Владикавказский математический журнал
Январь–март, 1999, Том 1, Выпуск 1

УДК **517.98**

КОНУСЫ В ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ УПОРЯДОЧЕННЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

В. Т. Худалов

Пусть E и F — упорядоченные банаховы пространства (УБП) с замкнутыми конусами E_+ и F_+ (при изложении вопросов теории конусов в нормированных пространствах мы будем в основном придерживаться терминологии книг Б. З. Вулиха [1] и [2]).

Конус K_α в алгебраическом тензорном произведении $E\otimes F$ называется *тензорным конусом* [3], если $x\otimes y\in K_\alpha$ для всех $x\in E_+$, $y\in F_+$ и $x^*\otimes y^*\in K_\alpha^*$ для всех $x^*\in E_+^*$, $y^*\in F_+^*$.

Проективный конус K_p определяется следующим образом:

$$K_p=\left\{\sum_{k=1}^n x_k\otimes y_k,\quad x_k\in E_+,\ y_k\in F_+,\ k=1,\dots,n;\ n=1,2,\dots\right\}.$$

Инъективным конусом называется конус

$$K_i=\left\{\sum_{k=1}^n x_k\otimes y_k:\sum_{k=1}^n\langle x_k,x^*\rangle\langle y_k,y^*\rangle\geqslant 0,\quad \forall x^*\in E_+^*,\quad y^*\in F_+^*\right\}.$$

Ясно, что если K_α — тензорный конус, то $K_p\subset K_\alpha\subset K_i$. В дальнейшем будем предполагать, что E — УБП с замкнутым, нормальным, воспроизводящим конусом E_+. Нормы n_E и k_E на $E\otimes X$, где X — произвольное банахово пространство, связанные с порядком в E, определяются по формулам:

для всякого $z=\sum\limits_{k=1}^n e_k\otimes x_k\in E\otimes X$ положим

$$n_E(z)=\inf\left\{\|u\|:u\geqslant\sum_{k=1}^n e_k\langle x_k,x^*\rangle,\quad \forall x^*\in X_+^*,\quad \|x^*\|\leqslant 1\right\},$$

для любого $z\in E\otimes X$ положим

$$k_E(z)=\inf\left\{\left\|\sum_{k=1}^n a_i\|y_i\|\right\|:z=\sum_{k=1}^n a_i\otimes y_i,\quad a_i\geqslant 0,\quad i\leqslant i\leqslant m\right\}.$$

Эти нормы были определены в [4] и являются аналогами нормы В. Л. Левина [5], введенной им для случая, когда УБП E — банахова решетка.

Нормы n_E и k_E являются кросснормами [6] тогда и только тогда, когда норма на E регулярна [4], т. е.

1) $\forall x, y \in E$ из $\pm x \leqslant y$ следует $\|x\| \leqslant \|y\|$;

2) $\forall x \in E$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists y \geqslant 0$, такой что $\pm x \leqslant y$ и $\|y\| \leqslant (1+\varepsilon)\|x\|$. Если E — УБП с замкнутым конусом и регулярной нормой, то пишем $E \in (\mathcal{R})$. Пространство $E \otimes X$, наделенное нормой α, обозначаем $E \otimes_\alpha X$, а его пополнение $E \widetilde{\otimes}_\alpha X$.

Данная работа состоит из двух частей. В первой части изучаются свойства тензорных конусов в произведении $E \otimes F$, где E и F — УБП, такие как нормальность, несплющенность, оштукатуриваемость, телесность, правильность, полная правильность. Показано, что всякий тензорный конус в $E \otimes_{n_E} F$, где $E \in (\mathcal{R})$, F — УБП, является нормальным тогда и только тогда, когда конус в F нормальный. В то же время всякий тензорный конус в $E \otimes_{k_E} F$ является несплющенным тогда и только тогда, когда конус в F несплющенный. Таким образом каждая из норм n_E и k_E отвечает за наличие только одного из таких взаимно противоположных и взаимно дополняющих свойств, как нормальность и несплющенность произвольного тензорного конуса.

Во второй части изучаются тензорные произведения l- и bo-операторов [7]. Оказывается, что при подходящем выборе тензорного конуса в $E \otimes F$, где $E, F \in (\mathcal{R})$, тензорное произведение

$$S \otimes T : E \otimes_\alpha F \to X \otimes_\beta Y,$$

α и β — произвольные кросснормы, двух операторов $S : E \to X$ и $T : F \to Y$ является l-оператором тогда и только тогда, когда S и T l-операторы.

Аналогично, тензорное произведение

$$U \otimes V : X \otimes_\alpha Y \to E \otimes_\beta F$$

(α и β — произвольные кросснормы) двух операторов $U : X \to E$ и $V : Y \to F$ является bo-оператором, если и только если U и V — bo-операторы. При этом получены двусторонние оценки норм этих операторов.

