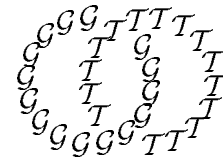


Geometry & Topology
 Volume 6 (2002) 563{607
 Published: 1 December 2002



Caracteres sur l'algebre de diagrammes trivalents

Bertrand Patureau-Mirand

*L.M.A.M. Universite de Bretagne-Sud, Centre de Recherche
 Campus de Tohannic, BP 573, F-56017 Vannes, France*

Email: bertrand.patureau@univ-ubs.fr

URL: <http://www.univ-ubs.fr/lmam/patureau/>

Abstract

The theory of Vassiliev invariants deals with many modules of diagrams on which the algebra defined by Pierre Vogel in [21] acts. By specifying a quadratic simple Lie superalgebra, one obtains a character on \mathcal{V} . We show the coherence of these characters by building a map of graded algebras between \mathcal{V} and a quotient of a ring of polynomials in three variables; all the characters induced by simple Lie superalgebras factor through this map. In particular, we show that the characters for the Lie superalgebra $\mathfrak{f}(4)$ with dimension 40 and for \mathfrak{sl}_3 are the same.

Resume

De nombreux modules de diagrammes sont utilises dans la theorie des invariants de Vassiliev. Pierre Vogel a defini dans [21] une algebre qui agit sur ces espaces. Les superalgebres de Lie simples quadratiques fournissent des caracteres sur \mathcal{V} . On montre leur coherence en construisant un morphisme d'algebre graduee, entre \mathcal{V} et un quotient d'un anneau de polynome en trois variables, qui factorise tous ces caracteres. En particulier, on montre que le caractere associe a la superalgebre de Lie $\mathfrak{f}(4)$ de dimension 40 coincide avec celui associe a \mathfrak{sl}_3 .

AMS Classification numbers Primary: 57M27

Secondary: 57M25 17B10

Keywords: Finite type invariants, weight system, representation theory

Proposed: Vaughan Jones

Received: 4 July 2001

Seconded: Robion Kirby, Joan Birman

Accepted: 28 October 2002

Introduction

Cet article est tiré de mon travail en thèse. Il s'agit de la démonstration du théorème 2.1 que j'ai annoncé dans [17].

L'intégrale de Kontsevich associe à un entrelacs son invariant de Vassiliev-Kontsevich universel qui prend ses valeurs dans un espace vectoriel engendré par les diagrammes de cordes. Les espaces de diagrammes trivalents (généralisant les diagrammes de cordes) ne sont connus que par une présentation. Même les dimensions de ces espaces restent aujourd'hui inconnues.

D. Bar-Natan publie en 1995 un article dans lequel il utilise des algèbres de Lie quadratiques (munies de formes bilinéaires invariantes non dégénérées) pour détecter des éléments des modules de diagrammes. Il construit des fonctions de poids, qui sont des applications sur ces modules de diagrammes. Composées avec l'invariant universel, elles donnent des invariants de type \mathfrak{sl}_n à valeurs dans les tenseurs invariants d'une algèbre de Lie.

La même année, P. Vogel introduit des structures algébriques supplémentaires sur ces modules de diagrammes et commence une étude systématique de ces objets et des fonctions de poids qui y sont définies. En particulier, il définit une algèbre \mathfrak{sl}_n qui agit sur plusieurs de ces modules. Les fonctions de poids provenant de superalgèbres de Lie simples induisent des caractères sur cette algèbre, à l'aide desquels il a été possible de montrer que les invariants de type \mathfrak{sl}_n sont plus vastes que ceux correspondant aux invariants quantiques classiques. La compréhension de cette algèbre est centrale pour la connaissance globale des invariants de type \mathfrak{sl}_n .

Toute variété de dimension trois peut être obtenue en faisant de la chirurgie le long d'un entrelacs en bande. Cette description est utilisée en 1995 par T. Le, H. et J. Murakami et T. Ohtsuki pour construire un invariant universel de type \mathfrak{sl}_n pour les variétés de dimension trois. Le logarithme de cet invariant prend ces valeurs dans un espace isomorphe au complété de l'algèbre \mathfrak{sl}_n . L'année suivante, T. Le et J. Murakami donnent, en utilisant les travaux de Drinfeld, une version algébrique de l'invariant universel de type \mathfrak{sl}_n .

Ce texte est organisé de la manière suivante:

Dans la première partie, j'introduis les modules de diagrammes et je rappelle leur lien avec l'intégrale de Kontsevich.

Dans la deuxième partie, j'introduis les fonctions de poids associées aux superalgèbres de Lie et j'énonce le théorème 2.1 sur la cohérence des caractères. Sa

demonstration repose sur la construction, dans la troisieme partie, d'un morphisme d'algebre graduee entre et un quotient d'un anneau de polynome a trois variables qui factorise tous les caracteres induits par les superalgebres de Lie simples.

Les cas des superalgebres $\mathfrak{g}(3)$ et $\mathfrak{f}(4)$ est traite separement dans la quatrieme partie.

Remerciements Je remercie P. Vogel qui a suivi ce travail durant ma these de doctorat et le refere a qui est dû cet index des notations.

Index des notations

\dots		designe une variete de dimension 1 a bord
X		designe un ensemble fini
$[n]$		ensemble des entiers de 1 a n
$\mathfrak{S}(X), \mathfrak{S}_n$		groupe des permutations de X (resp. de $[n]$)
$A(\cdot; X)$	(1.1)	espace des $(\cdot; X)$ {diagrammes
$F(X); F_n$	(1.1)	espace des $(\cdot; X)$ {diagrammes connexes ($F_n = F([n])$)
\dots	(1.3)	algebre des diagrammes "a 3 jambes"
$\mathfrak{o}; t; x_n$	(1.3)	\mathfrak{o} est la sous algebre de engendree par les elements t, x_n
\square		les caracteres (morphisms d'algebres gradues) sur sont notes par la lettre
D	(2.1)	categorie des $(\cdot; X)$ {diagrammes
D	(2.1)	categorie des $((S^1)^{qn}; X)$ {diagrammes
D_b	(2.1)	categorie dans laquelle les morphismes sont les diagrammes connexes relativement au but
$D \dashv \text{Mod}_L$	(2.1)	foncteur monoïdal lineaire associe a L
$S = \mathbb{Q}[t; u; v]$	(2.2)	anneau gradue contenant les polynomes $P_{\mathfrak{sl}}, P_{\mathfrak{osp}}, P_{\mathfrak{D}_{2,1}}, P_{\mathfrak{sl}_2}, P_{\mathfrak{e}_7}, Q_{\mathfrak{e}_7}$
$D_{\mathfrak{osp}}, D_{\mathfrak{sl}}, D_{\mathfrak{gl}}$	(3.2.1)	categories quotientes de D et leur foncteur quotient
$D_{\mathfrak{gl}_0}, \dots$	(3.4.3)	variante de $D_{\mathfrak{gl}}$ correspondant a une superdimension nulle
$\mathcal{M}; \mathcal{M}$	(3.2.1)	categorie des X {surfaces marquées et le foncteur d'epaississement $D \dashv \mathcal{M}$
S	(3.2.1)	algebre du monoïde des surfaces compactes $S = \mathbb{Q}[\cdot; \cdot]_{=(\cdot - 3)}$
$M(X), M[n]$	(3.2.1)	espace des X { (resp. $[n]$ {) surfaces marquées (resp. connexes)
$M_c(X)$		
$R; \alpha; \beta; \gamma$	(3.3)	$R = \mathbb{Q}[a; b; c]_{=(a+b+c)}$ contient les elements $\alpha = ab + bc + ca$ et $\beta = \gamma = abc$

$\mathfrak{D}_{21} \dots\dots\dots$	(3.3)	R {superalgebre de Lie generique pour les super-algebres \mathfrak{D}_{21} ;
$\overline{\mathfrak{D}_{21}} \dots\dots\dots$	(3.3)	$\overline{\mathfrak{D}_{21}} = \mathfrak{D}_{21} \otimes_R k$ ou k est le corps des fractions de R
$N = \mathbb{N}qN_3qN_6$	(3.5.2)	ensembles de multi-entiers munis d'un bon ordre
$W \dots\dots\dots$	(3.5.2)	diagrammes, formes de generalisations des roues, parametres par N
$f_K \dots\dots\dots$	(3.5.2)	application obtenue par recollement du diagramme K
$R ; R \dots\dots\dots$	(3.5.2)	filtration de F_0 indexee par N et gradue associee
$\mathcal{A}(X_1; X_2),$	(4)	espace des diagrammes bicolores (resp. modulo la relation (THX))
$\overline{\mathcal{A}}(X_1; X_2) \dots\dots$		
$\mathcal{D}, \overline{\mathcal{D}} \dots\dots\dots$	(4)	categorie des diagrammes bicolores (resp. modulo la relation (THX))

1 Les diagrammes trivalents

1.1 Modules de diagrammes

Dans tout ce qui suit, \mathcal{X} sera une variete compacte de dimension un a bord et X denote un ensemble fini. Un $(\mathcal{K}; \mathcal{X})$ {diagramme est un graphe fini K , dont tous les sommets sont trivalents ou monovalents, muni des donnees suivantes:

- (1) Un isomorphisme d'un sous-graphe de K vers qX envoyant l'ensemble des sommets monovalents de K sur $@ \cap X$.
- (2) Pour chaque sommet trivalent x de K , un ordre cyclique sur l'ensemble des trois arêtes orientees arrivant en x .

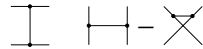
On peut représenter un $(\mathcal{K}; \mathcal{X})$ {diagramme par un graphe trivalent immerge dans le plan de maniere a ce que l'ordre cyclique en chaque sommet soit donne par l'orientation du plan. On representera d'un trait plus epais les arêtes appartenant a \mathcal{X} .

Soit E le quotient du \mathbb{Q} {espace vectoriel librement engendre par les diagrammes trivalents par les relations suivantes:

- (1) Si deux diagrammes ne different que par l'ordre cyclique de l'un de leurs sommets, leur somme est nulle (relation dite (AS) pour antisymetrie):

$$\begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \\ | \\ \diagup \end{array} = 0$$

- (2) La relation (IHX) fait intervenir trois diagrammes qui ne diffèrent qu'au voisinage d'une arête:



- (3) La relation (STU) qui est une variation de la relation (IHX) au voisinage de :



On designe par $A(\cdot; X)$ le sous-espace de E engendré par les $(\cdot; X)$ {diagrammes et par $F(X)$ le sous-espace de E engendré par les $(\cdot; X)$ {diagrammes connexes ayant au moins un sommet trivalent.

En n , on note $[n]$ l'ensemble $\{1; 2; \dots; n\}$ et F_n pour $F([n])$.

On définit le degré d'un diagramme $K \in E$ par $a - s$ où a et s sont les nombres d'arêtes et de sommets trivalents de K . Ainsi, ces modules sont munis d'une graduation. On note d le diagramme de $A(\cdot; \cdot)$ forme d'un seul cercle et on conviendra que son degré est nul.

Toute bijection entre des ensembles finis X et Y induit une bijection entre $A(\cdot; X)$ et $A(\cdot; Y)$. En particulier le groupe symétrique S_n opère sur F_n .

On dira qu'un diagramme K a n boucles si la dimension de son premier groupe d'homologie est n (i.e. $\dim(H_1(K)) = n$). Si n est un entier strictement positif, le degré d'un diagramme de F_n est égal à son nombre de boucles plus $n - 1$.

On a ici repris les notations de [21] à l'exception des coefficients qui sont ici rationnels, de la définition du degré et des définitions de F_n qui n'entraînent des modifications que pour F_0 et F_2 qui sont ici pris nuls en degrés respectifs zéro et un.

1.2 L'integrale de Kontsevich

Il est connu que le module gradué $A = A(S^1; \cdot)$ peut être muni d'une structure d'algebre de Hopf graduée, commutative et cocommutative.

L'algebre A est donc l'algebre symétrique du sous-module gradué P formé par ses éléments primitifs et ce module est relié aux modules F_n par l'isomorphisme:

$$P \cong \bigoplus_{n=2}^{\infty} H^0(F_n; S_n)$$

Si on note \circ le $(S^1; \cdot)$ {diagramme représenté par le cercle et un de ses diamètres, alors l'intégrale de Kontsevich associe à chaque nœud orienté son invariant de Vassiliev universel à valeurs dans l'algebre \hat{A}_r qui est la complétée pour la graduation du quotient $A_{=}$.

1.3 L'algebre

Dans cette section est introduite l'algebre graduee de diagramme qui agit de maniere naturelle sur les modules $F(X)$.

est de nie comme le sous-espace vectoriel forme des elements de F_3 totale-ment antisymetriques sous l'action du groupe symetrique.

est naturellement munie d'une structure d'algebre commutative et agit sur chaque module $F(X)$. Si u appartient a et $K \supseteq F(X)$ est un diagramme, un diagramme representant $u:K$ est obtenu en inserant u au niveau d'un sommet trivalent de K . A n de rendre cette action coherente avec les graduations des modules, on convient de de nir le degre d'un element de comme son degre dans F_3 moins deux (de sorte que l'unite de est de degre nul).

On a la description suivante de F_n pour n petit (cf [21]): F_0 est un {module libre de rang un engendre par l'unique diagramme (aux relations AS pres) de degre un; F_1 est nul; F_2 est un {module libre de rang un engendre par l'unique diagramme (aux relations AS pres) de degre deux. De plus on ne conna^t pas d'exemple d'element de F_3 qui ne soit pas dans . D'autre part, est engendree en degre 1 par l'element t ci dessous et on peut construire la famille x_n d'elements de qui engendrent avec t une sous-algebre de notee 0 .

$$t = \triangle = \frac{1}{2} \circlearrowleft \quad x_n = \triangle_{n-2}$$

Il n'y a pas de contre-exemple a la conjecture suivante: = 0. C'est la motivation principale de cet article.

2 Fonction de poids associee a une superalgebre de Lie quadratique

2.1 Le foncteur L

Dans cette partie, nous introduisons les fonctions de poids generalisees associees aux superalgebres de Lie quadratique. Ces applications sont aujourd'hui les seules manieres connues de detecter la non nullite des elements des modules de diagrammes.

Soit L une superalgebre de Lie sur un corps k de caracteristique nulle munie d'un element de Casimir non degenerate $\supseteq L \supseteq L$ de degre pair. Le Casimir

fournit un isomorphisme de L module entre L et son dual et la forme bilineaire sur L supersymetrique invariante associee sera notee $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On construit une categorie D de diagrammes et un foncteur, note \mathcal{L} , de D vers la categorie Mod_L des representations de L .

Soit D la categorie \mathbb{Q} lineaire monoïdale de nie par:

$$\text{Obj}(D) = \{[n]; n \in \mathbb{N}\}$$

$$D([p]; [q]) = A([p] \otimes [q])$$

La composition d'un diagramme de $[p]$ vers $[q]$ avec un diagramme de $[q]$ vers $[r]$ est donnee par la reunion au dessus de $[q]$ des deux diagrammes (on les recolle en identifiant les sommets monovalents de même index des deux ensembles $[q]$). On etend cette definition par linearite a des combinaisons lineaires de diagrammes.

Le produit tensoriel $[p] \otimes [q]$ vaut $[p+q]$ et celui de deux diagrammes est donne par l'image de leur reunion disjointe par l'isomorphisme de $[p] \otimes [q] \cong [p+q]$ obtenu en augmentant de p chaque element de $[q]$.

Proposition 2.1 (cf [21])

Il existe un unique foncteur \mathbb{Q} lineaire monoïdal \mathcal{L} de la categorie D vers la categorie Mod_L envoyant $[n]$ sur $L^{\otimes n}$ et les diagrammes suivants:



vers respectivement:

- (1) Le Casimir $\in L^{\otimes 2} \otimes \text{Mod}_L(\mathbb{Q}; L^{\otimes 2})$
- (2) Le crochet de Lie de $L^{\otimes 2}$ vers L
- (3) Le produit scalaire associe au Casimir de $L^{\otimes 2}$ vers \mathbb{Q}
- (4) Le dual du crochet de Lie de L vers $L^{\otimes 2}$
- (5) L'operateur de symetrie: $L^{\otimes 2} \rightarrow L^{\otimes 2}$

$$x \otimes y \mapsto (-1)^{\text{deg}(x)\text{deg}(y)} y \otimes x$$

D'autre part, si L est simple, il existe un caractere gradue: $\chi: L \rightarrow \mathbb{Q}[x]$ verifiant:

$$\chi([p] \otimes [q]) = \chi([p+q]); \chi([p]; [q]) = \chi([p]) \chi([q]); \chi(uK) = \chi(u) \chi(K)$$

Remarque On peut définir la notion de "pseudo-algèbre de Lie" comme une catégorie L \mathbb{Q} -linéaire monoïdale munie d'un foncteur Id_L de D vers L . Ceci signifie que L possède un objet particulier noté L , un opérateur de symétrie (endomorphisme de $L^{\otimes 2}$) induisant une représentation de groupe symétrique \mathfrak{S}_n dans les endomorphismes de $L^{\otimes n}$, un opérateur de Casimir symétrique ayant pour adjoint un morphisme $\langle \cdot, \cdot \rangle : L^{\otimes 2} \rightarrow L$ (dans le sens où $L \otimes L \xrightarrow{\text{Id}_L} L^{\otimes 3} \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} L \xrightarrow{\text{Id}_L} L$) et un opérateur "crochet de Lie" $[\cdot, \cdot] : L^{\otimes 2} \rightarrow L$ antisymétrique et vérifiant l'identité de Jacobi.

