UNIVERSITATIS IAGELLONICAE ACTA MATHEMATICA, FASCICULUS XXXIX
2001

FONCTIONS MÉROMORPHES ET CYCLES ANALYTIQUES

by Salomon Ofman

English abstract. Let Y be an analytic manifold such that the set $H^0(Y, \mathcal{O})$ of its holomorphic functions is trivial. Let $f_1, \ldots, f_p$ and $g_1, \ldots, g_p$ be meromorphic functions on Y ; under some additional hypotheses, we give a simple algebraic characterization so that the intersections $(f_1)^- \cap \ldots \cap (f_p)^-$ and $(g_1)^- \cap \ldots \cap (g_p)^-$ are equal. These results are used in connection with the theory of residues in [**2**] to construct the Analytic Radon Transformation.

Résumé. Soit Y une variété analytique complexe dont l'ensemble des fonctions holomorphes $H^0(Y, \mathcal{O})$ est trivial. Soit $f_1, \ldots, f_p$ et $g_1, \ldots, g_p$ des fonctions méromorphes dans Y ; sous certaines hypothèses additionnelles, on donne une caractérisation algébrique simple pour que les intersections $(f_1)^- \cap \ldots \cap (f_p)^-$ et $(g_1)^- \cap \ldots \cap (g_p)^-$ coïncident. Ces résultats sont utilisés en relation avec la théorie des résidus dans [**2**] pour construire la transformation de Radon analytique.

0. Préliminaires. Soit Y une variété analytique complexe (connexe, paracompacte), on note $\mathcal{C}_q(Y)$ (resp. $C_q(Y)$) l'ensemble des cycles analytiques (resp. analytiques compacts) de Y de dimension complexe (pure) q, c'est-à-dire le monoïde libre engendré par les sous-ensembles analytiques (resp. analytiques compacts) de dimension (pure) q. Si c est un cycle de Y, on note $|c|$ son support, i.e. la réunion de ses points. Si c n'a pas de composantes multiples, on l'identifie avec son support.

Si $k = c_1 - c_2$ est un diviseur de Y où $c_i \in \mathcal{C}_{n-1}(Y)$ $(i = 1, 2)$, c_1 (resp. c_2) est appelé la partie positive (resp. négative) de k et son support $|k|$ est défini comme la réunion des supports de c_1 et c_2.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 32A20, 32A17.

Key words and phrases. (Mots-clés.) Fonctions méromorphes, diviseurs, cycles analytiques.

Soit X un sous-espace de Y ; on note $\mathcal{O}_X$ le faisceau de germes de fonctions holomorphes de X. Si c est un cycle de X, on désigne par $dim_X c$ (resp. $codim_X c$) sa dimension (resp. sa codimension) dans X. Lorsque $X = Y$, on omet en général l'espace en indice.

Soit $M(Y)$ l'ensemble des fonctions méromorphes de Y et $M(Y)^* = M(Y) - \mathcal{O}(Y)$. Pour $f \in M(Y)$, on désigne par $(f) = (f)^+ - (f)^-$ le diviseur défini dans Y par f, $(f)^+$ (respectivement $(f)^-$) étant la partie positive (respectivement négative) de (f). Pour $f \in \mathcal{O}(Y)$, on pose $(f)^- = \emptyset$ et si f ne s'annule pas dans Y, $(f)^+$ désigne également l'ensemble vide.

Soit $M_p = (M(Y))^p$ et $F = (f_1, \cdots, f_p) \in M_p$. On désigne par $(F)^+$ (resp. $(F)^-$) le p-uple $((f_1)^+, \ldots, (f_p)^+)$ (resp. $((f_1)^-, \ldots, (f_p)^-)$) et $\cap(F)^+$ (resp. $\cap(F)^-$) le cycle intersection $\bigcap_{i=1}^{p} (f_i)^+$ (resp. $\bigcap_{i=1}^{p} (f_i)^-$).
On pose alors
$M_p^* = \{F \in M_p; \cap(F)^- \in \mathcal{C}_{n-p}(Y)\}$, $\mathcal{M}_p^* = \{F \in \mathcal{M}_p; \cap(F)^- \in C_{n-p}(Y)\}$; enfin $\mathcal{M}_p = \{F = (f_1, \cdots, f_p) \in M_p; (f_1)^+ = \cdots = (f_p)^+\}$ désigne l'ensemble des p-uples de fonctions méromorphes dont les diviseurs ont même partie positive.

Soit $\lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^p) \in \mathbb{C}^p$, on note $\lambda \cdot F$ la fonction méromorphe $\lambda \cdot F = \lambda^1 f_1 + \cdots + \lambda^p f_p$ et, si aucune fonction f_i n'est identiquement nulle, par $1/F$ le p-uple $(1/f_1, \ldots, 1/f_p)$.

Soit $c_1, \ldots, c_k$ une famille de sous-ensembles analytiques de Y.

Définition. L'intersection de la famille $c_1, \ldots, c_k$ est dite complémentaire si $codim \bigcap_{i=1}^{p} c_i = \sum_{i=1}^{k} codim c_i$.

Définition. Si tous les c_i sont des diviseurs, la famille $c_1, \ldots, c_k$ est dite totalement p-complète si pour tout $I \subset \{1, \ldots, , p\}$, la famille $(d_i)_{i \in I}$ est complète (i.e. définit une intersection complète dans Y).

Une relation entre ces deux propriétés est donnée par le lemme suivant.

Lemme 0.1. *Soit $F = (f_1, \ldots, f_p) \in \mathcal{M}_p^*$ un p-uple de fonctions méromorphes dans Y avec codim $\bigcap_{i=1}^{p} (f_i)^- = p$; il existe alors une matrice inversible A de coefficients $a_i^j \in \mathbb{C}$ en sorte que le p-uple $1/G = (1/g_1, \ldots, 1/g_p) = A \cdot 1/F$ vérifie la relation suivante : toute famille $(c''_{i_k} \subset (g_{i_k})^-)_{1 \leq i \leq k}$ de composantes irréductibles de $(G)^-$ est totalement p-complète.*

Démonstration. Localement, cela résulte facilement du théorème sur les suites régulières (cf. [**4**], chap. IV) ; dans Y tout entier, d'après la prop. 1.2 de [**1**], pour tout p-uple $H = (h_1, \cdots, h_p)$ de fonctions holomorphes sur une variété

Y', il existe une matrice inversible A en sorte que la famille $H' = A \cdot H$ soit totalement p-complète ; soit $c = (f_1)^+ = \ldots = (f_p)^+$ le diviseur d'annulation commun des f_i ; on applique ce résultat avec $Y' = Y - |c|$ et $h_i = 1/f_{i|Y'}$. Soit $H = (h_1, \cdots, h_p)$; pour tout $I \subset \{1, \cdots, p\}$, la famille des $K = (k_1, \ldots, k_p) = A \cdot H$ définit une famille de diviseurs $(h_i)^+$ totalement p-complète dans Y'. Le diviseur c ne contient évidemment aucune composante irréductible des cycles $(f_i)^-$, d'où $\dim \bigcap_{i \in I} (h_i)^+ = \dim \bigcap_{i \in I} (g_i)^- = |I|$. $\square$

Définition. On dira qu'un espace analytique X est fonctionnellement compact, si les fonctions holomorphes sur X sont localement constantes.