1^0. Пусть E — УБП с замкнутым, нормальным, воспроизводящим конусом E_+, F — произвольное УБП с замкнутым конусом.

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) произвольный тензорный конус K_α нормален в $E \otimes_{n_E} F$;

2) существует тензорный конус K_α такой, что K_α является нормальным в $E \otimes_{n_E} F$;

3) конус F_+ нормальный в F.

Доказательство. Ясно, что из 1) следует 2). Докажем, что 2) влечет 3). Пусть K_α — нормальный тензорный конус в $E \otimes_{n_E} F$, тогда норма n_E полумонотонна на конусе K_p [1], так как $K_p \subset K_\alpha$. Возьмем $e \in E_+$, $\|e\| = 1$. Рассмотрим вложение $j : F \to E \otimes F$, определяемой по формуле:

$$j(x) = e \otimes x \in E \otimes F, \quad \forall x \in F.$$

Тогда F является подпространством в $E \otimes_{n_E} F$ с конусом K_p, и порядок в F индуцируется из $E \otimes F$, значит F_+ — нормальный.

3)$\Rightarrow$2). Так как F_+ — нормальный конус, то клин F_+^* — несплющенный. Покажем, что конус K_i — нормальный, тогда каждый тензорный конус $K_\alpha \subset K_i$ также будет нормальным. Пусть

$$z_1 = \sum_{k=1}^{n} e_k \otimes x_k \in K_i, \quad z_2 = \sum_{i=1}^{m} a_k \otimes y_i \in K_i, \quad \text{и} \quad z_1 - z_2 \in K_i.$$

Для каждого $x^* \in F_+^*$ имеем:

а) $\sum\limits_{k=1}^{n} e_k \langle x_k, x^* \rangle \in E_+$;

б) $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i \langle y_i, x^* \rangle \in E_+$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{n} e_k \langle x_k, x^* \rangle \geqslant \sum\limits_{i=1}^{m} a_i \langle y_i, x^* \rangle$.

Так как F_+^* — несплющенный клин, то

$$\begin{aligned} n_E(z) &= \inf \left\{ \|u\| : u \geqslant \sum_{k=1}^{n} e_k \langle x_k, x^* \rangle, \quad \forall x^* \in F^*, \quad \|x^*\| \leqslant 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \|u\| : u \geqslant \sum_{k=1}^{n} e_k \langle x_k, x^* \rangle, \quad \forall x^* \in F_+^*, \quad \|x^*\| \leqslant 1 \right\}. \end{aligned}$$

С другой стороны, найдется константа C, не зависящая от z_1 и z_2, такая, что

$$n_E(z_2) = C \inf \left\{ \|u\| : u \geqslant \sum_{i=1}^{m} a_i \langle y_i, x^* \rangle, \quad \forall x^* \in F_+^*, \quad \|x^*\| \leqslant 1 \right\}.$$

Тогда из в) следует, что $n_e(z_1) \geqslant k n_E(z_2)$, где константа k не зависит от z_1 и z_2, откуда следует нормальность конуса K_i, а значит, и произвольного тензорного конуса K_α.

Замечание. Если предположить, что $E, F \in (\mathcal{R})$, то нетрудно видеть, что из $z_1 \pm z_2 \in K_\alpha$, где z_1, $z_2 \in E \otimes F$, будет следовать, что $n_e(z_1) \geqslant n_E(z_2)$.

Приведем пример, показывающий, что из несплющенности конуса F_+ в F не следует, вообще говоря, несплющенность конуса K_i в $E \otimes_{n_E} F$ (а следовательно, не следует несплющенность произвольного тензорного конуса K_α).

Пример 1. Пусть $E = l_2$ с конусом

$$K_1 = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) : x_1 \geqslant \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} x_n^2} \right\}.$$

Можно показать, что $E \in (\mathcal{R})$, конус K_1 — телесный и оштукатуриваемый и $K_1^* = K$. Положим $F = l_1$ с естественным порядком. Так как l_1 — банахова решетка, то конус F_+ — несплющенный.

Рассмотрим тензорное произведение $E \otimes_{n_E} F$. Тогда, так как в силу телесности конуса K_1 норма n_E эквивалентна норме ε [4], пространство $E \widetilde{\otimes}_{n_E} F$ изоморфно вкладывается в пространство $\mathcal{L}(E^*, F)$ с операторной нормой. Рассмотрим элементы

$z_n \in E \otimes F$, $z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} e_k \otimes x_k$, где $e_k\{\delta_{ik}\}_{i=1}^{\infty} = x_k$; δ_{ik} — символ Кронекера. Тогда элементы z_n определяют операторы $T_n : E^* \to F$, действующие по формуле:

$$T_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots) = \left(\alpha_1, \frac{\alpha_2}{2}, \dots, \frac{\alpha_n}{n}, 0, \dots\right).$$

Так как операторы T_n сходятся по операторной норме к оператору $T : E^* \to F$, где T определяется формулой:

$$T(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots) = \left(\alpha_1, \frac{\alpha_2}{2}, \dots, \frac{\alpha_n}{n}, \frac{\alpha_{n+1}}{n+1}, \dots\right),$$

то T можно рассматривать как элемент $E\widetilde{\otimes}_{n_E}F$.