La proposition dit alors que la catégorie des représentations d'une superalgèbre de Lie quadratique a naturellement une structure de pseudo-algèbre de Lie.

Si f est une bijection de $[\rho] \mathcal{Q} [q]$ vers $[r] \mathcal{Q} [s]$, alors f induit un isomorphisme de $\text{Hom}_L(L^{\otimes \rho}; L^{\otimes q})$ vers $\text{Hom}_L(L^{\otimes r}; L^{\otimes s})$ (par l'autodualité de L) mais aussi un isomorphisme de $A(\cdot; [\rho] \mathcal{Q} [q])$ vers $A(\cdot; [r] \mathcal{Q} [s])$ et il est facile de voir que $f \circ \text{Id}_L = \text{Id}_L \circ f$. En particulier, si $\rho + q = n$, on identifie souvent F_n à un sous-module de $A(\cdot; [\rho] \mathcal{Q} [q])$.

On peut définir des variantes du foncteur Id_L :

On définit D comme la catégorie ayant les mêmes objets que D mais dont les morphismes sont donnés par

$$D([\rho]; [q]) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A((S^1)^{qn}; [\rho] \mathcal{Q} [q])$$

Si d'autre part E est un L -module, on peut encore montrer qu'il existe un unique foncteur $\text{Id}_{L;E} : D \rightarrow \text{Mod}_L$ prolongeant Id_L et envoyant



sur $x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n \in \text{str}_E(x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n)$. La notation str_E désigne la supertrace sur le supermodule E et, par la suite, on notera $\text{sdim}(E)$ la superdimension d'un module E (qui est égale à la dimension de la partie paire de E moins la dimension de sa partie impaire).

Si L est une superalgèbre de Lie sur une \mathbb{Q} -algèbre R munie d'un élément de Casimir $\omega \in L \otimes R \otimes L$ et si l'on considère D_b la sous-catégorie de D ayant les mêmes objets et dont les morphismes sont engendrés par les $(\cdot; [\rho] \mathcal{Q} [q])$ (diagrammes dont toutes les composantes connexes rencontrent $[q]$), alors on peut définir de même un foncteur R -linéaire $\text{Id}_L : D_b \rightarrow \text{Mod}_L$ qui coïncide avec la restriction à D_b du foncteur Id_L de la proposition si R et L satisfont aux hypothèses.

En n on se servira du lemme:

Lemme 2.1 Soit $f: R \rightarrow R'$ un morphisme entre deux \mathbb{Q} {algebres commutatives, et $f: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$ un morphisme entre la R {superalgebre de Lie \mathfrak{h} et la R' {superalgebre de Lie \mathfrak{g} ; par f , \mathfrak{g} est naturellement munie d'une structure de R {module et on suppose que f est un morphisme de R {algebre de Lie. Si \mathfrak{h} possede un element de Casimir invariant $C_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ qui est envoye par f sur $f(C_{\mathfrak{h}}) \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ element de Casimir \mathfrak{g} {invariant de \mathfrak{g} , alors l'application f induite par f et f entre la R {algebre tensorielle de \mathfrak{h} et la R' {algebre tensorielle de \mathfrak{g} veri e pour tout $K \in D_b([p]; [q])$,

$$f_{\mathfrak{h}; K} = f_{\mathfrak{g}; f(K)} \circ f$$

Ce lemme est une consequence du fait que D_b est engendree comme categorie \mathbb{Z} {lineaire mono'dale par les morphismes "\crochet", "\Casimir" et "\symetrie" qui veri ent tous le lemme par hypothese.

2.2 Proprietes communes a tous les foncteurs L

On conna^t la liste complete des superalgebres de Lie simples complexes quadratiques (cf [10] et [21]). Elle est formee des superalgebres $\mathfrak{sl}(V)$ ou V est un superespace de superdimension non nulle, des superalgebres $\mathfrak{psl}(V)$ si V est de superdimension nulle, des superalgebres $\mathfrak{osp}(V)$ lorsque V est muni d'une forme bilineaire supersymetrique non degeneratee, les superalgebres $\mathfrak{D}_{2,1}$, ou t est un parametre complexe di erent de 0 et de 1, les cinq algebres exceptionnelles, les deux superalgebres $\mathfrak{g}(3)$ et $\mathfrak{f}(4)$ et en n les superalgebres hamiltoniennes. Nous excluons ces dernieres qui induisent sur L le caractere trivial (cf [21], derniere remarque de la partie 6).

L'action du Casimir $C_{\mathfrak{h}}$ de L sur $L^{\otimes n}$ s'exprime comme l'image par L d'un diagramme de $A(; ; [n]q[n])$. Sous l'action du Casimir, $L^{\otimes n}$ se scinde en espaces caracteristiques. En particulier, il est facile de voir que $C_{\mathfrak{h}}$ agit par $2t$ sur L (ou l'on note encore t l'element $C_{\mathfrak{h}}(t)_{j \times 1}$).

Sur $L^{\otimes 2}$, $C_{\mathfrak{h}}$ agit comme $4t - 2$ ou:

$$= L(\boxplus)$$

On peut toujours decomposer $L^{\otimes 2}$ de la maniere suivante:

$$L^{\otimes 2} = {}^2L \oplus S^2L$$

De plus si $t \neq 0$, 2L se decompose en la somme directe $L \oplus X_2$, agit par t sur L et par 0 sur X_2 . Si L est l'une des superalgebre de Lie de la famille $\mathcal{D}_{2,1}$; alors $t = 0$ et 2L est une extension generalement non scindee de X_2 (noyau du crochet de Lie) par L .

En n, dans tous les cas, S^2L s'ecrit $\mathbb{Q} \oplus E$ (le module trivial etant engendre par le Casimir) et le module E se decompose en trois espaces propres, les valeurs propres associees u, v, w ont pour somme t . Certains des modules cites ci-dessus peuvent eventuellement être nuls mais il existe toujours des elements $u(L) = -\frac{t}{2}$ et $v(L) = \frac{t}{2}$ tels que sur E on ait la relation

$$w^3 = t^2 + 2u^2 + 2v^2 \quad (1)$$

Le triplet $(u, v, w) \in \mathbb{C}^3$ sera dit admissible pour (L, t) si l'equation (1) est verifiee. Si un triplet est admissible pour L , tout triplet obtenu par permutation des trois valeurs (u, v, w) est bien sûr aussi admissible. De même, tout triplet non nul proportionnel a ce triplet sera admissible pour un autre choix du Casimir.

Si L n'est pas isomorphe a l'algebre de Lie \mathfrak{sl}_2 , et a permutation des trois valeurs pres, l'ensemble des triplets admissibles pour L sont sur une unique droite de l'espace a une $\mathbb{C}[u, v, w]$. Il leur correspond donc un unique point de $\mathbb{P}(\mathbb{C}[u, v, w])$. Pour \mathfrak{sl}_2 , toujours a permutation pres des trois valeurs, l'ensemble des triplets admissibles forme une droite du plan projectif complexe $\mathbb{P}(\mathbb{C}[u, v, w])$.

Des superalgebres distinctes peuvent avoir les mêmes triplets admissibles; c'est le cas pour \mathfrak{sl}_3 et $\mathfrak{f}(4)$, et de même, les triplets admissibles pour $\mathfrak{g}(3)$ le sont aussi pour \mathfrak{sl}_2 .

On peut remarquer que l'ensemble de tous les triplets admissibles se trouve sur cinq reunions de droites de $\mathbb{P}(\mathbb{C}[u, v, w])$:

L'algebre \mathfrak{sl}_2 est un cas particulier: E est alors simple et w vaut $-t$. Tous les triplets de la forme $(-t; 2t; -t)$ sont admissibles pour \mathfrak{sl}_2 . On a toujours, a permutation des racines de \mathfrak{sl}_2 pres, $t+ = 0$ et le polynôme $P_{\mathfrak{sl}_2} = \frac{1}{2}(t+)(t+)(t+) = v - ut + t^3$ est toujours nul.

Si L est l'algebre $\mathfrak{sl}(V)$ ou V est un supermodule de superdimension n , alors les triplets de la forme $(2; -2;)$ sont admissibles pour pour L . A permutation des racines de $\mathfrak{sl}(V)$ pres, on a donc toujours $t+ + t- = 0$, donc le polynôme de ni par $P_{\mathfrak{sl}} = v + ut$ est nul.

Si L est l'algebre $\mathfrak{osp}(V)$ ou V est un supermodule muni d'une forme bilineaire supersymetrique non degeneratee de superdimension n , alors les

triplets de la forme $(4; -2; -4)$ sont admissibles pour L . A permutation des racines de \mathfrak{sl}_3 pres, on a $\lambda + 2\mu = 0$, donc le polynôme de ni par $P_{osp} = 27v^2 + 18vut + 2vt^3 - 8u^3 + 8u^2t^2$ est nul.

Si L est une des superalgebres de Lie $\mathfrak{D}_{2,1}$, ou \mathfrak{sl}_3 est un nombre complexe quelconque, alors le triplet $(1; \lambda; -1 - \lambda)$ est admissible pour L . La somme t des racines de \mathfrak{sl}_3 est nulle et on pose $P_{\mathfrak{D}_{2,1}} = t$.

Si L est une algebre de Lie exceptionnelle, \mathfrak{sl}_3 a deux valeurs propres de somme $\frac{t}{3}$. Les triplets admissibles pour L sont donc de la forme $(\frac{2t}{3}; (L); \frac{t}{3} - (L))$ et le polynôme $P_{\mathfrak{ex}} = 27v + 18ut + 2t^3$ est nul.

Dans la suite, on note $S = \mathbb{Q}[t; u; v]$ l'anneau des polynômes a trois indeterminées de degre respectif 1, 2 et 3. Pour chaque superalgebre de Lie quadratique munie d'un triplet admissible L , on pose $I_L = Ker(f_L)$ ou f_L est le morphisme d'algebre graduee de S dans $\mathbb{Q}[\chi]$ qui envoie les indeterminées t, u et v sur leurs valeurs respectives $t(L)\chi, u(L)\chi^2$ et $v(L)\chi^3$ dans $\mathbb{Q}[\chi]$. Nous allons montrer le theoreme:

Theoreme 2.1 Soit $I = \bigcap_L I_L$ alors il existe un unique caractere gradue $\chi : S/I \rightarrow \mathbb{C}$ tel que pour toute superalgebre de Lie L de la liste ci-dessus, on ait:

$$\chi \circ f_L = \text{tr}_L$$

Remarque L'ideal I du theoreme est la somme des deux ideaux principaux engendres par les polynômes P et Q suivants:

$$P = P_{\mathfrak{sl}_3} P_{osp} P_{\mathfrak{D}_{2,1}} P_{\mathfrak{sl}_2} P_{\mathfrak{ex}}$$

$$Q = P_{\mathfrak{sl}_3} P_{osp} P_{\mathfrak{D}_{2,1}} P_{\mathfrak{sl}_2} Q_{\mathfrak{ex}}$$

ou $Q_{\mathfrak{ex}}$ est le polynôme de degre dix de ni section 3.5.1. D'autre part les calculs de [11] montrent l'existence d'un morphisme d'algebre surjectif:

$$S_0 = \mathbb{Q}[t] \xrightarrow{P_{\mathfrak{sl}_2}} S \xrightarrow{-I} 0$$

dont la composee avec χ est le morphisme quotient.

Les calculs par ordinateur de [11] montrent en outre que l'application $S_0 \rightarrow \mathbb{C}$ est un isomorphisme en degre inferieur ou egal a dix.

Remarques sur

La nullité d'une combinaison linéaire de diagrammes est très difficile à détecter car la taille des présentations des modules de diagrammes croît très vite avec le degré. Ainsi, lorsque P. Vogel a construit les éléments x_n qui forment la sous-algèbre \mathfrak{so}_0 de \mathfrak{so} , il a montré que ces éléments pris pour n impair suffisent à engendrer \mathfrak{so}_0 et il n'y avait pas a priori de raison de supposer l'existence d'autres relations entre les x_n . J.A. Kneissler a ensuite montré l'existence de relations supplémentaires permettant de construire le morphisme d'algèbre $S_0 \rightarrow \mathfrak{so}_0$. Cela donnait à penser que \mathfrak{so}_0 aurait pu être isomorphe à l'anneau S_0 . Ceci aussi s'est révélé inexact:

Les calculs récents de P. Vogel montrent que le polynôme P ci-dessus, vu comme élément de S_0 s'envoie sur 0 dans \mathfrak{so}_0 . La question de savoir si le polynôme Q est nul dans \mathfrak{so}_0 reste ouverte. Cette question est liée à la conjecture de P. Deligne (cf [4], [2] et [5]) sur l'existence d'une catégorie monoïdale, linéaire à coefficients polynomiaux, universelle pour la famille des (super)algèbres de Lie exceptionnelles.

3 Démonstration de l'existence de

3.1 Les caractères fondamentaux

Dans [21], huit caractères gradés fondamentaux sont construits et tout caractère provenant d'une des superalgèbres de Lie simple mentionnée se déduit de l'un d'eux; ces huit caractères sont:

$$\mathfrak{sl}: \quad \mathbb{Q}[t_1, t_2] \text{ (degré}(t_1) = 1, \text{ degré}(t_2) = 2).$$

$$\mathfrak{osp}: \quad \mathbb{Q}[t_1, t_2] \text{ (degré}(t_1) = 1, \text{ degré}(t_2) = 1).$$

$$\mathfrak{d}_{2,1}: \quad \mathbb{Q}[t_2, t_3] \text{ (degré}(t_2) = 2, \text{ degré}(t_3) = 3).$$

les cinq caractères \mathfrak{L} à valeurs dans $\mathbb{Q}[t]$ pour les algèbres de Lie exceptionnelles $L_2 \cong \mathfrak{fg}_2; \mathfrak{f}_4; \mathfrak{e}_6; \mathfrak{e}_7; \mathfrak{e}_8$.

On construit des caractères à valeurs dans des quotients de S à l'aide de ces huit caractères.

3.2 Le caractère χ_1 pour les familles \mathfrak{sl} et \mathfrak{osp}

Dans cette section, on construit un caractère χ_1 qui réalise le théorème pour tous les triplets annulés par les polynômes $P_{\mathfrak{sl}}$ et $P_{\mathfrak{osp}}$.

3.2.1 Le foncteur $M: \mathfrak{sl}(1) = \mathfrak{osp}(1)$

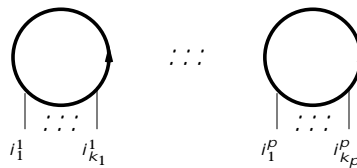
Les caracteres \mathfrak{sl} et \mathfrak{osp} permettent de definir des caracteres $\mathfrak{sl}(E)$ et $\mathfrak{osp}(E)$ sur \mathcal{D} pour une valeur formelle de la superdimension de E . Dans les deux cas, en faisant tendre cette superdimension vers $+1$, on obtient deux caracteres limites correspondant au même triplet $(1;0;0)$. Cette premiere construction permet de montrer la coïncidence de ces deux caracteres limites.

En reprenant les constructions d'épaississement de [1], il est facile de construire une categorie \mathcal{M} monoïdale, $\mathbb{Q}\{$ lineaire et un foncteur

$M: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{M}$ qui factorise tous les foncteurs $\mathfrak{gl}(E)$ et $\mathfrak{osp}(E)$ (La construction repose sur les representations standards de \mathfrak{gl} et \mathfrak{osp}):

Definitions et notations

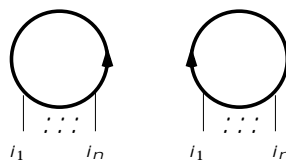
On designe les elements de \mathfrak{S}_n comme produit de cycles disjoints. Par exemple, $(1;2)(3)$ designe la transposition de \mathfrak{S}_3 qui echange 1 et 2. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est l'element $(i_1^1; \dots; i_{k_1}^1) \dots (i_1^p; \dots; i_{k_p}^p)$, on designe par $\langle \sigma \rangle$ le diagramme suivant de $A((S^1)^{qp}; [n])$:



On note $\langle \sigma \rangle$ le $(S^1; \dots)$ diagramme forme du seul cercle et on definit \mathcal{D}_n (respectivement \mathcal{D}_n^0) comme le sous $\mathbb{Q}\{$ module libre de $\mathcal{D}([0]; [n])$ de base $f\langle \sigma \rangle; \sigma \in \mathfrak{S}_n g$ (respectivement $f\langle \sigma \rangle; \sigma \in \mathfrak{S}_n; a$ un point $x \in g$).

