Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 1999, Том 1, Выпуск 2

УДК **517.54**

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Х. Х. Меликов

1. Введение

Пусть Σ — класс функций вида

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, \quad k \in N = \{1, 2, \dots\}, \tag{1.1}$$

которые регулярны в области $E_0 = E \setminus \{0\} = \{z : 0 < |z| < 1\}$ с простым полюсом в точке $z = 0$ и вычетом равным 1.

Пусть Σ_s подкласс Σ, состоящий из однолистных функций в E_0. Функция $f(z) \in \Sigma_s$ называется *мероморфно-звездообразной*, если $\Re\left\{-\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$. Через Σ^* обозначим класс всех мероморфно-звездо- образных функций.

Функция $f(z) \in \Sigma_s$ называется *мероморфно-звездообразной порядка* α, если

$$\Re\left\{-\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha$$

для всех $z \in E_0$ и для некоторого α $(0 \leqslant \alpha < 1)$. Класс мероморфно-звездообразных функций порядка α обозначим через $\Sigma^*(\alpha)$.

Через $\Sigma^*(-\beta, \alpha\beta)$, $0 \leqslant \alpha < 1$, $0 < \beta \leqslant 1$, обозначим класс функций вида (1.1), удовлетворяющих условию

$$\left|\frac{zf'(z)/f(z) + 1}{\alpha zf'(z)/f(z) - 1}\right| < \beta \quad (z \in E_0).$$

Через $\Sigma^*(2\alpha\beta - 1, 2\beta - 1)$ обозначим класс мероморфно-звездообразных функций порядка α и типа β, которые удовлетворяют условию

$$\left|\frac{zf'(z)/f(z) + 1}{2\beta(zf'(z)/f(z) + \alpha) - (zf'(z)/f(z) + 1)}\right| < 1$$

для всех $z \in E_0$ и для некоторых α и β $(0 \leqslant \alpha < 1, 0 < \beta \leqslant 1)$.

Заметим, что $\Sigma^*(-1, 0)$ — класс функций $f(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^k$, которые удовлетворяют условию

$$|zf'(z)/f(z) + 1| < 1.$$

Введем класс $\Sigma^*(A,B)$ следующим образом:

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = -\frac{1+Aw(z)}{1+Bw(z)}, \tag{1.2}$$

где $-1 \leqslant A < B \leqslant 1$, $w(z)$ — функция, регулярная в E и удовлетворяющая условиям: $w(0)=0$, $|w(z)|<1$, если $|z|<1$.

Заметим, что $\Sigma^*(-1,1) \equiv \Sigma^*$, $\Sigma^*(2\alpha-1,1) \equiv \Sigma^*(\alpha)$.

Класс $\Sigma^*(\alpha)$ рассматривали Pommerenke [11], Clunie [3], Miller [9] и другие. Класс $\Sigma^*(2\alpha\beta-1, 2\beta-1)$ был введен Aouf M. K. [1], Mogra, Reddy и Juneja [10]. Интегральными преобразованиями класса $\Sigma^*(\alpha)$ занимались Л.В.Зарудняк [6] и Goel и Sohi [5].

Пусть $f(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ и $g(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ принадлежат классу Σ. Тогда произведение Адамара функций f и g определяется равенством

$$(f*g)(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n, \quad z \in E_0.$$

Пусть

$$D^n f(z) = \frac{1}{z(1-r)^{n+1}} * f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+z)\dots(n+1+k)}{(k+1)\,!} a_k z^k. \tag{1.3}$$

Далее, пусть $M_n(A,B)$ — класс функций вида (1.1), которые удовлетворяют условию

$$\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)} - 2 = -\frac{n+1+(nB+A)w(z)}{(n+1)(1+Bw(z))} \quad (z \in E_0), \tag{1.4}$$

где $n \in N_0 = \{0,1,2,\dots\}$, $-1 \leqslant A < B \leqslant 1$, $w(z)$ — функция такая, как в (1.2).

В работе будут рассмотрены основные свойства класса $M_n(A,B)$: критерий принадлежности функции $f(z)$ к классу $P_n(A,B)$, оценки коэффициентов, интегральные операторы и ряд других вопросов.