Но оператор T нельзя представить в виде разности положительных операторов $(\in \mathcal{L}(E,F))$ [8], а следовательно, и в виде разности положительных (в смысле конуса $\overline{K}_i$) элементов из $E\widetilde{\otimes}_{n_E}F$. Значит, замыкание $\overline{K}_i$ в пополнении $E\widetilde{\otimes}_{n_E}F$ не является воспроизводящим конусом, следовательно, K_i не является несплющенным конусом в $E \otimes_{n_E} F$ [1].

Теорема 2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) произвольный тензорный конус K_α является несплющенным в $E \otimes_{k_E} F$;

2) существует тензорный конус K_α такой, что K_α является несплющенным в $E \otimes_{k_E} F$;

3) конус F_+ несплющен в F.

Доказательство. Очевидно, что 1)⇒2). Докажем импликацию 2)⇒3). Пусть конус K_α несплющен в $E \otimes_{k_E} F$. Тогда инъективный конус K_i также будет несплющен в $E \otimes_{k_E} F$. Возьмем элемент $e \in E_+$, $\|e\| = 1$ и рассмотрим вложение $j : F \to E \otimes F$, $j(x) = e \otimes x$ для $x \in F$. Пусть $f \in E_+^*$ такой, что $f(e) = 1$.

Определим проектор $P : E \otimes F \to j(F)$ по формуле

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} e_k \otimes x_k\right) = e \otimes \sum_{k=1}^{n} f(e_k) x_k \in j(F).$$

Так как этот проектор является положительным, то несплющенность $(E \otimes_{k_E} F)$ наследуется подпространством $j(F)$, значит, конус в F — несплющенный.

3)⇒1): Покажем, что конус K_p несплющен, отсюда будет следовать несплющенность любого тензорного конуса K_α. Пусть $z = \sum\limits_{k=1}^{n} e_k \otimes x_k$ — произвольный элемент из $E \otimes F$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда существует представление $z = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i \otimes y_i$ элемента z такое, что $a_i \geqslant 0$ для $1 \leqslant i \leqslant m$ и $\left\|\sum\limits_{i=1}^{m} a_i \|y_i\|\right\| - k_E(z) \leqslant \varepsilon$. Так как F_+ — несплющенный конус, то каждый элемент y_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, можно представить в виде $y_i = y_i^1 - y_i^2$, где y_i^1, $y_i^2 \in F_+$ и $\|y_i^1\| + \|y_i^2\| \leqslant C\|y_i\|$, C — константа несплющенности конуса F_+ [1]. Рассмотрим элементы $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i \otimes y_i^1$ и $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i \otimes y_i^2$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i \otimes y_i^1$, $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i \otimes y_i^2 \in K_p$ и

$z = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i \otimes y_i^1 - \sum\limits_{i=1}^{m} a_i \otimes y_i^2$. Имеем:

$$k_E\left(\sum_{i=1}^{m} a_i \otimes y_i^1\right) + k_E\left(\sum_{i=1}^{m} a_i \otimes y_i^2\right) \leqslant 2C\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i \|y_i\|\right\| \leqslant 2Ck_E(z) + 2C \cdot \varepsilon,$$

то есть K_p — несплющенный конус в $E \otimes_{k_E} F$.

Замечание. Если $E, F \in (\mathcal{R})$, то из доказательства теоремы 2 видно, что для каждого $z \in E \otimes_{k_E} F$ и любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $z_1 \in K_\alpha$ (где K_α — произвольный тензорный конус в $E \otimes F$) такой, что $z_1 \pm z \in K_\alpha$ и $k_E(z_1) \leqslant (1+\varepsilon)k_E(z)$.

Если конус в F нормальный, то отсюда, вообще говоря, не следует нормальность конуса K_p (а значит, и произвольного тензорного конуса K_α) в $E \otimes_{k_E} F$.

Пример 2. Пусть $E = l_2$ с конусом K_1, $F = c_0$ с обычным конусом. Ясно, что конус в c_0 нормальный, однако K_p не является нормальным в $E \otimes_{k_E} F$, так как в противном случае конус положительных операторов в $\mathcal{L}_l(E, F^*)$ [9] был бы несплющенным. В нашем случае $\mathcal{L}_l(E, F^*)$ изоморфно пространству $\mathcal{L}(l_2, l_1)$, так как конус K_1 в l_2 оштукатуриваемый [9]. В то же время оператор T из примера 1 нельзя представить в виде разности положительных операторов.

