Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2010. Том 51, № 2

УДК 515.124:514.753.28

КАСАТЕЛЬНЫЙ КОНУС К КВАЗИМЕТРИЧЕСКОМУ ПРОСТРАНСТВУ С РАСТЯЖЕНИЯМИ

С. В. Селиванова

Аннотация. Введено понятие сходимости последовательности квазиметрических пространств, включающее в качестве частного случая сходимость по Громову — Хаусдорфу для метрических пространств. Доказано существование касательного конуса (в смысле этого определения) к квазиметрическому пространству со структурой растяжений и, как следствие, к регулярному квазиметрическому пространству Карно — Каратеодори. Полученный результат дает, в частности, теорему Митчелла о касательном конусе.

Ключевые слова: квазиметрическое пространство, сходимость по Громову — Хаусдорфу, метрический касательный конус, пространство Карно — Каратеодори, растяжение.

1. Введение

В работе исследуется вопрос о существовании касательного конуса в смысле теории метрических пространств к квазиметрическому пространству с растяжениями, в частности, к квазиметрическому пространству Карно — Каратеодори $\mathbb{M}$ в регулярной точке.

Исследование мотивировано изучением метрических свойств пространств Карно — Каратеодори, также называемых *субримановыми многообразиями*, которые моделируют неголономные процессы и естественным образом возникают во многих областях физики и математики (см., например, [1–12] и цитированную там литературу). Обычно предполагается, что выполнено условие Хёрмандера [13] о порождении всего касательного пространства коммутаторами заданных «горизонтальных» векторных полей. При этом пространство Карно — Каратеодори является метрическим пространством (по теореме Рашевского — Чоу, из которой следует существование внутренней субримановой метрики d_c на $\mathbb{M}$). Недавно найденные приложения субримановой геометрии привели к необходимости рассмотрения более общей ситуации [6, 9, 14–17], когда на $\mathbb{M}$ можно ввести лишь некоторую квазиметрику (т. е. функцию расстояния, удовлетворяющую обобщенному свойству симметричности и обобщенному неравенству треугольника, см. определения 1, 16). С другой стороны, развитие анализа на общих метрических пространствах привело к вопросу об описании наиболее

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта 5682.2008.1) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0457).

общего подхода к метрической геометрии субримановых пространств. Один из возможных подходов при этом состоит в том, чтобы рассматривать абстрактные метрические пространства с растяжениями [8, 18–20]. Руководствуясь приведенными соображениями, мы обобщаем понятие структуры растяжений на квазиметрические пространства и изучаем свойства полученного объекта.

Понятие касательного конуса к метрическому пространству введено М. Громовым в [21, 22] и является обобщением понятия касательного пространства к гладкому многообразию. Касательный конус к (X, d) в точке $x \in X$ определяется как предел пунктированных метрических пространств $(X, x, \lambda \cdot d)$ при $\lambda \to \infty$, при этом сходимость вводится с помощью расстояния по Громову — Хаусдорфу между двумя абстрактными метрическими пространствами. Это понятие и связанная с ним теория (см. ее подробное изложение в [23]) оказались полезными в исследовании общих метрических пространств (см., например, [23–27]) и, в частности, в теории неголономных многообразий с метриками Карно — Каратеодори.

Как показано в [14], определение расстояния по Громову — Хаусдорфу для квазиметрических пространств не имеет смысла (см. замечание 10). В [14] предложен некоторый подход к определению сходимости для квазиметрических пространств, при этом единственность предела не исследуется.

В настоящей статье предлагается теория сходимости для квазиметрических пространств, удовлетворяющая следующим условиям:

1) для метрических пространств вводимые определения эквиваленты определениям Громова [21–23];

2) предел последовательности квазиметрических пространств единствен с точностью до изометрии.

Эта теория позволяет ввести адекватное для наших целей понятие касательного конуса к полному ограниченно компактному квазиметрическому пространству (см. определение 8). Также в статье доказано существование касательного конуса (в смысле введенного определения) к квазиметрическому пространству с растяжениями, в частности, к регулярному квазиметрическому пространству Карно — Каратеодори (см. теорему 3, которая представляет собой основной результат настоящей работы). В качестве частного случая теорема 3 дает теорему Митчелла о касательном конусе [28]. В продолжение настоящей статьи, в [29] исследуются алгебраические свойства касательного конуса к квазиметрическому пространству с растяжениями при некоторых дополнительных предположениях.

Отметим, что метрический аналог теоремы 3 (для случая, когда пространство Карно — Каратеодори $\mathbb{M}$ снабжено внутренней метрикой d_c) доказывается в [7, 28] при помощи критерия Громова сходимости компактных метрических пространств (с помощью конечных ε-сетей). Такой подход применим только для пространств с внутренней метрикой. В нашем случае (квази)метрика не является внутренней, поэтому применение критерия Громова невозможно. В то же время альтернативное этому критерию утверждение для квазиметрических пространств при нашем подходе также имеет место (см. предложение 5).

Автор выражает благодарность С. К. Водопьянову за постановку задачи, постоянное внимание к работе и плодотворные обсуждения, а также анонимному рецензенту за полезные и конструктивные замечания по изложению результатов работы.

2. Определение и свойства сходимости последовательности квазиметрических пространств

Определение 1. *Квазиметрическим пространством* (X, d_X) называется топологическое пространство X с заданной на нем квазиметрикой d_X. *Квазиметрикой* называется отображение $d_X : X \times X \to \mathbb{R}^+$, обладающее следующими свойствами:

(1) $d_X(u, v) \geq 0$; $d_X(u, v) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = v$;

(2) $d_X(u, v) \leq c_X d_X(v, u)$, где $1 \leq c_X < \infty$ — некоторая константа, общая для всех $u, v \in X$;

(3) $d_X(u, v) \leq Q_X(d_X(u, w) + d_X(w, v))$, где $1 \leq Q_X < \infty$ — некоторая константа, общая для всех $u, v, w \in X$ (обобщенное неравенство треугольника);

(4) функция $d_X(u, v)$ полунепрерывна снизу по первому аргументу.

Замечание 1. Из свойства (4) вытекает, что шары в квазиметрике d_X являются открытыми множествами и, следовательно, определяют базу топологии на X. Если в свойствах (2), (3) имеем $c_X = Q_X = 1$, то (X, d_X) — метрическое пространство.

Замечание 2. При вводимых ниже определениях сходимости существенное отличие случая квазиметрических пространств от случая метрических пространств связано в большей степени с наличием константы $Q_X \geq 1$ в обобщенном неравенстве треугольника (3), а не с наличием константы $c_X \geq 1$ в свойстве (2).

Далее в тексте (X, d_X) всюду обозначает некоторое (квази)метрическое пространство, c_X, Q_X — константы из свойств (2), (3) соответственно. Шар по (квази)метрике d_X радиуса r с центром в точке x обозначим через $B^{d_X}(x, r) = \{y \in X \mid d_X(y, x) < r\}$. Символом $\overline{A}$ будем обозначать замыкание множества A.

Определение 2. *Искажением* отображения $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ называется величина $\operatorname{dis}(f) = \sup\limits_{u,v \in X} |d_Y(f(u), f(v)) - d_X(u, v)|$. Эта величина характеризует отличие f от изометрии.

