi_{n,2}(z) = C_{n,2}\frac{\operatorname{ch}(a_n(z+h_2))}{\operatorname{sh}(a_n h_2)},$$

где постоянные $C_{n,1}$, $C_{n,2}$ определяются из равенств:

$$C_{n,1} = \frac{\Big(p^2 + \Big(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\Big)ga_n\operatorname{th}(a_n h_2)\Big)R_n}{\operatorname{ch}(a_n h_2)\Big(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}\operatorname{th}(a_n h_1)\operatorname{th}(a_n h_2)\Big)(p^2+\omega_1^2)(p^2+\omega_2^2)}, \tag{29}$$

$$C_{n,2} = \frac{p^2 R_n \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{th}(a_n h_2)}{\operatorname{ch}(a_n h_2)\Big(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{th}(a_n h_1) \operatorname{th}(a_n h_2)\Big)(p^2+\omega_1^2)(p^2+\omega_2^2)}, \tag{30}$$

$$R_n = -\frac{p}{a_n}\int\limits_0^{h_1} \nu(s) \operatorname{sh}(a_n(h_1 - s))\, ds - \frac{g}{p}\int\limits_0^{h_1} \nu(s) \operatorname{ch}(a_n(h_1 - s))\, ds, \tag{31}$$

$$\omega_1 = g a_n \frac{\operatorname{th}(a_n h_1) + \operatorname{th}(a_n h_2) - \sqrt{D_n}}{2\Big(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{th}(a_n h_1) \operatorname{th}(a_n h_2)\Big)},$$

$$\omega_2 = g a_n \frac{\operatorname{th}(a_n h_1) + \operatorname{th}(a_n h_2) + \sqrt{D_n}}{2\Big(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{th}(a_n h_1) \operatorname{th}(a_n h_2)\Big)},$$

$$D_n = (\operatorname{th}(a_n h_1) - \operatorname{th}(a_n h_2))^2 + 4\frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{th}(a_n h_1) \operatorname{th}(a_n h_2)$$
$$\times\Big(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{th}(a_n h_1) \operatorname{th}(a_n h_2) + \frac{\rho_1}{\rho_2}\Big).$$

Для $z = 0$ получаем, что

$$\varphi_{n,1}(0) = C_{n,1}, \quad \varphi_{n,2}(0) = C_{n,2} \operatorname{cth}(a_n h_2).$$

Подставив последние выражения в соотношение (28), выводим

$$\tilde{\eta}_n(p) = \frac{\rho_1}{(\rho_1 - \rho_2)g} p C_{n,1} - \frac{\rho_2}{(\rho_1 - \rho_2)g} p C_{n,2} \operatorname{cth}(a_n h_2). \tag{32}$$

Используя равенства (29)–(31), выражение (32) перепишется в виде

$$\tilde{\eta}_n(p) = -\frac{\rho_1 \operatorname{th}(a_n h_2)}{\rho_2 (p^2+\omega_1^2)(p^2+\omega_2^2)}$$

$$\times\Big(\int\limits_0^{h_1} \nu(s)(p^2 \operatorname{sh}(a_n(h_1 - s)) + g \operatorname{ch}(a_n(h_1 - s)))\, ds\Big).$$

В результате выполнения обратного преобразования Лапласа и вычисления интегралов в последнем выражении оригинал получается в следующем виде

$$\eta_n = \frac{\rho_1 \nu_0 \operatorname{th}(a_n h_2)}{\rho_2 S_n (\omega_2^2 - \omega_1^2)}\Big(R_{n,1}(\omega_2 \sin(\omega_2 t) - \omega_1 \sin(\omega_1 t))$$

$$+R_{n,2}\left(\frac{1}{\omega_2}\sin(\omega_2 t)-\frac{1}{\omega_1}\sin(\omega_1 t)\right)\bigg),$$

где

$$R_{n,1}=\frac{1}{a_n}\frac{e^{-a_n(z_0+a)}-e^{-a_n(2h_1-z_0-a)}-e^{-a_n(2h_1-z_0+a)}}{1+e^{-2a_nh_1}},$$

$$R_{n,2}=\frac{1}{a_n}\frac{e^{-a_n(z_0+a)}-e^{-a_n(2h_1-z_0-a)}+e^{-a_n(2h_1-z_0+a)}}{1+e^{-2a_nh_1}},$$

$$S_n=1+\frac{\rho_1}{\rho_2}\,\mathrm{th}(a_nh_1)\,\mathrm{th}(a_nh_2).$$

В результате выполнения обратного косинус-преобразования Фурье получается уравнение для установления нижнего положения поверхности раздела слоев при селективном водозаборе из двухслойного стратифицированного водоема

$$\eta(x,t)=-2\frac{\rho_1\nu_0}{\rho_2 L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{th(a_nh_2)}{S_n(\omega_2^2-\omega_1^2)}$$

$$\times\left(R_{n,1}(\omega_2\sin(\omega_2 t)-\omega_1\sin\omega_1 t)+R_{n,2}\left(\frac{1}{\omega_2}\sin(\omega_2 t)-\frac{1}{\omega_1}\sin(\omega_1 t)\right)\right)\cos(a_nx).$$

Численные расчеты последнего выражения позволяют установить зависимости колебания уровня поверхности от различных характеристик водозаборного окна. Очевидно, что амплитуда волны будет прямо пропорциональна скорости водозабора ν_0.

Литература

1. *Большаков В. А.* Справочник по гидравлике.—Киев: Вища школа, 1977.—С. 223–225.
2. *Ламб Б.* Гидродинамика / Пер. с англ.—М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1947.—С. 463–480.

г. Владикавказ *Статья поступила 5 февраля 2000г.*