Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 1999, Том 1, Выпуск 4

УДК **539.377**

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ СО СДВИГОМ

Т. З. Чочиев

1. Решение задачи скачка

Пусть для функции $\alpha(t)$, заданной на замкнутом контуре L имеют место условия: а) $\alpha(t)$ имеет отличную от нуля производную $\alpha'(t)$, удовлетворяющую условию Н; б) $\alpha(t)$ переводит контур L в самого себя взаимнооднозначно с сохранением направления; в) $\alpha(t)$ имеет непрерывную в смысле Н производную, отличную от нуля и бесконечности везде на L, кроме быть может конечного числа точек $c_1, c_2, \dots, c_m$, причем вблизи этих точек

$$\alpha'(t) = \prod_{j=1}^{m} (t - c_i)^{\gamma_i} \alpha_0(t), \ -1 < \gamma_i^- < 0, 0 \leqslant \gamma_i^+,$$

где $\alpha_0(t)$-функция, удовлетворяющая условию Н и отличная от нуля всюду на L.

Рассмотрим обобщенную граничную задачу Гильберта:

Найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$, имеющую конечный порядок на бесконечности и удовлетворяющую граничному условию:

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \ \text{ на } L, \tag{1.1}$$

где $G(t)$ и $g(t)$ — функции, заданные на L, удовлетворяющие условию H, причем $G(t) \neq 0$ всюду на L. Эта задача, когда $\alpha(t)$ удовлетворяет условиям а) и б), решена Д. А. Квеселава [6, 7]. Поэтому дальше свои рассмотрения будем производить по его методу. Отметим, что при помощи конформного отображения к рассматриваемому нами случаю приводится случай, когда L имеет конечное число угловых точек, а $\alpha'(t)$ удовлетворяет условию Гельдера, и отлична от нуля всюду на L. Положим, что $G(t) \equiv 1$. Тогда граничное условие (1.1) примет вид:

$$\Phi^+[\alpha(t)] - \Phi^-(t) = g(t). \tag{1.2}$$

Решение этой задачи будем искать в форме:

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi i \int\limits_L \frac{\phi[\beta(\tau)]\partial\tau}{\tau - z}, & z \in S^+, \\ \frac{1}{2}\pi i \int\limits_L \frac{\phi(\tau)\partial\tau}{\tau - z} + P(z), & z \in S^-, \end{cases} \tag{1.3}$$

где $\phi(t)$ — искомая функция точек контура L, удовлетворяющая условию H, $P(z)$ — произвольный полином. Подставляя (1.3) в граничное условие, (1.2) получим

$$\phi(t) + \frac{1}{2}\pi i \int_L \Gamma(t,\tau)\phi(\tau)\partial\tau = g(t) + P(t), \tag{1.4}$$

где

$$\Gamma(t,\tau) = \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t}.$$

Случай, рассмотренный Д. А. Квеселава [6], приводится к квазирегулярному уравнению Фредгольма, ибо

$$\Gamma(t,\tau) = \frac{\Gamma^*(t,\tau)}{|\tau - t|^\lambda}, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

где $\Gamma^*(t,\tau)$ — функция, удовлетворяющая условию H на L. В нашем случае интегральное уравнение требует дополнительного исследования. Ядро интегрального уравнения (1.4) можно переписать в виде:

$$\Gamma(t,\tau) = \frac{\mathrm{K}(t,\tau)}{\tau - t}, \quad \text{где} \quad \mathrm{K}(t,\tau) = \frac{\alpha'(\tau)(\tau - t)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)} - 1.$$

Из условия в) следует, что

$$K(t,\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t \neq c_J \quad \text{и} \quad \tau \to t \\ \gamma_j, & \text{если} \quad t = c_J \quad \text{и} \quad \tau \to c_J \\ \infty, & \text{при} \quad -1 < \gamma_J < 0 \quad \text{если} \quad t \neq c_J \quad \tau \to t \\ -1, & \text{при} \quad 0 < \gamma_J \quad \text{если} \quad t \neq c_J \quad \tau \to t. \end{cases}$$

Рассмотрим интегральное уравнение (1.4)

$$\mathrm{T}\phi = \phi(t) + \tfrac{1}{2}\pi i \int_L \Gamma(t,\tau)\phi(\tau)\partial\tau = f(t),$$
$$f(t) = g(t) + P(t)$$

в классе функций $\phi(t)$, $f(t)$, удовлетворяющих условию $H(\nu)(|\min\gamma_J| < \nu \leqslant 1)$ на контуре L.

Покажем, что к этому уравнению применима альтернатива Фредгольма.

По известной теореме Радона — Никольского [16, 17] для справедливости альтернативы Фредгольма необходимо и достаточно, чтобы оператор $\mathrm{T}\phi$ имел вид:

$$T\phi = B\phi + V\phi + \phi, \tag{1.5}$$

где оператор $(\mathrm{B}+\mathrm{E})\phi$ имеет обратный, а $V-$ вполне непрерывный оператор в рассматриваемом функциональном пространстве.

