Владикавказский математический журнал
Январь–март, 1999, Том 1, Выпуск 1

УДК **532(075.8)**

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В УЗКИХ ГЛУБОКИХ ВОДОЕМАХ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ

И. Д. Музаев, Ш. С. Хубежты

В узких глубоких водоемах переменной ширины теория внутренних гравитационных волн основана на компактных краевых задачах математической физики, имеющих следующий вид

$$\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi_1}{\partial z^2}+\frac{1}{B_1}\frac{\partial B_1}{\partial x}\frac{\partial\phi_1}{\partial x}+\frac{1}{B_1}\frac{\partial B_1}{\partial z}\frac{\partial\phi_1}{\partial z}=0, \qquad -h_1<z\leqslant 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2\phi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi_2}{\partial z^2}+\frac{1}{B_2}\frac{\partial B_2}{\partial x}\frac{\partial\phi_2}{\partial x}+\frac{1}{B_2}\frac{\partial B_2}{\partial z}\frac{\partial\phi_2}{\partial z}=0, \qquad 0\leqslant z\leqslant h_2; \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2\phi_2}{\partial t^2}+g\frac{\partial\phi_2}{\partial z}=0 \quad \text{при } z=h_2; \tag{3}$$

$$\rho_1\left(\frac{\partial^2\phi_2}{\partial t^2}+g\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\right)=\rho_1\left(\frac{\partial^2\phi_2}{\partial t^2}+g\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\right) \quad \text{при } z=0; \tag{4}$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial z}=\frac{\partial\phi_2}{\partial z} \quad \text{при } z=0; \tag{5}$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial z}=0 \quad \text{при } z=-h_1; \tag{6}$$

где ϕ_1 и ϕ_2 потенциалы скоростей на нижнем и верхнем слоях соответственно, ρ_1 и ρ_2 — плотности $B_1=B_1(x,t)$ и $B_2=B_2(x,t)$ — ширина нижнего и верхнего слоя водоема, g — ускорение силы тяжести, h_1 и h_2 — глубины слоев.

В классической теории внутренних гравитационных волн скорости удовлетворяют дифференциальному уравнению Лапласа. Здесь же дополнительно вошли два слагаемых. Они связаны с непризматическим очертанием водоема. Поставленная контактная краевая задача решена следующим способом. Функции $\phi_1(x,z,t)$ и $\phi_2(x,z,t)$ представлены в виде следующих зависимостей

$$\phi_1(x,z,t)=\psi_1(z)\sin kx\cos\sigma t, \tag{7}$$

$$\phi_2(x,z,t)=\psi_2(z)\sin kx\cos\sigma t. \tag{8}$$

Подставив эти выражения в (1)–(6), получим

$$\frac{d^2\psi_1}{dz^2}+s_1\frac{d\psi_1}{dz}-k^2\psi_1=0, \qquad -h_1\leqslant z\leqslant 0; \tag{9}$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dz^2} + s_2\frac{d\psi_2}{dz} - k^2\psi_2 = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant h_2; \tag{10}$$

$$-\sigma^2\psi_2(z) + g\frac{d\psi_2}{dz} = 0 \quad \text{при } z = h_2; \tag{11}$$

$$\rho_1\left(-\sigma^2\psi_1(z) + g\frac{d\psi_1}{dz}\right) = \rho_2\left(-\sigma^2\psi_2(z) + g\frac{d\psi_2}{dz}\right) \quad \text{при } z = 0; \tag{12}$$

$$\frac{d\psi_1}{dz} = \frac{d\psi_2}{dz} \quad \text{при } z = 0; \tag{13}$$

$$\frac{d\psi_2}{dz} = 0 \quad \text{при } z = -h_1; \tag{14}$$

Общие решения дифференциальных уравнений (9)–(10) имеют следующие вид

$$\psi_1(z) = C_1 e^{\lambda_1^{'} z} + C_2 e^{\lambda_2^{'} z}, \tag{15}$$

$$\psi_2(z) = C_3 e^{\lambda_1^{''} z} + C_4 e^{\lambda_2^{''} z}, \tag{16}$$

где

$$\lambda_{1,2}^{'} = -\frac{s_1}{2} \pm \sqrt{k^2 + \frac{s_1^2}{4}}, \tag{17}$$

$$\lambda_{1,2}^{''} = -\frac{s_2}{2} \pm \sqrt{k^2 + \frac{s_2^2}{4}}. \tag{18}$$