Определение 3. *Расстоянием* $d_{qm}(X, Y)$ между квазиметрическими пространствами (X, d_X) и (Y, d_Y) назовем величину, равную инфимуму тех $\rho > 0$, для которых существуют такие (не обязательно непрерывные) отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$, что

$$\max\{\operatorname{dis}(f), \operatorname{dis}(g), \sup_{x \in X} d_X(x, g(f(x))), \sup_{y \in Y} d_Y(y, f(g(y)))\} \leq \rho.$$

В случае, когда X и Y — метрические пространства, будем обозначать введенное расстояние через $d_m(X, Y)$.

Замечание 3. Очевидно, что введенное расстояние обладает свойством симметричности $d_{qm}(X, Y) = d_{qm}(Y, X)$ и что расстояние между изометричными пространствами равно нулю. Отметим также, что в силу очевидной оценки $d_{qm}(X, Y) \leq \operatorname{diam}(X) + \operatorname{diam}(Y)$ для ограниченных квазиметрических пространств введенное расстояние конечно.

Следующее предложение доказывается аналогично теореме 7.3.30 из [23] для метрических пространств. Тем не менее приведем его доказательство для удобства читателей (некоторые элементы этого доказательства используются далее в статье).

Предложение 1. *Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) — компактные квазиметрические пространства. Если $d_{qm}(X,Y)=0$, то X и Y изометричны.*

По определению 3 существуют такие последовательности отображений $f_n : X \to Y$, $g_n : Y \to X$, что $\operatorname{dis}(f_n) \to 0$, $\operatorname{dis}(g_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Выберем счетное плотное множество $S \subset X$. Используя канторов диагональный процесс, построим подпоследовательность f_{n_k} последовательности f_n такую, что для всех точек $x \in S$ последовательность $\{f_{n_k}(x)\}$ сходится в Y. Без ограничения общности будем считать, что f_{n_k} совпадает с f_n. Полагая $\tilde f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ для всех $x \in S$, получаем сохраняющее расстояние отображение $\tilde f : S \to Y$. Действительно, поскольку $|d_Y(f_n(x_1), f_n(x_2)) - d_X(x_1,x_2)| \le \operatorname{dis}(f_n) \to 0$, имеем $d_Y(\tilde f(x_1), \tilde f(x_2)) = \lim\limits_{n\to\infty} d_Y(f_n(x_1), f_n(x_2)) = d_X(x_1,x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in S$. Как известно [23], можно продолжить $\tilde f$ до сохраняющего расстояние отображения $f : X \to Y$ (доказательство этого факта для квазиметрических пространств в точности такое же, как для метрических). Аналогично существует сохраняющее расстояние отображение $g : Y \to X$ (оно строится по последовательности g_n). Их композиция $f \circ g$ биективна как изометрическое отображение компакта Y в себя (последнее утверждение также доказывается по аналогии со случаем метрических пространств [23]). Следовательно, f сюръективно и, значит, является изометрией. $\square$

Замечание 4. Отметим, что при доказательстве предложения 1 не используются условия на поведение величин

$$\sup_{x\in X} d_X(x, g(f(x))), \quad \sup_{y\in Y} d_Y(y, f(g(y))). \tag{2.1}$$

Эти условия необходимы для доказательства эквивалентности расстояния d_m и расстояния по Громову — Хаусдорфу в случае метрических пространств (см. предложение 8 и замечание 11).

Предложение 2 (обобщенное неравенство треугольника для d_{qm}). *Для произвольных квазиметрических пространств X, Y, Z справедливо неравенство*

$$d_{qm}(X,Y) \le (Q_Z + 1)(d_{qm}(X,Z) + d_{qm}(Z,Y)). \tag{2.2}$$

Доказательство. По определению расстояния d_{qm} для любого $\varepsilon > 0$ существуют отображения $f_1 : X \to Z$, $g_1 : Z \to X$ такие, что

$$\max\{\operatorname{dis}(f_1), \operatorname{dis}(g_1), \sup_{x\in X} d_X(x, g_1(f_1(x))), \sup_{z\in Z} d_Z(z, f_1(g_1(z)))\} \le d_{qm}(X,Z) + \varepsilon,$$

и отображения $f_2 : Y \to Z$, $g_2 : Z \to Y$ такие, что

$$\max\{\operatorname{dis}(f_2), \operatorname{dis}(g_2), \sup_{y\in Y} d_Y(y, g_2(f_2(y))), \sup_{z\in Z} d_Z(z, f_2(g_2(z)))\} \le d_{qm}(Y,Z) + \varepsilon.$$

Рассмотрим отображения $\xi = g_2 \circ f_1 : X \to Y$ и $\eta = g_1 \circ f_2 : Y \to X$. Тогда

$$\operatorname{dis}(\xi) = \sup_{x_1,x_2\in X} |d_Z(g_2(f_1(x_1)), g_2(f_1(x_2))) - d_X(x_1,x_2)|$$
$$= \sup_{x_1,x_2\in X} |d_Z(g_2(f_1(x_1)), g_2(f_1(x_2))) - d_Y(f_1(x_1), f_1(x_2))$$
$$+ d_Y(f_1(x_1), f_1(x_2)) - d_X(x_1,x_2)| \le \operatorname{dis}(g_2) + \operatorname{dis}(f_1) \le d_{qm}(Y,Z) + d_{qm}(X,Z) + 2\varepsilon.$$

Аналогично

$$\operatorname{dis}(\eta) \le \operatorname{dis}(g_1) + \operatorname{dis}(f_2) \le d_{qm}(X,Z) + d_{qm}(Y,Z) + 2\varepsilon.$$

Кроме того, обозначим $y' = \xi(\eta(y)) \in Y$, $z = f_2(y) \in Z$, $z' = f_1(g_1(z)) \in Z$. Тогда

$$\begin{aligned}\sup_{y\in Y} d_Y(y,\xi(\eta(y))) &= \sup_{y\in Y}\{d_Y(y,y') - d_Z(f_2(y),f_2(y')) + d_Z(z,f_2(g_2(z')))\}\\ &\le \operatorname{dis}(f_2) + Q_Z(d_Z(z,f_1(g_1(z))) + d_Z(z',f_2(g_2(z'))))\\ &\le d_{qm}(Y,Z) + \varepsilon + Q_Z(d_{qm}(Y,Z) + d_{qm}(X,Z) + 2\varepsilon).\end{aligned}$$

Аналогичная оценка справедлива и для величины $\sup\limits_{x\in X} d_X(x,\eta(\xi(x)))$. Устремляя ε к нулю, получаем требуемое утверждение. $\square$

Определение 4. Последовательность компактных квазиметрических пространств $\{(X_n,d_{X_n})\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится* к компактному квазиметрическому пространству (X,d_X) (в обозначениях $X_n \underset{qm}{\to} X$), если $\lim\limits_{n\to\infty} d_{qm}(X_n,X) = 0$.

Сформулируем полезный для дальнейшего критерий сходимости относительно метрической функции d_{qm}.