Remarque 1. Ces espaces généralisent les espaces compacts, mais également les espaces pseudoconcaves (au sens d'Andreotti-Grauert). Ainsi pour $k \in \{0, \ldots,$
$n-1\}$ les espaces $\mathbb{P}_n(\mathbb{C}) - \mathbb{P}_k(\mathbb{C})$ sont fonctionnellement compacts.

1. Étude de certaines familles de fonctions méromorphes. Soient $F = (f_1, \cdots, f_p) \in \mathcal{M}_p^*, \lambda_i^0, \ldots, \lambda_i^p, \delta_i^1, \ldots, \delta_i^p \in \mathbb{C}$, on pose
$\lambda_i = (\lambda_i^1, \ldots, \lambda_i^p)$, $\delta_i = (\delta_i^1, \ldots, \delta_i^p) \in \mathbb{C}^p$, $\tilde{\lambda}_i = (\lambda_i^0, \ldots, \lambda_i^p) \in \mathbb{C}^{p+1}$
et
$c = \cap(F)^+$, $c' = \cap(F)^-$, $\tilde{c} = c \cap c'$, $\lambda^j = (\lambda_1^j, \ldots, \lambda_p^j)$, $\delta^j = (\delta_1^j, \ldots, \delta_p^j)$ $(i = 1, \ldots, p \,; j = 0, \ldots, p)$; on note en outre δ la matrice $(p \times p)$ dont les colonnes sont formées des transposées des matrices lignes δ_i.

Soit $G = (g_1, \cdots, g_p) \in M(Y)^p$ un p-uple de fonctions méromorphes de la forme

$$g_i = (\lambda_i^0 + \lambda_i(1/F))/(\delta_i(1/F)) = (\lambda_i^0 + \sum_{j=1}^{p} \lambda_i^j/f_j)/(\sum_{j=1}^{p} \delta_i^j/f_j) \qquad (1)$$

On écrit encore G sous la forme matricielle suivante

$$G = \left(\lambda^0 + \lambda \cdot (1/F)\right)/(\delta \cdot (1/F)) = (\lambda^0 + (\lambda/F))/(\delta/F).$$

Lemme 1.1. *Soient g_i des fonctions méromorphes de Y vérifiant les égalités* (1). *Alors*
i) ou bien pour un certain $i \in \{1, \ldots, p\}$, la fonction g_i est constante, λ_i^0 est nul et les vecteurs λ_i et δ_i sont colinéaires
ii) ou bien aucune fonction g_i n'est constante et l'équivalence suivante est vérifiée : $(g_1)^+ = \ldots = (g_p)^+$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, les vecteurs $\tilde{\lambda}_i$ sont colinéaires.

Démonstration. Soient $c = \cap(F)^+$ (zéro commun des f_i), $c' = \cap(F)^-$ $(= \bigcap_{i=1}^{p} (f_i)^-)$, z_0 un point de Y, U un voisinage de carte de z_0 dans lequel

$f_i\big|_U = u/v^i$ avec u et v^i premiers entre eux ($i = 1, \ldots, p$). Dans U, g_i s'écrit

$$g_i\big|_U = (\lambda_i^0 u + \sum_{j=1}^{p} \lambda_i^j v_j) / \sum_{j=1}^{p} \delta_i^j v_j.$$

i) Supposons qu'il existe i fixé dans $\{1, \ldots, p\}$ tel que $\lambda_i^0 u + \sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_i^j v_j$ et $\sum\limits_{j=1}^{p} \delta_i^j v_j$ aient un facteur commun. On pose $c_i = (g_i)^+, c'_i = (g_i)^-, \tilde{c} = c \cap c' = (\cap(F)^+) \cap (\cap(F)^-)$; soit z un point d'une composante commune de $|c_i|$ et $|c'_i|$. En restreignant au besoin U, on peut écrire $\lambda_i^0 u + \sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_i^j v_j = r \cdot q$ et $\sum\limits_{j=1}^{p} \delta_i^j v_j = r' \cdot q$, $(r, r', q \in \mathcal{O}(U),\ r$ et r' unités de $\mathcal{O}(U)$ i.e. inversibles dans $\mathcal{O}(U))$. On a alors dans U tout entier

$$\lambda_i^0 r' u + \sum_{j=1}^{p} (\lambda_i^j r' - \delta_i^j r) v_j = 0 \tag{1}$$

Les supports des cycles c' et c se coupant simplement ($\tilde{c} = c' \cap c$ étant de codimension $p+1$), u n'est pas dans l'idéal $\mathcal{I}(v_1, \ldots, v_p)$ et l'égalité (1) donne

$$\lambda_i^0 r' = \lambda_i^0 = 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{p} (\lambda_i^j r' - \delta_i^j r) v_j = 0 \tag{1'}$$

Si l'un des $\lambda_i^j r'(z) - \delta_i^j r(z)$ était non nul, v_j serait dans l'idéal $\mathcal{I}(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_p)$ d'où $\dim c' > n - p$ contrairement à l'hypothèse. Ainsi, l'égalité $\lambda_i^j r' - \delta_i^j r \equiv 0$ est vérifiée au voisinage de z et donc dans U connexe tout entier. Si $\lambda_i^j = 0$, il en est de même de δ_i^j ; pour $\lambda_i^j \neq 0$, en posant $r'/r = \delta_i^j / \lambda_i^j = \alpha \in \mathbb{C}$, on obtient (dans U) $\delta_i = (\delta_i^1, \ldots, \delta_i^p) = \alpha \cdot \lambda_i = \alpha \cdot (\lambda_i^1, \ldots, \lambda_i^p)$. La fonction g_i localement constante dans Y connexe est donc constante.