2. Класс $M_n(A,B)$

Теорема 2.1. *Пусть $f(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ принадлежит классу $P_n(A,B)$. Тогда круг $|w(z)| \leqslant r < 1$ отображается функцией $F = D^{n+1}f(z)/D^n f(z) - 2$ в круг*

$$|F-a| \leqslant d, \tag{2.1}$$

где

$$a = -\frac{1-Bcr^2}{1-B^2r^2}, \quad d = \frac{(B-c)r}{1-B^2r^2}, \quad c = \frac{nB+A}{n+1}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Из определения класса $M_n(A,B)$ имеем

$$F = -\frac{n+1+(nB+A)w(z)}{(n+1)(1+Bw(z))} = -\frac{1+cw(z)}{1+Bw(z)}. \tag{2.3}$$

Из (2.3) получаем

$$w(z) = -\frac{F+1}{c+BF} \to |F+1|^2 \leqslant r^2|c+BF|^2$$

или

$$\left|F + \frac{1-Bcr^2}{1-B^2r^2}\right|^2 \leqslant \frac{(B-c)^2r^2}{(1-B^2r^2)^2}. \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует (2.1).

Теорема 2.2. *Пусть* $f(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ *принадлежит* $M_n(A,B)$*. Тогда для* $|z| \leqslant r < 1$ *верны оценки*

$$-\frac{n+1-(nB+A)r}{(n+1)(1-Br)}\Re\left\{\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)} - 2\right\} \leqslant -\frac{n+1+(nB+A)r}{(n+1)(1+Br)}.$$

Результат следует непосредственно из теоремы 2.1.

Следствие 2.1. *Пусть* $f(z) \in M_0(A,B) \equiv \Sigma^*(A,B)$*. Тогда*

$$-\frac{1-Ar}{1-Br} \leqslant \Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} \leqslant -\frac{1+Ar}{1+Br}. \tag{2.5}$$

Теорема 2.3 [1]. *Пусть* $f(z) \in \Sigma^*(A,B)$*. Тогда на* $|z| = r < 1$ *имеем*

$$\frac{(1-Br)^{(B-A)/B}}{r} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{(1+Br)^{(B-A)/B}}{r}, \tag{2.6}$$

если $B \neq 0$,

$$\frac{1}{r}\exp Ar \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{1}{r}\exp(-Ar), \tag{2.7}$$

если $B = 0$.

Результат теоремы 2.3 следует из (2.5), если сначала вычесть из частей неравенств по 1, а затем разделить на z и проинтегрировать по z от 0 до r. Функция $f(z)$, определенная равенством

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = -\frac{1+Az}{1+Bz}, \quad z \in E.$$

показывает, что оценки (2.5)–(2.7) точные.

Давая частные значения A и B, класс $M_n(A,B)$ будет сводиться к известным подклассам звездообразных мероморфных функций: $M_n = M_n(-1,1)$, $M_n(\alpha) = M_n(2\alpha-1,1)$, $M_n[\alpha] = M_n(-\alpha,\alpha)$, $M_n(-\beta,\alpha\beta)$, $M_n(2\alpha\beta-1,2\beta-1)$.

Следствие 2.2. *Пусть* $f(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ *принадлежит* M_n*. Тогда*

$$-\frac{n+1-(n-1)r}{(n+1)(1-r)} \leqslant \Re\left\{\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)} - 2\right\} \leqslant -\frac{n+1+(n-1)r}{(n+1)(1+r)}.$$

При $n = 0$ имеем

$$-\frac{1+r}{1-r} \leqslant \Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} \leqslant -\frac{1-r}{1+r}, \frac{(1-r)^2}{r} \leqslant \Re\{f(z)\} \leqslant \frac{(1+r)^2}{r}.$$

Следствие 2.3. *Пусть* $f(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ *принадлежит* $M_n(\alpha)$. *Тогда*

$$-\frac{n+1-(n-1+2\alpha)r}{(n+1)(1-r)} \leqslant \Re\left\{\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)} - 2\right\} \leqslant -\frac{n+1+(n-1+2\alpha)r}{(n+1)(1+r)},$$

$$-\frac{1-(2\alpha-1)r}{1-r} \leqslant \Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} \leqslant -\frac{1+(2\alpha-1)r}{1+r},$$
$$\frac{(1-r)^{2(1-\alpha)}}{r} \leqslant \Re\{f(z)\} \leqslant \frac{(1+r)^{2(1-\alpha)}}{r}.$$