Ensuite, on definit les categories quotientes $D_{\mathfrak{osp}}, D_{\mathfrak{gl}}$ et $D_{\mathfrak{sl}}$ de \mathcal{D} (et les foncteurs quotients $\mathfrak{osp}, \mathfrak{gl}$ et \mathfrak{sl}) obtenues en annulant les morphismes suivants:

Pour $D_{\mathfrak{osp}}$:



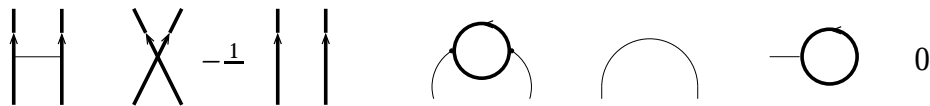
(On oublie l'orientation des courbes des diagrammes.)



Pour $D_{\mathfrak{gl}}$:



Pour $D_{\mathfrak{sl}}$:



Cette dernière catégorie est en fait un quotient de $D \cong \mathbb{Q}[\ ; \ -1]$

Proposition 3.1 Soit E un superspace vectoriel de dimension finie. On adopte le choix suivant pour la forme bilinéaire de $\mathfrak{osp}(E)$ (respectivement $\mathfrak{gl}(E)$ et $\mathfrak{sl}(E)$): $\langle x; y \rangle = \frac{1}{2} \text{str}_E(xy)$ (respectivement $\langle x; y \rangle = \text{str}_E(xy)$).

Le foncteur $\mathfrak{osp}(E); E$ se factorise par \mathfrak{osp} .

Le foncteur $\mathfrak{gl}(E); E$ se factorise par \mathfrak{gl} .

Si la superdimension de E est non nulle, le foncteur $\mathfrak{sl}(E); E$ se factorise par \mathfrak{sl} .

On a les isomorphismes naturels:

$$D_{\mathfrak{gl}}([p]; [q]) \cong \mathbb{Q}[\ ; \ -1]^{p+q} \text{ et } D_{\mathfrak{sl}}([p]; [q]) \cong \mathbb{Q}[\ ; \ -1]^{p+q} \oplus \mathbb{Q}[\ ; \ -1]^{p+q}$$

$$\exists K \in \mathcal{F}_n, \exists X \in \mathcal{X}_n \text{ tel que } \mathfrak{gl}(K) = \mathfrak{gl}(X) \text{ et } \mathfrak{sl}(K) = \mathfrak{sl}(X).$$

Les caractères \mathfrak{sl} et \mathfrak{osp} sont déterminés par:

Si K appartient à \mathcal{F}_n , si u est un élément de \mathcal{X}_n , si les polynômes P et Q vérifient $\mathfrak{sl}(u) = P(\ ; \)$ et $\mathfrak{osp}(u) = Q(\ ; \)$ alors

$$\mathfrak{gl}(u; K) = P(\ ; \ 1) \mathfrak{gl}(K) \text{ et } \mathfrak{osp}(u; K) = Q(\ ; \ 1) \mathfrak{osp}(K)$$

Pour la démonstration de cette proposition, nous renvoyons aux arguments de [21] sections 6.3 à 6.7.

Le concept de surface marquée et l'application d'épaississement des diagrammes introduits par Bar-Natan ([1]), sont ici utilisés pour construire M :

De nition de M

On introduit d'abord la notion de X {surface marquee qui sera la donnee d'une classe d'isomorphisme de surface compacte a bord munie d'une bijection entre l'ensemble ∂X et des tangentes non nulles au bord, prises en des points distincts. Deux telles surfaces sont isomorphes s'il existe un di eomorphisme entre elles qui respecte les bijections de X vers les tangentes de chacune.

On note $M(X)$ (respectivement $M[n]$) le \mathbb{Q} {espace vectoriel engendre par les X {surfaces marrees (respectivement les $[n]$ {surfaces marrees) quotiente par les relations suivantes: Si V est une X {surface marquee et si V^θ est obtenue en remplaçant l'une des tangentes de V par son opposee, alors:

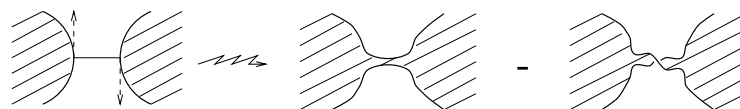
$$V^\theta = -V$$

Comme pour $F(X)$, le groupe symetrique $\mathfrak{S}(X)$ agit sur $M[X]$ et en reproduisant la construction de D , on de nit M par:

$$\text{Obj}(M) = \{[n]; n \in \mathbb{N}\}$$

$$M([p]; [q]) = M([p] \cup [q]) + M[p + q]$$

Le produit tensoriel sur M est donne par la reunion disjointe, la composition $V_1 \circ V_2$ est construite de la maniere suivante: On joint chaque tangente du but de V_1 a la tangente correspondante de la source de V_2 puis on epaissit en appliquant la regle suivante:



En n M prend les valeurs suivantes:

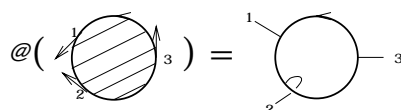
$$M\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \cup \\ \text{---} \end{array} \right) = \frac{1}{2} \text{---} \quad M\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \cap \\ \text{---} \end{array} \right) = \frac{1}{2} \text{---}$$

Il est facile de voir que dans $M[2]$ et $M[3]$, ces deux surfaces presentent les mêmes symetries que les diagrammes correspondants et un simple calcul montre que l'image par M d'une relation (IHX) est bien nulle.

On de nit alors les foncteurs $@_{\text{gl}}$ et $@_{\text{osp}}$ entre les categories M et D :

Si V est une $[n]$ {surface marquee ayant p composantes de bord et si σ est une orientation de $@V$, on designe par $@(V; \sigma)$ le diagramme forme des p cercles

orientes constituant le bord de $@V$ sur lequel on a " n jambes" numerotees aux lieux des n tangentes:



On pose alors:

$$\begin{aligned}
 @_{\text{gl}}(V) &= \sum_{x \text{ orientation de } V} @_x(V; (x)) \\
 @_{\text{osp}}(V) &= 2^{-p} \sum_{\text{orientation de } @V} @_x(V;)
 \end{aligned}$$

(On a note (x) l'orientation de $@V$ induite par x et p le nombre de composante de bord de V .)

Proposition 3.2 Soit $K \in D([\rho]; [q])$ et $V = M(K)$.

$@_{\text{gl}}(V)$ et $@_{\text{osp}}(V)$ sont en fait des elements de $\mathbb{Q}^{\rho+q}$ et on a:

$$\text{gl } @_{\text{gl}}(V) = \text{gl}(K) \quad \text{osp } @_{\text{osp}}(V) = \text{osp}(K)$$

La demonstration de cette propriete est la même que celle faite dans [1] pour justifier la construction des applications d'épaississement des diagrammes.

Le \mathbb{Q} {espace vectoriel $M_c[0]$ (" pour engendre par les surfaces connexes) est naturellement muni d'une structure d'algebre en prenant pour le produit de deux surfaces leur somme connexe. Ainsi $M_c[0]$ est l'anneau

$S \times \mathbb{Q}[\dots]_{=(-3)}$ ou , et sont respectivement les classes de di eomorphismes du plan projectif reel $\mathbb{R}P^2$, du tore $S^1 \times S^1$ et du disque D^2 .

De plus, toujours par la somme connexe, les modules $M_c[n]$ sont munis d'une structure de S {module gradue de type ni. Il est possible de decire une famille generatrice de $M_c[n]$ de la maniere suivante: Notons la sphere orientee de \mathbb{R}^3 et D le disque ouvert de \mathbb{R}^2 . L'ensemble

$E_n^p = fV \times nD^{op}$ marquee par $[n]$ tangentes respectant l'orientation, chaque composante connexe de $@V$ etant munie d'au moins une marque g

est naturellement en bijection avec

$f \in \mathfrak{S}_n$ telles que partitionne $[n]$ en p orbite g .

On notera $[\]$ la classe dans $M_c[n]$ de la surface de $E_n = \sum_p E_n^p$ correspondant a $2 \in \mathfrak{S}_n$.

Il est facile de voir que $M_c[n]$ est engendre par les surfaces marquées de E_n . De plus, a l'aide d'un di eomorphisme de $n D^{qp}$ renversant l'orientation, on montre l'indentite: $[\] = (-1)^n [\]^{-1}$.

Si L est l'algebre $\mathfrak{sl}(E)$, on designe par g_L le morphisme d'algebre de S dans $\mathbb{Q}[x]$ envoyant $(; ;)$ sur respectivement $(0; x^2; \text{sdim}(E)x)$.

Si L est l'algebre $\mathfrak{osp}(E)$, on designe par g_L le morphisme d'algebre de S dans $\mathbb{Q}[x]$ envoyant $(; ;)$ sur respectivement $(x; x^2; \text{sdim}(E)x)$.

Proposition 3.3 *Il existe un caractere gradue $\chi_M: S \rightarrow \mathbb{C}$ tel que, quels que soient $K \in F_n$ et $u \in S$, on ait la propriete*

$$\chi_M(u:K) = \chi_M(u) \chi_M(K).$$

De plus $\chi_M \text{ mod } (\) = \chi_{\mathfrak{sl}}$ et $\chi_M \text{ mod } (\ -^2) = \chi_{\mathfrak{osp}}$.

En particulier pour $L = \mathfrak{sl}(E)$ ou $L = \mathfrak{osp}(E)$, on a:

$$\chi_L = g_L \chi_M$$

Demonstration Pour commencer, $\chi_M(\)$ est inclus dans la partie totale-ment antisymetrique de $M_c[3]$ qui est le module libre de rang un engendre par le disque $[(1;2;3)]$ ($(1;2;3)$ designe le 3-cycle de \mathfrak{S}_3 qui envoie 1 sur 2). Si u est un element de S , on peut donc de nir $\chi_M(u)$ comme l'element de S veri ant $\chi_M(u) = \chi_M(u) \cdot [(1;2;3)]$. Comme tout diagramme K de F_n vu comme element de $D([0];[n])$ peut s'ecrire comme la composee de l'element unite de $(u_0$ vu comme element de $D([0];[3])$) et d'un diagramme \hat{K} de $D([3];[n])$, on a:

$$\chi_M(u:K) = \chi_M(u \hat{K}) = \chi_M(u) \chi_M(u_0) \chi_M(\hat{K}) = \chi_M(u) \chi_M(u_0) \chi_M(\hat{K}) = \chi_M(u) \chi_M(K).$$

Les relations entre χ_M , $\chi_{\mathfrak{sl}}$ et $\chi_{\mathfrak{osp}}$ sont des consequences directes de la proposition 3.2. □

3.2.2 Construction du caractere χ_1 pour les familles \mathfrak{sl} et \mathfrak{osp}

Le premier pas vers la construction de χ_1 consiste a modi er le caractere χ_M en un caractere χ_1 a valeurs dans un quotient de S .

Proposition 3.4 *Il existe des caracteres gradues*

$$\chi_1: S_{=(P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})} \rightarrow \mathbb{C} \quad g: S_{=(P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})} \rightarrow S$$

tels que $g \chi_1 = \chi_M$ et pour toute superalgebre de Lie L de type \mathfrak{sl} ou \mathfrak{osp} on ait:

$$\chi_L = g_L \quad \chi_M = f_L \chi_1$$

Le reste de cette section est consacre a la demonstration de cette proposition.

Pour construire g , on peut calculer l'image par χ_M de la relation (1) ou utiliser la formule etablie dans [21] pour chacun des caracteres χ_L cites:

$$\chi_{L(X_n)} = \frac{4t\nu + 2t^2u - 2t^4 - 3\nu - tu + 7t^3 - 7t^2 + 2t}{(1-t-2u-2\nu)(1-t)(1-2t)} \quad (2)$$

Dans les deux cas, on est amene a definir $f: S \rightarrow S$ par:

$$\begin{aligned} f(t) &= t - 2 \\ f(u) &= 2t + 6t^2 - \\ f(\nu) &= 16t^3 - 2t - 2t^2 \end{aligned}$$

On trouve alors que le noyau de f est l'ideal principal $(P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})$ ce qui permet de factoriser f en un morphisme d'algebre $g: S_{=(P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})} \rightarrow S$. Pour pouvoir factoriser χ_M par g , il faut montrer que $\chi_M(\cdot)$ est inclus dans $\text{Im}(g)$.

Pour cela on considere les superalgebres de Lie suivantes qui admettent plusieurs representations standards:

$$\begin{aligned} L_1 &= \mathfrak{so}(5) \quad L_1^0 = \mathfrak{sp}(4) \\ L_2 &= \mathfrak{sl}(4) \quad L_2^0 = \mathfrak{so}(6) \\ L_3 &= \mathfrak{sl}(2;1) \quad L_3^0 = \mathfrak{osp}(2;2) \end{aligned}$$

En suivant pour le Casimir de chacune de ces algebres les conventions de la section precedente, chacun des isomorphismes envoie le Casimir χ_i de L_i sur χ_i^0 ou χ_i^0 designe le Casimir de L_i^0 . En particulier, ces algebres etant isomorphes, on a: $\chi_{L_i}(u)_{jX=1} = \chi_{L_i^0}(u)_{jX=i}$. Ces paires de caracteres pouvant être calculees par l'intermediaire de χ_M , cela fournit les informations suivantes:

On definit six caracteres sur S par leurs valeurs sur le triplet $(\chi_i; \chi_j; \chi_k)$:

$$\begin{aligned} \chi_1 &: (\chi_i; \chi_j; \chi_k) \in \mathcal{F}(10;2;4) \\ \chi_1^0 &: (\chi_i; \chi_j; \chi_k) \in \mathcal{F}(4;-1;1) \end{aligned}$$

- $2: (; ;) \mathcal{F} (4;0;1)$
- $2^0: (; ;) \mathcal{F} (6;1;1)$
- $3: (; ;) \mathcal{F} (2;0;4)$
- $3^0: (; ;) \mathcal{F} (0; -1;1)$

La composee de \mathcal{M} avec chacun de ces morphismes donne une renormalisation du caractere de l'une des six algebres ci-dessus et on a

$$\mathcal{M}() \quad \bigvee_{i=1}^3 \text{Ker} (\begin{smallmatrix} 0 \\ i \end{smallmatrix} - i)$$

De plus, ces informations sur l'image de \mathcal{L} sont suffisantes pour demontrer la proposition car:

Lemme 3.1

$$\text{Im } g = \bigvee_{i=1}^3 \text{Ker} (\begin{smallmatrix} 0 \\ i \end{smallmatrix} - i)$$

Demonstration Pour voir que $\text{Im } g \quad \bigcap_{i=1}^3 \text{Ker} (\begin{smallmatrix} 0 \\ i \end{smallmatrix} - i)$, il suffit de verifier que $\begin{smallmatrix} 0 \\ i \end{smallmatrix}(x)$ et $\begin{smallmatrix} i \\ i \end{smallmatrix}(x)$ co'ncident pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et $x \in \{ft; u; vg\}$. L'application g etant graduee et injective, pour montrer l'egalite entre les espaces ci-dessus, il suffit de montrer l'egalite de leurs dimensions en chaque degre. On fait le calcul pour $\text{Im } g$ en utilisant les series generatrices:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim((S)_n) t^n = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim((S_{=(P_{s1}P_{osp})})_n) t^n = \frac{1-t^9}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim((S)_n) t^n = \frac{1-t^3}{(1-t)(1-t)(1-t^2)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \text{codim}((\text{Im } g)_n) t^n =$$

$$\frac{1-t^9}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} - \frac{1-t^3}{(1-t)(1-t)(1-t^2)} = \frac{3}{1-t} - 3 - 2t - t^2 - t^3$$

Donc l'image de g est de codimension 3 en chaque degre $n \geq 4$.

D'autre part un calcul facile donne en degre $n = 3$:

$$\det(\binom{\theta}{i} - i) \binom{n+1-j}{j-1} \quad i,j=1::3) = 2^{n+1} 6^{n-2} (5 \cdot 4^{n-2} - 2 \cdot 10^{n-2})$$

Ce determinant ne s'annule que pour $n = 3$, ce qui assure qu'en chaque degre $n \geq 4$, les formes lineaires induites par $(\binom{\theta}{i} - i)$ sont independantes et donc que l'intersection de leur noyau est de codimension trois. Il reste a verifier le lemme en bas degres, ce qui peut se faire directement, terminant ainsi la demonstration. \square

Remarque Il semble difficile de traduire de maniere geometrique la restriction de l'image vde M bien que ce caractere ait une construction par epaichissement des diagrammes.

3.3 Le caractere χ_2 pour les familles \mathfrak{sl} , \mathfrak{osp} et $\mathcal{D}_{2,1}$

En notant $R = \mathbb{Q}[a; b; c]_{=(a+b+c)}$ et k son corps de fractions, il existe une $R\{$ superalgebre de Lie $\mathcal{D}_{2,1}$ munie d'un element de Casimir $\chi_2 \in \mathcal{D}_{2,1} \setminus \mathcal{D}_{2,1}$ telle que

En etendant les coefficients a k , χ_2 est un element de Casimir non degenerate de $\overline{\mathcal{D}_{2,1}}_k = \overline{\mathcal{D}_{2,1}} \otimes k$ (ou $\overline{\mathcal{D}_{2,1}} = \mathcal{D}_{2,1} \otimes R$).

