Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 1999, Том 1, Выпуск 4

УДК **539.377**

О ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОДНОЙ ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННОЙ ГРАНИЦЕЙ

Н. Н. Каркусты

В статье рассмаривается изотропная однородная область, на части границы которой задается теплообмен со средой. Задача приводится к сингулярно-интегральным уравнениям типа Винера — Хопфа, решение которых осуществляется методом факторизации.

Пусть задана бесконечная тонкая пластинка конечной ширины b. Обозначим ее верхнюю границу через L, нижнюю через L_1. Часть верхней границы при $x < 0$ обозначим через L_-, а при $x > 0$ — через L_+.

Предположим, что на границе задана непрерывная функция, обращающаяся в нуль на бесконечности, и на ней задана производная от искомой функции. Пусть противоположная граница теплоизолирована и в начальный момент времени искомая функция равна нулю.

Математически эту задачу можно поставить следующим образом: найти решение уравнения теплопроводности Фурье

$$\Delta T = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial T}{\partial t},$$

удовлетворяющее следующим условиям

$$T(x,y,z)\Big|_{t=0} = 0, \quad T(x,y,z)\Big|_{y=b} = f(x,t) = f(x)t = e^x \cdot 1 \quad (x<0),$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=b} = g(x,t) = 1 \quad (x>0), \quad \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0 \quad (-\infty < x < \infty).$$

Применяя стандартное преобразование Фурье к уравнениям теплопроводности, получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, получим

$$\frac{\partial^2 T(\alpha,y,\omega)}{\partial y^2} - \nu^2 T(\alpha,y,\omega) = 0,$$

где $\nu^2 = \alpha^2 + \frac{i\omega}{\kappa}$, $\alpha = \zeta + i\eta$, $\alpha = \sigma + i\tau$ $(\eta > 0,\ \tau > 0)$.

В последнем уравнении $T(\alpha,y,\omega) = T_-(\alpha,y,\omega) + T_+(\alpha,y,\omega)$. Здесь

$$\begin{cases} T_-(\alpha,y,\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{0}^{\infty} T(x,y,t)e^{i\alpha x}e^{i\omega t}\partial x\partial t, \\ T_+(\alpha,y,\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} T(x,y,t)e^{i\alpha x}e^{i\omega t}\partial x\partial t. \end{cases}$$

Будем обозначать

$$\frac{\partial T_-}{\partial y} := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^0 \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} e^{i\alpha x}e^{i\omega t}\partial x\partial t, \quad \frac{\partial T_+}{\partial y} := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} e^{i\alpha x}e^{i\omega t}\partial x\partial t.$$

Запишем уравнения в виде

$$T_-(\alpha,y,\omega) + T_+(\alpha,y,\omega) = A(\nu)e^{-\nu y} + B(\nu)e^{\nu y}, \tag{1}$$

где A и B — произвольные функции, зависящие от ν.

Используем преобразование Лапласа или Фурье для граничных условий

$$f(x,t) = e^x \cdot 1, \quad g(x,t) = 1.$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} f(\alpha,\omega) &= \int\limits_{-\infty}^0\int\limits_0^\infty e^x e^{i\alpha x}e^{i\omega t}\partial x\partial t = -\frac{1}{i\omega(1+i\alpha)}, \\ g(\alpha,\omega) &= \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty 1\cdot e^{i\alpha x}e^{i\omega t}\partial x\partial t = \frac{1}{-\omega\alpha}. \end{aligned} \tag{2}$$

Подставляя (2) в решение (1), получим

$$-\frac{1}{i\omega(1+i\alpha)} + T_+(\nu,b) = Ae^{-\nu y} + Be^{\nu y}T'_-(\nu,b) - \frac{1}{\omega\alpha} = \nu A(\nu)e^{-\nu y} + \nu B(\nu)e^{\nu y}. \tag{3}$$

Учитывая, что пластинка теплоизолирована, можно записать

$$0 = T'_-(\nu,0) + T'_+(\nu,0) = -\nu A + \nu B,$$

откуда $A = B$. Следовательно, из формулы (3)

$$-\frac{1}{i\omega(1+i\alpha)} + T_+(\nu,b) = A\cdot(e^{\nu b} + e^{-\nu b})T_-(\nu,b) - \frac{1}{\omega\alpha} = \nu A\cdot(e^{\nu b} - e^{-\nu b}). \tag{4}$$

Далее, посредством некоторых простых преобразований, получим функциональное уравнение типа Винера — Хопфа

$$\frac{-\frac{1}{i\omega(1+i\alpha)} + T_+(\nu,b)}{e^{-\nu b} + e^{-\nu b}} = \frac{T'_-(\nu,b) - \frac{1}{\omega\alpha}}{\nu(e^{\nu b} - e^{-\nu b})}. \tag{5}$$

В этом функциональном уравнении искомыми функциями являются $T_+(\nu,b)$ и $T_-(\nu,b)$.

Функция $T_+(\nu,b)$ регулярна и не имеет нулей в правой полуплоскости, а функция $T'_-(\nu,b)$ регулярна и не имеет нулей в левой полуплоскости.

Перепишем уравнение (5) в более удобном виде, который характерен для уравнений типа Винера — Хопфа:

$$AT_+ + BT'_- + C = 0 \tag{6^1}$$

или

$$T_+(\nu,b) - T'_-(\nu,b)\frac{\operatorname{cth}(\ \nu b)}{\nu} - \left[\frac{1}{i\omega-\alpha\omega} - \frac{1}{\omega\alpha}\frac{\operatorname{cth}(\ \nu b)}{\nu}\right] = 0, \tag{6}$$

здесь $A = 1$, $B = \operatorname{cth}(\ \nu b)/\nu$, $C = 1/(i\omega - \alpha\omega) - 1/(\omega\alpha)\operatorname{cth}(\ \nu b)/\nu$.