Следствие 2.4. *Пусть функция* $f(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ *принадлежит* $M_n[\alpha]$. *Тогда*

$$-\frac{n+1-\alpha(n-1)r}{(n+1)(1-\alpha r)} \leqslant \Re\left\{\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)} - 2\right\} \leqslant -\frac{n+1+\alpha(n-1)r}{(n+1)(1+\alpha r)},$$
$$-\frac{1+\alpha r}{1-\alpha r} \leqslant \Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} \leqslant -\frac{1-\alpha r}{1+\alpha r},$$
$$\frac{(1-\alpha r)^2}{r} \leqslant \Re\{f(z)\} \leqslant \frac{(1+\alpha r)^2}{r}.$$

Следствие 2.5. *Пусть* $f(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^k \in M_n(-\beta, \alpha\beta)$. *Тогда*

$$-\frac{n+1-\beta(n\alpha-1)r}{(n+1)(1-\alpha\beta r)} \leqslant \Re\left\{\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)} - 2\right\} \leqslant -\frac{n+1+\beta(n\alpha-1)r}{(n+1)(1+\alpha\beta r)},$$
$$-\frac{1+\beta r}{1-\alpha\beta r} \leqslant \Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} \leqslant -\frac{1-\beta r}{1+\alpha\beta r},$$
$$\frac{(1-\alpha\beta r)^{(1+\alpha)/\alpha}}{r} \leqslant \Re\{f(z)\} \leqslant \frac{(1+\alpha\beta r)^{(1+\alpha)/\alpha)}}{r}.$$

Следствие 2.6. *Пусть* $f(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^k \in M_n(2\alpha\beta-1, 2\beta-1)$. *Тогда*

$$-\frac{n+1-[n(2\beta-1)+2\alpha\beta-1]r}{(n+1)[1-(2\beta-1)r]} \leqslant \Re\left\{\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)} - 2\right\} \leqslant -\frac{n+1-[n(2\beta-1)+2\alpha\beta-1]r}{(n+1)[1+(2\beta-1)r]},$$
$$-\frac{1-(2\alpha\beta-1)r}{1-(2\beta-1)r} \leqslant \Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} \leqslant -\frac{1+(2\alpha\beta-1)r}{1+(2\beta-1)r},$$
$$\frac{(1-(2\beta-1))^{\frac{2\beta(1-\alpha)}{2\beta-1}}}{r} \leqslant \Re\{f(z)\} \leqslant \frac{(1+(2\beta-1)r)^{\frac{2\beta(1-\alpha)}{2\beta-1}}}{r}.$$

3. Теорема включения

Теорема 3.1. *Пусть* $f(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^k \in M_n(A,B)$. *Тогда* $M_{n+1}(A,B) \subset M_n(A,B)$ *для любого* $n \in N_0 = \{0,1,2,\dots\}$.

Доказательство. Пусть функция $f(z) \in M_n(A,B)$. Тогда, согласно теореме 2.2, для $|z| < 1$ имеем

$$-\frac{n(1-B)+1-A}{(n+1)(1-B)} \leqslant \Re\left\{\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)} - 2\right\} \leqslant -\frac{n(1+B)+1+A}{(n+1)(1+B)}. \tag{3.1}$$

При фиксированном A и B функция $-\frac{n(1-B)+1-A}{(n+1)(1-B)}$ возрастает с возрастанием n, а функция $-\frac{n(1+B)+1+A}{(n+1)(1+B)}$ убывает с возрастанием n. Поэтому

$$-\frac{n(1-B)+1-A}{(n+1)(1-B)} < -\frac{(n+1)(1-B)+1-A}{(n+2)(1-B)} \leqslant \Re\left\{\frac{D^{n+2}f(z)}{D^{n+1}f(z)} - 2\right\}$$
$$\leqslant -\frac{(n+1)(1+B)+1+A}{(n+2)(1+B)} < -\frac{n(1+B)+(1+A)}{(N+1)(1+B)}.$$

Из последних неравенств и следует справедливость утверждения.

Следствие 3.1. *Справедливы следующие включения:*

$$M_{n+1}(\alpha) \subset M_n(\alpha),\ M_{n+!}[\alpha] \subset M_n[\alpha],\ M_{n+1}(-\beta,\alpha\beta) \subset M_n(-\beta,\alpha\beta),$$
$$M_{n+1}(2\alpha\beta-1, 2\beta-1) \subset M_n(2\alpha\beta-1, 2\beta-1), \quad n \in N_0 = \{0,1,2,\dots\}.$$

Из теоремы 3.1 и следствия 3.1 следует, что классы функций $M_n(A,B)$, $M_n(\alpha)$, $M_n[\alpha]$, $M_n[-\beta,\alpha\beta]$, $M_n(2\alpha\beta-1, 2\beta-1)$ являются подклассами однолистных функций.