Зададим произвольно малые числа $\epsilon_J > 0$, $(j = 1, 2, \cdots m)$ и построим окружности радиуса ϵ_J с центром в точках c_J на L. Часть контура L, заключенную внутри этих окружностей обозначим через l

$$l = \sum_{j=1}^{m} l_j,$$

где l_k дуга, вырезаемая окружностью с центром c_k радиуса ϵ_k.

Положим

$$B\phi = \frac{1}{2}\pi i \int\limits_L \Gamma(t,\tau)\phi(\tau)\partial\tau = \frac{1}{2}\pi i \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{l_j} \Gamma(t,\tau)\phi(\tau)\partial\tau. \tag{1.6}$$

$$V\phi = \frac{1}{2}\pi i \int\limits_{L-l} \Gamma(t,\tau)\phi(\tau)\partial\tau. \tag{1.7}$$

Пусть также

$$\begin{cases} |\phi(t)| \leqslant 1, \\ |\phi(t') - \phi(t'')| \leqslant A|t'-t''|^{\nu} \end{cases} \tag{1.8}$$

для всех t, t', $t'' \in L$.

Рассмотрим оператор (1.6) сперва для случая $m = 1$. Тогда

$$B\phi = B_1\phi = \frac{1}{2}\pi i \int\limits_{l_1} \Gamma(t,\tau)\phi(\tau)\partial\tau. \tag{1.9}$$

При этом будем иметь

$$|B_1\phi| = \frac{1}{2}\pi \left| \int\limits_{l_1} \Gamma(t,\tau)[\phi(\tau)-\phi(t)]\partial\tau + \phi(t)\int\limits_{l_1} \Gamma(t,\tau)\partial\tau \right|.$$

В силу того, что

$$\Gamma(t,\tau) = \frac{\mathrm{K}(t,\tau)}{\tau - t} = \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t} = \frac{\partial \ln \frac{\alpha(\tau)-\alpha(t)}{\tau - t}}{\partial\tau}$$

имеем

$$\int \Gamma(t,\tau)\partial\tau = \int \partial \ln \frac{\alpha(\tau)-\alpha(t)}{\tau-t} = \ln \frac{\alpha(\tau)-\alpha(t)}{\tau-t}.$$

Так как интеграл по l_1 понимается в смысле главного значения по Коши, то интегрирование по l_1 можно рассматривать как интеграл по дуге $t_1't_1$ и дуге t_2t_2'', где t_1 и t_2 точки пересечения контура L и окружности с центром $t \in L$ радиуса ϵ. То есть

$$\begin{aligned} &\int\limits_{l_1} \Gamma(t,\tau)\partial\tau = \lim_{\epsilon\to 0}[\ln \tfrac{\alpha(\tau)-\alpha(t)}{\tau-t}|_{t_1'}^{t_1} + \ln \tfrac{\alpha(\tau)-\alpha(t)}{\tau-t}|_{t_2}^{t_2''}] = \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}[\ln \tfrac{\alpha(t_1)-\alpha(t)}{t_1-t} - \ln \tfrac{\alpha(t_1')-\alpha(t)}{t_1'-t} + \ln \tfrac{\alpha(t_2'')-\alpha(t)}{t_2''-t} - \ln \tfrac{\alpha(t_2)-\alpha(t)}{t_2-t}]. \end{aligned}$$

В случае $t \neq c_1$, $\alpha'(t) \neq 0$ на L, правая часть выражения в фигурных скобках представляет собой непрерывную функцию для любого значения $t \in L$.

Пусть теперь $t = c_1$. Последнее равенство можно переписать в виде

$$\int\limits_{l_1} \Gamma(t,\tau)\partial\tau = \lim_{\epsilon\to 0}[\gamma_1 \ln \tfrac{t_1-c_1}{t_2-c_1} - \gamma_1 \ln \tfrac{t_1'-c_1}{t_2'-c_1} + \ln \tfrac{r_1(t_1)}{r_1(t_2)} - \ln \tfrac{r_1(t_1')}{r_1(t_2'')}],$$

где
$$r_1(t) = \frac{\alpha(t) - \alpha(c_1)}{(t - c_1)^{\gamma_1 + 1}}.$$

Покажем, что $r_1(t)$ ограниченная функция везде на L. Имеем,
$$r_1(t) = \int\limits_{c_1}^{t} \frac{\alpha'(u)\partial u}{(t - c_1)^{\gamma_1 + 1}} = \int\limits_{c_1}^{t} \frac{(u - c_1)^{\gamma_1}\alpha_0(u)\partial u}{(t - c_1)^{\gamma_1 + 1}}.$$

Для оценки последнего выражения обозначим:$|u - c_1| = \rho$,$|t - c_1| = \rho_0$. При этом $|\partial u| = \partial s < m\partial\rho \; m = const)$.