Предложение 3. *Пусть $\{(X_n,d_{X_n})\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность компактных квазиметрических пространств. Тогда $X_n \underset{qm}{\to} X$ в том и только том случае, когда существуют такие последовательности отображений $f_n : X_n \to X$ и $g_n : X \to X_n$, что при $n \to \infty$*

(1) $\operatorname{dis}(f_n) \to 0$, $\operatorname{dis}(g_n) \to 0$;

(2) $\sup\limits_{x\in X_n} d_{X_n}(x,g_n(f_n(x))) \to 0$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности заметим, что из (1), (2) следует

$$\sup_{x\in X} d_X(x,f_n(g_n(x))) \le \operatorname{dis}(g_n) + \sup_{x\in X_n} d_{X_n}(x,g_n(f_n(x))) \to 0,$$

поэтому $d_{qm}(X_n,X) \to 0$. $\square$

Предложение 4. *Если компактные квазиметрические пространства (X,d_X), (Y,d_Y) являются пределами одной и той же последовательности компактных пространств (X_n,d_{X_n}), то X и Y изометричны.*

Доказательство. Рассмотрим те отображения $f_n : X_n \to X$, $g_n : X \to X_n$, $f'_n : X_n \to Y$, $g'_n : Y \to X_n$, существование которых утверждается в предложении 3, и следующие их суперпозиции: $\xi_n = f'_n \circ g_n : X \to Y$, $\eta_n = f_n \circ g'_n : Y \to X$. Легко видеть, что $\operatorname{dis}(\xi_n) \le \operatorname{dis}(f'_n) + \operatorname{dis}(g_n) \to 0$, $\operatorname{dis}(\eta_n) \to 0$. Рассуждая так же, как при доказательстве предложения 1, по последовательности ξ_n получим изометрию $\xi : X \to Y$. $\square$

Замечание 5. Если в предложении 4 дополнительно предположить, что константы Q_{X_n} ограничены в совокупности, то единственность предела последовательности $\{X_n\}$ с точностью до изометрии вытекает из предложений 1 и 2. Отметим, что условие ограниченности констант Q_{X_n} фигурирует и в некоторых утверждениях работы [14].

Следующее предложение доказывается по аналогии со случаем метрических пространств [23, предложение 7.4.12] с использованием предложений 2, 3. Условие ограниченности констант Q_{X_n} необходимо, поскольку расстояние d_{qm} удовлетворяет лишь обобщенному неравенству треугольника (2.2).

Предложение 5 (аналог критерия Громова). *Пусть пространства X и $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ компактны, причем константы Q_{X_n} ограничены в совокупности. Тогда $X_n \underset{qm}{\to} X$ в том и только том случае, когда выполняется следующее условие. Для каждого $\varepsilon > 0$ существуют такие конечные ε-сети S в X и S_n в каждом из X_n, что $S_n \underset{qm}{\to} S$. Более того, эти ε-сети могут быть выбраны так, что для каждого достаточно большого n сети S_n и S равномощны.*

Для некомпактных пространств введем следующее более общее определение сходимости. *Пунктированным* (*квази*)*метрическим пространством* называется пара (X, p), состоящая из (квази)метрического пространства X и точки $p \in X$. Если нам понадобится подчеркнуть, какой (квази)метрикой снабжено X, будем записывать пунктированное пространство в виде тройки (X, p, d_X).

Определение 5. Последовательность (X_n, p_n) пунктированных квазиметрических пространств *сходится* к пунктированному квазиметрическому пространству (X, p) (обозначается через $(X_n, p_n) \underset{qm}{\to} (X, p)$ либо $(X_n, p_n) \underset{m}{\to} (X, p)$ для метрических пространств), если существует такая числовая последовательность $\delta_n \to 0$, что для любого $r > 0$ существуют отображения $f_{n,r} : B^{d_{X_n}}(p_n, r + \delta_n) \to X,\ g_{n,r} : B^{d_X}(p, r + 2\delta_n) \to X_n$ такие, что

(1) $f_{n,r}(p_n) = p,\ g_{n,r}(p) = p_n$;

(2) $\operatorname{dis}(f_{n,r}) < \delta_n$, $\operatorname{dis}(g_{n,r}) < \delta_n$;

(3) $\sup\limits_{x \in B^{d_{X_n}}(p_n, r+\delta_n)} d_{X_n}(x, g_{n,r}(f_{n,r}(x))) < \delta_n$.

Замечание 6. Из пп. (1), (2) определения 5 следует, что для всех $R > 0$ справедливо включение $f_{n,r}(B^{d_{X_n}}(p_n, R)) \subseteq B^{d_X}(p, R + \delta_n)$, поэтому суперпозиция $g_{n,r} \circ f_{n,r}$ в п. (3) определена корректно. Кроме того, аналогичное включение имеется для $g_{n,r}$, следовательно, $g_{n,r}(f_{n,r}(B^{d_{X_n}}(p_n, R))) \subseteq B^{d_{X_n}}(p_n, R + 2\delta_n)$.

Легко доказать

Предложение 6. *Для компактных квазиметрических пространств сходимость пунктированных пространств и сходимость из определения 4 эквивалентны в следующем смысле.*

1. *Из $(X_n, p_n) \underset{qm}{\to} (X, p)$ следует $X_n \underset{qm}{\to} X$.*

2. *Если $X_n \underset{qm}{\to} X$ и $p \in X$, то в каждом X_n можно выбрать точку p_n так, что $(X_n, p_n) \underset{qm}{\to} (X, p)$.*

Определение 6. Квазиметрическое пространство X *ограниченно компактно*, если все замкнутые ограниченные подмножества X компактны.

Лемма 1. *Пусть (X, p), (Y, q) — два полных пунктированных квазиметрических пространства, являющиеся пределами в смысле определения 5 одной и той же последовательности (X_n, p_n) такой, что константы $\{Q_{X_n}\}$ ограничены в совокупности: $|Q_{X_n}| \le C$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если X ограниченно компактно, то Y также ограниченно компактно.*

Доказательство. Обозначим через $f_{n,r}$, $g_{n,r}$ и $f'_{n,r}$, $g'_{n,r}$ отображения из определения 5 для X и Y соответственно. Без ограничения общности считаем, что последовательность $\delta_n \to 0$ для X и Y одна и та же. Рассмотрим две последовательности отображений:

$$\xi_{n,r} = f'_{n,r} \circ g_{n,r}|_{B^{d_X}(p,r)} : B^{d_X}(p, r) \to B^{d_Y}(q, r + 2\delta_n),$$

$$\eta_{n,r} = f_{n,r} \circ g'_{n,r}|_{B^{d_Y}(q,r)} : B^{d_Y}(q,r) \to B^{d_X}(p, r + 2\delta_n)$$

(ср. с замечанием 6). Легко видеть, что $\xi_{n,r}(p) = q$, $\eta_{n,r}(q) = p$ и $\operatorname{dis}(\xi_{n,r}) < 2\delta_n$, $\operatorname{dis}(\eta_{n,r}) < 2\delta_n$. Кроме того, имеет место оценка

$$\sup_{y \in B^{d_Y}(q, r-2\delta_n)} d_Y(y, \xi_{n,r}(\eta_{n,r}(y))) \le (2Q_{X_n} + 1)\delta_n \le (2C+1)\delta_n = \varepsilon_n \to 0. \quad (2.3)$$