4. Интегральные операторы

Теорема 4.1. *Пусть функция* $f(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^n$ *для данных* $n \in N_0$ *и* $c > 0$ *удовлетворяет условию*

$$\Re\left\{\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)} - 2\right\} < \frac{1-[n(1+B)+(1+A)](c+1)}{(n+1)(1+B)(c+1)}, \quad z \in E_0. \tag{4.1}$$

Тогда функция

$$F(z) = \frac{c}{z^{c+1}} \int\limits_0^z t^c f(t)\, dt \tag{4.2}$$

принадлежит $M_n(A,B)$ *для* $F(z) \neq 0$ *в* E_0.

Доказательство. Используя тождества

$$z(D^n F(z))' = cD^n f(z) - (c+1)D^n F(z), \tag{4.3}$$

$$z(D^nF(z))' = (n+1)D^{n+1}F(z) - (n+2)D^nF(z), \tag{4.4}$$

условие (4.1) можно записать в виде

$$\Re\left\{\frac{\frac{(n+2)D^{n+2}F(z)}{D^{n+1}F(z)} - (n+2-c)}{n+1-(n+1-c)\frac{D^nF(z)}{D^{n+1}F(z)}} - 2\right\} < \frac{1-[n(1+B)+(1+A)](c+1)}{(n+1)(1+B)(c+1)}. \tag{4.5}$$

Мы должны показать, что неравенство (4.5) сводится к неравенству (см. теорему 3.1)

$$\Re\left\{\frac{D^{n+1}f(z)}{D^nf(z)} - 2\right\} < -\frac{n(1+B)+(1+A)}{(n+1)(1+B)}.$$

Определим $w(z)$ в E через

$$\frac{D^{n+1}f(z)}{D^nf(z)} = \frac{n+1+[(n+2)B-A]w(z)}{(n+1)(1+Bw(z))}. \tag{4.6}$$

Очевидно, что $w(z)$ регулярна в E и $w(0)=0$. Нам надо показать, что $|w(z)|<1$, $z \in E$. Логарифмическим дифференцированием получаем

$$\begin{aligned}\frac{(n+2)\frac{D^{n+2}F(z)}{D^{n+1}F(z)} - (n+2-c)}{n+1-(n+1-c)\frac{D^nF(z)}{D^{n+1}F(z)}} - 2 &= \frac{n+1+(nB+A)w(z)}{(n+1)(1+Bw(z))} \\ &+ \frac{(B-A)zw'(z)}{(n+1)(1+Bw(z))[(1+c)B-A]w(z)+c]}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Если $w(z)$ не удовлетворяет условию $|w(z)|<1$, $z \in E$, то по лемме Джека [7] существует точка $|z_0|$, $|z_0|<1$ такая, что

$$z_0w'(z_0) = Kw(z_0), \tag{4.8}$$

где $|w(z_0)|=1$ и $K \geqslant 1$. Из (4.7) и (4.8) имеем

$$\begin{aligned}\Re\left\{\frac{(n+2)\frac{D^{n+2}F(z)}{D^{n+1}F(z)} - (n+2-c)}{n+1-(n+1-c)\frac{D^nF(z)}{D^{n+1}F(z)}} - 2\right\} &= -\frac{n+1+(nB+A)w(z_0)}{(n+1)(1+Bw(z_0))} \\ &+ \frac{(B-A)Kw(z_0)}{(n+1)(1+Bw(z_0))[c+[(1+c)B-A]w(z_0)]}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Таким образом, левая часть (4.9) больше, чем

$$\frac{1-(n(1+B)+1+A)(c+1)}{(n+1)(1+B)(c+1)},$$

которое противоречит (4.1). Следовательно, $|w(z)|<1$, и из (4.6) следует, что $F(z) \in M_n(A,B)$.

Полагая $A=-1$, $B=1$ в условиях теоремы 4.1, получаем следующий результат.