Постоянные C_1, C_2, C_3 и C_4 определяются с помощью граничных условий (11)–(14). Подставив в эти граничные условия выражения (15) и (16), получим однородную систему алгебраических уравнений

$$(-\sigma^2 e^{\lambda_1^{''} h_2} + g\lambda_1^{''} h_2)C_3 + (-\sigma^2 e^{\lambda_2^{''} h_2} + g\lambda_2^{''} e^{\lambda_2^{''} h_2})C_4 = 0, \tag{19}$$

$$(-\rho_1\sigma^2+\rho_1 g\lambda_1^{'})C_1+(-\rho_2\sigma^2+\rho_1 g\lambda_2^{'})C_2+\quad(\rho_2\sigma^2-\rho_2 g\lambda_1^{''})C_3+$$
$$+(\rho_2\sigma^2-\rho_2 g\lambda_2^{''})C_4=0, \tag{20}$$
$$\lambda_1^{'}C_1+\lambda_2^{'}C_2-\lambda_1^{''}C_3-\lambda_2^{''}C_4=0, \tag{21}$$
$$\lambda_1^{'}e^{-\lambda_1^{'}h_1}C_1+\lambda_2^{'}e^{-\lambda_2^{'}h_1}C_2=0. \tag{22}$$

Очевидно, что для существования нетривиального решения системы (19)–(22) ее определитель должен равняться нулю. В результате приравнивания нулю определителя этой системы получаются частотные уравнения вида

$$(a_1\sigma^2+b_1)(a_2\sigma^2+b_2)-(a_3\sigma^2+b_3)(a_4\sigma^2+b_4)=0, \tag{23}$$

где

$$\begin{gathered}
a_1=-e^{\lambda_1^{''}h_2}\ b_1=g\lambda_1^{''}e^{\lambda_1^{''}h_2},\\
a_2=\rho_1\lambda_2^{''}(\lambda_1^{'}e^{-\lambda_1^{'}h_1}-\lambda_2^{'}e^{-\lambda_2^{'}h_1})+\rho_2 k^2(e^{-\lambda_1^{'}h_1}-e^{-\lambda_2^{'}h_1}),\\
b_2=gk^2(\rho_1-\rho_2)\lambda_2^{''}(e^{-\lambda_1^{'}h_1}-e^{-\lambda_2^{'}h_1}),\\
a_3=-e^{\lambda_1^{''}h_2},\ b_3=g\lambda_2^{''}e^{\lambda_2^{''}h_2},\\
a_4=\rho_1\lambda_1^{''}(\lambda_1^{'}e^{-\lambda_1^{'}h_1}-\lambda_2^{'}e^{-\lambda_2^{'}h_1})+\rho_2 k^2(e^{-\lambda_1^{'}h_1}-e^{-\lambda_2^{'}h_1}),\\
b_4=gk^2(\rho_1-\rho_2)\lambda_1^{''}(e^{-\lambda_1^{'}h_1}-e^{-\lambda_2^{'}h_1}).
\end{gathered} \tag{24}$$

Частота колебания поверхности раздела легко определяется из алгебраического уравнения (23). Однако зависимость для частоты получается весьма громоздкой, и ее анализ крайне сложен. В связи с этим принимаются определенные упрощающие допущения.

При $h_1\to\infty$ и $h_2\to\infty$ получается

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sigma}{k}\right)^2&=g\frac{(\rho_1-\rho_2)(s_2+2d_2)+\rho_1(s_1+2d_1)+\rho_2(-s_2+2d_2)}{\rho_1(s_1+2d_1)(s_2+2d_2)+4\rho_2k^2}\\
&\pm\frac{\sqrt{[(\rho_1-\rho_2)(s_2+2d_2)+\rho_1(s_1+2d_1)+\rho_2(-s_2+2d_2)]^2}}{\rho_1(s_1+2d_1)(s_2+2d_2)+4\rho_2k^2}\\
&-\frac{4(\rho_1-\rho_2)[\rho_1(s_1+2d_1)(s_2+2d_2)+4\rho_2k^2]}{\rho_1(s_1+2d_1)(s_2+2d_2)+4\rho_2k^2}.
\end{aligned} \tag{25}$$