Vue comme sous-algebre de $\overline{\mathcal{D}_{2,1}}$, $\mathcal{D}_{2,1}$ se decompose en somme directe orthogonale: $\mathcal{D}_{2,1} = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 \oplus X$ ou L_i est une sous algebre isomorphe a $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Q}) \otimes R$, X est la partie impaire de $\mathcal{D}_{2,1}$ et l'action de $L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$ sur X induite par le crochet est donnee par le produit tensoriel des representations standards de L_1, L_2 et L_3 .

La decomposition etant orthogonale, on a: $\chi_2 = -a\chi_1 - b\chi_2 - c\chi_3 +$ avec $\chi_i \in L_i \oplus L_i$ et $\chi_2 \in X \oplus X$.

Le groupe symetrique \mathfrak{S}_3 agit sur R (par permutation de $(a; b; c)$) et sur $\mathcal{D}_{2,1}$ (par permutation des trois copies de \mathfrak{sl}_2) de maniere compatible avec la structure de R -module. Cette action laisse le Casimir invariant et commute au crochet de Lie.

Le foncteur $\mathcal{D}_{2,1} : D_b \dashv \text{Mod}_{\mathcal{D}_{2,1}}$ induit un caractere gradue $\chi_{\mathcal{D}_{2,1}} : \dashv \mathbb{Q}[2; 3]$ (ou $\mathbb{Q}[2; 3]$ est le sous anneau de R engendre par $\chi_2 = ab + bc + ca$ de degre 2 et $\chi_3 = abc$ de degre 3).

Soit λ un nombre complexe et $\phi : R \dashv \mathbb{C}$ est le morphisme d'anneau de ni par:

(a) = λ , (b) = 1 et (c) = $-1 - \lambda$. Alors $\mathcal{D}_{2,1} \otimes \mathbb{C} \cong \mathcal{D}_{2,1}$. (note parfois $\mathfrak{osp}(4; 2)$) et $\chi_{\mathcal{D}_{2,1} \otimes \mathbb{C}} = \chi_{\mathcal{D}_{2,1}}$.

Tous ces resultats sont immediatement consequences de ceux etablis dans [21] sections 6.10 a 6.15 (ou l'anneau de coefficients considere est $\mathbb{Z}[a; b; c]_{=(a+b+c)}$ au lieu de R). De plus, il y est demontre que l'operateur ψ a pour valeurs propres $2a; 2b; 2cg$. Ainsi le changement de variables $u = \frac{a}{2}$ et $v = \frac{c}{4}$ permet de considerer $\chi_{\mathfrak{D}_{2,1}}$ comme un caractere a valeurs dans $S_{=(t)}$.

Proposition 3.5 *Il existe un caractere gradue $\chi_2: S_{=(tP_{\mathfrak{sl}(P_{\mathfrak{osp}})})} \rightarrow \mathbb{C}$ factorisant les caracteres χ_1 et $\chi_{\mathfrak{D}_{2,1}}$*

(c'est a dire: $\chi_2 \bmod (P_{\mathfrak{sl}(P_{\mathfrak{osp}})}) = \chi_1$ et $\chi_2 \bmod (t) = \chi_{\mathfrak{D}_{2,1}}$).

Demonstration L'anneau S etant factoriel, l'intersection des ideaux (t) et $(P_{\mathfrak{sl}(P_{\mathfrak{osp}})})$ est l'ideal $(tP_{\mathfrak{sl}(P_{\mathfrak{osp}})})$. Donc le diagramme commutatif suivant est un carre cartésien:

$$\begin{array}{ccc} S_{=(tP_{\mathfrak{sl}(P_{\mathfrak{osp}})})} & \xrightarrow{\psi} & S_{=(P_{\mathfrak{sl}(P_{\mathfrak{osp}})})} \\ \# & & \# \\ S_{=(t)} & \xrightarrow{\psi} & S_{=(t)+(P_{\mathfrak{sl}(P_{\mathfrak{osp}})})} \end{array}$$

Ainsi, il suffit de montrer que le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \psi & \xrightarrow{\psi} & S_{=(P_{\mathfrak{sl}(P_{\mathfrak{osp}})})} \\ \mathfrak{D}_{2,1} \# & & \# \\ S_{=(t)} & \xrightarrow{\psi} & S_{=(t)+(P_{\mathfrak{sl}(P_{\mathfrak{osp}})})} \xrightarrow{\psi} S_{=(t)+(v)} \xrightarrow{\psi} S_{=(t)+(27v^2-8u^3)} \end{array}$$

(On a rajoute la derniere injection pour aboutir dans un produit d'anneaux integres).

La coincidence des deux caracteres $\psi: S_{=(t)+(27v^2-8u^3)} \rightarrow \mathbb{C}$ est une consequence directe de l'isomorphisme entre les superalgebres de Lie

$L = \mathfrak{D}_{2,1}; \mathfrak{osp}(4;2)$ pour $g = 2f_1; -2; -\frac{1}{2}g$ (on a alors par exemple $(a; b; c) = (1; -2; 1)$ donc $t(L) = 0$, $u(L) = 6$ et $v(L) = -8$). Le premier caractere correspond a factoriser L par $\mathfrak{D}_{2,1}$, l'autre revient a factoriser L par $\mathfrak{sl}(2)$ ou \mathfrak{M} .

Le quotient de $\mathfrak{D}_{2,1}$ par l'ideal (v) correspond au caractere induit par l'algebre de Lie $L = \mathfrak{D}_{2,1}$; dans le cas degenerate ou v vaut 0 ou -1 . Dans ce cas, L contient un ideal $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{psl}(2;2)$ et le Casimir χ appartient a $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}$. Ainsi une application directe du lemme 2.1 pour $(\psi; \mathfrak{h}; L)$, montre que L coincide avec $\mathfrak{psl}(2;2)$ qui se factorise par $\mathfrak{sl}(2)$. Ce caractere est en fait le caractere augmentation (nul sauf en degre 0) de $\mathfrak{sl}(2)$. \square

3.4 Le caractere χ_3 pour les familles \mathfrak{sl}_2 , \mathfrak{osp} , $\mathfrak{D}_{2,1}$ et \mathfrak{sl}_2

3.4.1 Theoreme d'existence

Le cas de l'algebre \mathfrak{sl}_2 est un cas particulier: On peut choisir pour $(t; u; v)$ n'importe quelle valeur pourvu que le polynôme $P_{\mathfrak{sl}_2} = v - ut + t^3$ soit nul; de plus ce choix n'affecte bien sûr pas la valeur de $\chi_{\mathfrak{sl}_2} \in \mathbb{Q}[\chi]$. On peut donc considerer $\chi_{\mathfrak{sl}_2}$ comme un caractere non surjectif a valeurs dans $S_{=P_{\mathfrak{sl}_2}}$ en le composant avec l'inclusion de $\mathbb{Q}[\chi]$ dans $S_{=P_{\mathfrak{sl}_2}}$ qui envoie $\chi_{\mathfrak{sl}_2}(t)$ sur t .

Proposition 3.6 *Il existe un caractere gradue $\chi_3: \mathbb{Z} \rightarrow S_{=(tP_{\mathfrak{sl}_2}P_{\mathfrak{osp}}P_{\mathfrak{sl}_2})}$ factorisant les caracteres χ_2 et $\chi_{\mathfrak{sl}_2}$*

(c'est a dire: $\chi_3 \bmod (P_{\mathfrak{sl}_2}P_{\mathfrak{osp}}t) = \chi_2$ et $\chi_3 \bmod (P_{\mathfrak{sl}_2}) = \chi_{\mathfrak{sl}_2}$).

Bien que le cas \mathfrak{sl}_2 ait deja ete traite precedemment (par exemple comme sous-cas de \mathfrak{sl}_n), son etude dans ce cadre permet d'analyser le caractere χ_2 .

Demonstration De même que precedemment, S etant factoriel, l'intersection des ideaux $(P_{\mathfrak{sl}_2})$ et $(P_{\mathfrak{sl}_2}P_{\mathfrak{osp}}t)$ est l'ideal $(tP_{\mathfrak{sl}_2}P_{\mathfrak{osp}}P_{\mathfrak{sl}_2})$. Donc le diagramme commutatif suivant est un carre cartesien:

$$\begin{array}{ccc} S_{=(tP_{\mathfrak{sl}_2}P_{\mathfrak{osp}}P_{\mathfrak{sl}_2})} & \xrightarrow{\chi_3} & S_{=(tP_{\mathfrak{sl}_2}P_{\mathfrak{osp}})} \\ \# & & \# \\ S_{=(P_{\mathfrak{sl}_2})} & \xrightarrow{\chi_{\mathfrak{sl}_2}} & S_{=(P_{\mathfrak{sl}_2})+(tP_{\mathfrak{sl}_2}P_{\mathfrak{osp}})} \end{array}$$

Donc il suffit de montrer que le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \xrightarrow{\chi_3} & S_{=(tP_{\mathfrak{sl}_2}P_{\mathfrak{osp}})} & & & \\ & \# & & \# & & & \\ \mathbb{Q}[t] & \xrightarrow{\chi_2} & S_{=(P_{\mathfrak{sl}_2})} & \xrightarrow{\chi_3} & S_{((P_{\mathfrak{sl}_2})+(tP_{\mathfrak{sl}_2}P_{\mathfrak{osp}}))} & \xrightarrow{\chi_3} & S_{=I_1} \quad S_{=I_2} \quad S_{=I_3} \quad S_{=I_4} \quad S_{=I_5} \end{array}$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= (P_{\mathfrak{sl}_2}) + (2u - t^2) = (2v + t^3) + (2u - t^2) \\ I_2 &= (P_{\mathfrak{sl}_2}) + (u - 5t^2) = (v - 4t^3) + (u - 5t^2) \\ I_3 &= (P_{\mathfrak{sl}_2}) + (8u - 5t^2) = (8v + 3t^3) + (8u - 5t^2) \\ I_4 &= (P_{\mathfrak{sl}_2}) + (u - t^2) = (v) + (u - t^2) \\ I_5 &= (P_{\mathfrak{sl}_2}) + (t^2) = (v - ut) + (t^2) \end{aligned}$$

L'anneau $S_{((P_{\mathfrak{sl}_2})+(tP_{\mathfrak{sl}_2}P_{\mathfrak{osp}}))}$ s'injecte dans le produit d'anneaux ci-dessus dont tous les facteurs, sauf le dernier, sont integres et en fait isomorphes a $\mathbb{Q}[t]$ ce qui permet de considerer la fleche horizontale du bas sur chacun de ces facteurs:

$$\mathbb{Q}[t] \xrightarrow{S_{=(P_{\mathfrak{sl}_2})}} \mathbb{Q}[t] \xrightarrow{S_{=((P_{\mathfrak{sl}_2})+(tP_{\mathfrak{sl}_2}P_{\mathfrak{osp}}))}} \mathbb{Q}[t] \xrightarrow{S_{=I_k}} \mathbb{Q}[t]$$

comme etant l'identite sur $\mathbb{Q}[t]$.

On a $I_1 = I_{\mathfrak{sl}_n}$ pour $n = 2$ et la commutativite du diagramme correspond sur ce facteur au fait que \mathfrak{sl}_n factorise \mathfrak{sl}_2 .

De meme $I_2 = I_{\mathfrak{so}_3}$, $I_3 = I_{\mathfrak{sp}_2}$ et $I_4 = I_{\mathfrak{so}_4}$; Les isomorphismes bien connus entre les algebres de Lie $\mathfrak{so}_3(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sp}_2(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et $\mathfrak{so}_4(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ permettent facilement de voir que le diagramme commute sur chacun des facteurs correspondant.

La seule difficulte est de montrer la commutativite du diagramme sur le dernier facteur: l'image du caractere $\chi_{\mathfrak{sl}_2}$ est en fait contenue dans $\mathbb{Q}[t]$ et sa composee avec $S_{=(P_{\mathfrak{sl}_2})} \rightarrow S_{=I_5}$ est donc nulle en degre superieur ou egal a deux (car I_5 contient l'ideal (t^2)). Il s'agit donc de montrer que $\chi_{\mathfrak{sl}_2} \bmod I_5$ est aussi nul en degre superieur ou egal a deux.

On a deja vu que $\chi_{\mathfrak{sl}_2} \bmod I_{\mathfrak{psl}(2,2)} (= (v) + (t))$ etait nul en degre strictement positif. Mais $I_5 \subset ((v) + (t))$ et l'application quotient $S_{=I_5} \rightarrow S_{=(v)+(t)}$ est un isomorphisme en degre pair donc $\chi_{\mathfrak{sl}_2} \bmod I_5$ est nul en degre pair.

Si $x \in \mathbb{Q}[t]$ est de degre $n = 2p + 1$, on ecrit $\chi_{\mathfrak{sl}_2}(x) = (x)u^p t + (x)u^{p-1}v + r(x)$ avec $(x) \in \mathbb{Q}[t]$; $(x) \in \mathbb{Q}[t]$ et $r(x) \in ((v - tu) + (t^2))$.

On a alors: $\chi_{\mathfrak{sl}_2}(x) \equiv ((x) + (x)u^p t) \bmod ((v - tu) + (t^2))$. Il s'agit de montrer que $(x) + (x)u^p t = 0$. Revenant aux caracteres fondamentaux $\chi_{\mathfrak{sl}_2}$ a valeurs dans $\mathbb{Q}[t; v]$ et $\chi_{\mathfrak{sl}_2}$ a valeurs dans $\mathbb{Q}[t; v]$ cela revient a montrer que:

$$\text{si } \chi_{\mathfrak{sl}_2}(x) \equiv t^{p-1} \bmod (t^2)$$

$$\text{alors } \chi_{\mathfrak{sl}_2}(x) \equiv -t^p \bmod (t^2).$$

Ce point est plus delicat et sa demonstration fait l'objet des sections suivantes.

3.4.2 Proprietes du caractere $\chi_{\mathfrak{sl}_2}$

Le but de cette section est de demontrer que la reduction modulo t^2 de $\chi_{\mathfrak{sl}_2}$ peut etre calculee par l'intermediaire du foncteur $\mathfrak{gl}_{2,2}$. On reprend ici les notations introduites dans la partie 3.3. De plus, on note F_n^+ le sous-module de F_n engendre par les diagrammes ayant au moins une boucle. A n d'harmoniser les notations, on utilisera souvent a_1 pour a , a_2 pour b et a_3 pour c . On a alors

Lemme 3.2 *Le foncteur $\mathcal{D}_{2,1}$ a les proprietes suivantes:*

$\mathcal{D}_{2,1} : F_2 \rightarrow \mathcal{D}_{2,1}^2$ est nulle
 $\mathcal{D}_{2,1} : F_n^+ \rightarrow \mathcal{D}_{2,1}^n$ est en fait a valeurs dans
 $\mathbb{N} \times E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ ou E_i parcourt $\{a_1 L_1, a_2 L_2, a_3 L_3\} \times g$. En particulier, par restriction, la dualisation dans $\mathcal{D}_{2,1}$ induit:

$$F_n^+ \rightarrow \text{Mod}_{\mathcal{D}_{2,1}}(\mathcal{D}_{2,1}^n; R)$$

(morphisms de $\mathcal{D}_{2,1}$ {modules}).

Demonstration Pour la premiere affirmation, il suffit de considerer que F_2 est un $\mathcal{D}_{2,1}$ {module libre de rang 1 engendre par le diagramme



Dont l'image par $\mathcal{D}_{2,1}$ est nulle.

Pour demontrer la seconde affirmation, on choisit un diagramme K connexe de F_n^+ et on decompose le calcul de $\mathcal{D}_{2,1}(K)$ de la maniere suivante: on colorie chaque arête de K par \mathbb{N} puis on utilise l'application de reduction $\prime = \sum_x \prime_x$ ou \prime_x est "la reduction autour du sommet trivalent x " par l'application trilineaire antisymetrique invariante $\langle [;] ; \rangle$ (ceci revient a decomposer K comme compose du produit tensoriel d'autant d'elements de Casimir que K comporte d'arêtes avec un diagramme induit par une permutation puis avec un diagramme produit tensoriel de n fois l'identite et d'autant de fois le diagramme $\langle [;] ; \rangle$ que K comporte de sommets). On peut remarquer que l'application \prime est bien de nie des que les arêtes de K sont coloriees par une application de l'ensemble de ses arêtes vers $S^2 L$ et on a aussitôt la formule consistant a "developper" le diagramme K colorie par c :

$$L(K) = \sum_{c \in \mathcal{C}} \prime(c(K))$$

ou $\mathcal{C} = \{fc : f \text{ arêtes de } Kg \rightarrow f - a_1!_1; -a_2!_2; -a_3!_3; gg\}$ et $c(K)$ designe K colorie par c .