Inversement les égalités $\lambda_i^0 = 0$ et $\delta_i = \alpha \cdot \lambda_i$ impliquent trivialement g_i constante.

ii) Supposons que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, λ_i et δ_i ne soient pas colinéaires (alors d'après ce qui précède, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, g_i est non constante). L'équation de $(g_i)^+$ dans U est donnée par

$$\lambda_i^0 u + \sum_{j=1}^{p} \lambda_i^j v_j = 0 \tag{2}$$

et $(g_i)^+ = (g_k)^+$ équivaut à

$$\lambda_i^0 u + \sum_{j=1}^{p} \lambda_i^j v_j = \alpha_i^k(\lambda_k^0 u + \sum_{j=1}^{p} \lambda_k^j v_j) \qquad (\alpha_i^k \in \mathcal{O}^*(U))$$

ou encore

$$(\lambda_i^0 - \alpha_i^k \lambda_k^0)u + \sum_{j=1}^{p}(\lambda_i^j - \alpha_i^k \lambda_k^j)v_j \equiv 0 \qquad (2').$$

De manière analogue à i) on voit que l'égalité $(2')$ équivaut à

$$\lambda_i^j - \alpha_i^k \lambda_k^j = 0 \qquad (3)$$

pour tout $j \in \{0, \ldots, p\}$, et puisque tous les diviseurs $(g_k)^+$ sont identiques, l'égalité (3) est vérifiée pour tout $j \in \{0, \ldots, p\}$.

Le vecteur $\tilde{\lambda}_k \in \mathbb{C}^{p+1}$ étant non nul $\alpha_i^k = \lambda_i^j / \lambda_k^j$ ne dépend pas de $j \in \{0, \ldots, p\}$, ce qui donne $\tilde{\lambda}_i = (\lambda_i^0, \ldots, \lambda_i^p) = \alpha_i^k(\lambda_k^0, \ldots, \lambda_k^p) = \alpha_i^k \tilde{\lambda}_k$ $(i, k \in \{1, \ldots, p\})$. $\square$

Corollaire 1.2. *Soit $F = (f_1, \cdots, f_p) \in \mathcal{M}_p^*$ et $G = (g_1, \cdots, g_p) \in \mathcal{M}_p$ vérifiant*

$$G = (\lambda^0 + (\lambda/F))/(\delta/F) \qquad (**).$$

On a alors
- ou bien, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, g_i est constante dans Y
- ou bien, si

$$g_i = (\lambda_i'^0 + \sum_{j=1}^{p} \lambda_i'^j / f_j)/(\sum_{j=1}^{p} \delta_i'^j / f_j) \qquad (i = 1, \ldots, p)$$

est une autre représentation de G, les vecteurs $(\lambda_i^0, \ldots, \lambda_i^p, \delta_i^1, \ldots, \delta_i^p)$ et $(\lambda_i'^0, \ldots, \lambda_i'^p, \delta_i'^1, \ldots, \delta_i'^p)$ de $\mathbb{C}^{2p+1}$ sont colinéaires.
En particulier, si l'on choisit $\lambda_i^0 = 1$ $(i = 1, \ldots, p)$, la représentation $(**)$ de G est unique.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que si l'une des fonctions g_k est constante, $(g_k)^- = \emptyset$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ les fonctions g_i sont alors holomorphes dans Y donc constantes. On peut donc supposer les g_i non constantes.
Soit $g_i' = (\lambda_i'^0 + \sum_{j=1}^{p} \lambda_i'^j / f_j)/(\sum_{j=1}^{p} \delta_i'^j / f_j)$; pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, on a $(g_1')^+ = \ldots = (g_p')^+$ et en outre il existe un couple $(i, j) \in \{1, \ldots, p\}^2$ avec $i \neq j$ tel que $(g_j)^-$ et $(g_i)^-$ n'aient pas de composantes communes (car la famille $(F)^-$

définit une intersection complète). En remplaçant g_j par g'_j et en appliquant le lemme 1.1, on obtient

$$(\lambda_i'^0, \ldots, \lambda_i'^p) = \alpha_i(\lambda_i^0, \ldots, \lambda_i^p) \quad \text{et} \quad g'_i/g_i \equiv 1 = \alpha_i(\sum_{i=1}^{p} \delta_i^j/f_j)/(\sum_{i=1}^{p} \delta_i'^j/f_j).$$

D'après le i) de ce même lemme appliqué à g'_i/g_i, les vecteurs $(\delta_i^1, \ldots, \delta_i^p)$ et $(\delta_i'^1, \ldots, \delta_i'^p)$ sont colinéaires d'où $\delta_i'^j = \alpha_i \cdot \delta_i^j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$. □

Soit $G = (\lambda^0 + (\lambda/F))/(\delta/F) = (g_1, \cdots, g_p)$. Si aucune fonction g_i n'est constante, le lemme 1.1 implique $\lambda_0 \in (\mathbb{C} - \{0\})^p$ et l'on note θ^j le vecteur-colonne transposé du vecteur-ligne $(\delta_1^j/\lambda_0^j, \ldots, \delta_p^j/\lambda_0^j) \in \mathbb{C}^p$; d'après le corollaire 1.2, ces vecteurs sont uniques pour $G \in \mathcal{M}_p^*$, et l'on désigne alors par $\theta_F(G)$ la $(p \times p)$-matrice $\theta_F(G) = (\theta^1, \ldots, \theta^p)$.

Proposition 1.3. *Soit* $G = (\lambda^0 + (\lambda/F))/(\delta/F) \in \mathcal{M}_p$.
1) Les conditions suivantes sont équivalentes
i) $G \in \mathcal{M}_p^*$
ii) $\lambda^0 \neq 0 \in \mathbb{C}^p$ *et* $\det(\delta) \neq 0$
iii) $\lambda^0 \neq 0 \in \mathbb{C}^p$ *et* $\det(\theta_F(G)) \neq 0$.
2) Si G *appartient à* $\mathcal{M}_p^*$*, on a alors* $\cap(G)^- = c'$ *et* $(\cap(G)^+)\cap(\cap(G)^-) = \tilde{c}$.

Remarque 2. Le corollaire 1.2 et la deuxième partie du lemme 1.1 donnent l'équivalence : $\lambda^0 \neq 0 \iff \lambda_i^0 \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$.

Démonstration de la proposition. On reprend les notations du lemme précédent.

1) D'après ce lemme, on peut supposer $\lambda^0 \neq 0$; pour montrer l'équivalence de i) et ii), il suffit de montrer l'équivalence $\cap(G)^- = c' \iff \det(\delta) \neq 0$.
Soit $k = \cap(G)^+ \in C_{n-1}(Y)$, $k' = \cap(G)^-$ et $\tilde{k} = k \cap k'$; soit z_0 un point de Y, U un ouvert de carte voisinage de z_0 dans Y où l'on a

$$f_i\big|_U = u/v_i \text{ et } g_i\big|_U = (\lambda_i^0 u + \sum_{j=1}^{p} \lambda_i^j v_j)/(\sum_{j=1}^{p} \delta_i^j v_j)$$

avec u et v_i premiers entre eux ; d'après la première partie de la démonstration du lemme 1.1, il en est de même des numérateur et dénominateur des g_i. Dans U le diviseur $(g_i)^-$ (resp. $(g_i)^+$) admet pour équation $\sum_{j=1}^{p} \delta_i^j v_j = 0$ (resp. $\lambda_i^0 u + \sum_{j=1}^{p} \lambda_i^j v_j = 0$) et z appartient à $|k'|$ si et seulement si

$$\sum_{j=1}^{p} \delta_i^j v_j(z) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p) \tag{1}.$$

La condition $\det(\delta) \neq 0$ équivaut donc à : le système (1) a pour seule solution $v_1(z) = \ldots = v_p(z) = 0$, autrement dit

$$k' = c' \in C_{n-p}(Y) \tag{2}$$

Le iii) résulte immédiatement de l'égalité $\det(\delta) = (\prod_{i=0}^{p} \lambda_i^0) \det(\theta_F(G))$ et de la remarque 2.