В самом деле, в обозначениях $y' = \xi_{n,r}(\eta_{n,r}(y)) \in B^{d_Y}(q, r + 2\delta_n)$, $y_n = g'_{n,r}(y) \in B^{d_{X_n}}(p_n, r - \delta_n)$, $y'_n = g_{n,r}(f_{n,r}(y_n)) \in B^{d_{X_n}}(p_n, r + \delta_n)$ имеем

$$\begin{aligned} &\sup_{y \in B^{d_Y}(q, r-2\delta_n)} d_Y(y, \xi_{n,r}(\eta_{n,r}(y))) \\ &\quad \le \sup\{|d_Y(y, y') - d_{X_n}(g'_{n,r}(y), g'_{n,r}(y'))| + d_{X_n}(y_n, g'_{n,r}(f'_{n,r}(y'_n)))\} \\ &\quad \le \operatorname{dis}(g'_{n,r}) + \sup\{Q_{X_n}(d_{X_n}(y_n, g_{n,r}(f_{n,r}(y_n))) + d_{X_n}(y'_n, g'_{n,r}(f'_{n,r}(y'_n))))\} \\ &\quad \le \delta_n + Q_{X_n} \cdot 2\delta_n. \end{aligned}$$

Из (2.3) вытекает, что для шаров в Y для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть в Y. Действительно, пусть $\tilde{\varepsilon} \le \varepsilon/(3Q_Y)$, $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ — конечная $\tilde{\varepsilon}$-сеть в $B^{d_X}(x, r)$. Пусть n — достаточно большой номер такой, что $\delta_n \le \varepsilon/(3Q_Y(2C+1))$. Рассмотрим $G_n = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$, $y_j = \xi_{n,r}(x_j)$, и произвольную точку $y \in B^{d_Y}(p, r - 2\delta_n)$. Из (2.3) следует, что существует такое $z = \xi_{n,r}(x) \in B^{d_Y}(q, r + 2\delta_n)$ (здесь $x = \eta_{n,r}(y) \in B^{d_X}(p, r)$), что $d_Y(y, z) \le \varepsilon_n$. Найдем такое $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, что $d_X(x, x_j) < \tilde{\varepsilon}$. Имеем

$$|d_Y(z, y_j) - d_X(x, x_j)| \le \operatorname{dis}(\xi_{n,r}) \le 2\delta_n,$$

откуда $d_Y(z, y_j) \le 2\delta_n + \tilde{\varepsilon}$ и, следовательно,

$$d_Y(y, y_j) \le Q_Y(d_Y(y, z) + d_Y(z, y_j)) \le Q_Y(\varepsilon_n + 2\delta_n + \tilde{\varepsilon}) < \varepsilon.$$

Таким образом, G_n является конечной ε-сетью в множестве $B^{d_Y}(p, r - 2\delta_n) \cup \xi_{n,r}(B^{d_X}(p, r))$. Отсюда следует ограниченная компактность пространства Y. $\square$

Определение 7. Два пунктированных квазиметрических пространства (X, p) и (Y, q) *изометричны*, если существует такая изометрия $\eta : Y \to X$, что $\eta(q) = p$.

Теорема 1. *В условиях леммы 1 пунктированные квазиметрические пространства (X, p) и (Y, q) изометричны.*

Доказательство. Используя канторов диагональный процесс сначала при $n \to \infty$, а затем при $r \to \infty$, можно (так же, как при доказательстве предложения 1) по последовательности $\xi_{n,r}$ получить сохраняющее расстояние отображение $\xi : X \to Y$, которое переводит каждый шар $B^{d_X}(p, r) \subset X$ в соответствующий шар $B^{d_Y}(q, r) \subset Y$.

В силу того, что X и Y ограниченно компактны, аналогичное сохраняющее расстояние отображение $\eta : Y \to X$ также существует (оно строится по последовательности $\{\eta_{n,r}\}$ при помощи канторова диагонального процесса). Сужение их композиции $\eta \circ \xi$ на произвольный замкнутый шар $\overline{B}^{d_X}(p, r)$ является изометрическим отображением этого шара в себя. Поскольку этот шар компактен, отображение $\eta \circ \xi|_{\overline{B}^{d_X}(p,r)}$ биективно. Следовательно, $\eta|_{\overline{B}^{d_Y}(q,r)}$ сюръективно и, значит, является изометрией на $\overline{B}^{d_X}(p, r)$. Поэтому η — изометрия на X. $\square$

Определим теперь при помощи введенной сходимости касательный конус к квазиметрическому пространству X в точке p по аналогии со случаем метрических пространств [21–23].

Определение 8. Пусть X — полное ограниченно компактное (квази)метрическое пространство, $p \in X$. Если существует предел в смысле определения 5 пунктированных пространств $\lim\limits_{\lambda\to\infty}(\lambda X, p) = (T_pX, e)$, то T_pX называется *касательным конусом* к X в точке p. Здесь под пределом при $\lambda \to \infty$ подразумевается предел по любой последовательности $\lambda_n \to \infty$, который должен существовать для каждой такой последовательности и не зависеть от ее выбора. Через $\lambda X = (X, \lambda d_X)$ обозначено масштабированное пространство X, т. е. X с (квази)метрикой λd_X.

Локальным касательным конусом назовем произвольную окрестность $U(e) \subseteq T_pX$ единичного элемента в касательном конусе.

Замечание 7. Пунктированное (квази)метрическое пространство (T_pX, e) является конусом в том смысле, что оно инвариантно относительно изменения масштаба, т. е. изометрично $(\lambda T_pX, e)$ при всех $\lambda > 0$. Кроме того, касательный конус является локальным инвариантом исходного пространства: он полностью определяется сколь угодно малой окрестностью точки. Точнее, если U — окрестность точки $p \in X$, то касательные конусы пространств U и X в точке p изометричны.

Замечание 8. С учетом теоремы 1 касательный конус единствен с точностью до изометрии, т. е. на самом деле под касательным конусом в определении 8 следует понимать класс изометричных друг другу пунктированных пространств.

3. Сравнение с определением для метрических пространств

Напомним основные определения и некоторые критерии сходимости для метрических пространств [23].

Определение 9. *Расстоянием по Хаусдорфу* между подмножествами A и B метрического пространства (X, d_X) называется величина

$$d_H(A,B) = \inf\{r > 0 \mid A \subset U_r(B), B \subset U_r(A)\},$$

где $U_r(A) = \{x \in X \mid \operatorname{dist}(x,A) < r\} = \bigcup\limits_{a\in A} B^{d_X}(a,r)$ — r-окрестность множества A.

Определение 10. Для произвольных метрических пространств X и Y *расстояние по Громову — Хаусдорфу* $d_{GH}(X,Y)$ между ними определяется как инфимум тех $r > 0$, для которых существуют такие метрическое пространство Z и его подпространства X' и Y', изометричные X и Y соответственно, что $d_H(X',Y') < r$.

Замечание 9 [23]. В качестве всевозможных метрических пространств Z в определении 10 достаточно брать дизъюнктное объединение $X \sqcup Y$ и $d_{GH}(X,Y) = \inf\{d_H(X,Y)\}$, где инфимум берется по всем полуметрикам на $X \sqcup Y$, продолжающим метрики X и Y.