Or pour l'algebre $\overline{\mathcal{D}_{2,1}}$, l'application $\langle [;] ; \rangle$ est nulle sur $L_i \otimes L_j \otimes X$ si $i \neq j$ et sur $X \otimes X \otimes X$. Donc $\prime(c(K))$ est nul des que l'un des sommets de $c(K)$ n'est pas d'une des deux formes suivantes:



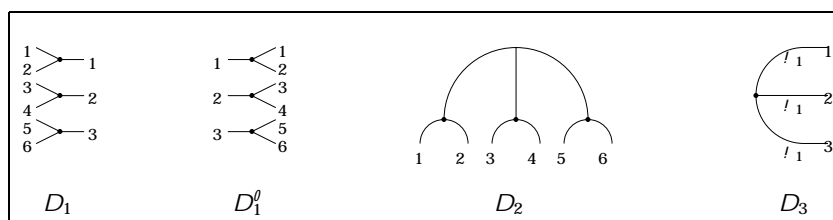
Un diagramme colorie dont tous les sommets sont de type (1) ou (2) sera dit admissible.

De plus, $\langle [\cdot]; \cdot \rangle$ envoie $L_i \rightarrow L_i \rightarrow L_i$ sur $a_i^{-1}R$ et $L_i \rightarrow X \rightarrow X$ sur R ; il su t donc de voir (par exemple pour $i = 1$) que si $c(K)$ est admissible, si m designe le nombre d'arêtes interieures de $c(K)$ de couleur $-a_1!_1$, s_3 le nombre de sommets de $c(K)$ de type (1) pour $i = 1$ et s_1 le nombre de sommets univalents de K dont l'arête issue (arête dite exterieure) est de couleur $-a_1!_1$, alors $m = s_3 + s_1$.

Si $c(K)$ est un diagramme K a d boucles pour lequel toutes les arêtes sont de couleur $-a_1!_1$, les formules reliant le nombre d'arêtes et le nombre de sommets d'un diagramme a son degre donnent: $m = 2s_1 + 3d - 3$ et $s_3 = s_1 + 2d - 2$ donc $m - s_3 - s_1 = d - 1 \geq 0$ car $d > 0$.

Sinon, le sous-graphe de $c(K)$ forme des arêtes coloriees par $-a_1!_1$ est forme de plusieurs graphes connexes dont les sommets univalents proviennent soit des sommets univalents de K , soit de sommets de type (2) de $c(K)$. De plus, K etant connexe, chaque composante connexe K_j de ce sous-graphe possede un nombre $s_{2;j} > 0$ de sommets univalents provenant de sommets de type (2) de $c(K)$. On note de même d_j le nombre de boucles de K_j , n_j son nombre de sommets univalents, m_j son nombre d'arêtes et $s_{3;j}$ son nombre de sommets trivalents. On a $s_1 = \sum_j (n_j - s_{2;j})$, $s_3 = \sum_j s_{3;j}$ et $m = \sum_j m_j$. Ceci donne l'inegalite cherchee en sommant sur j les formules $m_j = 2n_j + 3d_j - 3$ et $s_{3;j} = n_j + 2d_j - 2$. On obtient: $m - s_3 - s_1 = \sum_j (d_j + s_{2;j} - 1) \geq 0$ car $s_{2;j} > 0$.

Ceci conclut la demonstration du lemme. □



Considerons maintenant K un diagramme representant un element de F_6^+ de degre impair. Soit G le sous-groupe de \mathfrak{S}_6 laissant fixe $f1; 2g; f3; 4g; f5; 6gg$. On definit le morphisme de groupe ρ sur G en remarquant que tout element $\sigma \in G$ agit par $(\sigma) \cdot 2f - 1; +1g$ sur le diagramme D_2 ci-dessus de F_6 .

On notera les elements de G comme produits de cycles disjoints; par exemple on a $((1;4;2;3)) = 1$. Soit

$$\mathcal{K} = \frac{1}{48} \sum_{g \in G} \chi(g) \rho(g) (K)$$

Le morphisme $D_1 \in D([6];[3])$ envoie \mathcal{K} sur $\mathcal{K}_3 \in F_3 \in \mathfrak{S}_3 \mathbb{Q}^{-1}$. De plus, le degre de \mathcal{K}_3 dans \mathfrak{S}_3 est egal a celui de K moins deux.

Soit $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\mathfrak{D}_{2,1}(\mathcal{K}_3) \equiv r \pmod{\binom{2}{3}}$ $a_1(a_2 a_3)^{p+1}$ modulo a_1^2 .

On construit un tenseur dont l'image par $\mathfrak{D}_{2,1}(K)$ (vu comme element de $\text{Hom}(L^6; \mathbb{Q})$) est congrue a $\mathfrak{D}_{2,1}(\mathcal{K}_3)$ modulo (a_1^2) :

Soit $x_0 = -a_1^{-1} (D_3) \in L_1^3$ de sorte que considerant $\mathfrak{D}_{2,1}(\mathcal{K}_3)$ comme un element de $\text{Mod}(L^3; \mathbb{Q})$, on ait:

$$\mathfrak{D}_{2,1}(\mathcal{K}_3)(x_0) = \mathfrak{D}_{2,1}(\mathcal{K}_3) \left(\frac{12}{a_1} \right) (x_0) = \frac{12}{a_1} \mathfrak{D}_{2,1}(\mathcal{K}_3) (12 (a_2 a_3)^{p+1} + a_1 r \text{ avec } r \in R$$

D'autre part, le calcul montre que $\mathfrak{D}_{2,1}(D_1^0)(x_0)$ s'ecrit $x_1 + a_1 x_2$ avec $x_1 \in X^6$ et $x_2 \in \mathfrak{D}_{2,1}^6$, le tenseur x_1 ayant de plus la propriete d'être $(G; \cdot)$ invariant (i.e. $\mathcal{G} \in G; (x_1) = (\cdot) x_1$). Ainsi

$$\mathfrak{D}_{2,1}(\mathcal{K}_3)(x_0) = \mathfrak{D}_{2,1}(K) \mathfrak{D}_{2,1}(D_1^0)(x_0) = \mathfrak{D}_{2,1}(K)(x_1) + a_1 \mathfrak{D}_{2,1}(K)(x_2)$$

mais $\mathfrak{D}_{2,1}(K)(x_2)$ est un element de R d'apres le lemme precedent et puisque x_1 est $(G; \cdot)$ invariant, on a l'egalite $\mathfrak{D}_{2,1}(K)(x_1) = \mathfrak{D}_{2,1}(K)(x_1)$; donc

$$\mathfrak{D}_{2,1}(K)(x_1) \equiv 12 (a_2 a_3)^{p+1} \pmod{(a_1)}$$

On construit maintenant une forme lineaire θ sur $\mathfrak{gl}_{2,2}^6$ telle que l'application $K \in \mathfrak{gl}_{2,2}$ se factorise en $\theta \in \mathfrak{gl}_{2,2}$.

Soit f le noyau du morphisme d'anneau $f: R \rightarrow \mathbb{Q}$ de ni par $f(a_1) = 0$ et $f(a_2) = 1$. La reduction des coefficients grace a f induit $\rho: \mathfrak{D}_{2,1} \rightarrow \mathfrak{D}_{2,1}^0 = \mathfrak{D}_{2,1} \cap f\mathbb{Q}$. Le morphisme d'algebre ρ est surjectif et possede une section d'espace vectoriel \mathbb{Z}_2 gradue: $s: \mathfrak{D}_{2,1}^0 \rightarrow \mathfrak{D}_{2,1}$ induite par le monomorphisme $\mathbb{Q} \rightarrow R$ (on a $\rho \circ s = \text{id}_{\mathfrak{D}_{2,1}^0}$). On notera X^0 l'image par s de la partie impaire de $\mathfrak{D}_{2,1}^0$ de sorte que X se decompose en $X^0 \oplus (X^0)$. Il se trouve que $\langle X^0; X^0 \rangle$ est inclus dans \mathbb{Q} et x_1 appartient a $X^0 \oplus (X^0)$. Par consequent, les formes \mathbb{Q} lineaires $y \in \mathfrak{gl}_{2,2}^6$ $f(\langle x_1; y \rangle \frac{1}{\mathfrak{D}_{2,1}^6})$ et $y \in \mathfrak{gl}_{2,2}^6$ $\langle x_1; s^{-1} \rho(y) \rangle \frac{1}{\mathfrak{D}_{2,1}^6}$ sont egales. Mais considerant $\mathfrak{D}_{2,1}(K)$ comme un element de $\mathfrak{D}_{2,1}^6$, on a:

$\langle \chi_1; \mathfrak{D}_{2,1}(K) \rangle_{\mathfrak{D}_{2,1}} = 12 (a_2 a_3)^{\rho+1}$ modulo (a_1)
 donc $f(\langle \chi_1; \mathfrak{D}_{2,1}(K) \rangle_{\mathfrak{D}_{2,1}}) = (-1)^{\rho+1} 12$
 et donc $\langle \chi_1; (S \oplus \rho) (\mathfrak{D}_{2,1}(K)) \rangle_{\mathfrak{D}_{2,1}} = (-1)^{\rho+1} 12$:

Ainsi l'application $f : F_6 \rightarrow \mathbb{Q}$, qui associe au diagramme K^θ l'element $\frac{(-1)^{\rho+1}}{12} f(\langle \chi_1; \mathfrak{D}_{2,1}(K^\theta) \rangle_{\mathfrak{D}_{2,1}})$, se factorise en $f = \theta \circ \mathfrak{D}_{2,1}^{\theta, \rho}$ ou θ est une forme lineaire sur $\mathfrak{D}_{2,1}^{\theta, \rho}$ nulle sur l'orthogonal de $((\mathfrak{D}_{2,1}^\theta)_1)^\theta$.

Considerons alors les morphismes de superalgebres de Lie suivants:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{psl}_{2,2} & \xrightarrow{j} & \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{D}_{2,1}^\theta \\
 & & \# j \\
 \mathfrak{gl}_{2,2} & \xrightarrow{q} & \mathfrak{p}\mathfrak{gl}_{2,2}
 \end{array}$$

\mathfrak{h} est l'ideal de $\mathfrak{D}_{2,1}^\theta$ deja rencontre a la section 3.3. Il est facile de constater que si l'on muni $\mathfrak{gl}_{2,2}$ du Casimir induit par la representation standard, alors son image par q dans $\mathfrak{p}\mathfrak{gl}_{2,2}^2$ appartient en fait a $j(\mathfrak{psl}_{2,2}^2)$.

On peut maintenant appliquer le lemme 3.2 a chacun de ces morphismes en prenant pour θ l'identite de \mathbb{Q} :

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{D}_{2,1}^{\theta, \rho}(K) &= i(\mathfrak{psl}_{2,2}(K)) \\
 q(\mathfrak{gl}_{2,2}(K)) &= \mathfrak{p}\mathfrak{gl}_{2,2}(K) = j(\mathfrak{psl}_{2,2}(K))
 \end{aligned}$$

Or les morphismes i, j et q sont bijectifs en degre impair. Comme θ ne depend que de la composante sur $((\mathfrak{psl}_{2,2})_1)^\theta$ de $\mathfrak{psl}_{2,2}(K)$, il existe une forme lineaire $\theta : \mathfrak{gl}_{2,2}^6 \rightarrow \mathbb{Q}$ nulle sur l'orthogonal de $((\mathfrak{gl}_{2,2})_1)^\theta$ verifiant $\theta = \theta|_{\mathfrak{gl}_{2,2}}$.

3.4.3 Proprietes du foncteur \mathfrak{gl}

Dans toute cette section, E designe un supermodule (c'est a dire un \mathbb{Q} {espace vectoriel muni d'une \mathbb{Z}_2 {graduation}) et on continue d'identifier $D_{\mathfrak{gl}}([p]; [q])$ avec $\rho+q$.

On notera $D_{\mathfrak{gl}_0}$ la categorie quotientee de $D_{\mathfrak{gl}}$ par $\theta = 0$ et $\mathfrak{gl}_0 : D \rightarrow D_{\mathfrak{gl}_0}$.

On peut maintenant faire quelques remarques sur l'image de \mathfrak{gl} :

\mathfrak{gl} est determine sur $M[n]$ par la formule

$$\mathfrak{gl}(\mathfrak{S}_n; \mathfrak{gl}([n])) = \langle \chi \rangle + (-1)^n \langle \chi^{-1} \rangle :$$

En consequence, $\mathfrak{gl}(F_n) = \mathfrak{gl} \circ \mathfrak{gl} \circ M(F_n)$ est invariant par l'endomorphisme de n de \mathfrak{gl} sur sa base par

$$\langle \chi \rangle \mapsto \frac{1}{2} (\langle \chi \rangle + (-1)^n \langle \chi^{-1} \rangle).$$

Ensuite M respecte le degre et σ est de degre pair donc l'image par M d'un element de degre impair de F_n est une combinaison lineaire a coefficients dans $\mathbb{Q}[x]$ d'elements $\sum_{\rho \in S_n} \rho E_n^{2\rho+1}$ (pour des permutations partitionnant $[n]$ en un nombre impair d'orbites) plus un element de $M_c[n] + M_c[n]$. Ainsi, $\mathfrak{gl}_0(F_n)$ est inclus dans le sous- \mathbb{Q} {espace vectoriel de F_n engendre par les diagrammes ayant un nombre impair de composantes connexes.

En n , on peut preciser l'image de $\mathfrak{gl}_0(F_n)$ en utilisant le fait que, si $\dim(E) = 0$, pour les morphismes canoniques $q: \mathfrak{gl}(E) \rightarrow \mathfrak{pgl}(E)$ et $j: \mathfrak{psl}(E) \rightarrow \mathfrak{pgl}(E)$, on a: $q(\mathfrak{gl}(E)(F_n)) = j(\mathfrak{psl}(E)(F_n)) + q(\mathfrak{sl}(E)^n)$. Soit I l'element identite de $\mathfrak{gl}(E)$. Notons que $\text{Ker}(q)$ est l'ideal engendre par I dans l'algebre tensorielle de $\mathfrak{gl}(E)$. De plus $\mathfrak{sl}(E)$ est l'orthogonal de I dans $\mathfrak{gl}(E)$ et ainsi l'orthogonal du noyau de q est l'algebre tensorielle de $\mathfrak{sl}(E)$. L'image de $\mathfrak{gl}(E)(F_n)$ est dans la somme de $\text{Ker}(q)$ et de $\mathfrak{sl}(E)^n$; l'orthogonal de cette somme est l'intersection de $\mathfrak{sl}(E)^n$ et de $\text{Ker}(q)$, c'est l'espace engendre par $\sum_{x \in \mathfrak{sl}(E)^n} x$. Considerant $F_n = D([n]; [0])$ et en utilisant la dualite dans $\mathfrak{gl}(E)$, on a ainsi,

$$\sum_{x \in \mathfrak{gl}(E)(F_n)} x = \sum_{x \in \mathfrak{sl}(E)^n} x; \quad \mathfrak{gl}(E)(K)(x) = 0$$

Si $i \in [n]$, on note $\langle ni \rangle$ l'element $\langle i \rangle$ si $(i) = i$ sinon l'element $\langle i \rangle$ de \mathfrak{S}_{n-1} ou $\langle i \rangle$ est l'element de \mathfrak{S}_{n-1} qui, conjugue avec la bijection croissante de $[n-1]$ vers $[n]$ n fig, vaut $\langle i \rangle$ de n par $\langle j \rangle = \langle i \rangle$ si $(j) \neq i$, $\langle j \rangle = \langle i \rangle$ sinon. Revenant a la definition de $\mathfrak{gl}(E); E$, il est clair que si $x \in \mathfrak{gl}(E)^{i-1}$ et $y \in \mathfrak{gl}(E)^{n-i}$ alors

$$\mathfrak{gl}(E); E(\langle i \rangle)(x) = \mathfrak{gl}(E); E(\langle ni \rangle)(x)$$

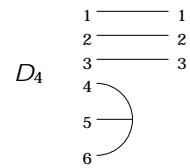
En n $\mathfrak{gl}(E); E$ induit un morphisme de F_n dans $(\mathfrak{gl}(E)^n)$ donc par restriction un morphisme de F_n dans $(\mathfrak{sl}(E)^n)$. L'intersection des noyaux de ces morphismes (lorsque E varie) est $\langle n \rangle$. En effet, si $\dim(E) = n$, l'unique permutation de $[n]$ est envoyee sur $(x \mapsto \text{str}_E(x))$ qui est nul sur $\mathfrak{sl}(E)$ et donc toute permutation ayant un point fixe est envoyee sur zero. Reciproquement, on peut associer a la permutation $\langle i \rangle$ de \mathfrak{S}_n un tenseur $x \in \mathfrak{gl}(E)^n$ tel que $\mathfrak{gl}(E); E(\langle i \rangle)(x) = 1$ si $i = \langle i \rangle$, 0 sinon. Pour construire de tels tenseurs, on identifie $\mathfrak{gl}(E)$ a $\mathfrak{gl}(\dim(E_0); \dim(E_1))(\mathbb{Q})$ et notant $e_{i,j}$ les matrices elementaires, on definit d'abord

$$X_{(1,2,\dots,k_1)(k_1+1;k_1+2,\dots,k_2)\dots(k_p+1;\dots;n)} = (e_{1,2} \ e_{2,3} \ \dots \ e_{k_1,1}) \ (e_{k_1+1;k_1+2} \ \dots \ e_{k_2;k_1+1}) \ \dots \ (e_{k_p+1;k_p+2} \ \dots \ e_{n;k_p+1})$$

puis $x_{n-1} = (x_n)$; si n n'a pas de point fixe, x appartient a $\mathfrak{sl}(E)^n$. Ainsi notant \mathfrak{gl}_n le sous-module de $\mathfrak{gl}(E)^n$ engendre par les permutations ayant un point fixe, le morphisme suivant est nul:

$$f_j: F_n \xrightarrow{\mathfrak{gl}_n} \mathfrak{gl}_n \xrightarrow{\langle \cdot \rangle} \mathfrak{gl}_n \xrightarrow{\mathfrak{gl}_n} \mathfrak{gl}_n \xrightarrow{\langle \cdot \rangle} \mathfrak{gl}_n \xrightarrow{\mathfrak{gl}_n} \mathfrak{gl}_n \xrightarrow{\langle \cdot \rangle} \mathfrak{gl}_n \xrightarrow{\mathfrak{gl}_n} \mathfrak{gl}_n \xrightarrow{\langle \cdot \rangle} \mathfrak{gl}_n \xrightarrow{\mathfrak{gl}_n} \mathfrak{gl}_n \xrightarrow{\langle \cdot \rangle} \mathfrak{gl}_n$$

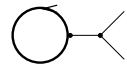
On peut faire une derniere remarque sur $\mathfrak{gl}_0(F_6)$: elle provient du fait que \mathfrak{gl}_0 est nul sur F_3 en degre superieur ou egal a 3. $\mathfrak{gl}_0(F_6)$ est donc inclus dans le noyau de l'application composition avec le diagramme suivant:



3.4.4 Demonstration de l'existence du caractere χ_3

Notons χ_3 la forme lineaire de degree impair sur F_6 en degre impair par $\chi_3(D_1 \cdot K) = \chi_3(K)$ modulo \mathfrak{gl}_3 (avec les notations deja utilisees dans (3.4.2)). Nous allons montrer que $\chi_3 = \chi_3$.