Следствие 4.1. *Пусть $f(z) \in M_n$ для данных $n \in N_0$ и $c > 0$ удовлетворяет условию*

$$\Re\left\{\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)} - 2\right\} < \frac{1-2n(c+1)}{2(n+1)(c+1)} \quad (z \in E_0).$$

Тогда

$$F(z) = \frac{c}{z^{c+1}} \int\limits_0^z t^c f(t)\, dt$$

принадлежит классу M_n для $F(z) \neq 0$ в E_0.

Следствие 4.2. *Пусть функция $f(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^n$ для данных $n \in N_0$ и $c > 0$ удовлетворяет условию*

$$\Re\left\{\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)} - 2\right\} < \frac{1-2(n+\alpha)(c+1)}{2(n+1)(c+1)}. \tag{4.10}$$

Тогда функция

$$F(z) = \frac{c}{z^{c+1}} \int\limits_0^z t^c f(t)\, dt \tag{4.11}$$

принадлежит классу $M_n(\alpha)$ для $F(z) \neq 0$ в E_0.

Следствие 4.3. *Пусть функция $f(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^n$ для данных $n \in N_0$ и $c > 0$ удовлетворяет условию*

$$\Re\left\{\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)} - 2\right\} < \frac{1-[n(1+\alpha)+1-\alpha](c+1)}{(n+1)(1+\alpha)(c+1)}.$$

Тогда функция

$$F(z) = \frac{c}{z^{c+1}} \int\limits_0^z t^c f(t)\, dt$$

принадлежит классу $M_n(\alpha)$.

Следствие 4.4. *Пусть функция $f(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ для данных $n \in N_0$ и $c > 0$ удовлетворяет условию*

$$\Re\left\{\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)} - 2\right\} < \frac{1-[n(1+\alpha\beta)+1-\beta](c+1)}{(n+1)(1+\alpha\beta)(c+1)}.$$

Тогда функция

$$F(z) = \frac{c}{z^{c+1}} \int\limits_0^z t^c f(t)\, dt$$

принадлежит $M_n(-\beta, \alpha\beta)$.

Следствие 4.5. *Пусть функция* $f(z)=\frac{1}{z}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kz^k$ *для данных* $n\in N_0$ *и* $c>0$ *удовлетворяет условию*

$$\Re\left\{\frac{D^{n+1}f(z)}{D^nf(z)}-2\right\}<\frac{1-2\beta(n+\alpha)(c+1)}{2\beta(n+1)(c+1)}.$$

Тогда функция

$$F(z)=\frac{c}{z^{c+1}}\int\limits_0^z t^cf(t)\,dt$$

принадлежит классу $M_n(2\alpha\beta-1,2\beta-1)$.

При $n=0$ из теоремы 4.1 получаем следующий результат Goel и Sohi [5].

Следствие 4.6. *Пусть* $f(z)=\frac{1}{z}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kz^k$ *принадлежит* Σ^* *и удовлетворяет условию*

$$\Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}<\frac{1}{2(c+1)},\quad z\in E,\ c>0.$$

Тогда

$$F(z)=\frac{c}{z^{c+1}}\int\limits_0^z t^cf(t)\,dt$$

принадлежит Σ^* *для* $f(z)\neq0$ *в* $0<|z|<1$.

При $n=0$ в условиях теоремы 4.1 получаем следующий результат Goel и Sohi [5].

Следствие 4.7. *Пусть* $f(z)\in\Sigma$ *удовлетворяет условию*

$$\Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}<\frac{1}{4}.$$

Тогда

$$F(z)=\frac{c}{z^{c+1}}\int\limits_0^z t^cf(t)\,dt$$

принадлежит Σ^* *для* $F(z)\neq0$ *в* $0<|z|<1$.

При $n=0$ получаем следующий результат (N.E.Cho [2]).

Следствие 4.8. *Если* $f(z)=\frac{1}{z}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kz^k\in\Sigma^*(A,B)$, *то*

$$F(z)=\frac{c}{z^{c+1}}\int\limits_0^z t^cf(t)\,dt$$

будет принадлежать классу $\Sigma^*(A,B)$.

При $n=0$, $A=\beta(2\alpha-1)$ и $B=\beta$, где $0\leqslant\alpha<1$, получаем результат Mogra, Reddi и Juneja [10].

Теорема 4.2. *Пусть* $f \in M_n(A,B)$, *тогда*

$$F(z) = \frac{n+1}{z^{n+2}} \int\limits_0^z t^{n+1} f(t)\,dt \in M_{n+1}(A,B)$$

для $F(z) \neq 0$ *в* $0 < |z| < 1$.

