Владикавказский математический журнал
Июль–сентябрь, 1999, Том 1, Выпуск 3

Юрию Григорьевичу Решетняку
к его семидесятилетию

УДК **532 (075.8)**

УПРОЩЕННАЯ МАТЕМАТИКО-КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ РЕГИОНАЛЬНОГО ПАВОДКОВОГО ПОТОКА

И. Д. Музаев, Ж. Д. Туаева

Региональные паводковые потоки математически моделируются с помощью контактных начально-краевых задач для системы дифференциальных уравнений неустановившегося движения воды в системе русел рек

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q_j^2}{\omega_j}\right)=g\omega_j\left(i_j-\frac{\partial H_j}{\partial x_j}-\frac{Q_j|Q_j|}{K_j^2}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial t}+\frac{\partial Q_j}{\partial x}=q_j(x_j,t), \tag{2}$$

где t — время, Q_j — расход воды в j-ом русле, x_j — продольная координата в j-ом русле, ω_j — площадь живого сечения потока, g — ускорение силы тяжести, H_j — глубина потока, i_j — уклон j-ого русла, K_j — модуль расхода, $q_j(x_j,t)$ — интенсивность боковой приточности, обусловленная снеготаянием и дождевыми осадками.

Начальные и внешние граничные условия ставятся следующим образом

$$Q_j=Q_{j,0}(x_j) \text{ и } H_j=H_{j,0}(x_j) \quad \text{при } t=0, \tag{3}$$
$$Q_1=Q_0(t) \text{ и } H_1=H_0(t) \quad \text{при } x=0, \tag{4}$$
$$Q_L=Q_L(H_L) \quad \text{при } x=L,$$

где $Q_{j,0}(x)$, $H_{j,0}(x)$, $Q_0(t)$, $Q_L(H_L)$ — заданные функции, L — суммарный километраж русел рек;

$$Q_{j-2}+Q_{j-1}=Q_j, \quad Z_{j-2}+Z_{j-1}=Z_j, \quad Q_j=Q_{j+1}+Q_{j+2} \ \text{ при } x=L_j, \tag{5}$$

где Z_j — отметка уровней в соответствующих руслах в местах слияния либо разветвления.

Система (1)–(2) представляет собой дифференциальные уравнения гиперболического типа. В связи с этим при выполнении численных расчетов возникают многочисленные трудности вычислительного характера. С другой стороны, для паводковых потоков можно пренебречь инерционными членами в связи с их малым вкладом, который они вносят в гидравлический процесс наводнения. При таком упрощающем предположении из полной системы можно получить следующее дифференциальное уравнение параболического типа

$$\frac{\partial Q_j}{\partial t} + \frac{Q_j}{K_j B_j}\frac{dK_j}{dH_j}\frac{\partial Q_j}{\partial x_j} - \frac{K_j^2}{2|Q_j|B_j}\frac{\partial^2 Q_j}{\partial x_j^2} - \frac{Q_j}{K_j B_j}\frac{dK_j}{dH_j}q_j = 0. \tag{6}$$

Дифференциальное уравнение (6) для каждого русла с соответствующими начальными и граничными условиями (3)–(5) представляют собой упрощенную математическую модель паводкового потока. Эта модель позволяет сравнительно легко провести численные расчеты всего региона по какой-либо конечно-разностной схеме. В отличие от строгой модели (1)–(5) в данной модели не возникает никаких трудностей вычислительного характера. Для дальнейших рассуждений рассмотрим систему из трех русел ($j = 1, 2, 3$). При этом предполагается, что третье русло образуется при слиянии первых двух.

Используя ранее полученные результаты [1], а именно, численного решения уравнения (6) в случае одного русла, становится ясным необходимость решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} Q_{1,N_1}^{k+1} + Q_{2,N_2}^{k+1} = Q_{3,N_3}^{k+1}, \\ \frac{1}{B_1}\frac{Q_{1,N_1}^{k+1} - Q_{1,N_1-1}^{k+1}}{dx} = \frac{1}{B_2}\frac{Q_{2,N_2}^{k+1} - Q_{2,N_2-1}^{k+1}}{dx}, \\ \frac{1}{B_1}\frac{Q_{1,N_1}^{k+1} - Q_{1,N_1-1}^{k+1}}{dx} = -\frac{1}{B_3}\frac{Q_{3,N_3}^{k+1} - Q_{3,N_3-1}^{k+1}}{dx}, \\ Q_{1,N_1-1}^{k+1} = A_{N_1} Q_{1,N_1}^{k+1} + B_{N_1}, \\ Q_{2,N_2-1}^{k+1} = A_{N_2} Q_{1,N_2}^{k+1} + B_{N_2}, \\ Q_{3,N_3-1}^{k+1} = A_{N_3} Q_{1,N_3}^{k+1} + B_{N_3}, \end{cases}$$

где $k = 1, 2, \ldots, K$. Неизвестными здесь являются значения расходов трех русел в точке слияния, т. е. Q_{1,N_1}^{k+1} — значение расхода для первого русла в $k+1$ момент времени, Q_{2,N_2}^{k+1} — значение расхода для второго русла в $k+1$ момент времени, Q_{3,N_3}^{k+3} — аналогичное значение расхода для третьего русла.

После нахождения искомых значений расходов становится возможным решение (6) отдельно для каждого русла с помощью метода прогонки [1].

Литература

1. *Музаев И. Д., Туаева Ж. Д.* Два метода решения начально-краевой задачи для системы уравнений Сен-Венана // Осетинский мат. журн.—1999.—Т. 1, № 1.
2. *Кюнж Ж. А., Холли Ф. М., Вервей А. В.* Численные методы в задачах речной гидравлики.—М.: Энергоиздат, 1985.