Выясним, при каких условиях тензорный конус является оштукатуриваемым (телесным) в пространстве $E \otimes_\alpha F$, где α — произвольная кросснорма.

Теорема 3. *Для того чтобы конус K_p был оштукатуриваемым в $E \otimes_\alpha F$ необходимо и достаточно, чтобы E_+ и F_+ были бы оштукатуриваемыми конусами в E и F соответственно.*

Доказательство. Необходимость. Пусть K_p — оштукатуриваемый конус в $E \otimes_\alpha F$. Возьмем $x_1, \ldots, x_n \in F_+$, $e \in E_+$, $\|e\| = 1$ и рассмотрим элементы $e \otimes x_1, \ldots, e \otimes x_n \in K_p$. Тогда

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha(e \otimes x_i)\left[\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} e \otimes x_i\right)\right]^{-1} : x_1, \ldots, x_n \in F_+\right\}$$
$$= \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \left(\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|\right)^{-1} : x_1, \ldots, x_n \in F_+\right\} < \infty,$$

откуда следует, что константы нормальности конуса F_+ ограничены в совокупности, следовательно, конус F_+ оштукатуриваемый [2]. Аналогично доказывается оштукатуриваемость конуса E_+.

Достаточность. Пусть f — равномерно положительный функционал на E, g — равномерно положительный функционал на F. Тогда $f \otimes g$ — равномерно положительный функционал на $(E \otimes_\alpha F, K_p)$. Действительно, пусть $z = \sum\limits_{k=1}^{n} e_k \otimes x_k \in K_p$, тогда

$$(f \otimes g)(z) = \sum_{k=1}^{n} f(e_k)g(x_k) \geqslant k\sum_{k=1}^{n} \|e_k\|\,\|x_k\| \geqslant k\pi(z) \geqslant k\alpha(z),$$

где k — константа.

Теорема 4. *Для того чтобы конус K_i был телесным в $E\otimes_\alpha F$, где α — любая кросснорма такая, что $\alpha \geqslant \varepsilon$, необходимо и достаточно, чтобы E_+ был телесным конусом в E и F_+ — телесным конусом в F.*

Доказательство. Необходимость. Покажем, что F_+ — телесный конус. Пусть $z = \sum\limits_{k=1}^{n} e_k \otimes x_k$ — внутренняя точка конуса K_i в $E \otimes_\alpha F$, то есть $B(z, r) \subset K_i$, где $B(z, r)$ — замкнутый шар радиуса $r > 0$ с центром в точке z в $E \otimes_\alpha F$. Возьмем $e \in E_+$, $\|e\| = 1$. Тогда существует функционал $x_0^* \in E_+^*$, $\|x_0^*\| = 1$ и $\langle e, x_0^*\rangle = 1$. Покажем, что $B(x_0, r) \subset F_+$, где $x_0 \in F$, $x_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle e_k, x_0^*\rangle x_k$. Пусть $y_0 \in F$, $\|y_0 \leqslant r$. Положим $z_0 = e \otimes y_0$. Тогда $\alpha(z_0) \leqslant \|y_0\| \leqslant r$, отсюда $z + z_0 \in K_\alpha$, следовательно

$$\sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x_0^*\rangle x_k + \langle e, x_0^*\rangle y_0 \in F_+,$$

т, е. $x_0 + y_0 \in F_+$, значит, $B(x_0, r) \subset F_+$.

Аналогично доказывается телесность конуса E_+.

Достаточность. Пусть $u \in E_+$ — внутренняя точка конуса E_+, $v \in F_+$ — внутренняя точка конуса F_+. Тогда $z_0 = u \otimes v$ является внутренней точкой конуса K_i. Действительно, пусть шар $B(u, \rho_1) \subset E_+$, шар $B(v, \rho_2) \subset F_+$. Возьмем произвольный элемент $z = \sum\limits_{k=1}^{n} e_k \otimes x_k \in E \otimes F$ такой, что $\alpha(z - z_0) \leqslant \rho_1\rho_2$. Для любого $f \in E_+^*$ имеем:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, f\rangle x_k - \langle u, f\rangle v \right\| \leqslant \alpha(z - z_0)\|f\| \leqslant \rho_1\rho_2\|f\| \leqslant \rho_2\langle u, f\rangle,$$

так как $\|f\| \leqslant \rho_1^{-1}\langle u, f\rangle$ (см. [1, с. 29]). Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} \langle e_k, f\rangle x_k = \langle u, f\rangle \left[v + \left(\sum_{k=1}^{n} \langle e_k, f\rangle \langle u, f\rangle v \right) \langle u, f\rangle^{-1} \right] \in \langle u, f\rangle B(v, \rho_2) \subset F_+,$$

а это значит, что $z = \sum\limits_{k=1}^{n} e_k \otimes x_k \in K_i$. Теорема доказана.