D'abord on a: $\chi_3(D_1 \cdot K) = \chi_3(K) (\langle (1;2;3) \rangle - \langle (1;3;2) \rangle)$ modulo \mathfrak{gl}_3 . On definit une forme lineaire g sur \mathfrak{gl}_3 par $g(\mathfrak{gl}_3 + \mathfrak{gl}_2 \mathfrak{gl}_3) = 0$, $g(\langle \cdot \rangle) = 0$ si \cdot n'est pas un 3-cycle, $g(\langle (1;2;3) \rangle) = -g(\langle (1;3;2) \rangle) = \frac{1}{2}$. Soit $\chi_0: \mathfrak{gl}_6 \rightarrow \mathbb{Q}$ l'application qui associe a chaque element de \mathfrak{gl}_6 l'image par g de sa composee avec D_1 . Alors $\chi_3(K) = \chi_0(\mathfrak{gl}_3(K))$ mais un calcul explicite de l'application composition avec D_1 montre que l'image de cette application est en fait dans $\mathfrak{gl}_3 + \mathfrak{gl}_2 \mathfrak{gl}_3$, ainsi χ_0 est nul sur \mathfrak{gl}_6 . De plus, dans $D_{\mathfrak{gl}}$, l'element suivant est nul:



Donc $\chi_0(\mathfrak{gl}_6) = 0$.

De même χ_0 induit une forme lineaire χ_0 sur \mathfrak{gl}_6 telle que $\chi_0(\langle \cdot \rangle) = \chi_0(\mathfrak{gl}_{2,2}(\langle \cdot \rangle))$ pour $2 \leq 6$. En particulier χ_0 est nulle sur l'orthogonal de $(\mathfrak{gl}_{2,2})_1 \mathfrak{gl}_6$ et cet orthogonal contient l'ideal $\text{Ker}(q)$ evoque dans la question precedente. il en resulte que χ_0 est nulle sur \mathfrak{gl}_6 .

Des calculs effectués avec Maple donnent les resultats suivants:

Le sous-espace de $\mathbb{C}[G]$ des elements $(G; \gamma)$ invariants, invariants par l'endomorphisme de $\mathbb{C}[G]$ de $\gamma \mapsto \gamma + (-1)^n \gamma^{-1}$, forme de combinaisons lineaires diagrammes ayant un nombre impair de composantes connexes, est de dimension quatre, engendre par les elements suivants:

$$y_1 = f((1;2;3;4;5;6))$$

$$y_2 = f((1;2;3;5;4;6))$$

$$y_3 = f((1;3;2;5;4;6))$$

$$y_4 = f((1;3)(2;5)(4;6))$$

$$\text{Avec } f(y_i) = \sum_{g \in G} (g)(\langle gy_i g^{-1} \rangle + \langle gy_i^{-1} g^{-1} \rangle)$$

L'image par $\sum_{g \in G}$ des elements de degre impair de F_6 est donc de dimension inferieure ou egale a quatre.

L'application f_6 (construite dans la section precedente a l'aide de l'application $\langle \gamma \rangle \mapsto \langle n\gamma \rangle$) envoie y_1 et y_4 sur 0, mais $f_6(y_2) = f_6(y_3) \neq 0$.

L'application induite par recollement de l'element D_4 dans $D_{\mathfrak{sl}}$ envoie y_1, y_2, y_3 et y_4 sur respectivement $-24t^2, 16t^2 - 16, -8t^2 - 16$ et -48 fois l'element $(\langle (1;2;3) \rangle - \langle (1;3;2) \rangle)$ de \mathfrak{sl}_3 . En consequence, et a l'aide des deux dernieres remarques de la section precedente, on peut conclure que l'image par $\sum_{g \in G}$ des elements de degre impair de F_6 est de dimension inferieure ou egale a deux, engendree par y_1 et $y_2 - y_3$.

De plus, $\sum_{g \in G}(D_2) = \frac{1}{6}y_1$ et $D_1 D_2 = 8t^3 2$ donc $\sum_{g \in G}(y_1) = 6 \sum_{g \in G}(D_2) = 0$. On va montrer que $\sum_{g \in G}(y_1)$ est nul ce qui permettra de conclure que $\sum_{g \in G} = 0$ sur l'image de F_6 en degre impair donc que $\sum_{g \in G} = 0$. En effet, sur cette image, $\sum_{g \in G}$ et $\sum_{g \in G}$ ont même noyau donc sont proportionnelles, donc $\sum_{g \in G}$ et $\sum_{g \in G}$ sont proportionnelles, or $\sum_{g \in G}$ et $\sum_{g \in G}$ coïncident et sont non nulles sur le diagramme suivant:



dont la composee avec D_1 donne l'element $x_3 2$; elles sont donc bien egales.

Pour montrer que $\sum_{g \in G}(y_1) = 0$, on calcule directement $\sum_{g \in G}(D_2)$:

Le tenseur x_1 intervenant dans le calcul de $\sum_{g \in G}$ est obtenu comme la reduction par l'application $\sum_{g \in G}$ du diagramme colorie suivant:

$$x_1 = -a_1 \left(\begin{array}{c} \text{Diagram with three lines and labels } t_1 \end{array} \right)$$

Donc (D_2) est obtenu comme la reduction modulo $(a)R + (b - 1)R$ de:

$$\mathfrak{D}_{21}(K)(x_1) = \sum_{i_1, i_2, i_3} -a_1 \left(\begin{array}{c} \text{Diagram with three horizontal ovals and three vertical lines labeled } i_1, i_2, i_3 \end{array} \right)$$

La sommation etant faite pour i_1, i_2 et i_3 parcourant $\mathbb{F} - a_1 i_1; -a_2 i_2; -a_3 i_3 \mathbb{G}$ (Si l'un des i_j valait 0 , le diagramme colorie obtenu ne serait pas admissible). Or si $i \neq j$ alors

$$\left(\begin{array}{c} \text{Diagram with a circle and two lines labeled } i, j \end{array} \right) = 0$$

donc tous les termes de la somme sont nuls sauf celui pour lequel $i_1 = i_2 = i_3 = -a_1 i_1$ mais ce terme est dans $a_1^2 R$; ainsi $(D_2) = 0$ donc $\chi = \chi$.

Pour terminer, nous avons montre l'egalite du premier coefficient des caracteres $\mathfrak{D}_{21}(x)$ et $\chi_{si}(x)$ lorsque x est dans (D_2) (F_6). Pour avoir l'egalite de ces coefficients sur \mathbb{F} tout entier, il suffit de remarquer que si un diagramme de \mathfrak{D}_{21} n'est pas dans (D_2) (F_6), alors il represente un element de \mathbb{F} divisible par t donc pour lequel les deux coefficients sont nuls. Cette derniere remarque termine la demonstration du lemme.

3.5 Les caracteres exceptionnels et la relation du carre

3.5.1 Theoreme d'existence

Si L est l'une des cinq algebres de Lie exceptionnelles de la liste

$(\mathfrak{g}_2; \mathfrak{f}_4; \mathfrak{e}_6; \mathfrak{e}_7; \mathfrak{e}_8)$ alors $I_L = (P_{ex}) + (u - \sqrt{L}t^2)$, la liste des valeurs de \sqrt{L} est $(\frac{7}{72}; \frac{-4}{81}; \frac{-22}{225}; \frac{-7}{81}; \frac{-5}{72})$; ces valeurs sont distinctes deux a deux. On identifie le but de chacun de ces caracteres χ_L avec $S_{=I_L} \in \mathbb{Q}[t]$. Posons $Q_{ex} = \prod_{\sqrt{L}} (u - \sqrt{L}t^2)$ polynôme de degre dix de S .

Lemme 3.3 Il existe un caractere $\chi_{ex} : S_{=(P_{ex})+(Q_{ex})} \rightarrow \mathbb{F}$ factorisant les cinq caracteres exceptionnels.

Demonstration Pour factoriser χ_{g_2} et χ_{f_4} on remarque que $I_{g_2} \setminus I_{f_4}$ est l'ideal somme $(P_{\epsilon_r}) + ((u - 1t^2)(u - 2t^2))$ (car $S_{=P_{\epsilon_r}} \simeq \mathbb{Q}[t; u]$ est factoriel) donc le diagramme commutatif suivant est un carre cartésien:

$$\begin{array}{ccc} S_{=(P_{\epsilon_r}) + ((u - 1t^2)(u - 2t^2))} & \xrightarrow{-!} & S_{=(P_{\epsilon_r}) + (u - 1t^2)} \\ \# & & \# \\ S_{=(P_{\epsilon_r}) + (u - 2t^2)} & \xrightarrow{-!} & S_{=(P_{\epsilon_r}) + (u - 1t^2) + (u - 2t^2)} \simeq \mathbb{Q}[t]_{=(t^2)} \end{array}$$

Ainsi, il suffit de montrer que le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \chi_{f_4} & \xrightarrow{-!} & S_{=(P_{\epsilon_r}) + (u - 1t^2)} \\ \# & & \# \\ S_{=(P_{\epsilon_r}) + (u - 2t^2)} & \xrightarrow{-!} & S_{=(P_{\epsilon_r}) + (u - 1t^2) + (u - 1t^2)} \simeq \mathbb{Q}[t]_{=(t^2)} \end{array}$$

Mais l'anneau en bas a droite est nilpotent et nul en degre superieur a deux. Or on ne dit rien de χ_0 en degre inferieur ou egal a dix (cf [11]) et les deux caracteres coïncident sur χ_0 comme l'indique la formule (2) donnee section (3.2.2). Ainsi il existe un premier caractere intermediaire factorisant χ_{g_2} et χ_{f_4} . On reitere le même procede (d'abord en remplaçant χ_{g_2} par le caractere que l'on vient de construire et χ_{f_4} par χ_{ϵ_6} etc...) et le même argument permet de construire etape par etape le caractere χ_{ϵ_r} . □

On designe par K_1 , K_2 et K_3 les combinaisons lineaires de diagrammes suivantes:

$$\begin{array}{l} \text{---} \bigcirc \text{---} -2t \text{---} \hspace{10em} (1) \\ \text{||||} -t \text{||||} -u \left(2 \text{---} \text{---} - \text{---} \text{---} \right) -v \left(\text{---} + \text{---} -2 \text{---} \text{---} \right) \hspace{2em} (2) \\ \text{---} \text{---} -\frac{1}{3}t \left(\text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \right) -\left(u + \frac{t^2}{9}\right) \left(\text{---} + \text{---} + \text{---} \right) \hspace{2em} (3) \end{array}$$

Soit \mathcal{I}_1 l'ideal de S engendre par les combinaisons lineaires de $\{[3]; ;\}$ diagrammes connexes se factorisant par K_1 ou K_2 et soit \mathcal{I}_2 l'ideal de S engendre par les combinaisons lineaires de $\{[3]; ;\}$ diagrammes connexes se factorisant par K_3 ou K_3 . On montrera le

Lemme 3.4 L'application $S \xrightarrow{-!} (S)_{=(1+2)}$ donnee par l'unité de S est surjective en degre inferieur ou egal a 20. En consequence, il existe un caractere χ_4 sur S en degre inferieur ou egal a 20 a valeurs dans un quotient de S qui factorise tous les caracteres annulant K_1 , K_2 et K_3 .

Remarque Des calculs elementaires dans l'algebre d'endomorphisme $D([2]; [2]) \otimes S$ permettent de prouver que l'application $S \rightarrow (0 \ S)_{=(1)}$ est surjective. Un antecedent de χ_n peut être calcule par la formule (2) donnee section 3.2.2.

On va aussi montrer que les caracteres χ_3 modulo $(P_{\epsilon_r}) + (R)$ et $\epsilon_r \text{ mod } (tP_{s1}P_{osp}P_{s12})$ a valeurs dans l'anneau $S_{=(tP_{s1}P_{osp}P_{s12})+(P_{\epsilon_r})+(R)}$ concentre en degre inferieur ou egal a 20, se factorisent par χ_4 , et donc co'ncident, ce qui demontrera l'existence d'un caractere factorisant ϵ_r et χ_3 .

En fait, ϵ_r annule K_3 . Ceci provient du fait que pour chaque algebre exceptionnelle, le carre du Casimir engendre le sous-espace des elements L {invariants de S^4L (Cf [21]).

3.5.2 Unicite de χ_4

Pour demontrer l'existence et l'unicite de χ_4 , il est plus aise de manipuler les diagrammes de F_0 qui forment un \mathbb{N} {module libre isomorphe a \mathbb{N} . Il s'agit de montrer qu'en degre inferieur ou egal a 21, F_0 est isomorphe a l'espace R_0 engendre par les diagrammes contenant l'un des trois diagrammes suivants:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ W_2 \end{array} &
 \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ W_{2;2} \end{array} &
 \left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \square \quad \square \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \end{array} \right) \\
 & & W_4 \text{ q } W_4
 \end{array} \tag{4}$$

On introduit les notations:

$$N_3 = f(a; b; c) \in \mathbb{N}^3 = a \quad b \quad cg$$

muni de l'ordre lexicographique de \mathbb{N}^3 ,

$$N_6 = f(;) \in \mathbb{N}_3 \quad N_3 = \quad g$$

muni de l'ordre induit par l'ordre lexicographique de \mathbb{N}^6 . Dans la suite, on se fixe $n \in \mathbb{N}$, $\chi = (;) \in \mathbb{N}_6$ et $\chi = (a; b; c) \in \mathbb{N}_3$. On definit l'ensemble

$$N = \mathbb{N} \text{ q } N_3 \text{ q } N_6$$

que l'on definit d'ordonner en posant:

$$\chi < \psi \text{ si } \chi < \psi \text{ et } \chi < \psi \text{ si } \quad ; \text{ si } n < a \text{ alors } n < \quad , \text{ sinon } \chi < n;$$

n et j sont ordonnées comme n et j ;

l'ensemble N est ainsi muni d'un bon ordre.

On notera $j j = a + b + c$ et $j j = j j + j j$. En n , W et W_n représenteront les diagrammes suivants de $F_j j$ et F_n :



et W le diagramme $W \in D([0]; [j j])$. On appelle "roue" un diagramme isomorphe à W_n à la numérotation des sommets près.

On désigne par $f_K : D([n]; [m]) \rightarrow D([0]; [m])$ la composition à gauche par $K \in D([0]; [n])$ (l'image de f_K représente les diagrammes "contenant" K) et on pose:

$R^0 = f_W$ (sous-espace de $D([j j]; [0])$ engendré par les diagrammes connexes)

$R^0 = f_W$ (sous-espace de $D([j j] \cup [j j]; [0])$ engendré par les diagrammes dont chaque composante connexe a au moins un sommet trivalent et rencontre $[j j]$ et $[j j]$).

Ceci permet de définir pour $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{N}$

$$R_d^0 = f_{W_d}(F_d) \quad R^< = R_0 + \sum_{<} R^0$$

$$R = R^< + R^0 \quad \text{et} \quad R = R = R^<$$

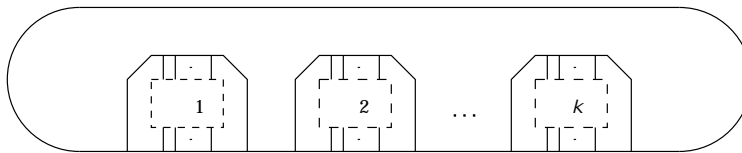
Si $<$ dans N , on a $R_0 = R^< = R = R^< = R$.