Доказательство. Имеем

$$cD^n f(z) = (n+1)D^{n+1}F(z) - (n+1-c)D^n F(z)$$

и

$$cD^{n+1} f(z) = (n+2)D^{n+2}F(z) - (n+2-c)D^{n+1}F(z).$$

При $c = n+1$ из этих соотношений получаем

$$\frac{(n+2)D^{n+2}F(z) - D^{n+1}F(z)}{(n+1)D^{n+1}F(z)} = \frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)},$$

которое сводится к

$$\frac{(n+2)}{(n+1)} \frac{D^{n+2}F(z)}{D^{n+1}F(z)} - \frac{1}{n+1} = \frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}.$$

Таким образом, в соответствии с (3.1) имеем

$$\Re\left\{\frac{n+2}{n+1}\frac{D^{n+2}F(z)}{D^{n+1}F(z)} - \frac{1}{n+1} - 2\right\} = \Re\left\{\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)} - 2\right\} < -\frac{n(1+B)+1+A}{(n+1)(1+B)}.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\Re\left\{\frac{D^{n+2}F(z)}{D^{n+1}F(z)} - 2\right\} < -\frac{(n+1)(1+B)+1+A}{(n+2)(1+B)}.$$

Это завершает доказательство теоремы. При $A = -1$, $B = 1$ из теоремы 4.2 следует результат Ganigi и Uralegaddi ([4],T.3).

6. Класс $P_n(A,B)$

Через $P_n(A,B)$ обозначим подкласс функций класса $M_n(A,B)$ вида

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, \quad a_k \geqslant 0$$

с неотрицательными коэффициентами.

Теорема 6.1. *Пусть функция* $f(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^k, \quad a_k \geqslant 0$, *регулярна в* $E_0 = \{z : 0 < |z| < 1\}$. *Тогда* $f(z) \in P_n(A,B)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+1+k)[k(1+B)+1+A]}{(k+1)!(B-A)}\, a_k \leqslant 1, \tag{6.1}$$

$$-1 \leqslant A < B,\ 0 < B \leqslant 1.$$

Доказательство. Предположим, что функция $f(z)$ принадлежит $P_n(A,B)$. Тогда из (1.4) имеем

$$|w(z)| = \left|\frac{(n+1)(D^{n+1}f(z) - D^n f(z))}{D^n f(z)[(n+2)B - A]\cdot D^{n+1}f(z)\cdot(n+1)B}\right| < 1.$$

Из этого неравенства получаем

$$\left|\frac{(n+1)[a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(n+2)(n+3)\dots(n+1+k)}{k!}a_k z^k]}{(B-A)\frac{1}{z} - \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+1+k)}{(k+1)!}(Bk+A)a_k z^k}\right| < 1.$$

Так как $\Re\{w\} \leqslant |w|$ для любой функции w, то имеем

$$\Re\left\{\frac{(n+1)a_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+1+k)}{k!}a_k z^{k+1}}{B - A - \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+1+k)}{(k+1)!}(Bk+A)a_k z^k}\right\} < 1. \tag{6.2}$$

Выбираем значение z на вещественной оси, чтобы знаменатель был вещественным. Очевидно, знаменатель будет принимать вещественные значения и при $z \to 0$ по вещественной оси. Так как при $z = 0$ знаменатель положителен и непрерывен и $|w(z)| < 1$, то знаменатель принимает только положительные значения при $z > 0$.

Устремляя $z \to 1$, после упрощения из (3.2), получаем (3.1). Обратно, предполагая, что (3.1) верно для всех допустимых значений A и B, имеем

$$\begin{aligned}\Phi(D^n f, D^{n+1}f) &= |(n+1)(D^{n+1}f(z) - D^n f(z))| - |[(n+2)B - A]D^n f(z) - (n+1)BD^{n+1}f(z)| \\ &= (n+1)\left|[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n+2)(n+3)\dots(n+1+k)}{k!}a_k z^k]\right| \\ &\quad - \left|(B-A)\frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+1+k)}{(k+1)!}(Bk+A)a_k z^k\right|\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\Phi(D^n f, D^{n+1}f) \leqslant (n+1)[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n+2)(n+3)\dots(n+1+k)}{k!}a_k|z|^k] \\ -(B-A)\frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+1+k)}{(k+1)!}a_k|z|^{k+1}.\end{aligned}$$

Так как полученное неравенство верно для всех $|z| = r$, $0 < r < 1$, то, устремляя $|z| \to 1$, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+1+k)[k(1+B)+1+A]}{(k+1)!(B-A)}a_k \leqslant 1.$$

Отсюда следует, что $f(z)$ принадлежит классу $P_n(A,B)$ Заметим,что $P_0(A,B) \equiv \Sigma^*(A,B)$.