В уравнении (6^1) C регулярна в заданной полосе. Как известно, основная трудность при решении функционального уравнения типа Винера — Хопфа заключается в факторизации функции и в разбиении регулярной функции на две — соответственно для левой и правой полуполос.

Обозначим $K(\nu) = K_+(\nu,b)K_-(\nu,b) = \dfrac{e^{\nu b}+e^{-\nu b}}{\nu(e^{\nu b}-e^{-\nu b})}$. Разложим $\dfrac{e^{\nu b}+e^{-\nu b}}{\nu(e^{\nu b}-e^{-\nu b})}$ с помощью гамма-функции

$$b\nu\operatorname{cth}(\ \nu b) = \frac{1}{\pi}\frac{\Gamma(1-\frac{i\nu b}{\pi})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{i\nu b}{\pi})}\frac{\Gamma(1+\frac{i\nu b}{\pi})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{i\nu b}{\pi})},$$

откуда мы можем записать

$$K_+(\nu,b) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(1-\frac{i\nu b}{\pi})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{i\nu b}{\pi})}K_-(\nu,b) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(1+\frac{i\nu b}{\pi})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{i\nu b}{\pi})}.$$

Учитывая формулы, функциональное уравнение (6), можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{i\nu b}{\pi})}{\Gamma(1-\frac{i\nu b}{\pi})}T_+(\nu,b) - \frac{b}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(1+\frac{i\nu b}{\pi})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{i\nu b}{\pi})}T'_-(\nu,b) =& \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{i\omega(1+i\alpha)}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{i\nu b}{\pi})}{\Gamma(1-\frac{i\nu b}{\pi})} + \frac{b}{\sqrt{\pi}\omega\alpha}\frac{\Gamma(1+\frac{i\nu b}{\pi})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{i\nu b}{\pi})}&.\end{aligned} \tag{7}$$

Функциональное уравнение (7) перепишем таким образом, чтобы неизвестные функции были регулярными соответственно в левой и правой полуполосах

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{i\nu b}{\pi})}{\Gamma(1-\frac{i\nu b}{\pi})}T_+(\nu,b) - \frac{b}{\sqrt{\pi}\omega\alpha}\frac{\Gamma(1+\frac{i\nu b}{\pi})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{i\nu b}{\pi})} =& \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{i\omega(1+i\alpha)}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{i\nu b}{\pi})}{\Gamma(1-\frac{i\nu b}{\pi})} - \frac{b}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(1+\frac{i\nu b}{\pi})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{i\nu b}{\pi})}T'_-(\nu,b) = J(\nu,b)&.\end{aligned} \tag{8}$$

Левая часть уравнения (8) регулярна в левой полуполосе, а правая часть регулярна в правой полуполосе, выражение $J(\nu,b)$ регулярно во всей полосе. По теореме Лиувилля, если функция аналитична (регулярна и гомоморфна) во все плоскости и ограниченна, то она постоянна

$$T_+ = \frac{1}{\omega\alpha}\operatorname{cth}\frac{\nu b}{\nu}\ ,\quad T_- = \frac{\nu\operatorname{cth}\nu b}{i\omega(1+i\alpha)}. \tag{9}$$

Таким образом, неизвестные функции T_+ и T'_- определяются по формулам (9).

Непосредственной проверкой можно показать, что T_+ и T'_- удовлетворяют условиям (4):

$$\left[-\frac{1}{i\omega(1+i\alpha)}+\frac{1}{\omega\alpha}\ \mathrm{cth}\frac{\nu b}{\nu}\ \right]=2A\ \mathrm{ch}\nu b\ ,\quad \left[\frac{\nu\ \mathrm{cth}\nu b}{i\omega(1+i\alpha)}-\frac{1}{\omega\alpha}\right]=2A\nu\ \mathrm{sh}\nu b\ . \qquad (10)$$

Выражения (10) являются тождествами. Поэтому для определения функции A можно использовать одно из них:

$$A=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{i\omega(1+i\alpha)\ \mathrm{ch}\nu b}-\frac{1}{\nu\omega\alpha\ \mathrm{sh}\nu b}\right].$$

Подставляя найденное значение A в решение и учитывая, что $A=B$, получим решение поставленной задачи в преобразованном виде:

$$T(\alpha,y,\omega)=T_-(\alpha,y,\omega)+T_+(\alpha,y,\omega)=\left[\frac{1}{i\omega(1+i\alpha)\ \mathrm{ch}\nu b}-\frac{1}{\nu\omega\ \mathrm{sh}\nu b}\right]\mathrm{ch}\nu y\ .$$

Далее запишем обратное преобразование Фурье:

$$T(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{ch}\nu y\ e^{-i\alpha x}e^{-i\omega t}}{i\omega(1+i\alpha)\ \mathrm{ch}\nu b}\partial\alpha\partial\omega-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{ch}\nu y\ e^{-i\alpha x}e^{-i\omega t}}{\nu\omega\alpha\ \mathrm{sh}\nu b}\partial\alpha\partial\omega,$$

что дает решение поставленной задачи.

Литература

1. *Нобл Б.* Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных.—М.: ИЛ, 1962.—279 с.
2. *Мусхелишвили Н. Н.* Сингнулярные интегральные уравнения.—М.: Наука, 1968.—511 с.
3. *Каркузашвили Н. Н.* Задача о неустановившемся температурном поле в неограниченной пластинке со смещенными граничными условиями // Некоторые вопросы прикладной математики.—Киев: Наукова Думка, 1971.—Вып. 1.—С. 52–57.
4. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости.—Киев: Наукова Думка, 1970.—307 с.