Владикавказский математический журнал
Июль–сентябрь, 1999, Том 1, Выпуск 3

Юрию Григорьевичу Решетняку
к его семидесятилетию

УДК **539.377**

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ, ВЫЗВАННОГО КОЭФФИЦИЕНТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Т. З Чочиев

В настоящей работе, по заданному линейному температурному полю, строится нелинейное температурное поле. Во втором пункте снимается указанное ограничение и рассматривается более общий случай, когда нелинейное поле зависит только от начального температурного удара.

1. Имеется однородное упругое полупространство, ограниченное поверхностью $x = 0$. В момент времени $t = 0$ со стороны среды поверхность подвергается внезапному температурному воздействию, температура которого повышается от τ_0 до θ, а после происходит конвективный теплообмен между поверхностью полупространства и средой. Температурные возмущения допускаются настолько существенными, что коэффициент теплопроводности k становиться от искомой температуры $\tau : k = k(\tau)$. Коэффициент объемной теплоемкости $c_k = c\rho$ будем пока, полагать зависящим от x и t. Нестационарное температурное поле, в соответствии с указанным температурным возмущением, описывается следующим уравнением [1, 2]:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right), \quad 0 \leqslant t < \infty,\ 0 \leqslant x < \infty, \tag{1.1}$$

при условии, что

$$T|_{t=0} = T_0 = \text{const}, \qquad \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\alpha}{k}(T - \theta) = 0 \quad \text{при } x = 0, \tag{1.2}$$

где $\alpha(t)$ коэффициент теплоотдачи на поверхности полупространства, T_0 начальная температура, θ — температура, которую получает поверхность полупространства в результате теплового удара со стороны среды, c — теплоемкость, ρ — плотность. Если воспользоваться обозначением Кирхгофа

$$F = \frac{1}{k_0}\int\limits_{T_0}^{T} k(T)dT, \tag{1.3}$$

где k_0 — заданный коэффициент теплопроводности при небольших температурных возмущениях, то уравнение (1.1) примет вид

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{c\rho}{k}\frac{\partial F}{\partial t}. \tag{1.4}$$

Наряду с (1.4) рассмотрим линейное температурное поле

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{c\rho}{k_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_0}{c\rho}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{c\rho}{k_0}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \tag{1.5}$$

удовлетворяющее следующим начальному и краевому условиям:

$$\varphi(x,0)=T_0=\mathrm{const},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\alpha}{k_0}(\varphi-\theta)=0\ \text{ при } x=0. \tag{1.6}$$

Решение уравнения (1.5), с указанными условиями (1.6), изучено в работе [3]. Нашей целью является по заданному линейному полю (1.5) построить нелинейное температурное поле (1.4).

Введем неизвестную функцию λ такую, что

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial T^*}{\partial x},\quad \frac{1}{\lambda}\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial T^*}{\partial t}, \tag{1.7}$$

где $T^*(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial T^*}{\partial x}=P\frac{\partial T^*}{\partial t}$$

и связана с температурной функцией $\varphi(x,t)$ посредством $P(x,t)$:

$$P(\alpha,t)=\frac{\varphi}{\frac{k_0}{c\rho}}\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \tag{1.7$_1$}$$

Из (1.7) замечаем, что

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P\frac{\partial F}{\partial t}. \tag{1.8}$$

Нас интересует выполнимость уравнения (1.4), а (1.8) должно выполняться автоматически. Уравнение (1.4) можно переписать так

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right]=\frac{c\rho}{k}\frac{\partial F}{\partial t}.$$

Вместо выражения в круглых скобках подставим его значение из (1.7), а вместо λ значение из второго равенства

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\Big/\frac{\partial T}{\partial t}\right)\right]=\frac{c\rho}{k}\frac{\partial F}{\partial t}$$

или, выполнив соответствующую операцию, окончательно запишем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\frac{\partial F}{\partial t}\right)=\frac{\frac{c\rho}{k}-\frac{\partial P}{\partial x}}{P}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= P\exp\left(\int\limits_0^x \left(\frac{c\rho}{k} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\frac{1}{P}dx\right) = P_0\exp\left(\int\limits_0^x \frac{c\rho}{Pk}dx\right), \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \exp\left(\int\limits_0^x \left(\frac{c\rho}{k} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\frac{1}{P}dx\right) = \frac{P_0}{P}\exp\left(\int\limits_0^x \frac{c\rho}{Pk}dx\right) \quad (P(0,t) = P_0(t)).\end{aligned} \quad (1.9)$$

Эти два значения и обращают (1.4) а, следовательно, и (1.8) в тождества. Но поскольку $F(x,t)$ температурная функция однородного упругого полупространства, в котором температура меняется по закону изменения градиента, то помимо этого справедливо