Lemme 3.5 F_n est engendré en degré n par les roues et en degré supérieur ou égal à $n + 1$ par les diagrammes $K = W \cup K^0$ ou K^0 est un arbre (élément de F_k de degré $k - 1$) vu comme élément de $D([0]; [k])$ et W est une roue (à $n + k$ jambes).

Démonstration La démonstration de ce lemme est laissée au lecteur (elle repose sur une simple manipulation des relations (IHX)).

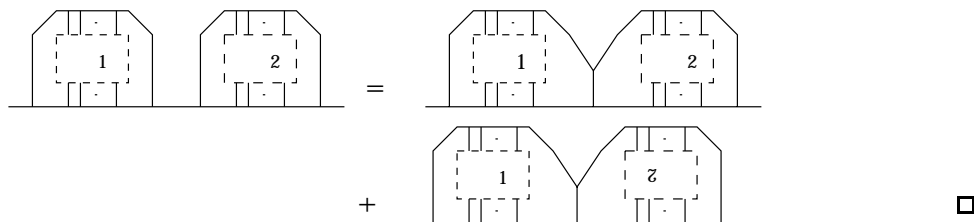
Indications Il est utile de remarquer que l'on peut raisonner sur le "squelette" des diagrammes (c'est à dire oublier les jambes des diagrammes qui peuvent être déplacées par des relations (IHX)). L'étape intermédiaire est de démontrer que

F_n est engendré en degré supérieur ou égal à $n + 1$ par des diagrammes ayant un squelette de la forme suivante:



ou chacune des boites est donnée par une permutation $\sigma_i \in \mathfrak{S}_{n_i}$.

Ensuite, il est possible de conclure grâce à la manipulation de "fusion des arbres" suivante:



On utilise aussi le fait que $W_{2n+1} \in \text{Im}(f_{W_{2n}})$ (en particulier pour $n = 2$) et de la même manière, l'image de $f_{W_{2,2}}$ contient le diagramme suivant:



Si $d \in \mathbb{N}$, on notera $D(d; [n])$ le quotient de $D([d]; [n])$ tuant l'action du groupe \mathfrak{S}_d . Si $\alpha \in \mathbb{N}_3$, on note \mathfrak{S} le sous-groupe de \mathfrak{S}_j isomorphe à $\mathfrak{S}_{\alpha_1} \times \mathfrak{S}_{\alpha_2} \times \mathfrak{S}_{\alpha_3}$ induit par l'isomorphisme $[a_1] \times [a_2] \times [a_3] \rightarrow [a_1 + a_2 + a_3]$ et $D(\alpha; [n])$ le module quotient de $D([j]; [n])$ par les relations: si $\sigma \in \mathfrak{S}$ et $K \in D([j]; [n])$ alors $\sigma \cdot K = K$. On a une application surjective naturelle de $D([j]; [n])$ vers $D(\alpha; [n])$: celle-ci revient à remplacer la numérotation des sommets univalents de la source par un coloriage à l'aide de trois couleurs que l'on notera x_1, x_2 et x_3 .

De même si $\beta = (\alpha; \gamma) \in \mathbb{N}_6$, on note $D(\beta; [n])$ le quotient de $D([j]; [n])$ tuant l'action du groupe $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{\alpha_1} \times \mathfrak{S}_{\alpha_2} \times \mathfrak{S}_{\alpha_3} \times \mathfrak{S}_{\gamma_1} \times \mathfrak{S}_{\gamma_2} \times \mathfrak{S}_{\gamma_3}$. L'application quotient revient à remplacer la numérotation des sommets univalents de la source d'un diagramme par un coloriage à l'aide de six couleurs que l'on notera x_1, x_2, x_3 et y_1, y_2, y_3 .

Lemme 3.6 Si $\alpha \in \mathbb{N}$ l'application

$$f : D([j]; [n]) \rightarrow R$$

(obtenue par composition de f_W avec l'application quotient $R \rightarrow R$) se factorise par une application $g : D(\alpha; [n]) \rightarrow R$.

Pour demontrer ce lemme, il su t de voir que pour tout $K \in D([j, j]; [n])$, pour toute transposition $\tau = (i; i + 1) \in \mathfrak{S}_n$, on a $f(\tau : K) = f(K)$. Mais $W(\tau : K) - W(K) = (\tau : W - W) \cdot K$ et par la relation (IHX), $(\tau : W - W) \cdot K \in R^<$.

Lemme 3.7 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $K \in D(\cdot; [0])$ alors $g(K)$ est nul ou $\dim(H_1(K)) > 22$. Ainsi, $F_0 = R_0$ en degre d tel que $1 < d < 22$.

Demonstration Pour montrer ce dernier lemme, on procede par etapes:

Si $n < ((1; 3; 3); (3; 3; 3))$ il n’y a rien a demontrer car $\text{Im}(g) \subset R_0$.

En utilisant les arguments du lemme 3.6, il est facile de montrer qu’un diagramme contenant une roue a d jambes appartient a R_d . En e et, si le complementaire de la roue n’est pas connexe, quitte a permuter ses jambes, on peut se ramener a un diagramme obtenu en recollant deux elements de F_2 et donc divisible par t (i.e. appartenant a R_0).

Si $d = 4$, par le lemme 3.6 et en appliquant le lemme 3.5 au complementaire de W_d dans un diagramme de R_d , on obtient facilement $R_d = 0$.

Si les lettres a et b designent les deux lettres $fx; yg$, si $fi; j; kg = fl; 2; 3g$ et si K contient l’un des cinq diagrammes suivants:

$$\begin{array}{c} | \\ \diagdown \\ a_i \quad a_j \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ a_i \quad a_j \end{array} \quad \begin{array}{c} | \\ | \quad | \\ a_i \quad a_i \end{array} \quad \begin{array}{c} | \\ | \quad | \\ a_i \quad a_j \end{array} - \begin{array}{c} | \\ | \quad | \\ a_j \quad a_i \end{array} \quad (5)$$

alors $g(K) = 0$. En e et, on peut toujours faire appara^tre une roue a moins de cinq jambes en recollant un tel diagramme a W .

On peut maintenant montrer que si $n \in \mathbb{N}_3$ alors R est nul. Pour cela, appliquons le lemme (3.5) a un diagramme connexe $K \in D(\cdot; [0])$. Si K est un arbre, il contient le premier diagramme de (5) sinon, il se decompose en une roue dont certaines jambes sont coloriees par les x_i et d’autres qui sont reliees aux feuilles de l’arbre. Aux moins trois d’entre elles sont de couleur x_2 . S’il ne contient pas le deuxieme diagramme de (5), les jambes coloriees par les x_i sont separees par des feuilles de l’arbre. Nous dirons que deux jambes coloriees sont en relation si elles ne sont separees que par une feuille de l’arbre. On complete cette relation en une relation d’equivalence. Le dernier element de (5) prouve que l’on peut permuter les couleurs des jambes qui sont en relation sans modi er l’image par g de K . Mais alors le troisieme diagramme de (5) etant annule par g , si $g(K) \neq 0$, aucune des classes d’equivalences ne peut contenir deux

jambes coloriees par la même couleur et il y a donc au moins trois classes d'équivalences. Ceci signi e qu'en au moins trois endroits dans K , deux feuilles de l'arbre sont reliees par une arête de la roue. La reunion de ces trois arêtes et de l'arbre forme un diagramme a trois boucles qui, par le lemme (3.5), permet de faire apparaître un diagramme W ou $\geq N_3$. Ainsi $f_W(K)$ appartient a $R(\cdot; \cdot) \subset R^<$.

$$g \left(\overline{\begin{array}{c} | \\ a_i \\ | \\ b_j \\ | \\ a_k \end{array}} \right) = g \left(\overline{\begin{array}{c} | \\ a_i \\ \wedge \\ b_j \\ | \\ a_k \end{array}} \right) = g \left(\overline{\begin{array}{c} | \\ a_k \\ \wedge \\ a_i \\ | \\ b_j \end{array}} \right)$$

de plus ces elements sont nuls si $i = k$.

$$g \left(\overline{\begin{array}{c} | \\ a_i \\ | \\ b_{j_1} \\ \dots \\ | \\ a_n \\ | \\ b_{j_n} \\ | \\ a_k \end{array}} \right) = g \left(\overline{\begin{array}{c} | \\ a_k \\ \wedge \\ a_i \\ | \\ b_{j_1} \\ \dots \\ | \\ a_n \\ \wedge \\ a_i \\ | \\ b_{j_n} \end{array}} \right) \tag{6}$$

de plus ces elements sont nuls si $n \geq 3$.

Maintenant si $\geq N_6$ et si $K \geq D(\cdot; [0])$ est un diagramme dont l'une des composantes connexes est un arbre, alors K est combinaison lineaire de diagrammes contenant l'un des deux premiers elements de (5).

Si une composante connexe K_0 de K est une roue, alors K_0 contient un diagramme de type (6) et soit $K_0 \geq R_4$, soit le nombre n est superieur ou egal a quatre donc $g(K) = 0$.

Si K est connexe, on lui applique le lemme (3.5). Reprenant la relation d'équivalence pour les jambes de la roue coloriees par les x_i , on retrouve qu'en trois endroits distincts, la roue possede deux jambes consecutives qui ne sont pas coloriees par x_i et au moins une des deux est donc une feuille de l'arbre. L'arbre a donc au moins trois feuilles et K a donc au moins trois boucles.

Ainsi si $g(K) \neq 0$, soit K est connexe et a au moins trois boucles, soit il possede plusieurs composantes connexes ayant chacune au moins deux boucles. Dans les deux cas, le nombre de sommets trivalents de K est superieur ou egal a $j + 4$. Comme $((1; 3; 3); (3; 3; 3))$, on a $j \geq 16$ et le nombre de sommets trivalents de $f_W(K)$ est superieur ou egal a 44. □

On peut maintenant montrer le lemme 3.4. En e et, considerons un diagramme $K = K^\emptyset \cup K^{\emptyset\emptyset} \geq F_0$ ou K^\emptyset est l'un des trois elements de (4). Le lecteur pourra veri er que si $K^{\emptyset\emptyset}$ n'est pas connexe, alors, si K^\emptyset est isomorphe a W_2 , K est nul, si K^\emptyset est isomorphe a $W_{2,2}$, t divise K et si K^\emptyset est la reunion disjointe de deux carres, alors K se decompose en une combinaison lineaire de diagrammes du même type pour lesquels $K^{\emptyset\emptyset}$ est connexe ou K^\emptyset est l'un des deux premiers

elements de (4). On peut ainsi toujours se ramener au cas ou K^{00} est connexe. Alors, K se decompose dans $(S)_{=(1+2)}$ en une combinaison lineaire de diagrammes de degre strictement inferieur et en reiterant le processus pour un diagramme de $(S)_{=(1+2)}$ de degre inferieur ou egal a 21 (correspondant a un element de S de degre inferieur ou egal a 20), on peut l'exprimer comme combinaison lineaire d'elements de S .

3.5.3 \mathfrak{sl}_3 et les relations exceptionnelles

Le but de cette section est de montrer que χ_3 modulo l'ideal engendre par P_{ϵ_T} annule χ_2 . Les variables t, u et v sont determinees par le fait que chaque superalgebre de Lie simple annule les elements K_1 et K_2 de nris dans la section 3.5.1. Ainsi les caracteres χ_3 et χ_{ϵ_T} annulent χ_1 .

Le but de χ_3 modulo (P_{ϵ_T}) est l'anneau

$$\therefore S_{=I_{\mathfrak{sl}_3}} S_{=I_{\mathfrak{osp}(1;2)}} S_{=(P_{\mathfrak{sl}_2})+(9u-5t^2)} S_{=(P_{\epsilon_T})+(u^2)} S_{=(P_{\epsilon_T})+(t^3)}$$

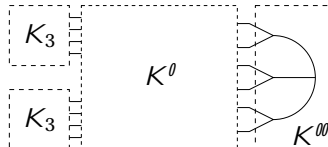
Tout comme les algebres de Lie exceptionnelles, pour $L = \mathfrak{sl}_3$ et $L = \mathfrak{osp}(1;2)$, le carre du Casimir engendre le sous-espace L {invariant de S^4L . Ainsi les caracteres $\chi_{\mathfrak{sl}_3}$ et $\chi_{\mathfrak{osp}(1;2)}$ annulent χ_2 . De plus, $\chi_{\mathfrak{sl}_2}$ annule l'element

$$\chi_2 - t \left(\text{---} - \text{X} \right) \tag{7}$$

et ceci su t a determiner le caractere $\chi_{\mathfrak{sl}_2}$. Ainsi on peut veri er directement que $(9u - 5t^2)$ divise $\chi_{\mathfrak{sl}_2}(K_3)$.

De mme (-8) divise $\chi_{\mathfrak{osp}}(K_3)$ et par homogeneite de $\chi_{\mathfrak{osp}}$, on a: $\chi_{\mathfrak{osp}}(\chi_2) \in (-8)^2\mathbb{Q}[\dots]$. Ceci montre que χ_3 modulo $(P_{\epsilon_T}) + (u^2)$ est nul sur χ_2 .

Pour montrer que χ_3 modulo $(P_{\epsilon_T}) + (t^3)$ annule χ_2 , il su t de montrer que les images de χ_2 par respectivement $\chi_{\mathfrak{sl}_3}$ et $\chi_{\mathfrak{D}_{21}}$ sont dans les ideaux respectifs (t^3) et (v^3) . Pour cela, supposons qu'un element K de $F_0 \cap S$ soit de la forme suivante:



ou $K^\emptyset \subset K^\emptyset$ est connexe. On note u l'element de $\mathfrak{sl}(2,2)$ correspondant a K . Il se trouve que $\mathfrak{sl}(2,2)$ divise $\mathfrak{sl}(K_3)$ et a_1 divise $\mathfrak{sl}(K_3)$ (ceci provient du fait que $\mathfrak{sl}(2,2)(K_3) = 0$).

Comme $K^\emptyset \subset K^\emptyset$ est connexe, K^\emptyset appartient a $D_b([8];[6])$ et donc a_1^2 divise $\mathfrak{sl}(K_3 \cup K_3 \cup K^\emptyset)$ or il existe une forme lineaire sur X^6 a valeurs dans \mathbb{R} (cf section 3.4.2) qui prend sur $a_1^{-2} \mathfrak{sl}(K_3 \cup K_3 \cup K^\emptyset)$ la valeur $\frac{1}{a_1^2} \mathfrak{sl}(u)$. Ainsi v^3 divise $\mathfrak{sl}(u)$.

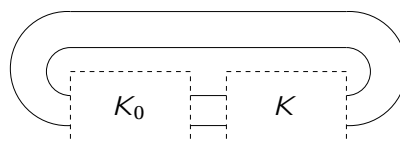
De même, en notant $D_{\mathfrak{gl}}^\emptyset([p];[q])$ le sous- $\mathbb{Q}[t]$ espace de $D_{\mathfrak{gl}}([p];[q])$ engendre par les elements de \mathfrak{sl}_{p+q} on peut aisement veri er que la composition a droite par un element de D_b laisse stable $D_{\mathfrak{gl}}^\emptyset$ (il su t de le veri er pour des diagrammes de la forme $[\cdot; \cdot] / d$). Ainsi, comme $\mathfrak{sl}(K_3 \cup K_3) \supset \mathfrak{sl}_8 + \mathfrak{sl}_8$, on a $\mathfrak{sl}((K_3 \cup K_3) \cup K^\emptyset) \supset \mathfrak{sl}_6 + \mathfrak{sl}_6$ et donc t^2 divise $\mathfrak{sl}((K_3 \cup K_3) \cup K^\emptyset)$. Or il existe une forme lineaire sur \mathfrak{sl}_6 , nulle sur \mathfrak{sl}_6 , a valeur dans \mathbb{Q} (cf la forme ϕ_0 de la section 3.4.4) qui prend sur $t^{-2} \mathfrak{sl}((K_3 \cup K_3) \cup K^\emptyset)$ la valeur $(\frac{1}{t^2} \mathfrak{sl}(u))$ modulo (t) . Ainsi, t^3 divise $\mathfrak{sl}(u)$.

Donc $\mathfrak{sl}(u)$ est bien dans l'ideal somme $(P_{\text{ex}}) + (t^3)$. Le fait que les diagrammes du type de K engendrent \mathfrak{sl}_2 modulo \mathfrak{sl}_1 resulte de la remarque faite a la fin de la section precedente. Ainsi, \mathfrak{sl}_3 modulo (P_{ex}) annule aussi \mathfrak{sl}_2 et par suite se factorise par \mathfrak{sl}_4 en degre inferieur ou egal a 20. Ceci termine la demonstration de l'existence de \mathfrak{sl}_4 .

4 Les cas de $\mathfrak{g}(3)$, $\mathfrak{f}(4)$ et les branchements

Le but de cette section est de demontrer que le caractere \mathfrak{sl}_4 factorise aussi les caracteres $\mathfrak{g}(3)$ et $\mathfrak{f}(4)$.