Следствие 6.1 [2]. *Функция* $f(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^k, \quad a_k \geqslant 0$, *принадлежит классу* $\Sigma^*(A,B)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{k(1+B)+1+A\} a_k \leqslant B-A.$$

Результат точный для функции

$$f_k(z) = \frac{1}{z} + \frac{B-A}{k(1+B)+1+A} z^k.$$

Заметим, что для класса $P_n(A,B)$ верны теоремы 3.1 и 4.1 в силу того, что $P_n(A,B)$ является подклассом $M_n(A,B)$.

7. Радиус выпуклости

Теорема 7.1. *Пусть функция* $f(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ *принадлежит классу* $P_n(A,B)$. *Тогда* $f(z)$ *мероморфно выпуклая порядка* δ $(0 \leqslant \delta < 1)$ *в круге* $|z| < r = r(A,B,n,\delta)$, *где*

$$r(A,B,n,\delta) = \inf_{k \geqslant 1} \left\{ \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+1+k)[k(1+B)+1+A](1-\delta)}{(B-A)k(k+2-\delta)(k+1)!} \right\}^{\frac{1}{k+1}}.$$

Результат точный.

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\left| 2 + \frac{zf'(z)}{f'(z)} \right| < 1-\delta$$

для $|z| \leqslant r(A,B,n,\delta)$. Имеем

$$\left| 2 + \frac{zf'(z)}{f'(z)} \right| = \left| \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} (k+1) a_k z^{k-1}}{\frac{1}{z^2} - \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}} \right| \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} k(k+1) a_k |z|^{k+1}}{1 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k |z|^{k+1}}.$$

Оно ограничено числом $1-\delta$, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+2-\delta)}{1-\delta} a_k |z|^{k+1} \leqslant 1. \tag{7.1}$$

Так как функция $f(z) \in P_n(A,B)$, то из (6.1) следует, что (7.1) будет верно, если

$$\frac{k(k+2-\delta)}{1-\delta} |z|^{k+1} \leqslant \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+1+k)[k(1+B)+1+A]}{(B-A)(k+1)!}.$$

т. е. если

$$|z| = \left\{ \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+1+k)[k(1+B)+1+A](1-\delta)}{(B-A)k(k+2-\delta)(k+1)!} \right\}^{\frac{1}{k+1}}, \quad k \geqslant 1. \quad (7.2)$$

Полагая $|z| = r(A, B, n, \delta)$ в (7.2), получаем результат. Результат точный для функции

$$f_k(z) = \frac{1}{z} + \frac{(k+1)!}{(n+1)(n+2)\dots(n+1+k)[k(1+B)+1+A]} z^k, \quad k \geqslant 1.$$

При $n = 0$, получаем следующий результат.

Следствие 7.1. *Пусть функция $f(z) = \frac{1}{z} + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$, $a_k \geqslant 0$ принадлежит $\Sigma^*(A, B)$. Тогда $f(z)$ мероморфно выпуклая порядка δ, $0 \leqslant \delta < 1$, в круге $|z| \leqslant r(A, B, \delta)$, где*

$$r(A, B, \delta) = \inf_{k \geqslant 1} \left\{ \frac{(1-\delta)[k(1+B)+1+A]}{(B-A)k(k+2-\delta)} \right\}^{\frac{1}{k+1}}.$$

Результат точный для функции

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{B-A}{k(1+B)+1+A} z^k \quad (k \geqslant 1).$$

Следствие 7.2. *Пусть функция $f(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ принадлежит классу $\Sigma^*(\alpha)$, т.е. классу мероморфно звездообразных функций порядка α. Тогда она мероморфно выпуклая порядка δ $(0 \leqslant \delta < 1)$ в круге $|z| < r = r(\alpha, \delta)$, где*

$$r(\alpha, \delta) = \inf_{k \geqslant 1} \left\{ \frac{(1-\delta)(1+\delta)}{(1-\alpha)k(k+2-\delta)} \right\}^{\frac{1}{k+1}}.$$

Результат точный.