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{P_0}{P}\exp\left(\int\limits_0^x \frac{c\rho}{Pk}dx\right)\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[P_0\exp\left(\int\limits_0^x \frac{c\rho}{Pk}dx\right)\right]. \quad (1.9)_0$$

Последнее уравнение перепишется в виде

$$\frac{\partial V}{\partial x} - P\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial x}V, \quad (1.9)_1$$

если допустить, что

$$P_0\exp\left(\int\limits_0^x \frac{c\rho}{Pk}dx\right) = V. \quad (1.10)$$

Из (1.9) выражаем V:

$$V = \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{P}\right)d\sigma\right)\cdot\psi(\tau) \qquad \begin{pmatrix} d\sigma = Pdx - dt, \\ d\tau = Pdx + dt \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Теперь, когда мы нашли V из (1.10) для $k(T)$ можем записать

$$k(T) = \frac{\varphi(x,t)}{c\rho}\frac{V}{\frac{\partial V}{\partial x}}.$$

С другой стороны, в силу (1.10) уравнение (1.9) перепишем так

$$\frac{k(T)}{k_0}\frac{\partial T}{\partial x} = V, \qquad \frac{k(T)}{k_0}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{P}V.$$

Так как правые части удовлетворяют условию теории Шварца, то

$$F = \frac{1}{k_0}\int\limits_0^T k(T)dT = \int\limits_{M_0}^M Vdx + \frac{1}{P}Vdt, \quad (1.12)$$

где M_0 — некоторая фиксированная точка на поверхности $x = 0$, а $M(x, y)$ произвольная точка полупространства. Эта функция и является решением (1.4).

Мы не располагаем явной зависимостью $k(T)$ от температуры T, поэтому удовлетворить условиям (1.2) практически невозможно. Рассмотрим пример. Пусть $k(T) = \frac{3}{2}T^{\frac{1}{2}}$. Обозначение Кирхгофа дает

$$F(T) = \frac{1}{k_0}(T^{\frac{3}{2}} - T_0^{\frac{3}{2}}) \Rightarrow F|_{t=0} = 0,$$

следовательно, $T = (k_0F + T_0^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}$ и второе условие (1.2) запишется так

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\alpha}{k_0}\left[\left(k_0F + T_0^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} - \theta\right] \quad \text{при } x = 0$$

или

$$V - \frac{\alpha}{k_0}\left[\left(k_0\int V\,dt + T_0^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} - \theta\right] = 0 \quad \text{при } x = 0. \tag{1.13}$$

В (1.13) вводим обозначение

$$\left(k_0\int V\,dt + T_0^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = w(t) + \theta \Rightarrow \int V\,dt = \frac{(w(t) + \theta)^{\frac{3}{2}} - T^{\frac{2}{3}}}{k_0} \Rightarrow v = \frac{3(w(t) - \theta)^{\frac{1}{2}}}{2k_0}\frac{dw}{dt}, \tag{1.13$_1$}$$

получаем

$$\frac{\sqrt{w(t) + \theta}}{w}dw = \frac{2}{3}\alpha(t)dt$$

или, переходя к новой переменной

$$w(t) + \theta = z^2; \quad dw = 2zdz, \quad \frac{z^2dz}{z^2 - \theta} = \frac{1}{3}\alpha\,dt,$$

построим общий интеграл

$$z + \frac{\sqrt{\theta}}{2}\ln\left|\frac{z - \theta}{z + \theta}\right| = \frac{1}{3}\int_0^t \alpha(t)dt + C,$$

который после возврата к исходной переменной принимает вид

$$\sqrt{w(t) + \theta} + \frac{\sqrt{\theta}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{w(t) + \theta} - \sqrt{\theta}}{\sqrt{w(t) + \theta} + \sqrt{\theta}}\right| = \frac{1}{3}\int_0^t \alpha(t)dt + C. \tag{1.14}$$

Если $t = 0$, то $F(0, 0) = 0$ и тогда $V(0, 0) = 0$. Поэтому из обозначения $(1.13)_1$, следует $(w(0) + \theta)^{\frac{3}{2}} = T_0^{2/3}$ и для постоянной C запишем

$$C = T_0^{\frac{2}{9}} + \frac{\sqrt{\theta}}{2}\ln\frac{T_0^{\frac{2}{9}} - \sqrt{\theta}}{T_0^{\frac{2}{9}} + \sqrt{\theta}}.$$

Этим установлена выполнимость краевого условия (1.13) равносильного второму условию (1.2), ибо

$$T = (k_0F(x, t) + T_0^{3/2})^{\frac{2}{3}}, \quad F(x, t) = \int V\,dx + \frac{V}{P}\,dt.$$

Что и требовалось.

2. Полагая, что функция P зависит от линейного температурного поля, мы ограничиваем решение уравнения (1.4). Спрашивается, какова роль функции $P(x,t)$ при наличии нелинейного температурного поля.