Тогда
$$|r_1(t)| \leqslant m \max|\alpha_0(t)| \int\limits_0^{\rho} \frac{\rho^{\gamma_1}\partial\rho}{\rho_0^{\gamma_1 + 1}} = \frac{m}{1 + \gamma_1}\max|\alpha_0(t)|.$$

Нетрудно теперь заметить из исходного равенства, что
$$\int\limits_{l_1} \Gamma(t, \tau)\partial\tau = \gamma_1\pi i - \gamma_1 \ln\frac{t_1' - c_1}{t_2'' - c_1} - \ln\frac{r_1(t_1')}{r_1(t_2'')}.$$

Отсюда
$$\lim_{\epsilon_1 \to 0} \int\limits_{l_1} \Gamma(t, \tau)\partial\tau = 0.$$

Таким образом,
$$\left|\int\limits_{l_1} \Gamma(t, \tau)\partial\tau\right| = \eta(\epsilon_1), \tag{1.10}$$
где $\eta(\epsilon_1)$ при $\epsilon_1 \to 0$.

Далее,
$$\left|\int\limits_{l_1} [\phi(\tau) - \phi(t)]\Gamma(t, \tau)\partial\tau\right| = \left|\int\limits_{l_1} [\phi(\tau) - \phi(t)]\frac{K(t, \tau)}{\tau - t}\partial\tau\right|.$$

Если $\tau \neq c_1$, то $K(t, \tau)$ представляет ограниченную по модулю функцию, и для последнего выражения имеет место следующая оценка:
$$\left|\int\limits_{l_1} [\phi(\tau) - \phi(t)]\Gamma(t, \tau)\partial\tau\right| \leqslant A \int\limits_{l_1} |\tau - t|^{\nu} \frac{|K(t, \tau)|}{|\tau - t|}\partial s = \eta(\epsilon_1). \tag{1.11}$$

Эта оценка имеет место также если $\tau = c_1$, и $0 < \gamma_1$

Что касается случая $-1 < \gamma_1 < 0$, то вблизи точки $\tau = c_1$, $\mathrm{K}(t, \tau)$ представима в виде
$$\mathrm{K}(t, \tau) = (\tau - c_1)^{\gamma_1} K^*(t, \tau).$$

Здесь $K^*(t, \tau)$ ограничена для любого t и τ.

Следовательно, в этом случае

$$\left|\int\limits_{l_1}[\phi(\tau)-\phi(t)]\Gamma(t,\tau)\partial\tau\right| \leqslant A\int\limits_{l_1}|\tau-t|^{\nu}\frac{|\tau-c_1|^{\gamma_1}|K^*(t,\tau)|}{|\tau-t|}\partial s \leqslant$$

$$\leqslant M\int\limits_{l_1}|\tau-c_1|^{\gamma_1}\frac{\partial s}{|\tau-t|^{1-\nu}} \equiv M\cdot Y(t).$$

Полагая $r_0=|t-c_1|$, $r=|r-c_1|$, для Y будем иметь

$$Y(t)\leqslant m\int\limits_0^{\epsilon_1}\frac{r^{\gamma_1}}{|r-r_0|^{1-\nu}}\partial r.$$

Так как по условию $\gamma_1+\nu>0$, то

$$Y(t)=\eta(\epsilon_1). \tag{1.12}$$

Таким образом, при условии (1.8) установили, что $|B_1\phi|\leqslant\eta(\epsilon_1)$. Полученный результат легко можно обобщить для случая $m>1$.

В самом деле, рассмотрим k-тый оператор из (1.6) $B_k\phi=\int\limits_{l_k}\Gamma(t,\tau)\phi\partial\tau$ $(k=1,2,3,\cdots,m)$. Аналогично предыдущему $(m=k=1)$

$$|B_k\phi|=\frac{1}{2}\pi\left|\int\limits_{l_k}\Gamma(t,\tau)[\phi(\tau)-\phi(t)]\partial\tau+\phi(t)\int\limits_{l_k}\Gamma(t,\tau)\partial\tau\right|.$$

Значение интеграла по l_k от $\Gamma(t,\tau)$ как ранее, можно записать так

$$\int\limits_{l_k}\Gamma(t,\tau)\partial\tau=\lim_{\epsilon\to 0}[\ln\tfrac{\alpha(\tau)-\alpha(t)}{\tau-t}|_{t_k'}^{t_1}+\ln\tfrac{\alpha(\tau)-\alpha(t)}{\tau-t}|_{t_2}^{t_k''}]=$$
$$=\lim_{\epsilon\to 0}[\ln\tfrac{\alpha(t_1)-\alpha(t)}{t_1-t}-\ln\tfrac{\alpha(t_k')-\alpha(t)}{t_k'-t}+\ln\tfrac{\alpha(t_2'')-\alpha(t)}{t_2''-t}-\ln\tfrac{\alpha(t_2)-\alpha(t)}{t_2-t}].$$