Приведем примеры, показывающие, что из того, что конуса E_+ и F_+ являются правильными (вполне правильными), вообще говоря, не следует, что произвольный тензорный конус в $E \otimes_{n_E} F$ ($E \otimes_{k_E} F$) является правильным (вполне правильным). Следует подчеркнуть, что в нашем более общем случае, когда E является произвольным УБП, принадлежащем классу ($\mathcal{R}$), в отличие от случая, когда E — банахова решетка, в основном получаются отрицательные результаты, то есть здесь возникает существенно новая ситуация.

Пример 3. Пусть $E = l_2$ с конусом $E_+ = K_1$, таким же, как в примере 1, $F = l_2$ с естественным конусом. Конус E_+ является оштукатуриваемым, следовательно, вполне правильным (см. [2, с. 9]). Конус F_+ также вполне правильный, значит, правильный. Покажем, что, тем не менее, конус K_p в $E \otimes_{k_E} F$ не является правильным, следовательно, K_p не является вполне правильным в $E \otimes_{k_E} F$. Рассмотрим последовательность элементов $z_n \in E \otimes F$, $n = 1, 2, \dots$, определяемую следующим образом:

$$z_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, \dots\right) \otimes (1, 0, \dots); \quad z_2 = z_1 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}, 0, \dots\right); \quad \dots$$

$$z_n = z_{n-1} + \Big(\underbrace{\frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2}}_{n}, 0, \dots\Big) \otimes \Big(\underbrace{0, \dots, 0, \frac{1}{n}}_{n}, 0, \dots\Big); \ \dots$$

Ясно, что последовательность z_n возрастает. Кроме того, нетрудно видеть, что все z_n ограничены элементом $(1, 0, \dots) \otimes \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$. Однако последовательность z_n не является фундаментальной в $E \otimes_{k_E} F$. Действительно, рассмотрим разность

$$z_{2n} - z_n = \Big(\underbrace{\frac{1}{2}, 0, \dots, \frac{1}{2}}_{n+1}, 0, \dots\Big) \otimes \Big(\underbrace{0, \dots, \frac{1}{n+1}}_{n+1}, 0, \dots\Big) + \dots$$

$$\dots + \Big(\underbrace{\frac{1}{2}, 0, \dots, \frac{1}{2}}_{2n}, 0, \dots\Big) \otimes \Big(\underbrace{0, 0, \dots, 0, \frac{1}{2n}}_{2n}, 0, \dots\Big).$$

Оценим норму $k_E(z_{2n} - z_n)$ снизу, воспользовавшись тем, что сопряженное $(E \otimes_{k_E} F)^*$ канонически изометрично $\mathcal{L}_l(E, F^*)$. Так как конус в E оштукатуриваемый, то всякий непрерывный оператор $T : E \to F^*$ является l-оператором. Пусть $T : l_2 \to l_2$, $T \in \mathcal{L}(l_2, l_2)$ — тождественный оператор. Нетрудно видеть, что $\|T\|_l \leqslant \sqrt{2}$. Тогда

$$k_E(z_{2n} - z_n) \geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k},$$

то есть последовательность z_n не фундаментальна; следовательно, K_p не является правильным в $E \otimes_{k_E} F$.

Пример 4. Пусть l_2 упорядочено конусом

$$K = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n, \dots) : x_n \geqslant 0, \quad \forall n, \quad \sum_{n=2}^{\infty} x_n^2 \leqslant x_1^2 \right\}.$$

Положим $E = l_2$ с сопряженным конусом K^*, тогда K^* — замкнутый, нормальный, телесный, вполне правильный конус [2].

1) Возьмем $F = l_2$ с естественным конусом. Покажем, что проективный конус K_p не является вполне правильным в $E \otimes_{n_E} F$. Рассмотрим последовательность z_n элементов из K_p:

$$z_1 = (1, 0, \dots) \otimes (1, 0, \dots),$$

$$z_n = z_{n-1} + (\underbrace{0, \dots, 0, 1}_{n}, 0, \dots) \otimes (\underbrace{0, 0, \dots, 0, 1}_{n}, 0, \dots).$$

Ясно, что последовательность z_n возрастает. Тем же методом, что и в примере 10 (см. [10, с. 231]) можно показать, что $n_E(z_n) \leqslant \sqrt{2}$ для $n = 1, 2, \dots$. Тем не менее, последовательность z_n не фундаментальна, так как $n_E(z_{n+1} - z_n) = 1$, то есть K_p не является вполне правильным в $E \otimes_{n_E} F$.