2) Soit $G \in \mathcal{M}_p^*$; les égalités (1) impliquent $\tilde{k} = k' \cap k = c' \cap k$. L'idéal de définition $\mathcal{I}_{\tilde{k}}$ de $\tilde{k}$ s'identifie dans U à $\mathcal{I}(v_1, \ldots, v_p, \lambda_i^0 u + \sum_{j=1}^{p} \lambda_i^j v_j)$, i pouvant être choisi arbitrairement dans $\{1, \ldots, p\}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, λ_i^0 est non nul d'après la remarque 2 d'où $\mathcal{I}_{\tilde{k}} = \mathcal{I}(v_1, \ldots, v_p, u) = \mathcal{I}_{\tilde{c}}$ et l'on obtient bien $\tilde{c} = \tilde{k}$. $\square$

Soit $F = (f_1, \cdots, f_p) \in \mathcal{M}_p^*$, $\alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^p), \beta = (\beta^1, \ldots, \beta^p) \in \mathbb{C}^p$; on pose

$$g_\beta^\alpha = (1 + (\alpha/F))\,/(\beta/F) = (1 + \alpha^1/f_1 + \ldots + \alpha^p/f_p)/(\beta^1/f_1 + \ldots + \beta^p/f_p).$$

Lemme 1.4. *Pour tout polydisque $P_\varepsilon(\beta)$ de $\mathbb{C}^p$ de centre β et de polyrayon $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe un ouvert P' partout dense de $P_\varepsilon(\beta)$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^p$ et $\gamma \in P'$, le diviseur $(g_\gamma^\alpha)^-$ soit sans singularités en dehors du support de $\cap(F)^- = (f_1)^- \cap \cdots \cap (f_p)^-$; en particulier, $(g_\gamma^\alpha)^-$ est alors sans multiplicités.*

Démonstration. Le p-uple α étant fixé et γ variant dans $P_\varepsilon(\beta)$, les diviseurs $(g_\gamma^\alpha)^-$ décrivent une famille linéaire engendrée par $(f_1)^-, \ldots, (f_p)^-$; d'après le théorème de Bertini, le cycle générique de cette famille est lisse en dehors du support de $\cap(F)^-$ pour ε choisi assez petit. $\square$

2. Cycles d'intersection. Dans ce paragraphe, nous avons en vue la réciproque de la proposition 1.3. Plus précisément, nous allons démontrer le

Théorème 2.1. *Soient $F = (f_1, \cdots, f_p), G = (g_1, \cdots, g_p) \in \mathcal{M}_p^*$ vérifiant*
i) $\cap(F)^- = \cap(G)^-$
ii) $(\cap(F)^+) \cap (\cap(F)^-) = (\cap(G)^+) \cap (\cap(G)^-)$.
Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, il existe alors $\lambda_i^0, \ldots, \lambda_i^p, \delta_i^1, \ldots, \delta_i^p \in \mathbb{C}$ tels que

$$g_i = (\lambda_i^0 + \lambda_i(1/F))/(\delta_i(1/F))$$

(et on a nécessairement $\lambda_i^0 \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$).

Pour simplifier les calculs, nous nous bornerons à considérer ici le cas $p = 2$, le cas général s'y ramenant par récurrence d'après le lemme 0.1 (la démonstration pour $p = 1$ qui est plus simple a été faite dans [**3**]).

Rappels

1) On dit qu'un cycle c est sans composantes multiples, si c est somme formelle de sous-ensembles analytiques irréductibles distincts, autrement dit $c=\sum_{i=1}^{l} c_i$ où les c_i sont des sous-espaces irréductibles tous distincts ; dans ce cas, on confond en général c et son support $|c|$.

2) Un diviseur c est effectif, si c est un cycle (i.e. il n'a pas de partie négative).

3) Un cycle principal c de codimension l est un cycle intersection de l diviseurs effectifs principaux (i.e. il existe $f_1,\dots,f_l \in M(Y)$ telles que $c = \cap(F)^+ \in \mathcal{C}_{n-p}(Y)$ où $F=(f_1,\dots,f_l)$).

On démontre tout d'abord le théorème 2.1 lorsque c est sans composantes multiples et on obtiendra le cas général en utilisant le lemme 1.4.

Nous supposerons dans ce paragraphe (l'entier p ayant été fixé) que les hypothèses suivantes sont vérifiées :
H1 : Y est fonctionnellement compact
H'1 : Tout cycle principal de codimension $l \in \{1,\dots,p-1\}$ est fonctionnellement compact (il suffit même que cette propriété soit vérifiée génériquement).

Lemme 2.2. *Soient $f \in M(Y)^*, g \in M(Y)$; il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que $g=\lambda f+\mu$ si et seulement si*
- ou bien g est constante dans Y (et $\lambda = 0$)
- ou bien g vérifie les deux conditions suivantes

$$\text{i) } (g)^- \subset (f)^- \quad \text{et} \quad \text{ii) } (f)^+ \cap (g)^- \subset (f)^+ \cap (g)^+$$

(avec $\lambda \neq 0$).

Démonstration. Le cas $\lambda = 0$ étant trivial, on suppose λ non nul.

Soit $c=(f)^+$, $c'=(f)^-$, $c_1=(g)^+$, $c_1'=(g)^-$, z un point quelconque de Y, U un voisinage de z dans lequel on a $f=u_1/v_1$ et $g=u_2/v_2$ où u_1,v_1 (resp. u_2,v_2) sont des fonctions holomorphes dans U sans facteur commun.