При $t\neq c_k$ правая часть (в фигурных скобках) есть непрерывная функция. При $t=c_k$ значение интеграла по l_k можно переписать в виде

$$\int\limits_{l_k}\Gamma(t,\tau)\partial\tau=\lim_{\epsilon\to 0}[\gamma_k\ln\tfrac{t_1-c_k}{t_2-c_k}-\gamma_k\ln\tfrac{(t_k'-c_k)^{\gamma_j}}{(t_k''-c_k)^{\gamma}}+\ln{\prod_{j=1}^{m}}'\tfrac{(t_1-c_j)^{\gamma_j}}{(t_2-c_j)^{\gamma_j}}-$$
$$-\ln{\prod_{j=1}^{m}}'\tfrac{(t_k'-c_j)^{\gamma_j}}{(t_k''-c_j)^{\gamma_j}}+\ln\tfrac{r_k(t_1)}{r_k(t_2)}-\ln\tfrac{r_k(t_k')}{r_k(t_k'')}],$$

где $r_k(t)=\frac{\alpha(t)-\alpha(c_k)}{(t-c_k)\prod\limits_{j=1}^{m}(t-c_j)^{\gamma_j}}$ ($\prod'$ означает, что $m\neq k$). Согласно предыдущим рассуждениям можно установить, что $r_k(t)$ есть непрерывная функция для любого $t\in L$.

В силу этого

$$\int\limits_{l_k}\Gamma(t,\tau)\partial\tau=\gamma_k\pi i-\gamma_k\ln\frac{t_k'-c_k}{t_k''-c_k}-\ln\frac{(t_k'-c_1)^{\gamma}}{(t_k''-c_1)^{\gamma}}-\ln\frac{r_k(t_k')}{r_k(t_k'')}.$$

Отсюда легко заметить, что $\lim\limits_{\epsilon_k\to 0}\int\limits_{l_k}\Gamma(t,\tau)\partial\tau = 0$. Следовательно, $\left|\int\limits_{l_k}\Gamma(t,\tau)\partial\tau\right| = \eta(\epsilon_k)$.

Что касается оценки $\left|\int\limits_{l_k}[\phi(\tau)-\phi(t)]\Gamma(t,\tau)\partial\tau\right|$, то она представляет повторение оценки для случая $m=1$. Проведенные рассуждения справедливы для любого k $(k = 1, 2, 3\cdots m)$. Поэтому, обозначив, $\epsilon_0 = \max\epsilon_k$ для (1.6) можем записать:

$$|B\phi| \leqslant \eta(\epsilon_0)\max|\phi|. \tag{1.13}$$

Из этого заключаем, что всегда можно выбрать ϵ_0 настолько малым, чтобы $|B\phi| < 1$ (если $\phi(t)$ удовлетворяет (1.8)).

Заметим, что если $\phi(t)$ принадлежит к классу функций непрерывных в смысле H, то, как известно, норма элемента в этом пространстве определяется выражением

$$\|\phi\| = M + M_0, \tag{1.14}$$

где

$$\begin{cases} M = \max|\phi|, \\ M_0 = \sup\frac{|\phi(t_2)-\phi(t_1)|}{|t_2-t_1|^\nu}. \end{cases} \tag{1.15}$$

Норма Функции $B\phi$ будет

$$\|B\phi\| = \max|B\phi| + \sup\frac{B\phi(t_2)-B\phi(t_1)}{(t_2-t_1)^\nu}. \tag{1.16}$$

По ранее доказанной оценке (1.13), $\max|B\phi| = \eta(\epsilon_0)\max|\phi|$.

Нужно доказать, что $\|B\phi\| \leqslant \|\phi\|$. Для этого достаточно показать, что

$$\sup\frac{B\phi(t_2)-B\phi(t_1)}{(t_2-t_1)^\nu} \leqslant \sup\frac{\phi(t_2)-\phi(t_1)}{(t_2-t_1)^\nu}$$

или

$$\sup|B\phi(t_2)-B\phi(t_1)| \leqslant \sup|\phi(t_2)-\phi(t_1)|.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&|B\phi(t_2)-B\phi(t_1)| = \tfrac{1}{2}\pi|\int\limits_l[\Gamma(t_2,\tau)-\Gamma(t_1,\tau)]\phi(\tau)\partial\tau| = \\
&= \tfrac{1}{2}\pi|\int\limits_l\Gamma(t_2,\tau)[\phi(\tau)-\phi(t_2)]\partial\tau - \int\limits_l\Gamma(t_1,\tau)[\phi(\tau)-\phi(t_1)]\partial\tau + \\
&+\int\limits_l\Gamma(t_2,\tau)[\phi(t_2)-\phi(t_1)]\partial\tau + \int\limits_l[\Gamma(t_2,\tau)-\Gamma(t_1,\tau)]\phi(t_1)\partial\tau| \leqslant \\
&\leqslant \tfrac{1}{2}\pi\int\limits_l|\Gamma(t_2,\tau)|\phi(\tau)-\phi(t_2)|\partial s + \tfrac{1}{2}\pi\int\limits_l|\Gamma(t_1,\tau)\||\phi(\tau)-\phi(t_1)|\partial s + \\
&+|\phi(t_2)-\phi(t_1)|\tfrac{1}{2}\pi\int\limits_l|\Gamma(t_1,\tau)|\partial\tau + \tfrac{\phi(t_2)}{2\pi}\int\limits_l[\Gamma(t_2,\tau)-\Gamma(t_1,\tau)\partial\tau| \leqslant \\
&\leqslant \tfrac{A}{2\pi}\int\limits_l|\tau-t_2|^\nu\|\Gamma(t_2,\tau)|\partial s + \tfrac{A}{2\pi}\int\limits_l|\tau-t_2|^\nu\|\Gamma(t_1,\tau)|\partial s + \\
&+|\phi(t_2)-\phi(t_1)|\tfrac{1}{2}\pi|\int\limits_l\Gamma(t_1,\tau)\partial\tau| + |\phi(t_1)|\tfrac{1}{2}\pi|\int\limits_l[\Gamma(t_2,\tau)-\Gamma(t_1,\tau)]\partial\tau|.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание (1.10)–(1.12), по всему l для последнего будет иметь