2) Возьмем $F = l_2$ с конусом K^*. Так как K^* — телесный конус, то по теореме 4 инъективный конус $K_i \subset E \otimes F$ будет телесным конусом в $E \otimes_{n_E} F$. Покажем, что конус K_i не является правильным в $E \otimes_{n_E} F$. Рассмотрим последовательность z_n, определенную в пункте 1 настоящего примера. Тогда $z_n \in K_i$, $n = 1, 2, \dots$, последовательность z_n возрастает в смысле конуса K_i, $n_E(z_n) \leqslant \sqrt{2}$ для $n = 1, 2, \dots$ и не является фундаментальной. Следовательно, конус K_i в $E \otimes_{n_E} F$ не является вполне правильным. Тогда K_i не является правильным конусом в $E \otimes_{n_E} F$, так как правильность и телесность конуса влекут полную правильность конуса (см. [2, с. 10]).

2^0) Пусть $E \in (\mathcal{R})$, X — произвольное БП. Линейный оператор $T : E \to X$ называется l-*оператором*, если конечна l-норма:

$$\|T\|_l = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} \|Te_k\| : e_k \in E_+, 1 \leqslant k \leqslant n,\ \left\|\sum_{k=1}^{n} e_k\right\| \leqslant 1, n = 1, 2, \dots\right\}.$$

Пространство всех l-операторов из E в X с l-нормой обозначим через $\mathcal{L}_l(E, X)$.

Линейный оператор $U : X \to E$ называется bo-*оператором*, если он переводит единичный шар пространства X в порядково ограниченное множество в E. Пространство всех bo-операторов из X в E с bo-нормой

$$\|U\|_{\text{bo}} = \inf\{\|e\| : Ux \leqslant e, \quad \forall x \in X, \quad \|x\| \leqslant 1\}$$

обозначим $\mathcal{L}_{\text{bo}}(X, E)$.

Теорема 5. *Пусть $E, F \in (\mathcal{R})$, X, Y — произвольные БП, $S \in \mathcal{L}(E, X)$, $S \neq 0$, $T \in \mathcal{L}(F, Y)$, $T \neq 0$. Тогда для любых кросснорм α и β оператор*

$$S \otimes T : (E \otimes_\alpha, K_p) \to X \otimes_\beta Y$$

является l-оператором тогда и только тогда, когда S и T суть l-операторы. При этом

$$\sqrt{\|S\|_l \, \|T\|_l} \sqrt{\|S\| \, \|T\|} \leqslant \|S \otimes T\|_l \leqslant \|S\|_l \, \|T\|_l.$$

Доказательство. Пусть $S : E \to X$ — l-оператор. Это эквивалентно существованию функционала $e^* \in E_+^*$, $\|e^*\| \leqslant 1$ такого, что

$$\|S_e\| \leqslant \|S\|_l \langle e^*, e\rangle, \quad \forall e \in E_+;$$

аналогично, если $T : F \to Y$ — l-оператор, то найдется $f^* \in F_+^*$, $\|f^*\| \leqslant 1$, такой что $\|T_f\| \leqslant \|T\|_l \langle f, f^*\rangle$, $\forall f \in F_+$. Тогда $e^* \otimes f^*$ — положительный непрерывный функционал, $e^* \otimes f^* \in K_p^*$. Пусть $z = \sum\limits_{k=1}^{n} e_k \otimes f_k \in K_p$, тогда

$$\beta\left[(S \otimes T)\sum_{k=1}^{n} e_k \otimes f_k\right] \leqslant \pi\left(\sum_{k=1}^{n} Se_k \otimes Tf_k\right)$$
$$\sum_{k=1}^{n} \|Se_k\|\,\|Tf_k\| = \sum_{k=1}^{n} \|S(e_k\|Tf_k\|)\|$$
$$\leqslant \|S\|_l \sum_{k=1}^{n}\langle e_k, e^*\rangle\|Tf_k\| = \|S\|_l \sum_{k=1}^{n} \|T(f_k\langle e_k, e^*\rangle)\|$$
$$\leqslant \|S\|_l\|T\|_l \sum_{k=1}^{n}\langle e_k, e^*\rangle\langle f_k, f^*\rangle = \|S\|_l\|T\|_l \left\langle \sum_{k=1}^{n} e_k \otimes f_k, e^* \otimes f^* \right\rangle.$$

Следовательно, $S \otimes T$ — l-оператор и $\|S \otimes T\|_l \leqslant \|S\|_l\|T\|_l$.