При $s_1=s_2=0$ получаем

$$\left(\frac{\sigma}{k}\right)^2=\frac{g}{k}\ \frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2}. \tag{26}$$

Эта зависимость представляет фазовую скорость внутренней гравитационной волны. Рассмотрим вторую задачу.

$$\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi_1}{\partial z^2}+s_1\frac{\partial\phi_1}{\partial z}=0,\qquad -h_1\leqslant z\leqslant 0; \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2\phi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi_2}{\partial z^2}+s_2\frac{\partial\phi_2}{\partial z}=0,\qquad 0\leqslant z\leqslant h_2; \tag{28}$$

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial z}=0\qquad \text{при } z=h_2; \tag{29}$$

$$\rho_1\left(\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2}+g\frac{\partial^2\phi_1}{\partial z}\right)=\rho_2\left(\frac{\partial^2\phi_2}{\partial t^2}+g\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\right)\qquad \text{при } z=0; \tag{30}$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial z}=\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\qquad \text{при } z=0; \tag{31}$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial z}=0\qquad \text{при } z=-h_1. \tag{32}$$

Эта задача от предыдущей отличается тем, что верхняя граница верхнего слоя представляется жесткой и непроницаемой. В предыдущей задаче она представляла свободную волновую поверхность.

Для фазовой скорости внутренней волны получена следующая формула

$$c^2=\left(\frac{\sigma}{k}\right)^2=\frac{2g(\rho_1-\rho_2)}{\rho_1(s_1+2d_1\operatorname{cth}(d_1h_1))+\rho_2(-s_2+2d_2\operatorname{cth}(d_2h_2))}. \tag{33}$$

Эта формула представляет собой обобщение для непризматического водоема широко известной формулы для фазовой скорости

$$c^2=\frac{g}{k}\,\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}, \tag{34}$$

которая получается как частный случай из выражения (33) при $h_1\to\infty$ и $h_2\to\infty$.

В третьей задаче учитывается непризматическое очертание водоема как в вертикальном направлении, так и в продольном направлении. Краевая задача имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi_1}{\partial z^2}+s\frac{\partial\phi_1}{\partial x}+s_1\frac{\partial\phi_1}{\partial z}=0,\qquad -h_1\leqslant z\leqslant 0; \tag{35}$$

$$\frac{\partial^2\phi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi_2}{\partial z^2}+s\frac{\partial\phi_2}{\partial x}+s_2\frac{\partial\phi_2}{\partial z}=0,\qquad 0\leqslant z\leqslant h_2; \tag{36}$$

$$\frac{\partial^2\phi_2}{\partial t^2}+g\frac{\partial\phi_2}{\partial z}=0\qquad \text{при } z=h_2; \tag{37}$$

$$\rho_1\left(\frac{\partial^2\phi_2}{\partial t^2}+g\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\right)=\rho_2\left(\frac{\partial^2\phi_2}{\partial t^2}+g\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\right)\qquad \text{при } z=0; \tag{38}$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial z}=\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\qquad \text{при } z=0; \tag{39}$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial z}=0\qquad \text{при } z=-h_1. \tag{40}$$

Изменения ширины водоема учитывается по зависимости

$$B_1(x,z)=B_0e^{sx+s_1z}, \tag{41}$$

$$B_2(x, z) = B_0 e^{sx+s_2 z}. \tag{42}$$

Представленные краевые задачи имеют как теоретический интерес, так и практический. Практическое значение обусловлено тем, что в селективных водозаборных сооружениях имеют место слоистые течения воды с внутренними гравитационными волнами. Для обеспечения устойчивости поверхности раздела осветленной и мутной слоев воды необходимо проведение вышеприведенного анализа.

Литература

1. *Кочин Н. Б., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Т. 1.—М.: Физматгиз, 1963.—727 с.
2. *Лямб П.* Гидродинамика.—М.: Гостехиздат, 1947.—928 с.
3. *Стокер Дж. Дж.* Волны на воде.—М.: ИЛ, 1959.—617 с.