1) Dans U, soit $g_{|U}=(\lambda u_1+\mu v_1)/v_1$; u_1 et v_1 étant premiers entre eux, il en est de même de $\lambda u_1+\mu v_1$ et v_1 (car $\lambda\neq 0$). L'hypersurface $(g)^+\cap U$ (resp. $(g)^-\cap U$) a pour équation $\lambda u_1+\mu v_1=0$ (resp. $v_1=0$), d'où

$$(g)^- \cap U = (f)^- \cap U \tag{1}$$

et d'autre part, l'idéal de définition de $(f)^+\cap(g)^+\cap U$ (resp. $((f)^+\cap(g)^-\cap U)$ est $\mathcal{I}(u_1,\lambda u_1+\mu v_1)$ (resp. $\mathcal{I}(u_1,v_1)$). On a alors $v_1 \in \mathcal{I}(u_1,\lambda u_1+\mu v_1)$ (car $\mu\neq 0$), d'où $\mathcal{I}(u_1,\lambda u_1+\mu v_1)=\mathcal{I}(u_1,v_1)$ et $(f)^+\cap(g)^-\cap U=(f)^+\cap(g)^+\cap U$. Cela étant vrai pour tout z, on obtient finalement $(f)^+\cap(g)^-=(f)^+\cap(g)^+$ et en particulier la seconde inclusion.

2) Inversement, on suppose les inclusions i) et ii) vérifiées.

A) Cas où c est sans composantes multiples.

On ne peut pas raisonner ici directement sur les fonctions f et g en utilisant les propriétés de leurs diviseurs ; en effet, c n'est pas lisse en général et le théorème d'extension de Riemann pour les fonctions bornées (ou mêmes continues) n'est plus vérifié. Il suffit pour cela de considérer l'exemple bien connu suivant :
soit $\mathbb{C}^2$ muni des coordonnées (z^1, z^2) et $M = \{(z^1, z^2) \in \mathbb{C}^2; (z^1)^2 - (z^2)^3 = 0\}$; la fonction $g : \mathbb{C} \to M$, $g(x) = ((x)^3, (x)^2)$ est un homéomorphisme de $\mathbb{C}$ sur M ; soit $f = g^{-1} : M \to \mathbb{C}$ définie par $f(z^1, z^2) = z^1/z^2$ est holomorphe sur $M - \{(0,0)\}$ et admet un prolongement par continuité en $(0,0)$ (à savoir $f(0,0) = g^{-1}(0) = 0$) mais elle n'admet pas de prolongement holomorphe et le théorème d'extension de Riemann est en défaut. □

On va donc montrer le résultat en se plaçant au voisinage des points de c. Soit donc $z \in |c|$

α) D'après i) et ii) on a $v_1 \in \mathcal{I}(v_2)$ et $u_2 \in \mathcal{I}(u_1, v_2)$, d'où

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = \lambda' v_2 \\ u_2 = \alpha' u_1 + \mu v_2 \end{array}\right\}$$

avec $\alpha', \mu, \lambda' \in \mathcal{O}(U)$.
On note $c'' = (c - (c \cap |c'|)) \cap U$ et g'' la restriction de g à c''. Elle vérifie trivialement $g'' = \mu \not\equiv 0$. Puisque μ est holomorphe dans U tout entier, g'' se prolonge holomorphiquement à $c \cap U$. On obtient ainsi des prolongements g''_U pour chaque ouvert U (coupant c) et, par unicité du prolongement analytique sur un espace analytique réduit, g'' admet un prolongement holomorphe unique $\tilde{g}$ à c tout entier. Celui-ci étant fonctionnellement compact, on a $\tilde{g} \equiv \mu \in \mathbb{C} - \{0\}$.

β) Soit $g' = g - \mu$; les égalités précédentes donnent $g'_{|U} = (u_2/v_2) - \mu = \lambda' \alpha' u_1 / v_1$ d'où $\left.\dfrac{g'}{f}\right|_U = \lambda' \alpha' \in \mathcal{O}(U)$. La fonction g'/f holomorphe dans $Y - c$ admet ainsi un prolongement analytique au voisinage de tout point de c ; par unicité du prolongement analytique, on a encore $g'/f \in \mathcal{O}(Y)$. L'espace Y étant fonctionnellement compact, on obtient $g'/f = \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ d'où $g = \lambda f + \mu$.

B) Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, le diviseur $(f + \varepsilon)^+$ n'a pas de composantes multiples (lemme 1.4). Soient $f_\varepsilon = (f + \varepsilon)$ et $g_\varepsilon = (g + \varepsilon)$, ce que l'on peut encore écrire $f_\varepsilon = (1 + \varepsilon/f)/(1/f)$, $g_\varepsilon = (1 + \varepsilon/g)/(1/g)$.
Leurs diviseurs vérifient (prop. 1.3) : $(f_\varepsilon)^- = (f)^-$, $(g_\varepsilon)^- = (g)^-$, $(f_\varepsilon)^+ \cap (f_\varepsilon)^- = (f)^+ \cap (f)^-$, $(g_\varepsilon)^+ \cap (g_\varepsilon)^- = (g)^+ \cap (g)^-$.
Des hypothèses sur f et g, on déduit aussitôt
i') $(g_\varepsilon)^- = (g)^- \subset (f)^- = (f_\varepsilon)^-$
ii') $(f_\varepsilon)^+ \cap (g_\varepsilon)^- \subset (f_\varepsilon)^+ \cap (g)^- \cap (f_\varepsilon)^-$ (d'après i')) $= (f)^+ \cap (f)^- \cap (g)^- \subset$

$(f)^+ \cap (g)^+ \cap (g)^-$ (d'après ii)) $= (f)^+ \cap (g_\varepsilon)^+ \cap (g_\varepsilon)^- \subset (g_\varepsilon)^+$ et en particulier $(f_\varepsilon)^+ \cap (g_\varepsilon)^- \subset (f_\varepsilon)^+ \cap (g_\varepsilon)^+$.
On peut appliquer le A) à f_ε et g_ε : il existe $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}, \mu' \in \mathbb{C}$ tels que $g_\varepsilon = \lambda f_\varepsilon + \mu' = g + \varepsilon$ d'où $g = \lambda f + \mu$ avec $\mu = (\lambda - 1)\varepsilon + \mu'$. □

La première partie de la démonstration du lemme 2.2 donne également

Corollaire 2.3. *Soient $f \in \mathcal{M}^*$, $g = \lambda f + \mu \in \mathcal{M}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$; on a alors*
- ou bien $\lambda = 0$ et g constante dans Y
- ou bien $\lambda \neq 0$ et $(f)^- = (g)^-$, $(f)^+ \cap (f)^- = (g)^+ \cap (g)^-$.

Lemme 2.4. *Soient f, g dans $M(Y)^*$. Les conditions suivantes sont équivalentes*
i) il existe $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{C}$ avec $\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix} \neq 0$ *et $g = (\alpha f + \beta)/(\alpha' f + \beta')$*
ii) $(f)^+ \cap (f)^- = (g)^+ \cap (g)^-$.

Démonstration. On note M la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix}$; soit z un point de Y et U un ouvert de carte de Y contenant z dans lequel f et g s'écrivent respectivement :
$f_{|U} = u_1/v_1,\ g_{|U} = u_2/v_2$ avec u_1 et v_1 (resp. u_2 et v_2) premiers entre eux.