Обратно, пусть $S \otimes T : (E \otimes_\alpha F, K_p) \to X \otimes_\beta Y$ — l-оператор. Покажем, что S и T — l-операторы. Пусть $e_1, \ldots, e_n \in E_+$. Возьмем $f \in F_+$, $Tf \neq 0$. Тогда $e_1 \otimes f, \ldots, e_n \otimes f \in K_p$. Поскольку $S \otimes T$ — l-оператор, то

$$\|Tf\| \sum_{k=1}^{n} \|Se_k\| = \sum_{k=1}^{n} \beta[(S \otimes T)(e_k \otimes f)],$$
$$\|S \otimes T\|_l \alpha\left(\sum_{k=1}^{n} e_k \otimes f\right) = \|S \otimes T\|_l \left\|\sum_{k=1}^{n} e_k\right\| \|f\|.$$

Значит, S — l-оператор и $\|S\|_l \leqslant \|S \otimes T\|_l\|f\|(\|Tf\|^{-1})$. Отсюда, так как последнее неравенство верно $\forall f \in F_+$, $\|f\| = 1$, то $\|S\|_l \leqslant \|S \otimes T\|_l \cdot \|T\|^{-1}$, откуда $\|S \otimes T\|_l \geqslant \|S\|_l\|T\|$.

Аналогично получаем, что $\|T\|_l \leqslant \|S \otimes T\|_l \cdot \|S\|^{-1}$ и $\|S \otimes T\|_l \geqslant \|T\|_l\|S\|$. Итак,

$$\|S \otimes T\|_l \geqslant \sqrt{\|S\|_l\|T\|_l}\sqrt{\|S\|\,\|T\|}.$$

Теорема полностью доказана.

Теорема 6. *Пусть $E, F(\mathcal{R})$, X, Y суть произвольные БП, $U \in \mathcal{L}(X, E)$, $U \neq 0$, $V \in \mathcal{L}(Y, F)$, $V \neq 0$. Тогда для любых кросснорм $\alpha \geqslant \varepsilon$ и $\beta \geqslant \varepsilon$ оператор*

$$U \otimes V : X \otimes_\alpha Y \to (E \otimes_\beta F, K_i)$$

является bo-*операторов тогда и только тогда, когда U и V —* bo-*операторы. При этом*

$$\sqrt{\|U\|_{\mathrm{bo}}\|V\|_{\mathrm{bo}}}\sqrt{\|U\|\,\|V\|} \leqslant \|U \otimes V\|_{\mathrm{bo}} \leqslant \|U\|_{\mathrm{bo}}\|V\|_{\mathrm{bo}}.$$

Доказательство. Пусть $U : X \to E$ и $V : Y \to F$ — bo-операторы. Тогда найдутся элементы $e \in E_+$ и $f \in F_+$ такие, что

$$\pm Ux \leqslant e, \quad \forall x \in X, \quad \|x\| \leqslant 1; \quad \|U\|_{\mathrm{bo}} = \inf\{\|e\|\};$$
$$\pm Vy \leqslant f, \quad \forall y \in Y, \quad \|y\| \leqslant 1; \quad \|V\|_{\mathrm{bo}} = \inf\{\|f\|\}.$$

Покажем, что оператор $U \otimes V : X \otimes_\alpha Y \to (E \otimes_\beta F, K_i)$ является bo-оператором при $\alpha = \varepsilon$ (а значит, при любом $\alpha \geqslant \varepsilon$). Пусть $z \in X \otimes Y$, $z = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k$ и $\varepsilon(z) \leqslant 1$. Докажем, что $\pm U \otimes V(z) \leqslant e \otimes f$ в смысле конуса K_i, т. е.

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} Ux_k \otimes Vy_k,\ e^* \otimes f^* \right\rangle \leqslant \langle e, e^* \rangle \langle f, f^* \rangle, \quad \forall e^* \in E_+^*,\ \forall f^* \in F_+^*.$$

При этом достаточно считать, что $V^* f^* \neq 0$. Имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} \langle Ux_k, e^* \rangle \langle Vy_k, f^* \rangle = \left\langle U \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \langle Vy_k, f^* \rangle \right), e^* \right\rangle$$
$$\leqslant \langle e, e^* \rangle \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \langle Vy_k, f^* \rangle \right\| = \langle e, e^* \rangle \sup_{\|x^*\| \leqslant 1} \left| \sum_{k=1}^{n} \langle x_k, x^* \rangle \langle Vy_k, f^* \rangle \right|.$$

Кроме того,

$$\langle Vy_k, f^* \rangle = \langle y_k, V^* f^* \rangle = \left\langle y_k, \frac{V^* f^*}{\|V^* f^*\|} \right\rangle \|V^* f^*\|,$$
$$\|V^* f^*\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} |\langle V^* f^*, y \rangle| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} |\langle f^*, Vy \rangle| \leqslant \langle f, f^* \rangle.$$