$$|B\phi(t_2) - B\phi(t_1)| \leqslant \frac{A\eta(\epsilon_0)}{2\pi} + \frac{A\eta(\epsilon_0)}{2\pi} + |\phi(t_2) - \phi(t_1)|\frac{\eta(\epsilon_0)}{2\pi} + \frac{M\eta(\epsilon_0)}{2\pi}$$

или

$$|B\phi(t_2) - B\phi(t_1)| \leqslant |\phi(t_2) - \phi(t_1)|\eta(\epsilon_0) + N\eta(\epsilon_0),$$

где η — сколь угодно малая величина при сколь угодно малом ϵ_0. Отсюда

$$\sup|B\phi(t_2) - B\phi(t_1)| \leqslant \sup|\phi(t_2) - \phi(t_1)| + N\eta(\epsilon_0).$$

Следовательно,

$$\|B\phi\| \leqslant \eta(\epsilon_0)\max|\phi| + \sup\frac{|\phi(t_2) - \phi(t_1)| + N\eta(\epsilon_0)}{|t_2 - t_1|^\nu}.$$

Можно ϵ_0 подобрать так, чтобы всегда на L выполнялось

$$\|B\| = \frac{\|B\phi\|}{\|\phi\|} < 1. \tag{1.17}$$

Рассмотрим уравнение $\phi + B\phi = f$. Из (1.17) по принципу сжатых отображений оператор $(B + E)\phi$ имеет обратный, и тем самым первая часть теоремы Радона — Никольского (см. (1.5)) доказана.

Докажем теперь вторую часть. Рассмотрим оператор (1.7)

$$V\phi = \frac{1}{2}\pi i\int\limits_{L-l}\Gamma(t,\tau)\phi(\tau)\partial\tau.$$

и покажем, что он является вполне непрерывным в классе H(μ) $(\mu \leqslant 1)$.

Пусть $m = k = 1$. Заметим, что

1) ядро $\Gamma(t,\tau)$ на $L - l_1$ является непрерывной функцией для любого t и τ, если потребовать, что $\alpha'(t)$ удовлетворяет условию Липшица;

2) представимо в виде

$$\Gamma(t,\tau) = \frac{\Gamma^*(t,\tau)}{|\tau - t|^\lambda} \quad (0 \leqslant \lambda < 1),$$

если на упомянутой части $\alpha'(t)$ удовлетворяет условию Гельдера; причем $\Gamma^*(t,\tau)$ удовлетворяет условию $H(\lambda_0)$ $(\lambda \leqslant \lambda_0)$.

Исследуем первый случай. Если $\phi(t)$ множество всех функций, удовлетворяющих на L условию $H(\mu)$, то сообразно (1.15) расстояние между двумя функциями $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ определяется как $\|\phi(t_2) - \phi(t_1)\|$, для которого аксиома треугольника и это множество, как показано в книге Мусхелишвили, составляет полное нормированное пространство, которое обозначается H^μ.

Пусть $\{\phi\}$ — множество функций упомянутого пространства такое, что $\|\phi\| \leqslant R$, где R — постоянная. Из определения нормы $\|\phi\|$ следует, что функции ϕ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны, ибо

$$|\phi(t_2) - \phi(t_1)| \leqslant M_0|t_2 - t_1|^\mu \leqslant |t_2 - t_1|^\mu.$$

В силу теоремы Арцела из всякого бесконечного подмножества этих ϕ можно выбрать равномерно сходящуюся под последовательность $\phi_1, \phi_2, \cdots \phi_n$, предел которой обозначим (в смысле заданной метрики) через $\phi(t)$.

Положим далее, что $q_n = V\phi_n$, $q = V\phi$, $w_n = q - q_n$. Оператор $V\phi$ будет вполне непрерывным, если мы покажем, что $q_n \to q$ в смысле метрики H^μ, т. е. $\|w_n\| \to 0$ при всех t_1 и t_2 контура L.