1) Soit $g = (\alpha f + \beta)/(\alpha' f + \beta')$ avec $\det M \neq 0$. On a alors $g_{|U} = (\alpha u_1 + \beta v_1)/(\alpha' u_1 + \beta' v_1) = u_2/v_2$ avec $(\alpha u_1 + \beta v_1)$ et $(\alpha' u_1 + \beta' v_1)$ premiers entre eux (car $\alpha\beta' - \beta\alpha' \neq 0$). En multipliant au besoin u_2 et v_2 par une unité de $\mathcal{O}(U)$, on peut écrire $u_2 = \alpha u_1 + \beta v_1$ et $v_2 = \alpha' u_1 + \beta' v_1$.

a) On suppose tout d'abord les $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ non nuls (ils correspondent aux divers mineurs de la matrice M) ; on obtient
$v_1 \in \mathcal{I}(u_1, u_2) \cap \mathcal{I}(u_1, v_2)$ (car $\beta, \beta' \neq 0$) et $u_1 \in \mathcal{I}(v_1, v_2)$ (car $\alpha' \neq 0$) (1)
$u_2 \in \mathcal{I}(u_1, v_2) \supset \mathcal{I}(u_1, v_1)$ et $u_1, v_1 \in \mathcal{I}(u_2, v_2)$ (car M est inversible) (2)
d'où
$\mathcal{I}(u_1, v_1) \subset \mathcal{I}(u_1, u_2) \subset \mathcal{I}(u_1, v_2) \subset \mathcal{I}(v_1, v_2) \subset \mathcal{I}(u_2, v_2) \subset \mathcal{I}(u_1, v_1)$ (3)
et les inclusions sont en fait des égalités.

b) Soit $\alpha = 0$; on a alors $\alpha'\beta \neq 0$. Si $\beta' = 0$, on obtient évidemment $\mathcal{I}(u_1, v_1) = \mathcal{I}(u_2, v_2)$; sinon (1) et (2) sont trivialement vérifiées d'où également les inclusions (3). Par symétrie, cela est encore vrai si l'un des autres coefficients β, α', β' est nul.
L'idéal $\mathcal{I}(u_1, v_1)$ (resp. $\mathcal{I}(u_2, v_2)$) étant l'idéal de définition de $(f)^+ \cap (f)^-$ (resp. $(g)^+ \cap (g)^-$) dans U, on en tire l'égalité $(f)^+ \cap (f)^- = (g)^+ \cap (g)^-$.

2) On suppose inversement l'égalité $(f)^+ \cap (f)^- = (g)^+ \cap (g)^-$ vérifiée.
On note $c = (f)^+, c' = (f)^-, k = (g)^+, k' = (g)^-, \tilde{c} = c' \cap c$; pour tout $\varepsilon \in \mathbb{C}$, f_ε désigne la fonction $f_\varepsilon(z) = f(z) - \varepsilon$ et c_ε le diviseur $(f_\varepsilon)^+$.

Par hypothèse, il existe λ, β, λ', $\beta' \in \mathcal{O}(U)$ tels que

$$u_2 = \lambda u_1 + \beta v_1 \tag{1'}$$

$$v_2 = \lambda' u_1 + \beta' v_1 \tag{2'}$$

$$\lambda\beta' - \lambda'\beta \text{ ne s'annule pas dans } U \tag{3'}$$

i) Soit $y \in (U \cap |c|)$ vérifiant $\beta'(y) = 0$. D'après (2′), on obtient $v_2(y) = \beta' v_1(y) = 0$ d'où $y \in |c| \cap |c'|$; en outre (3′) donne $\lambda'(y) \neq 0$.
Par compacité, il existe un recouvrement fini de $|c| \cap |c'|$ par des ouverts de cartes en sorte que toutes les fonctions (continues) β' (resp. λ') soient majorées (resp. minorées) en module (dans chaque ouvert où elles sont définies) par une même constante ε' (resp. $\varepsilon'' \neq 0$). D'après le lemme 1.4, on peut choisir $\varepsilon < \varepsilon'/\varepsilon''$ en sorte que c_ε soit sans composantes multiples et fonctionnellement compact.
Pour $y \in U \cap c_\varepsilon$, on a $u_1(y) = \varepsilon v_1(y)$ d'où $u_2(y) = (\varepsilon\lambda(y) + \beta(y))v_1(y)$ et $v_2(y) = (\varepsilon\lambda'(y) + \beta'(y))v_1(y)$. En particulier d'après le choix de ε, $(\varepsilon\lambda' + \beta')$ ne s'annule pas en y et l'on en déduit

$$c_\varepsilon \cap (g)^- = c_\varepsilon \cap (f)^- = (f)^+ \cap (f)^- = \tilde{c} \tag{4'}$$

En outre la restriction g' de g à $U \cap (c_\varepsilon - |k' \cap c_\varepsilon|)$ vérifie $g' = (\varepsilon\lambda + \beta)/(\varepsilon\lambda' + \beta')$ et g' s'étend holomorphiquement à $U \cap c_\varepsilon$; par unicité du prolongement analytique (pour les espaces analytiques) elle s'étend à c_ε tout entier, d'où (c_ε étant fonctionnellement compact) $g' \equiv \mu \in \mathbb{C}$.

ii) Soient $h = g - \mu$ et $h' = 1/h$; le cycle c_ε n'ayant pas de composantes multiples, on a l'inclusion $c_\varepsilon \subset (h)^+ = (h')^-$.
Les égalités $(h)^- = (g)^- = (h')^+$ et (4′) donnent
$c_\varepsilon \cap (h')^+ = c_\varepsilon \cap (g)^- = \tilde{c} = c \cap c' \subset c'$ d'où $c_\varepsilon \cap (h')^+ \subset c' \cap (h')^+$.
En posant $f'_\varepsilon = 1/f_\varepsilon$, on obtient
$(f'_\varepsilon)^+ = c'$, $(f'_\varepsilon)^- = c_\varepsilon \subset (h')^-$ et $(f'_\varepsilon)^- \cap (h')^+ \subset (f'_\varepsilon)^+ \cap (h')^+$.
On peut donc appliquer le lemme 2.2 à h' et f'_ε :
il existe $\gamma, \delta \in \mathbb{C}$ avec $\gamma \neq 0$ (car f donc f'_ε n'est pas constante dans Y) tels que $f'_\varepsilon = \gamma h' + \delta$, ce qui donne

$$1/f_\varepsilon = (\gamma/(g - \mu)) + \delta$$

ou encore

$$g = (\alpha f + \beta)/(\alpha' f + \beta')$$

avec $\alpha = \gamma - \mu \cdot \delta$, $\beta = \mu - \varepsilon\alpha$, $\alpha' = -\delta$, $\beta' = 1 - \varepsilon\alpha'$ et $\det(M) = (\gamma - \mu\delta) + \mu\delta = \gamma \neq 0$. $\square$

Dans la démonstration du lemme 2.4, on a également obtenu le

Corollaire 2.5. *Soit* $g = (\alpha f + \beta)/(\alpha' f + \beta')$ *avec* $\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix} \neq 0$, *alors*
i) les diviseurs $(\alpha f + \beta)^+$ *et* $(\alpha' f + \beta')^+$ *n'ont pas de composantes communes*
ii) les égalités suivantes sont vérifiées : $(f)^+ \cap (f)^- = (g)^+ \cap (g)^- = (f)^+ \cap (g)^- = (f)^- \cap (g)^+$.