Замечание 10 [14]. Вводить расстояние d_{GH} между двумя квазиметрическими пространствами по прямой аналогии с определением 10 для метрических пространств бессмысленно, поскольку расстояние между любыми двумя ограниченными пространствами (X, d_X) и (Y, d_Y) окажется равным нулю. В самом деле, можно доопределить квазиметрики d_X и d_Y до квазиметрики $d^{(c)}$ на $Z = X \sqcup Y$ (ср. с замечанием 9), положив $d^{(c)}|_X = d_X$, $d^{(c)}|_Y = d_Y$; $d^{(c)}(x, y) = d^{(c)}(y, x) = c$ для всех $x \in X$, $y \in Y$, где $c > 0$ — произвольная константа. Константы из свойств (2) и (3) определения 1 для $(Z, d^{(c)})$ равны $c_Z = \max\{c_X, c_Y\}$ и $Q_Z = \max\{Q_X, Q_Y, \max\{\operatorname{diam}(X), \operatorname{diam}(Y)\}/2c\}$ соответственно. При этом расстояние по Хаусдорфу между X и Y относительно $d^{(c)}$ равняется c. Следовательно, $d_{GH}(X, Y) \leq \inf\{d_H(X, Y) \mid X, Y \hookrightarrow (X \sqcup Y, d^{(c)}), c > 0\} = \inf\{c > 0\} = 0$.

Определение 11. *Соответствием* между двумя произвольными множествами X и Y называется множество $\mathscr{R} \subset X \times Y$, удовлетворяющее следующему условию: для каждой точки $x \in X$ существует по крайней мере одна такая точка $y \in Y$, что $(x, y) \in \mathscr{R}$, и аналогично для каждой точки $y \in Y$ существует такая $x \in X$, что $(x, y) \in \mathscr{R}$ (в этом случае говорим, что точки x и y *соответствуют друг другу*). Для соответствия $\mathscr{R}$ между метрическими пространствами (X, d_X), (Y, d_Y) определим его *искажение* как

$$\operatorname{dis}(\mathscr{R}) = \sup\{|d_X(x, x') - d_Y(y, y')| \mid (x, y), (x', y') \in \mathscr{R}\}.$$

При доказательстве следующего эквивалентного определения расстояния по Громову — Хаусдорфу существенно используется (обычное, а не обобщенное) неравенство треугольника.

Предложение 7 [23, теорема 7.3.25]. *Для любых метрических пространств X и Y имеет место равенство*

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf_{\mathscr{R}}\{\operatorname{dis}(\mathscr{R})\},$$

где инфимум берется по всем соответствиям $\mathscr{R} \subset X \times Y$.

Следствие 1. *Пусть (X, d_X), (Y, d_Y) — метрические пространства, $\rho > 0$.*

1. *Если существуют (не обязательно непрерывные) отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ такие, что $\operatorname{dis}(f) \leq \rho$, $\operatorname{dis}(g) \leq \rho$, $\sup\limits_{x \in X} d_X(x, g(f(x))) \leq \rho$, то $d_{GH}(X, Y) \leq \rho$.*

2. *Если $d_{GH}(X, Y) \leq \rho$, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ такие, что $\operatorname{dis}(f) \leq 2\rho + \varepsilon$, $\operatorname{dis}(g) \leq 2\rho + \varepsilon$, $\sup\limits_{x \in X} d_X(x, g(f(x))) \leq 2\rho + \varepsilon$.*

Доказательство. 1. Для доказательства первого утверждения достаточно рассмотреть соответствие $\mathscr{R} = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \cup \{(g(y), y) \mid y \in Y\}$ и с использованием неравенства треугольника показать, что $\operatorname{dis}(\mathscr{R}) \leq \max\{\operatorname{dis}(f), \operatorname{dis}(g) + \sup\limits_{x \in X} d_X(x, g(f(x)))\} \leq 2\rho$ и, следовательно, $d_{GH}(X, Y) \leq \rho$.

2. Если теперь $d_{GH}(X, Y) \leq \rho$, то по предложению 7 для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое соответствие $\mathscr{R} \subset X \times Y$, что $\operatorname{dis}(\mathscr{R}) \leq 2\rho + \varepsilon$. Отображения f и g построим следующим образом. Каждой точке $x \in X$ сопоставим некоторую (произвольную) точку $y = f(x) \in Y$ такую, что $(x, y) \in \mathscr{R}$. Аналогично отображение g сопоставляет каждой точке $y \in Y$ некоторую соответствующую ей точку $x = g(y) \in X$. Очевидно, что $\operatorname{dis}(f) \leq \operatorname{dis}(\mathscr{R})$, $\operatorname{dis}(g) \leq \operatorname{dis}(\mathscr{R})$. Поскольку при $y = f(x)$ точки x и $g(y)$ соответствуют y, имеем $d_X(x, g(y)) \leq d_Y(y, y) + \operatorname{dis}(\mathscr{R})$ и, следовательно, $\sup\limits_{x \in X} d_X(x, g(f(x))) \leq \operatorname{dis}(\mathscr{R}) \leq 2\rho + \varepsilon$, что и требовалось. $\square$

Замечание 11. Отметим, что аналог следствия 1 сформулирован в [8, лемма 6.23] без условий на поведение величины $\sup\limits_{x\in X} d_X(x, g(f(x)))$. Следующее рассуждение показывает, что «метрика», введенная в ходе доказательства этой леммы, не удовлетворяет неравенству треугольника. В самом деле, рассмотрим произвольную точку $x \in X$. Тогда возможно, что

$$d_Z(x, g(f(x))) > d_Z(x, f(x)) + d_Z(f(x), g(f(x))),$$

поскольку величина в правой части неравенства равняется 2ρ по определению расстояния d_Z, в то время как величина в левой части равняется по определению $d_X(x, g(f(x)))$ и, следовательно, никаких ограничений на нее нет.

Следствие 2 [23, следствие 7.3.28]. *Пусть X, Y — метрические пространства, $\varepsilon > 0$.*

1. *Если $d_{GH}(X,Y) < \varepsilon$, то существует 2ε-изометрия из X в Y, т. е. такое отображение $f : X \to Y$, что $\operatorname{dis}(f) < 2\varepsilon$ и образ $f(X)$ является 2ε-сетью в Y.*
2. *Если существует ε-изометрия из X в Y, то $d_{GH}(X,Y) < 2\varepsilon$.*

Из следствия 1 с помощью такого же рассуждения, как и в доказательстве предложения 3, вытекает

Предложение 8. *Введенное в определении 3 расстояние d_m эквивалентно расстоянию по Громову — Хаусдорфу. Точнее, для произвольных метрических пространств X и Y справедливо неравенство*

$$d_{GH}(X,Y) \le d_m(X,Y) \le 2d_{GH}(X,Y).$$

Сходимость последовательности метрических пространств определяется следующим естественным образом.

Определение 12. Последовательность компактных метрических пространств $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится по Громову — Хаусдорфу* к компактному метрическому пространству X, если $d_{GH}(X_n, X) \to 0$ при $n \to \infty$.

С использованием следствия 2 в [23] доказано, что d_{GH} определяет конечную метрику на пространстве классов изометричных компактных пространств. Из этого утверждения, в свою очередь, вытекает единственность предела по Громову — Хаусдорфу последовательности компактных метрических пространств с точностью до изометрии. Отсюда с учетом предложений 4 и 8 получаем

Предложение 9. *Для метрических пространств определения 12 и 4 эквивалентны, т. е. сходимость по Громову — Хаусдорфу влечет сходимость по расстоянию d_m, и наоборот. Кроме того, если $X_n \underset{m}{\to} X$ и $X_n \underset{GH}{\to} Y$, то метрические пространства X и Y изометричны.*

Определение 13 [23]. Последовательность (X_n, p_n) пунктированных метрических пространств *сходится по Громову — Хаусдорфу* к пунктированному метрическому пространству (X, p) (обозначается через $(X_n, p_n) \underset{GH}{\to} (X, p)$), если для любых $r > 0, \varepsilon > 0$ существует номер n_0 такой, что для всех $n > n_0$ существуют отображения $f_{n,r} : B^{d_{X_n}}(p_n, r) \to X$ такие, что

(1) $f_{n,r}(p_n) = p$;
(2) $\operatorname{dis}(f_{n,r}) < \varepsilon$;
(3) $U_\varepsilon(f_{n,r}(B^{d_{X_n}}(p_n, r)) \supseteq B^{d_X}(p, r - \varepsilon)$.