Будем считать функцию $T^*(x,t)$ неизвестной, а $P(x,t) = \frac{\partial T^*}{\partial x} / \frac{\partial T^*}{\partial t}$, считаем, что зависимость между частными производными функции $F(x,t)$ имеет, как и ранее, вид (1.7), таким образом, имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P\frac{\partial F}{\partial t}. \tag{2.1}$$

Последнее соотношение выполняется, если из (1.8), построить $\frac{\partial F}{\partial t}$ (см.(1.9))

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P_0\mathrm{exp}\left(\int_0^x \frac{c\rho}{Pk}dx\right), \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{P_0}{P}\mathrm{exp}\left(\int_0^x \frac{c\rho}{Pk}dx\right) \quad (P_0 = P(0,t)). \tag{2.2}$$

Также как и в п. 1 обозначим

$$P_0\mathrm{exp}\left(\int_0^x \frac{c\rho}{Pk}dx\right) =: V \tag{2.3}$$

и примем выполнимость теории Шварца относительно V, т. е.

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{P}V\right).$$

Получаем равенство

$$\frac{\partial V}{\partial x} - P\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial x}V,$$

из которого

$$V = \mathrm{exp}\left(-\frac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{\partial \frac{1}{P}}{\partial x}d\sigma\right)\cdot\psi(\tau), \quad d\sigma = Pdx - dt,\ d\tau = Pdx + dt. \tag{2.4}$$

Приравнивая (2.3) и (2.4)

$$P_0\mathrm{exp}\left(\int_0^x \frac{c\rho}{Pk}dx\right) = \mathrm{exp}\left(-\frac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{\partial \frac{1}{P}}{\partial x}dx\right),$$

после логарифмирования обеих частей и дифференцирования по x и по σ придем к уравнению:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \frac{1}{P}}{\partial x^2} + \frac{1}{P}\frac{\partial \frac{c\rho}{k}}{\partial\sigma} + \frac{c\rho}{k}\frac{\partial \frac{1}{P}}{\partial\sigma} = 0, \tag{2.5}$$

напоминающему (1.5). Если $k(T)$ считать заданной, то $\frac{1}{P}$ можно исключить (см. [3]). Но окончательная зависимость от $T(x,t)$ будет чересчур сложной. В связи с этим поступаем иначе: из (2.5) исключаем $\frac{1}{k}$

$$\frac{1}{k} = -\frac{P}{2c\rho}\int_0^\sigma \frac{\partial^2 \frac{1}{P}}{\partial x^2}d\sigma \tag{2.5$_1$}$$

и допускаем, что $c\rho$ — постоянная. Это позволит нам выразить $\frac{\partial T}{\partial x}$ и $\frac{\partial T}{\partial t}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{P_0 P}{c\rho}\frac{k_0 \partial}{\partial x}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^x\left(\int\frac{\partial^2\frac{1}{P}}{\partial x^2}d\sigma\right)dx\right), \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{P_0 k_0}{c\rho}\frac{\partial}{\partial x}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^x\left(\int\frac{\partial^2\frac{1}{P}}{\partial x^2}d\sigma\right)dx\right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Отсюда, для потенциальности поля, правые части должны удовлетворять равенству

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V_0}{\sqrt{P}}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{P}\cdot V_0), \tag{2.7}$$

где

$$V_0 = \frac{\partial}{\partial x}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^x\left(\int\frac{\partial^2\frac{1}{P}}{\partial x^2}d\sigma\right)dx\right).$$

С целью упрощения (2.7) допускаем, что характеристика $T = const$, тогда $\psi(T) = const$ и (2.7) можно привести к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{PP_0}\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{P_0}{P}}\frac{\partial P}{\partial x}\right). \tag{2.8}$$

Частное решение последнего будем искать в форме $P = m(x)\cdot Q(t)$, причем, полагая $P_0(t) = P(0,t) \subset Q(t)$, можем записать

$$\frac{1}{Q(t)}\frac{dQ^2(t)}{dt} = 4\frac{d^2\sqrt{m}}{dx^2}\bigg/\frac{dm^2}{dx} = \gamma,$$

где γ — некоторая постоянная. Отсюда устанавливаем, что

$$Q(t) = \frac{\gamma}{2}t; \quad m = \left(\frac{5\gamma}{8}x + C_0\right)^{\frac{2}{5}}$$

и, следовательно,

$$P = \left(\frac{5\gamma}{8}x + C_0\right)^{\frac{2}{5}}\cdot\frac{\gamma}{2}t.$$

Если C_0 считать равной γ, то γ можно определить из задания потока тепла $\frac{\partial T}{\partial x}$ на поверхности $x = 0$ и тогда $P(x,t)$ будет вполне определенной функцией. Зная $P(x,t)$ найдем $T^*(x,t)$ и, следовательно, построим $F(x,t)$. Окончательно определим искомую функцию $T(x,t)$.