Следствие 7.3. *Пусть функция $f(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ принадлежит классу $\Sigma^*(-\beta, \alpha\beta)$, $0 \leqslant \alpha < 1$, $0 < \beta \leqslant 1$, тогда она мероморфно выпуклая порядка δ $(0 \leqslant \delta < 1)$ в круге $|z| < r = r(\alpha, \beta, \delta)$, где $r(\alpha, \beta, \delta) = \inf\limits_{k \geqslant 1} \left\{ \frac{(1-\delta)([k(1+\alpha\beta)+(1-\beta])}{(1+\alpha)\beta k(k+2-\delta)} \right\}^{\frac{1}{k+1}}$. Результат точный.*

Следствие 7.4. *Пусть функция $f(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ мероморфно звездообразная порядка α и типа β. Тогда она будет мероморфно выпуклой порядка δ $(0 \leqslant \delta < 1)$ в круге $|z| < r = r(\alpha, \beta, \delta)$, где*

$$r(\alpha, \beta, \delta) = \inf_{k \geqslant 1} \left\{ \frac{(1-\delta)(k+\alpha)}{(1-\alpha)k(k+2-\delta)} \right\}^{\frac{1}{k+1}}.$$

Результат точный.

8. О свертках в классе $P_n(A, B)$

Теорема 8.1. *Пусть функции* $f(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ *и* $g(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k z^k$ *принадлежат классу* $P_n(A, B)$, $n \geqslant 0$. *Тогда*

$$(f * g)(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k z^k$$

также принадлежит $P_n(A, B)$, $n \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть $f(z)$ и $g(z)$ принадлежат классу $P_n(A, B)$. Тогда по теореме 6.1 имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+1+k)}{(k+1)!(B-A)}[k(1+B)+1+A]a_k \leqslant 1,$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+1+k)}{(k+1)!(B-A)}[k(1+B)+1+A]b_k \leqslant 1.$$

Так как $f(z)$ и $g(z)$ регулярны в $E_0 = \{z : 0 < |z| < 1\}$, то $(f * g)(z)$ регулярна в E_0. Далее имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+1+k)[k(1+B)+1+A]}{(k+1)!(B-A)}a_k b_k$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+1+k)[k(1+B)+1+A]}{(k+1)!(B-A)} \right\}^2 a_k b_k$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+1+k)[k(1+B)+1+A]}{(k+1)!(B-A)}a_k$$
$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+1+k)[k(1+B)+1+A]}{(k+1)!(B-A)}b_k \leqslant 1.$$

По теореме 6.1 $(f * g)(z) \in P_n(A, B)$. При $n = 0$ из теоремы 8.1 следует результат N. E. Cho [2].

Литература

1. *Aouf M. K.* On the coefficients of some meromorphic classes of order α and type β // Rend. math. e appl. 1988. V. 8. № 2. P. 211–221.
2. *Nak Eun Cho.* On certain class of meromorphic functions with positive coefficients // Math. Jap. 1989. V. 34. № 6. P. 901–907.
3. *Clunie J.* On meromorphic schlicht functions // J. London Math. Soc. 1959. V. 34. P. 215–216.
4. *Ganigi M. R., Uralegaddi B. A.* New criterio for meromorphi univalent functions // Bull. math. Soc. math. R.S.R. 1989. T. 33(81). № 1. P. 9–13.
5. *Goel R. M., Sohi M. S.* On a class of meromorphic functions // Glasnic, Mat. 1982. V. 17(37). P. 19–28.

6. *Зарудняк Л. В.* Об интегральном преобразовании некоторых классов мероморфных функций // Экстремальные задачи теории функций. Томск, 1986.
7. *Jack I. S.* Functions starlike and convex of order α // J. London Math. Soc. 1971. V. 2. P. 469–474.
8. *Juneja O. P., Reddy T. R.* Meromorphic starlike univalent functions with positive coefficients.
9. *Miller J. E.* Convex meromorphic mappings and related functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. V. 25. P. 220–228.
10. *Mogra M. L., Reddy T. R., Juneja O. P.* Meromorphic univalent functions with positive coefficients // Bull. Austral. Math. 1985. V. 32. P. 161–176.
11. *Pommerenke Ch.* On meromorphic starlike functions // Paccific. J. Math. 1963. V. 13. P. 221–235.