Единственность предела с точностью до изометрии для ограниченно компактных пунктированных метрических пространств доказывается при помощи расстояния по Громову — Хаусдорфу [23].

Предложение 10. *Пусть последовательность* (X_n, p_n) *пунктированных метрических пространств сходится к пунктированному метрическому пространству* (X, p) *в смысле определения* 13. *Тогда та же сходимость имеет место и в смысле определения* 5, *и наоборот.*

Доказательство. Пусть $(X_n, p_n) \underset{GH}{\to} (X, p)$. Очевидно, что в определении 13 можно заменить $\varepsilon > 0$ на некоторую последовательность $\tilde{\delta}_n \to 0$. С использованием следствия 2 и предложения 7 легко показать, что существует соответствие $\mathscr{R}_{n,r}$ между шаром $B^{d_{X_n}}(p_n, r)$ и некоторым подмножеством $Y_{n,r}$, заключенным между $B^{d_X}(p, r - \tilde{\delta}_n)$ и $B^{d_X}(p, r + \tilde{\delta}_n)$, такое, что $(p_n, p) \in \mathscr{R}$ и $\operatorname{dis}(\mathscr{R}) < 4\tilde{\delta}_n$. Обозначим $\delta_n = 4\tilde{\delta}_n$ и $\tilde{r} = r - 9\tilde{\delta}_n$. Отображения $f_{n,\tilde{r}}$, $g_{n,\tilde{r}}$ из определения 5 построим следующим образом. Отображение $f_{n,\tilde{r}}$ каждой точке $x_n \in B^{d_{X_n}}(p_n, \tilde{r} + \delta_n) = B^{d_{X_n}}(p_n, r - 5\tilde{\delta}_n)$ сопоставляет некоторую соответствующую ей точку $x = f_{n,\tilde{r}}(x_n) \in X : (x_n, x) \in \mathscr{R}$, при этом положим $f_{n,\tilde{r}}(p_n) = p$. Аналогично пусть $g_{n,\tilde{r}}$ сопоставляет точке $x_n \in B^{d_{X_n}}(p_n, \tilde{r} + 2\delta_n) = B^{d_{X_n}}(p_n, r - \tilde{\delta}_n)$ такую произвольную точку $x_n = g_{n,\tilde{r}}(x) \in X_n$, что $(x_n, x) \in \mathscr{R}$, причем $g_{n,\tilde{r}}(p) = p_n$. Рассуждая так же, как при доказательстве второй части следствия 1, легко показать, что построенные отображения удовлетворяют всем пунктам определения 5.

Пусть теперь $(X_n, p_n) \underset{m}{\to} (X, p)$. Тогда сужения $f_{n,r}|_{B^{d_{X_n}}(p_n, r)}$ (для упрощения обозначений положим $f_{n,r}|_{B^{d_{X_n}}(p_n, r)} = f_{n,r}$) удовлетворяют всем свойствам из определения 13. В самом деле, свойства (1) и (2) выполнены автоматически; кроме того, из свойства (3) определения 5 вытекает, что для любой точки $x \in B^{d_X}(p, r - \delta_n)$ существует точка $z = f_{n,r}(g_{n,r}(x)) \in f_{n,r}(B^{d_{X_n}}(p_n, r))$ такая, что

$$d_X(x, z) \le \operatorname{dis}(g_{n,r}) + d_{X_n}(g_{n,r}(x), g_{n,r}(f_{n,r}(g_{n,r}(x)))) \le 2\delta_n.$$

Следовательно, $B^{d_X}(p, r - \delta_n) \subset U_{2\delta_n}(f_{n,r}(B^{d_{X_n}}(p_n, r)))$, откуда вытекает и свойство (3) определения 13. $\square$

Из предложения 10, теоремы 1 и ее аналога для метрических пространств вытекает

Следствие 3. *Пусть* X — *полное ограниченно компактное метрическое пространство,* Y — *касательный конус к* X *в точке* $p \in X$ *в смысле определения* 8, Z — *касательный конус к* X *в точке* $p \in X$ *в смысле аналогичного определения для метрических пространств* (*с использованием сходимости из определения* 13). *Тогда* Y *и* Z *изометричны.*

Замечание 12. Ключевой идеей при введении расстояния d_{qm} между двумя квазиметрическими пространствами (определение 3) является следующее наблюдение. Для метрических пространств следствия 2, 1 и предложение 7 дают эквивалентные критерии расстояния по Громову — Хаусдорфу. Для квазиметрических же пространств все эти три утверждения не эквивалентны между собой. При попытке введения расстояния между квазиметрическими пространствами на основе следствия 2 возникают проблемы с единственностью предела последовательности с точностью до изометрии. Использование же предложения 7 не слишком удобно при работе с некомпактными квазиметрическими пространствами. Поэтому определение d_{qm} основано на следствии 1.

4. Касательный конус к квазиметрическому пространству с растяжениями

Пусть $(\mathbb{X}, d)$ — полное ограниченно компактное квазиметрическое пространство, причем квазиметрика d непрерывна по обоим аргументам. Приведем аксиоматическое определение структуры растяжений на $\mathbb{X}$, представляющее собой незначительную модификацию аксиом из работы [19].

Определение 14. $(\mathbb{X}, d, \delta)$ — *пространство со структурой растяжений*, если выполнены следующие аксиомы.

(A0) Для всех $x \in \mathbb{X}$ в некоторой окрестности $U(x)$ точки x заданы гомеоморфизмы, называемые *растяжениями* $\delta^x_\varepsilon : U(x) \to V_\varepsilon(x)$ для $\varepsilon \in [0,1]$ и $\delta^x_{\varepsilon^{-1}} : W_{\varepsilon^{-1}}(x) \to U(x)$ для $\varepsilon \in (0,1]$, где $W_{\varepsilon^{-1}}(x) \supseteq V_\varepsilon(x)$. Предполагается, что существует $R > 0$ такое, что $\overline{B}^d(x, R) \subseteq U(x)$ для всех $x \in \mathbb{X}$ и что для всех $\tilde{r} > 0$, удовлетворяющих свойству $\overline{B}^d(x, \tilde{r}) \subseteq U(x)$, справедливы включения $B^d(x, \tilde{r}\varepsilon) \subseteq \delta^x_\varepsilon B^d(x, \tilde{r}) \subseteq V_\varepsilon(x) \subseteq W_{\varepsilon^{-1}}(x) \subseteq U(x)$.

(A1) Для всех $x \in \mathbb{X}$, $y \in U(x)$ выполнено $\delta^x_\varepsilon x = x$, $\delta^x_1 = \mathrm{id}$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \delta^x_\varepsilon y = x = \delta^x_0 y$.