Так как $\Gamma(t,\tau)$ непрерывна на $L - l_1$, то она будет удовлетворять также условию Липшица. Следовательно,

$$W_n(t_2) - w_n(t_1) = \frac{1}{2}\pi \int\limits_{L-l_1} [\Gamma(t_2,\tau) - \Gamma(t_1,\tau)]\rho_n(\tau)\partial\tau.$$

Откуда

$$\frac{|W_n(t_2) - w_n(t_1)|}{|t_2 - t_1|^\mu} \leqslant \frac{1}{2}\pi \int\limits_{L-l_1} \frac{|\Gamma(t_2,\tau) - \Gamma(t_1,\tau)||\rho_n(\tau)|}{|t_2 - t_1|^\mu}\partial s,$$

где $\rho_n = \phi - \phi_n$. Отсюда следует [12], что

$$\sup \frac{|W_n(t_2) - w_n(t_1)|}{|t_2 - t_1|^\mu} \to 0.$$

Кроме того,

$$|W_n| = \frac{1}{2}\pi \int\limits_{L-l_1} |\Gamma(t,\tau)||\rho_n(\tau)|\partial s \quad \text{и} \quad \max|W_n| \to 0.$$

Таким образом, наше утверждение о полной непрерывности оператора $V\phi$ доказано.

Рассмотрим второй случай. Положим, что $\mu \leqslant \lambda$. Имеем

$$\frac{|W_n(t_2) - w_n(t_1)|}{|t_2 - t_1|^\mu} \leqslant \frac{1}{2}\pi \int\limits_{L-l} \frac{|\Gamma(t_2,\tau) - \Gamma(t_1,\tau)\|\rho_n(\tau)|}{|t_2 - t_1|^\mu}\partial s =$$

$$= \frac{1}{2}\pi \int\limits_{L-l} \frac{\left|\Gamma^*(t_2,\tau)|\tau - t_2|^\lambda - \Gamma^*(t_1,\tau)|\tau - t_1|^\lambda\right|}{|t_2 - t_1|^\mu} \frac{\rho_n(\tau)}{|\tau - t_1|^\lambda|\tau - t_2|^\lambda}\partial s.$$

Первый множитель под интегралом ограниченная величина, а интеграл от второй величины стремится к нулю, и

$$\sup \frac{|W_n(t_2) - w_n(t_1)|}{|t_2 - t_1|^\mu} \to 0$$

стремится также к нулю и $\max|w_n|$, ибо

$$|W_n| \leqslant \frac{1}{2}\pi \int \frac{|\Gamma^*(t,\tau)\rho_n(\tau)|}{|\tau - t|^\lambda}\partial s.$$

Что и требовалось доказать.

Рассуждения останутся в силе, если $m > 1$ и $l = \prod_{j=1}^{m} l_j$.

Чтобы совместить проведенное доказательство с первой частью доказательства теоремы Радона — Никольского. Нужно в случае 1) принять $\mu = \nu$ т. е. $|\min\gamma_j| < \mu \leqslant 1$, а в случае 2) $|\min\gamma_j| < \mu < \nu \leqslant \lambda$. Для этого последнего обстоятельства (в смысле доказательства второй части теоремы) важно, чтобы $|\min\gamma_j|$ была сколь угодно малой величиной, т. е. чтобы всегда выполнялось $\gamma_j + \mu > 0$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$.

Таким образом, мы доказали при наличии условия (3) на L, то к интегральному уравнению (1.4) применима альтернатива Фредгольма. Это уравнение является обобщением интегрального уравнения Д. А. Квеселава изученного им для установления вопроса разрешимости граничной задачи (1.1) при условии, что $\alpha'(t) \neq 0$ всюду на контуре L. Осталось нам решить вопрос исследования интегрального уравнения (1.4). Предварительно рассмотрим лемму, аналогичную лемме Д.А.Квеселава [1].

Лемма. *Если кусочно-голоморфная функция $\Phi(z)$, исчезающая на бесконечности, удовлетворяет граничному условию:*

$$\Phi^+[\alpha(t)] = \Phi^-(t) \quad \text{на } L, \tag{1.18}$$

то $\Phi(z)$ тождественно равна нулю.

Очевидно достаточно рассмотреть граничное условие вида:

$$\Phi^+(t) = \Phi^-[\alpha(t)]. \tag{1.19}$$

Пусть существует решение $\Phi(z)$ задачи (1.19) неравное нулю и исчезающее на бесконечности. Тогда функции $\Phi(z)$, $\Phi^2(z)$, $\Phi^3(z), \ldots, \Phi^n(z), \ldots$ будут также ее линейно независимыми решениями.

Итак, если граничная задача (1.19) имеет хоть одно решение, отличное от нуля и исчезающее на бесконечности, то существует бесчисленное множество линейно независимых решений, удовлетворяющих тому же условию.

С другой стороны, если $\Phi(z)$ удовлетворяет условию (1.19), то ее граничное условие удовлетворяет интегральному уравнению:

$$\Phi^+(t) + \frac{1}{\pi}i\int[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t}]\Phi^+(\tau)\partial\tau = 0$$

т. е. $\Phi^+(t)$ является решением интегрального уравнения $T\phi = 0$. Но число линейно независимых решений этого уравнения конечно. Следовательно, должно быть конечным и число соответствующих им кусочно-голоморфных функций, что противоречит выше указанному предложению и, таким образом, лемма доказана.