En fait, on montre que $\mathfrak{g}(3)$ se factorise par \mathfrak{sl}_2 et que $\mathfrak{f}(4)$ et \mathfrak{sl}_3 co'ncident. Pour calculer $\mathfrak{g}(3)$, il su t de remarquer que le sous-module X_2 de $\mathfrak{g}(3)$ forme par le noyau du Casimir est simple et de superdimension nulle (pour \mathfrak{sl}_2 ce même module est nul). Notons K_0 l'element (7) annule par \mathfrak{sl}_2 (cf section 3.5.3). Les elements de F_0 de la forme



ou K est un diagramme connexe de $D([2];[2])$, sont envoyes par $\mathfrak{g}(3)$ sur $\text{tstr}_{X_2}(\mathfrak{g}(3)(K)) = 0$ et par suite $\mathfrak{g}(3) = \mathfrak{sl}_2$ sont tous deux determines de maniere unique par le fait qu'ils annullent ces elements.

Supposons maintenant qu'une superalgebre de Lie L munie d'un element de Casimir non degenerate $\mathfrak{C} \in L$ contienne une sous-algebre de Lie I sur laquelle la forme bilineaire supersymetrique de L ne soit pas degenerate. On a alors un foncteur $F: \text{Mod}_L \rightarrow \text{Mod}_I$ qui consiste a regarder la structure de I -module d'un L -module.

Si de plus le I -module E , orthogonal de I dans L , verifie $[E;E]_L \subset I$, on dira que $(I; E)$ est une bonne decomposition de L . On peut remarquer que le Casimir de L se decompose en $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_I + \mathfrak{C}_E$ avec $\mathfrak{C}_I \in I$ et $\mathfrak{C}_E \in E$.

Pour transcrire cette situation en termes de diagrammes, on pose les definitions suivantes:

Un $(X_1; X_2)$ -diagramme bicouleur est la donnee d'un $(; X_1)$ -diagramme ou est non orientee et la donnee d'un isomorphisme: $\theta: X_1 \rightarrow X_2$. Nous dirons qu'une arête d'un diagramme bicouleur est de la premiere couleur si elle n'appartient pas a la courbe θ , et nous dirons qu'elle est de la deuxieme couleur dans le cas contraire. On representera toujours d'un trait gras les arêtes de la deuxieme couleur. On note $\mathcal{A}(X_1; X_2)$ le \mathbb{Q} -espace vectoriel de base les $(X_1; X_2)$ -diagrammes bicouleurs quotiente par les relations (AS) , (IHX) , (STU) . On note aussi

$$\mathcal{A}(X) = \bigoplus_{X_1 \cup X_2 = X} \mathcal{A}(X_1; X_2)$$

On remarque que si θ est une courbe sans bord non orientee, $\mathcal{A}(\theta; X) \cong \mathcal{A}(X; \theta)$.

Enfin on designe par $\overline{\mathcal{A}}(X_1; X_2)$ le quotient de $\mathcal{A}(X_1; X_2)$ par les relations notees (\overline{IHX}) :



$$\text{et } \overline{\mathcal{A}}(X) = \bigoplus_{X_1 \cup X_2 = X} \overline{\mathcal{A}}(X_1; X_2)$$

On definit les categories \mathcal{D} et $\overline{\mathcal{D}}$ de maniere analogue a D comme les categories ayant les memes objets que D et dont les morphismes sont

$\mathcal{D}([p]; [q]) = \mathcal{A}([p] \cup [q])$ et $\overline{\mathcal{D}}([p]; [q]) = \overline{\mathcal{A}}([p] \cup [q])$. La composition dans \mathcal{D} ou $\overline{\mathcal{D}}$ de deux diagrammes est encore obtenue par leur recollement si les arêtes issues des sommets de la source du premier diagramme sont de la même

couleur que celles issues du but du deuxieme diagramme et on decrete que la composition est nulle dans le cas contraire. On note $\bar{D}: \mathcal{D} \rightarrow \bar{\mathcal{D}}$ le foncteur quotient.

Soit l une superalgebre de Lie quadratique et E un l -module muni d'une forme bilineaire supersymetrique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l -invariante. On note κ l'element de $S^2 E$ associe et κ le Casimir de l .

Proposition 4.1 *Il existe un unique foncteur monoïdal \mathbb{Q} -lineaire*

$$b_{l;E}: \mathcal{D} \rightarrow \text{Mod}_l$$

envoyant [1] sur $l \otimes E$, prenant les mêmes valeurs que $b_{l;E}$ sur $A(\cdot; X)$ lorsque X est une courbe sans bord non orientee, et veri ant

$$b_{l;E}(\text{---}) = \text{Id}_E \quad b_{l;E}(\text{---}) =$$

Si de plus $(l; E)$ est une bonne decomposition de L , alors $b_{l;E}$ passe au quotient par \bar{D} , de nissant un foncteur $\bar{b}_{l;E}: \bar{\mathcal{D}} \rightarrow \text{Mod}_l$ qui veri e

$$\bar{b}_{l;E} = \bar{b}_{l;E} \circ \bar{D}$$

Il existe un foncteur monoïdal \mathbb{Q} -lineaire $\bar{b}: \bar{\mathcal{D}} \rightarrow \text{Mod}_l$ de ni de maniere unique par ses valeurs sur les morphismes suivants:

$$\begin{aligned} \bar{b}(\text{---}) &= \text{---} + \text{---} \quad \bar{b}(\text{---}) = \text{---} + \text{---} \\ \bar{b}(\text{---}) &= \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} \\ \bar{b}(\text{---}) &= \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} \end{aligned}$$

En n , le foncteur \bar{b} veri e:

$$F \quad L = \bar{b}_{l;E} \quad \bar{b}$$

Demonstration Nous justi erons seulement les existences de \bar{b} et de $\bar{b}_{l;E}$. Notons provisoirement f l'application qui associe a un $(X_1; X_2)$ -diagramme bicouleur le $(X_1; X_2)$ -diagramme sous-jacent (on oublie l'information sur les couleurs). Ainsi il n'est pas difficile de voir que pour un diagramme $K \in A(\cdot; X)$ on a: $\bar{b}(K) = \sum_{f(K)=K} \bar{b}(K)$. Le point cle de la validite de cette definition est qu'en notant l, H et X les diagrammes intervenant dans la

relation $(IH\bar{X})$, on peut reorganiser la somme $\sum_{f(\bar{K})=I} \bar{K} - \sum_{f(\bar{K})=H} \bar{K} + \sum_{f(\bar{K})=X} \bar{K}$ de maniere a faire apparaître la relation $(IH\bar{X})$ plus des relations (STU) plus la relation $(\overline{TH\bar{X}})$. En ce sens, les relations $(\overline{TH\bar{X}})$ sont necessaires et suffisantes a l'existence de $\bar{}$.

En utilisant $\bar{} = I + \bar{}$ et en "developpant" le calcul de $\bar{}_L(K)$ comme il a ete fait dans la demonstration du lemme 3.2 pour l'algebre $\mathfrak{Q}_{2,1}$, la formule $F_{\bar{}_L} = \sum_{I;E} \bar{}$ apparaît comme un simple jeu d'écriture et justifie du même coup l'existence de $\sum_{I;E} \bar{}$: en effet et en "developpant" $\bar{}_L(I - H + X) = 0$ on obtient bien que $\sum_{I;E} \bar{}$ verifie la relation $(\overline{TH\bar{X}})$. □

Corollaire Si $E = \bigoplus_i E_i$ ou chaque E_i est un I {module de superdimension nulle et tel que $\text{End}_I(E_i) \cong \mathbb{Q}$ alors les restrictions de $\bar{}_L$ et $\bar{}_I$ a F_0 sont des formes lineaires egales.

Demonstration En effet, l'image par $\bar{}$ d'un element de F_0 est egale au même element vu dans $\overline{D}([0];[0])$ plus une combinaison lineaire de $(\begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix})$ diagrammes ou $\notin \begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix}$. Mais ces derniers s'interpretent comme la supertrace sur E d'un tenseur I {invariant et sont annules par $\sum_{I;E} \bar{}$ sous les hypotheses du corollaire. On a donc dans ces conditions $\sum_{I;E} \bar{} = \bar{}_I$ sur F_0 . □

Proposition 4.2 La superalgebre de lie $\mathfrak{f}(4)$ satisfait aux conditions ci-dessus pour $I = \mathfrak{sl}(4;1)$ et E est alors un $\mathfrak{sl}(4;1)$ {module simple de superdimension nulle. En consequence, les caracteres $\bar{}_{\mathfrak{sl}(4;1)}$ et $\bar{}_{\mathfrak{f}(4)}$ sont egaux.

Demonstration La partie paire de $\mathfrak{f}(4)$ est isomorphe a l'algebre semi-simple $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{so}_7$. Sa partie impaire est isomorphe au produit tensoriel de la representation standard de \mathfrak{sl}_2 par la representation spin_7 . Considerons une decomposition de Cartan: $\mathfrak{sl}_2 = \mathbb{C}H \oplus \mathbb{C}E \oplus \mathbb{C}F$ avec $[H;E] = 2E$, $[H;F] = -2F$ et $[E;F] = H$. On note V_2 la representation standard de \mathfrak{sl}_2 , V_4 la representation standard de \mathfrak{sl}_4 , V_4^0 sa representation duale, $W = V_2 \otimes V_4 \oplus V_2 \otimes V_4^0$. On choisit e vecteur de plus haut poids de V_2 et $f = F:e$.

W est un \mathfrak{sl}_4 {module simple de dimension 6 autodual. Le choix d'une base de W donne un morphisme d'algebre de Lie $\mathfrak{sl}_4 \rightarrow \mathfrak{so}_6$ qui est en fait un isomorphisme.

Fixons une injection $\mathfrak{sl}_4 \rightarrow \mathfrak{so}_6 \rightarrow \mathfrak{so}_7$ et considerons la decomposition de $\mathfrak{f}(4)$ comme $\mathbb{C}H \oplus \mathfrak{sl}_4$ {module:

$$\mathfrak{f}(4) \cong \mathbb{C}H \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{so}_7 \oplus V_2 \oplus \text{spin}_7 \oplus e \oplus V \oplus e \oplus V^0 \oplus f \oplus V \oplus f \oplus V^0$$

Le crochet de Lie de $\mathfrak{f}(4)$ est un morphisme de $\mathbb{C}H \oplus \mathfrak{sl}_4$ module et on remplit facilement la table du crochet suivante en utilisant la propriete etablie par V. G. Kac (cf [10]) que pour toute superalgebre de Lie classique basique \mathfrak{g} , si α est l'ensemble de ses racines, et si \mathfrak{g}_α designe l'espace propre associe a la racine α , et 2α est differente de $-\alpha$ alors:

$$[\mathfrak{g}_\alpha; \mathfrak{g}_\alpha] \neq 0 \iff \alpha \in 2\alpha \tag{8}$$

$[\cdot; \cdot]$	$\mathbb{C}H$	\mathfrak{sl}_4	$\mathbb{C}E$	$\mathbb{C}F$	W	$e \oplus V$	$f \oplus V^\theta$	$e \oplus V^\theta$	$f \oplus V$
$\mathbb{C}H$	0	0	$\mathbb{C}E$	$\mathbb{C}F$	0	$e \oplus V$	$f \oplus V^\theta$	$e \oplus V^\theta$	$f \oplus V$
\mathfrak{sl}_4		\mathfrak{sl}_4	0	0	W	$e \oplus V$	$f \oplus V^\theta$	$e \oplus V^\theta$	$f \oplus V$
$\mathbb{C}E$			0	$\mathbb{C}H$	0	0	$e \oplus V^\theta$	0	$e \oplus V$
$\mathbb{C}F$				0	0	$f \oplus V$	0	$f \oplus V^\theta$	0
W					\mathfrak{sl}_4	$e \oplus V^\theta$	$f \oplus V$	$e \oplus V$	$f \oplus V^\theta$
$e \oplus V$						0	$(\mathbb{C}H) \oplus \mathfrak{sl}_4$	$\mathbb{C}E$	W
$f \oplus V^\theta$							0	W	$\mathbb{C}F$
$e \oplus V^\theta$								0	$(\mathbb{C}H) \oplus \mathfrak{sl}_4$
$f \oplus V$									0

Le remplissage de cette table decoule directement de la propriete de surjectivite du crochet signalee ci-dessus a l'exception des termes $(\mathbb{C}H)$ notes entre parentheses pour lesquels on a par exemple:

$$[[e \oplus V; f \oplus V^\theta]; E] = [e \oplus V; [f \oplus V^\theta; E]] = [e \oplus V; e \oplus V^\theta] = \mathbb{C}E$$

Ce qui prouve que $\mathbb{C}H \subseteq [e \oplus V; f \oplus V^\theta]$.

Posons maintenant

$$I = \mathbb{C}H \oplus \mathfrak{sl}_4 \oplus (e \oplus V) \oplus (f \oplus V^\theta)$$

$$X = \mathbb{C}E \oplus \mathbb{C}F \oplus W \oplus (e \oplus V^\theta) \oplus (f \oplus V)$$

On lit facilement sur la table que:

I est une sous-algebre de Lie de $\mathfrak{f}(4)$.

L'ideal engendre par n'importe lequel de ses elements non nul est I tout entier. Ainsi I est simple et la classification de [10] permet d'identifier $I \cong \mathfrak{sl}(4; 1)$.

X est un I -module simple car il est monogene, engendre par n'importe lequel de ses elements.

Dans $\mathfrak{f}(4)$, $[X; X]$ est inclus dans I .

Compte tenu que pour une superalgebre de Lie quadratique classique \mathfrak{g} , si α et β sont des racines, $\alpha + \beta \in \mathfrak{g}$ si et seulement si $\alpha + \beta \notin 0$, on a $l(\mathfrak{X}) = 0$. De plus, la superdimension de \mathfrak{X} est bien nulle comme annonce dans la proposition. \square

Remarque Le corollaire de la proposition 4.1 permet de redemontrer que les caracteres $\chi_{\mathfrak{sl}(E)}$ et $\chi_{\mathfrak{osp}(E)}$ ne dependent que de la superdimension de E , d'ou $\chi_{\mathfrak{sl}(E)} = \chi_{\mathfrak{sl}_3}$.

References

- [1] **D Bar-Natan**, *On the Vassiliev knot invariants*, *Topology* 34 (1995) 423{472
- [2] **A M Cohen, R de Man**, *Computational evidence for Deligne's conjecture regarding exceptional Lie groups*, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.* 322 (1996) 427{432
- [3] **S V Chmutov, S V Duzhin, A.I. Kaishev**, *The algebra of 3-graphs*, *Tr. Mat. Inst. Steklova* 221 (1998) 168{196
- [4] **P Deligne**, *La serie exceptionnelle de groupes de Lie*, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.* 322 (1996) no. 4, 321{326
- [5] **P Deligne, R de Man**, *La serie exceptionnelle de groupes de Lie. II.* *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.* 323 (1996) no. 6, 577{582
- [6] **J M Figueroa-O'Farrill, T Kimura, A Vaintrob**, *The universal Vassiliev invariant for the Lie superalgebra $\mathfrak{gl}(1;1)$* , *Comm. Math. Phys.* 185 (1997) 93{127
- [7] **P Freyd, J Hoste, W B R Lickorish, K Millet, A Ocneanu, D Yetter**, *A new polynomial invariant of knots and links*, *Bull. Amer. Math. Soc.* 12 (1985) 239{246
- [8] **V F R Jones**, *A polynomial invariant of knots via Von Neumann algebras*, *Bull. Amer. Math. Soc.* 12 (1985) 103{111
- [9] **L H Kau man**, *An invariant of regular isotopy*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 312 (1990) 417{471
- [10] **V G Kac**, *Lie superalgebras*, *Advances in math.* 26 (1977) 8{96
- [11] **J A Kneissler**, *Relations in the algebra \mathfrak{sl}_3* , preprint (Oct 1997)
- [12] **J A Kneissler**, *The number of primitive Vassiliev invariants up to degree twelve*, preprint (Juin 1997)
- [13] **A M Cohen, M A A van Leeuwen, B. Lisser**, *LiE, a package for lie group computations*, CAN. Amsterdam (1992)
- [14] **T T Q Le, J Murakami**, *Kontsevich's integral for the Kau man polynomial*, *Nagoya Math. J.* 142 (1996) 39{65

- [15] **T T Q Le, J Murakami**, *The universal Vassiliev-Kontsevich invariant for framed oriented links*, *Compositio Math.* 102 (1996) 41-64
- [16] **T T Q Le, J Murakami**, *Representation of the category of tangles by Kontsevich's iterated integral*, *Comm. Math. Phys.* 168 (1995) 535-562
- [17] **B Patureau-Mirand**, *Caracteres sur l'algebre de diagrammes*, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 329, Serie I (1999) 803-806
- [18] **A. Sergeev**, *The invariant polynomials on simple Lie superalgebras*, preprint (Oct 1998)
- [19] **V. Vassiliev**, *Cohomology of knot spaces, Theory of singularities and its applications* (VI Arnold, ed) Amer. Math. Soc. Providence (1990)
- [20] **P Vogel**, *Invariants de Vassiliev des n uds*, *Sem. Bourbaki*, 1992-93, Asterisque 216 (1993) 213-232
- [21] **P Vogel**, *Algebraic structures on modules of diagrams*, preprint a paraître dans *Inventiones Mathematicae*