(A2) Для всех $x \in \mathbb{X}$ и $u \in U(x)$ справедливо $\delta^x_\varepsilon \delta^x_\mu u = \delta^x_{\varepsilon\mu} u$ при условии, что обе части последнего равенства имеют смысл.

(A3) Для каждого $x \in \mathbb{X}$ существует равномерный по $u, v \in \overline{B}^d(x, R)$ предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} d(\delta^x_\varepsilon u, \delta^x_\varepsilon v) = d^x(u, v). \tag{4.1}$$

Если из $d^x(u, v) = 0$ следует, что $u = v$, то структура растяжений называется *невырожденной*.

Пример 1. В случае, когда $\mathbb{X}$ — риманово многообразие, растяжения можно ввести с использованием гомотетий евклидова пространства. В следующем пункте приведен пример субримановых многообразий (другими словами, пространств Карно — Каратеодори), когда растяжения представляют собой анизотропные гомотетии (см. также примеры в [19, 20]).

Замечание 13. Отметим, что в силу (A3) функция $d^x(u, v)$ непрерывна, поэтому открытые относительно d^x множества открыты и относительно d и, кроме того, $(U(x), d^x)$ ограниченно компактно. В случае невырожденной структуры растяжений d^x является квазиметрикой на $U(x)$.

Из замечания 13 и аксиомы (A3) вытекает

Предложение 11. *Если $(\mathbb{X}, d, \delta)$ — невырожденная структура растяжений, то d^x — квазиметрика на $B^d(x, R)$ с теми же константами $c_{\mathbb{X}}$, $Q_{\mathbb{X}}$ (см. пп.* (2), (3) *определения* 1), *что и для исходной квазиметрики d.*

Теорема 2. *Пусть $(\mathbb{X}, d, \delta)$ — пространство с невырожденной структурой растяжений. Тогда $(U(x), x, d^x)$ — касательный конус к $\mathbb{X}$ в точке x.*

Доказательство. Требуется проверить выполнение определения 5 для пространств $X_n = (U(x), x, \lambda_n \cdot d)$, $X = (U(x), x, d^x)$, где $\lambda_n \to \infty$, $\lambda_n \geq 0$, — произвольная числовая последовательность (без ограничения общности будем считать, что $\lambda_n \geq 1$).

Для каждого r такого, что $\overline{B}^d(x, r) \subseteq U(x)$, $n \in \mathbb{N}$, положим $f_n = f_{n,r} = \delta^x_{\lambda_n} : W_{\lambda_n}(x) \to U(x)$. Поскольку в силу (A0) имеют место включения $W_{\lambda_n}(x) \supseteq$

$V_{\lambda_n^{-1}}(x) \supseteq B^d\big(x, \frac{r}{\lambda_n}\big) = B^{\lambda_n \cdot d}(x,r) = B^{d_{X_n}}(x,r)$, существует такое число $\delta_n > 0$, что это отображение определено на шаре $B^{d_{X_n}}(x, r+\delta_n)$.

Аналогично положим $g_n = g_{n,r} = \delta^x_{\lambda_n^{-1}} : U(x) \to V_{\lambda_n^{-1}}(x)$. Будем рассматривать такие радиусы $r \le r_0$, что $\overline{B}^{d^x}(x, r+2\delta_n) \subseteq \overline{B}^d(x,\tilde r) \subseteq U(x)$ для некоторого $\tilde r > 0$. Отметим, что в силу (A3) начиная с некоторого номера можно подобрать введенные выше числа δ_n так, чтобы

$$\operatorname{dis}(g_n) = \sup_{\tilde u, \tilde v \in \overline{B}^{d^x}(x, r+2\delta_n)} |\lambda_n d(g_n(\tilde u), g_n(\tilde v)) - d^x(\tilde u, \tilde v)| \le \delta_n \to 0,$$

$$\operatorname{dis}(f_n) = \sup_{u,v \in B^{\lambda_n \cdot d}(x, r+\delta_n)} |\lambda_n d(u,v) - d^x(f_n(u), f_n(v))| \le \delta_n.$$

Согласно (A0) для всех $\tilde x \in U(x)$ имеем $d(\tilde x, f_n(g_n(\tilde x))) = 0$, поэтому для всех $x_n \in W_{\lambda_n^{-1}}(x)$ выполнено

$$\begin{aligned}\lambda_n \cdot d(x_n, g_n(f_n(x_n))) &= d_{X_n}(x_n, g_n(f_n(x_n))) \\ &\le \operatorname{dis}(f_n) + d(f_n(x_n), f_n(g_n(f_n(x_n)))) \le \delta_n,\end{aligned}$$

и предложение доказано. $\square$

5. Пример: пространство Карно — Каратеодори

Приведем основные определения и факты теории пространств Карно — Каратеодори, следуя подходу, предложенному в [9, 30, 31].

Определение 15 ([9, 30, 31, 14], ср. с [1, 5–8, 10]). Пусть $\mathbb{M}$ — связное C^∞-гладкое риманово многообразие размерности N. Многообразие $\mathbb{M}$ называется *регулярным пространством Карно — Каратеодори*, если в его касательном расслоении $T\mathbb{M}$ выделено касательное «горизонтальное» подрасслоение $H\mathbb{M}$ с ассоциированным с ним набором натуральных чисел $\dim H_1 < \dots < \dim H_i < \dots < \dim H_M = N$ и для каждой точки $g \in \mathbb{M}$ существует окрестность $U(g) \subset \mathbb{M}$ с заданными на ней C^∞-гладкими векторными полями $X_1, \dots, X_N$, удовлетворяющими следующим свойствам.

Для всех $u \in U(g)$

(1) $X_1(u), \dots, X_N(u)$ — базис касательного пространства $T_u\mathbb{M}$;

(2) $H_i(u) = \operatorname{span}\{X_1(u), \dots, X_{\dim H_i}(u)\}$ — подпространство $T_u\mathbb{M}$ размерности $\dim H_i$, $i = 1, \dots, M$, в частности, $H_1(u) = H_u\mathbb{M}$ — горизонтальное пространство в точке u;

(3) $[X_i, X_j](u) = \sum\limits_{k: \deg X_k \le \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk}(u) X_k(u)$, где $\deg X_k = \min\{m \mid X_k \in H_m\}$ — *степень* векторного поля X_k.

Число M называется *глубиной* пространства Карно — Каратеодори $\mathbb{M}$.

Будем далее рассматривать компактно вложенную окрестность $\mathscr{U}$ ($\overline{\mathscr{U}} \subset \mathbb{M}$) такую, как в [9, предположение 2.1.14]. Квазиметрика d_∞ на этой окрестности вводится с помощью координат первого рода следующим образом.

Определение 16. Для точек $u, v \in \mathscr{U}$ таких, что $v = \exp\Big(\sum\limits_{i=1}^N v_i X_i\Big)(u)$, положим

$$d_\infty(u,v) = \max_i \{|v_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\}.$$

Пп. (1), (2) определения 1 для функции d_∞, а также ее непрерывность по обоим аргументам очевидным образом вытекают из свойств экспоненциального отображения. Обобщенное неравенство треугольника доказывается в [6, 9, 31]. Таким образом, $(\mathscr{U}, d_\infty)$ является квазиметрическим пространством. Шары в квазиметрике d_∞ обозначим через

$$\mathrm{Box}(u, r) = \{v \in U \mid d_\infty(v, u) < r\}.$$

Определение 17. Определим в $\mathscr{U}$ действие группы растяжений Δ^g_ε: элементу $x = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^N x_i X_i\right)(g) \in \mathscr{U}$ сопоставляется элемент

$$\Delta^g_\varepsilon x = \exp\left(\sum_{i=1}^N x_i \varepsilon^{\deg X_i} X_i\right)(g) \in \mathscr{U}$$

в случае, когда правая часть последнего выражения имеет смысл.