На основании доказанной леммы, однородное уравнение, соответствующее уравнению (4.4), не имеет решения. Следовательно, неоднородное уравнение (4.4) разрешимо для любой правой части и это решение единственно.

Вследствие этого, что справедливость альтернативы Фредгольма доказана в классе H и теорема единственности доказана в этом же классе существует решение уравнения (4.4) принадлежащее к классу H. Итак, имеет место

Теорема 1. *Любое интегрируемое на L (имеющее конечный порядок на бесконечности), решение граничной задачи (1.2) дается формулой (1.3), где $P(z)$ произвольный полином, $\phi(t)$ общее решение интегрального уравнения $T\phi = g(t) + P(t)$.*

Дальнейшие рассуждения аналогичны данным результатам Д. А. Квеселава [6].

2. Решение однородной задачи

Рассмотрим теперь (1.1) при $g(t) \equiv 0$

$$\Phi^{+}[\alpha(t)] = G(t)\Phi^{-}(t), \quad \text{на} \;\; L. \tag{2.1}$$

Пусть χ индекс функции $G(t)$

$$\chi = \frac{1}{2}\pi[\arg G(t)]_L,$$

тогда аргумент функции $G_0(t) = t^{-\chi}G(t)$ будет возвращаться к исходному значению при полном обходе переменной t контура L. Следовательно, под $\log G_0(t)$ мы можем подразумевать вполне определенную однозначную функцию удовлетворяющую условию Н.

Непосредственная проверка показывает, что функция

$$\chi(z) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2}\pi i \int\limits_L \frac{\psi[\beta(\tau)]\partial\tau}{\tau - z}}, & z \in S^{+}, \\ Z^{-\chi} e^{\frac{1}{2}\pi i \int\limits_L \frac{\psi(\tau)\partial\tau}{\tau - z}}, & z \in S^{-}, \end{cases}$$

где $\psi(\tau)$ решение интегрального уравнения $T\psi = \log G_0(t)$ является некоторым частным решением однородной граничной задачи (2.1). Последнее будем называть каноническим решением. Оно, очевидно, не обращается в ноль ни в одной ее точке конечной части плоскости, и его порядок на бесконечности в точности равен $(-\chi)$.

Найдем все кусочно-голоморфные решения задачи (2.1).

Пусть $\Phi(z)$ какое-либо кусочно-голоморфное решение (2.1), а $\chi(z)$ каноническая функция. Тогда из соотношений

$$\Phi^{+}[\alpha(t)] = G(t)\Phi^{-}(t) \;\; \text{на} \; L \quad \text{и} \quad \chi^{+}[\alpha(t)] = G(t)\chi^{-}(t) \;\; \text{на} \; L,$$

с учетом, что $\chi^{+}(t) \neq 0$ и $\chi^{-}(t) \neq 0$ на L, следует

$$\frac{\Phi^{+}[\alpha(t)]}{\chi^{+}[\alpha(t)]} = \frac{\Phi^{-}(t)}{\chi^{-}(t)}.$$

Используя теорему 1, получим

Теорема 2. *Любое (имеющее конечный порядок на бесконечности) решение граничной задачи (2.1) дается формулой:*

$$\Phi(z) = \begin{cases} \chi(z)\frac{1}{2}\pi i \int\limits_L \frac{g[\beta(\tau)]\partial\tau}{\tau - z}, & z \in S^{+}, \\ \chi(z)\frac{1}{2}\pi i \int\limits_L \frac{g(\tau)\partial\tau}{\tau - z} + \chi(z)P(z), & z \in S^{-}, \end{cases}$$

где $P(z)$ произвольный полином, $g(t)$ решение интегрального уравнения $Tg = P(t)$.

Если $\chi \leqslant 0$, то граничная задача (2.1) не имеет решений, исчезающих на бесконечности, если $\chi > 0$, то она имеет ровно χ линейно независимых решений, исчезающих на бесконечности.

3. Решение неоднородной задачи

Наконец переходим к неоднородной задаче (1.1). Пусть $\chi(z)$ каноническое решение однородной задачи, полученной при $g(t) \equiv 0$ из (1.1).