Далее получаем:

$$\langle e, e^* \rangle \sup_{\|x^*\| \leqslant 1} \left| \sum_{k=1}^{n} \langle x_k, x^* \rangle \langle Vy_k, f^* \rangle \right| = \langle e, e^* \rangle \sup_{\|x^*\| \leqslant 1} \left| \sum_{k=1}^{n} \langle x_k, x^* \rangle \left\langle y_k, \frac{V^* f^*}{\|V^* f^*\|} \right\rangle \right| \|V^* f^*\|$$
$$\leqslant \langle e, e^* \rangle \|V^* f^*\| \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} \langle x_k, x^* \rangle \langle y_k, y^* \rangle \right| : \|x^*\| \leqslant 1,\ \|y^*\| \leqslant 1 \right\}$$
$$= \varepsilon(z) \langle e, e^* \rangle \|V^* f^*\| \leqslant \langle e, e^* \rangle \langle f, f^* \rangle.$$

Итак, $\|U \otimes V\|_{\mathrm{bo}} \leqslant \inf\{\|e\|\,\|f\|\} \leqslant \|U\|_{\mathrm{bo}}\,\|V\|_{\mathrm{bo}}$.

Обратно, пусть $U \otimes V : X \otimes_\alpha Y \to (E \otimes_\beta, K_i)$ — bo-оператор. Покажем, что $U : X \to E$ также является bo-оператором. Возьмем $f \in F_+^*$, $\|f^*\| = 1$. Пусть $x \in X$, $\|x\| \leqslant 1$ и $y \in Y$ такой, что $\|y\| = 1$ и $\langle Vy, f^* \rangle > 0$. Тогда найдется элемент $z \in K_i$, $z = \sum\limits_{k=1}^{n} e_k \otimes f_k$ такой, что $Ux \otimes Vy \leqslant z$ в смысле конуса K_i. Отсюда

$$Ux \langle Vy, f^* \rangle \leqslant \sum_{k=1}^{n} e_k \langle f_k, f^* \rangle; \quad Ux \leqslant \frac{1}{\langle Vy, f^* \rangle} \sum_{k=1}^{n} e_k \langle f_k, f^* \rangle.$$

Тогда

$$\|U\|_{\mathrm{bo}} \leqslant \frac{1}{\langle Vy, f^* \rangle} \left\| \sum_{k=1}^{n} e_k \langle f_k, f^* \rangle \right\|;$$
$$\langle Vy, f^* \rangle \|U\|_{\mathrm{bo}} \leqslant \sup_{\|f^*\| \leqslant 1} \left\| \sum_{k=1}^{n} e_k \langle f_k, f^* \rangle \right\| = \varepsilon(z) \leqslant \beta(z).$$

Переходя к супремуму по всем $y \in Y$, $\|y\| = 1$ и всем $f^* \in F_+^*$, $\|f^*\| = 1$, получим: $\|V\|\,\|U\|_{\mathrm{bo}} \leqslant \|U \otimes V\|_{\mathrm{bo}}$.

Аналогично доказывается, что $\|U\|\,\|V\|_{\mathrm{bo}} \leqslant \|U \otimes V\|_{\mathrm{bo}}$, т. е.

$$\|U \otimes V\|_{\mathrm{bo}} \geqslant \sqrt{\|U\|_{\mathrm{bo}}\|V\|_{\mathrm{bo}}}\sqrt{\|U\|\,\|V\|}.$$

Теорема полностью доказана.

Литература

1. *Вулих Б. З.* Введение в теорию конусов в нормированных пространствах.—Калинин: Изд-во КГУ, 1977.
2. *Вулих Б. З.* Специальные вопросы геометрии конусов в нормированных пространствах.—Калинин: Изд-во КГУ, 1978.
3. *Wittstock G.* Ordered normed tensor products. Lecture Note in Phisics.—1974.—V. 29.—P. 67–84.
4. *Худалов В. Т.* О тензорном произведении упорядоченного и произвольного банаховых пространств // Вестник ЛГУ.—1979.—№ 19.—С. 114–116.
5. *Левин В. Л.* Тензорные произведения и функторы в категориях банаховых пространств, определяемые КВ-линеалами. Труды Моск. мат. о-ва.—1969.—Т. 20.—С. 43–82.
6. *Schatten R.* A theory of cross-spaces.—Princeton, 1950.
7. *Schaefer H. H.* Banach lattices and positive operators. Springer-Verlag, 1974.
8. *Walsh B.* Ordered vector sequence spaces and related classes of linear operators. Math. Ann.—1973.—V. 206, No. 4.—P. 89–138.
9. *Худалов В. Т.* Кросснормы на тензорном произведении, связанные с порядком. В сб.: Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений.—Ярославль, 1980.—С. 145–156.
10. *Худалов В. Т.* Двойственность кросснорм, порождаемых некоторыми классами линейных операторов // Нелокальные краевые задачи для нагруженных уравнений смешанного типа и родственные проблемы непрерывного анализа.—Нальчик, 1982.—С. 225–236.