Lemme 2.6. *Soient* $f_1, f_2 \in M(Y)^*$ *avec* $(f_1)^- = (f_2)^-$, *les diviseurs* $(f_1)^+$, $(f_1)^-$ *et* $(f_2)^+$ *se coupant simplement. Pour tout* $g \in M(Y)$, *les conditions suivantes sont équivalentes*
i) il existe $\lambda^1, \lambda^2 \in \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ *tels que* $g = \lambda^1 f_1 + \lambda^2 f_2$
ii) le diviseur de g *vérifie :*

$$\begin{cases} (g)^- = (f_1)^- = (f_2)^- & \textit{(1)} \\ (f_1)^+ \cap (f_2)^+ \subset (g)^+ & \textit{(2).} \end{cases}$$

Démonstration. On pose $f' = f_1/f_2,\ g' = g/f_2$; le diviseur de f' vérifie évidemment

$$(f') = (f')^+ - (f')^- = (f_1)^+ - (f_2)^+ \qquad (3).$$

En particulier $(f_1)^+$ et $(f_2)^+$ n'ayant pas de composantes communes, f' n'est pas constante.

1) Soit $g = \lambda^1 f_1 + \lambda^2 f_2$ avec $\lambda^1 \neq 0$; soit U un ouvert de carte dans lequel $(f_1)^- = (f_2)^-$ a pour équation $v = 0$ et $f_1 = u_1/v,\ f_2 = u_2/v$ avec u_1 (resp. u_2) et v premiers entre eux, d'où $g = (\lambda^1 u_1 + \lambda^2 u_2)/v$. D'après l'hypothèse d'intersection simple, $\lambda^1 u_1 + \lambda^2 u_2$ et v sont encore premiers entre eux, d'où

$$(g)^- \cap U = (f_1)^- \cap U$$

c'est-à-dire (1). Puisque $g' = (\lambda^1 f_1/f_2) + \lambda^2 = \lambda^1 f' + \lambda^2$, la fonction g' n'est pas constante (car $\lambda^1 \neq 0$) et son diviseur vérifie
$(g') = (g)^+ - (g)^- - (f_2)^+ + (f_2)^- =$ (d'après (1)) $(g)^+ - (f_2)^+$.
Le corollaire 2.3 donne $(g')^+ \cap (g')^- = (f')^+ \cap (f')^-$ et l'on obtient finalement

$$(f')^+ \cap (f')^- = (f_1)^+ \cap (f_2)^+ = (g')^+ \cap (g')^- = (g)^+ \cap (f_2)^+$$

d'où l'inclusion (2). En échangeant λ^1 et λ^2, on obtient encore les formules (1) et (2) lorsque $\lambda^1 = 0$ (λ^2 étant alors non nul) qui sont d'ailleurs triviales dans ce cas.

2) Inversement soit g vérifiant les relations (1) et (2).

A) On suppose tout d'abord que $(g)^+$ et $(f_2)^+$ n'ont pas de composantes communes. D'après (1), on peut écrire

$$(g') = (g)^+ - (g)^- - (f_2)^+ + (f_2)^- = (g)^+ - (f_2)^+$$

ce qui compte-tenu de (3) donne

$$(g')^+ = (g)^+ \text{ et } (g')^- = (f_2)^+ = (f')^- \qquad (4).$$

Des égalités (3) et (4) et de l'inclusion (2) on déduit

$$(f')^+ \cap (g')^- = (f_1)^+ \cap (f_2)^+ \subset (f_1)^+ \cap (g)^+ = (f')^+ \cap (g')^+.$$

Le lemme 2.2 appliqué à f' et g' donne

$$g' = \lambda^1 f' + \lambda^2 = g/f_2 = (\lambda^1 f_1/f_2) + \lambda^2,$$

d'où

$$g = \lambda^1 f_1 + \lambda^2 f_2$$

avec $\lambda^1, \lambda^2 \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls d'après (1).

B) Cas où $(f_2)^+$ et $(g)^+$ sont quelconques.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $f_2' = f_2 + \varepsilon f_1$; les diviseurs $(f_2')^+$ et $(f_2)^+$ (resp. $(f_2')^+$ et $(f_1)^+$) n'ont pas de composantes communes (car $(f_1)^+$ et $(f_2)^+$ n'en ont pas) et on choisit ε en sorte qu'il en soit de même pour $(f_2')^+$ et $(g)^+$. D'après le 1), on obtient en écrivant $f_2 = f_2' - \varepsilon f_1$

$$(f_2')^- = (f_1)^- = (f_2)^- = (g)^- \tag{1'}$$

et

$$(f_1)^+ \cap (f_2')^+ \subset (f_2)^+ \qquad (1'').$$

Les formules $(1'')$ et (2) donnent

$$(f_1)^+ \cap (f_2')^+ \subset (f_1)^+ \cap (f_2)^+ \subset (g)^+ \qquad (2').$$

On peut alors appliquer le A) à f_1, f_2' et g pour obtenir

$$g = \lambda'^1 f_1 + \lambda^2 f_2' = (\lambda'^1 + \varepsilon\lambda^2) f_1 + \lambda^2 f_2$$

avec $\lambda'^1, \lambda^2 \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls. □

Corollaire 2.7. *Soient f_1, f_2 comme ci-dessus et $g \in \mathcal{M}^*$ vérifiant*

$$\begin{cases} (g)^- = (f_1)^- = (f_2)^- & \textit{(1)} \\ (f_1)^+ \cap (f_1)^- \cap (f_2)^+ \subset (g)^+ & \textit{(2).} \end{cases}$$

Il existe alors $\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2 \in \mathbb{C}$ tels que $g = \lambda^0 + \lambda^1 f_1 + \lambda^2 f_2$.