Тогда (1.1) можно записать

$$\frac{\Phi^+[\alpha(t)]}{\chi^+[\alpha(t)]} - \frac{\Phi^-(t)}{\chi^-(t)} = \frac{g(t)}{\chi^+[\alpha(t)]}.$$

На основании теоремы 1 получаем:

Теорема 3. *Любое (имеющее конечный порядок на бесконечности) решение неоднородной граничной задачи (4.1) дается формулой:*

$$\Phi(z) = \begin{cases} \chi(z)\frac{1}{2}\pi i \int\limits_L \frac{\theta[\beta(\tau)]\partial\tau}{\tau - z}, & z \in S^+, \\ \chi(z)\frac{1}{2}\pi i \int\limits_L \frac{\theta(\tau)\partial\tau}{\tau - z} + \chi(z)P(z), & z \in S^-, \end{cases}$$

где P(z) *произвольный полином, а* $\theta(\tau)$ *общее решение интегрального уравнения*

$$T\theta = P(t) + \frac{g(t)}{\chi^+[\alpha(t)]}.$$

Ограничиваясь решениями, исчезающими на бесконечности, мы придем к следующему результату:

Теорема 4. —sl При $\chi \geqslant 0$ общее решение неоднородной задачи (1.1), исчезающая на бесконечности, дается формулой

$$\Phi(z) = \begin{cases} \chi(z)\frac{1}{2}\pi i \int\limits_L \frac{\varphi[\beta(\tau)]\partial\tau}{\tau - z}, & z \in S^+, \\ \chi(z)\frac{1}{2}\pi i \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\partial\tau}{\tau - z} + \chi(z)_{\chi-1}P(z)_{\chi-1}, & z \in S^-, \end{cases}$$

где $P_{\chi-1}(z)$ произвольный полином степени не выше $\chi - 1$ ($P_{\chi-1}(z)\equiv 0$, если $\chi = 0$, $\chi(z)$ — каноническая функция, $\varphi(t)$ общее решение интегрального уравнения

$$T\varphi = P_{\chi-1}(t) + \frac{g(t)}{\chi^+[\alpha(t)]}.$$

При $\chi < 0$ решение, исчезающее на бесконечности, дается формулой

$$\Phi(z) = \begin{cases} \chi(z)\frac{1}{2}\pi i \int\limits_L \frac{\varphi[\beta(\tau)]\partial\tau}{\tau - z}, & z \in S^+, \\ \chi(z)\frac{1}{2}\pi i \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\partial\tau}{\tau - z}, & z \in S^-, \end{cases}$$

где $\varphi(t)$ решение уравнения $T\varphi = \frac{g(t)}{\chi^+[\alpha(t)]}$. При этом должны быть соблюдены следующие необходимые и достаточные условия существования решений, исчезающих на бесконечности, а именно,

$$\int_L g_k(\tau)g(\tau)\partial\tau = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \cdots, -\chi),$$

где $g_k(t)$ определенные, линейнонезависимые функции, не зависящие от функции $g(t)$. Отметим, что при $\chi = 0$ всегда существует одно и только исчезающее на бесконечности решение; при $\chi < 0$ исчезающее на бесконечности решение если, оно существует, также единственно; при $\chi > 0$ всегда существует бесчисленное множество таких решений, а именно, общее решение содержит χ произвольных постоянных.

Литература

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.—М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
2. *Векуа Н. П.* Системы сингнулярных уравнений.—М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
3. *Векуа Н. П.* Об одной задаче линейного сопряжения для нескольких неизвестных функций // Труды Тбилисского гос. ун-та.—1955.—Т. 56.
4. *Векуа Н. П.* Об одной задаче теории функций комплексного переменного // Докл. АН СССР.—1952.—Т. LXXXVI, № 3.
5. *Haseman* Anwendung der fheorie der integralgleichungen auf einige raudwert-aufgaben.—Yottingen, 1907.
6. *Квеселава Д. А.* Решение одной граниичной задачи теории функций // Докл. АН СССР.—1946.—Т. LIII, № 8.
7. *Квеселава Д. А.* Некоторые граничные задачи теории функций // Труды Тбилисского мат-го ин-та им. А. М. Размадзе. АН ГССР.—1948.—Т. XVI.
8. *Квеселава Д. А.* Об одной граничной задаче теории функций // Известия АН ГССР.—Т. VII, № 10.
9. *Манджавидзе Г. Ф.* Об одной системе сингнулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами // Сообщения АН ГССР.—1950.—Т. XI, № 6.
10. *Мусхелишвили Н. И.* Сингнулярные интегральные уравнения.—М.: Физматгиз, 1962.
11. *Чибрикова Л. И.* Особые случаи обобщенной задачи Римана // Уч. зап. Казанск. ун-та.—1952.—Т. 112, № 10.
12. *Чочиев Т. З.* Об одной граничной теории функций // Сообщение АН ГССР.—1961.—Т. XXVII, № 3.
13. *Чочиев Т. З.* Об одной граничной для нескольких неизвестных функций. Научная конференция аспирантов и молодых научных сотрудников // Изд-во АН ГССР.—1962.—Т. XIII.
14. *Радон И.* О линейных функциональных преобразованиях и функциональных уравнениях // Успехи мат. наук.—1936.—вып. 1.
15. *Канторович Л. В., Акилов Г. Л.* Функциональный анализ в нормированных пространствах.—М.: Физматгиз, 1959.
16. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы функций комплексного переменного.—м.: Физматгиз, 1965.
17. *Квеселава Д. А.* Об одной граничной задаче теории функций // Сообщения АН ГССР.—1946.—Т. VII.—С. 9–10.