Démonstration. Soient $c' = (f_1)^- = (f_2)^- = (g)^-, c = (f_1)^+ \cap (f_2)^+$. Soit $z \in Y$, U ouvert de carte de Y contenant z dans lequel f et g s'écrivent respectivement : $f_{i|U} = u_i/v,\ g_{|U} = w/v$ (u_1, u_2 et w premiers avec v).
D'après (2), on a $w \in \mathcal{I}(u_1, u_2, v)$ d'où

$$g_{|U} = \big((\lambda^1 u_1 + \lambda^2 u_2)/v\big) + \lambda^3$$

avec $\lambda^i \in \mathcal{O}(U)$ pour $i = 1, 2, 3$.
Soit $k = |c| - (|c| \cap |c'|)$; si $z \in k$, on en tire $g(z) = \lambda^3(z)$ et $g_{|k\cap U}$ peut être prolongée holomorphiquement à $|c| \cap U$. Les supports des cycles c et c' n'ayant pas de composantes communes, $|c| \cap |c'|$ est de codimension 1 dans

$|c|$, et par unicité du prolongement analytique, la restriction de g à k admet un prolongement holomorphe à $|c|$ tout entier ; celui-ci est fonctionnellement compact d'où $g_{||c|} \equiv \lambda^0 \in \mathbb{C}$.
Soit $g'' = g - \lambda^0$; on a $(g'')^- = (g)^- = (f_1)^- = (f_2)^-$ et $c = (f_1)^+ \cap (f_2)^+ \subset (g'')^+$.
On peut alors appliquer le lemme 2.6 à g'', f_1 et f_2, et il existe $\lambda^1, \lambda^2 \in \mathbb{C}$ tels que $g'' = \lambda^1 f_1 + \lambda^2 f_2$ d'où finalement $g = \lambda^0 + \lambda^1 f_1 + \lambda^2 f_2$. □

Proposition 2.8. *Soient* $(f_1, f_2),\ (g_1, g_2) \in \mathcal{M}_2^*$ *vérifiant*

$$\begin{cases} (f_1)^- \cap (f_2)^- = (g_1)^- \cap (g_2)^- & \textit{(1)} \\ (f_1)^+ \cap (f_1)^- \cap (f_2)^- = (g_1)^+ \cap (g_1)^- \cap (g_2)^- & \textit{(2).} \end{cases}$$

Les fonctions g_i *s'écrivent alors*

$$g_i = \frac{\lambda_i^0 + \lambda_i^1/f_1 + \lambda_i^2/f_2}{\delta_i^1/f_1 + \delta_i^2/f_2} \qquad (\lambda_i^0, \lambda_i^1, \lambda_i^2, \delta_i^1, \delta_i^2 \in \mathbb{C}, i = 1, 2).$$

Démonstration.

1) Soient $h = g_1/g_2,\ f = f_1/f_2$; leurs diviseurs vérifient $(h) = (g_2)^- - (g_1)^-$ et $(f) = (f_2)^- - (f_1)^-$; les cycles $(g_2)^- \cap (g_1)^-$ et $(f_2)^- \cap (f_1)^-$ étant de codimension 2 dans Y, les diviseurs $(g_1)^-$ et $(g_2)^-$ (resp. $(f_1)^-$ et $(f_2)^-$) n'ont pas de composantes communes d'où
$(h)^+ = (g_2)^-,\ (h)^- = (g_1)^-,\ (f)^+ = (f_2)^-,\ (f)^- = (f_1)^-$ et d'après (1), $(h)^+ \cap (h)^- = (f)^+ \cap (f)^-$.
Du lemme 2.4, on obtient

$$h = \frac{g_1}{g_2} = \frac{\alpha f + \beta}{\alpha' f + \beta'} = \frac{\alpha/f_2 + \beta/f_1}{\alpha'/f_2 + \beta'/f_1}, \alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{C} \text{ et } \det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix} \neq 0 \qquad (3).$$

Soit $l = \alpha/f_2 + \beta/f_1$ et $l' = \alpha'/f_2 + \beta'/f_1$. On a $(h) = (g_2)^- - (g_1)^- = (l)^+ - (l')^+$; $(l)^+$ et $(l')^+$ n'ayant pas de composantes communes (coro. 2.5 i)), on obtient
$(h)^+ = (g_2)^- = (l)^+$, $(h)^- = (g_1)^- = (l')^+$.
Le lemme 2.6 appliqué à l (resp. l') et f_1, f_2, donne
$(l)^- = (l')^- = (f_1)^+ = (f_2)^+$.
Soit $g = l' g_1$; des égalités précédentes on déduit

$$(g) = (l')^+ + (g_1)^+ - (l')^- - (g_1)^- = (g_1)^+ - (f_1)^+ \qquad (4).$$

2) On peut supposer, au besoin par addition d'une constante, que $(g_1)^+$ et $(f_1)^+$ n'ont pas de composantes communes. De (4) on tire
$(g)^+ = (g_1)^+$ et $(g)^- = (f_1)^+ = (f_2)^+$.
L'égalité (2) implique
$(f_1)^- \cap (f_1)^+ \cap (f_2)^- \subset (g_1)^+ = (g)^+$.

Le corollaire 2.7 appliqué aux fonctions $1/f_1,\ 1/f_2$ et g donne $g = \lambda_1^0 + \lambda_1^1/f_1 + \lambda_1^2/f_2$. En posant $\delta_1^1 = \beta',\ \delta_1^2 = \alpha'$, on a finalement

$$g_1 = g/l' = \frac{\lambda_1^0 + \lambda_1^1/f_1 + \lambda_1^2/f_2}{\delta_1^1/f_1 + \delta_1^2/f_2}, \lambda_1^i, \delta_1^j \in \mathbb{C},\ i \in \{0,1,2\},\ j \in \{1,2\}.$$

De même, en posant $\delta_2^1 = \beta,\ \delta_2^2 = \alpha$, on obtient par symétrie

$$g_2 = \frac{\lambda_2^0 + \lambda_2^1/f_1 + \lambda_2^2/f_2}{\delta_2^1/f_1 + \delta_2^2/f_2}$$

Ceci prouve la proposition 2.8 et donc le théorème 2.1 d'apreès la remarque suivant l'énoncé du théorème. □

Références

1. Dickenstein C., Sessa C., *Résidus de formes méromorphes et cohomologie modérée,* Géométrie Complexe, F. Norguet-S. Ofman-J.J. Szczeciniarz ed., Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, (1996).
2. Ofman S., *Transformation de Radon analytique en dimension quelconque,* Géométrie Complexe, F. Norguet and S. Ofman ed., International Press, à paraître.
3. Ofman S., *La transformation de Radon analytique en codimension 1,* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **20** (1993), 415–459.
4. Serre J.P., *Algèbre Locale Multiplicités,* Lect. Notes in Math., Springer Verlag, **11** (1989).

Received March 11, 2001

Université Paris 7,
Institut de Mathématiques
Géométrie et Dynamique
2, Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05
France
e-mail: ofman@math.jussieu.fr