Предложение 12 (теорема Громова о нильпотентизации [7, 9, 10, 11 31]). *На* $\mathrm{Box}(g, r_g)$ *имеет место равномерная сходимость векторных полей*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \big(\Delta^g_{\varepsilon^{-1}}\big)_* \langle \varepsilon^{\deg X_i} X_i \rangle = \widehat{X}^g_i, \quad i = 1, \ldots, N.$$

равномерно по g *из некоторой компактной окрестности. Векторные поля* $\big\{\widehat{X}^g_i\big\}$ *образуют базис нильпотентной градуированной алгебры Ли.*

Определение 18. Обозначим локальную группу Ли, соответствующую алгебре Ли $\big\{\widehat{X}^g_i\big\}_{i=1}^N$, через $\mathscr{G}^g = (\mathscr{U}, \circ)$. Групповая операция $\circ$ определяется следующим образом: если $x = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^N x_i \widehat{X}^g_i\right)(g)$, $y = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^N y_i \widehat{X}^g_i\right)(g)$, то $x \cdot y = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^N y_i \widehat{X}^g_i\right) \circ \exp\left(\sum\limits_{i=1}^N x_i \widehat{X}^g_i\right)(g) = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^N z_i \widehat{X}^g_i\right)(g)$, где z_i вычисляются по формуле Кэмпбелла — Хаусдорфа.

Замечание 14. При выполнении условия Хёрмандера [13] о порождении всего касательного пространства коммутаторами «горизонтальных» векторных полей алгебра Ли V локальной группы $\mathscr{G}^g$ не только нильпотентна и градуирована, но и стратифицирована, т. е. представима в виде прямой суммы $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_M$, так что $[V_1, V_i] = V_{i+1}$, $i = 1, \ldots, M-1$ (в рассматриваемом нами случае имеют место лишь включения $[V_1, V_i] \subseteq V_{i+1}$). Другими словами, $\mathscr{G}^g$ является локальной группой Карно.

Определение 19. Для точек $u, v \in \mathscr{G}^g$ таких, что $v = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^N v_i \widehat{X}^g_i\right)(u)$, положим

$$d^g_\infty(u, v) = \max_i \{|v_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\}.$$

Шары в этой квазиметрике будем обозначать через

$$\mathrm{Box}^g(u, r) = \big\{v \in U \mid d^g_\infty(v, u) < r\big\}.$$

В [32] доказано, что $\mathrm{Box}(g, r) = \mathrm{Box}^g(g, r)$ и что анизотропные растяжения относительно векторных полей $\big\{\widehat{X}^g_i\big\}$ из предложения 12 совпадают с растяжениями Δ^g_ε из определения 17.

Предложение 13 [9, 18, 30]. *Справедливо коническое свойство квазиметрики* $d^g_\infty(u, v)$*:*

$$d^g_\infty(u, v) = \frac{1}{\varepsilon} d^g_\infty\big(\Delta^g_\varepsilon u, \Delta^g_\varepsilon v\big),$$

для тех $\varepsilon > 0$*, для которых обе части последнего равенства имеют смысл.*

Предложение 14 (локальная аппроксимационная теорема [9, 14, 30], ср. с [7, 8]). *Если $u, v \in \mathrm{Box}(g, \varepsilon)$, то*

$$\left|d_\infty(u,v) - d^g_\infty(u,v)\right| = O(\varepsilon^{1+\frac{1}{M}})$$

равномерно по $g \in \mathscr{U}$, $u, v \in \mathrm{Box}(g, \varepsilon)$.

Основной результат работы составляет следующее утверждение.

Теорема 3. *Квазиметрическое пространство $\left(\mathscr{U}, d^g_\infty\right)$ из определения* 19 *является локальным касательным конусом в точке g к квазиметрическому пространству $(\mathscr{U}, d_\infty)$ из определения* 16.

Теорема 3 с учетом теоремы 2 вытекает из следующего предложения.

Предложение 15. *Введенные в определении* 17 *растяжения Δ^g_ε удовлетворяют аксиомам* (A0)–(A3) *определения* 14 (*в обозначениях $x = g$, $d^x = d^g_\infty$*).

Доказательство. Выполнение аксиом (A0)–(A2) очевидно. Аксиома (A3) следует из предложения 14, поскольку из (A0) и предложения 13 для всех $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathrm{Box}(g, r) = \mathrm{Box}^g(g, r)$ имеем

$$\left|\frac{1}{\varepsilon} d_\infty\left(\Delta^g_\varepsilon \tilde{u}, \Delta^g_\varepsilon \tilde{v}\right) - d^g_\infty(\tilde{u}, \tilde{v})\right| = \frac{1}{\varepsilon}\left|d_\infty(u,v) - d^g_\infty(u,v)\right| = o(1) \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

где $u = \Delta^g_\varepsilon \tilde{u}$, $v = \Delta^g_\varepsilon \tilde{v} \in \mathrm{Box}(g, r\varepsilon)$. $\square$

Замечание 15. Отметим, что координаты первого рода осуществляют локальный изометрический изоморфизм локальной группы $(\mathscr{G}^g, \circ)$ (см. определение 18) и группы $(\mathbb{R}^N, \circ)$ с естественным образом «продолженной» групповой операцией (см. [9]). Поэтому в теореме 3 можно говорить не только о локальном, но и об обычном касательном конусе. Для абстрактного квазиметрического пространства с растяжениями аналогичное замечание верно лишь при некоторых дополнительных предположениях (см. [29]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bongfioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F.* Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2007.
2. *Capogna L., Danielli D., Pauls S. D., Tyson J. T.* An introduction to the Heisenberg group and the sub-Riemannian isoperimetric problem. Basel: Birkhäuser, 2007. (Prog. Math.; V. 259).
3. *Montgomery R.* A tour of subriemannian geometries. Their geodesics and applications. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002.
4. *Stein E. M.* Harmonic analysis: real-variables methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1993.
5. *Rotshild L. P., Stein E. M.* Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups // Acta Math. 1976. V. 137. P. 247–320.
6. *Nagel A., Stein E. M., Wainger S.* Balls and metrics defined by vector fields. I: Basic properties // Acta Math. 1985. V. 155. P. 103–147.
7. *Gromov M.* Carnot–Caratheodory spaces seen from within // Sub-Riemannian Geometry. Birckhäuser, 1996. P. 79–323. (Prog. Math.; 144).
8. *Bellaiche A.* The tangent space in sub-Riemannian geometry // Sub-Riemannian Geometry. Birckhäuser, 1996. P. 1–78. (Prog. Math.; 144).
9. *Karmanova M., Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas // Analysis and Mathematical Physics. Trends in Mathematics. Birckhäuser, 2009. P. 233–335.
10. *Margulis G. A., Mostow G. D.* The differential of quasi-conformal mapping of a Carnot–Caratheodory space // Geom. Funct. Anal. 1995. V. 5, N 2. P. 402–433.
11. *Margulis G. A., Mostow G. D.* Some remarks on the definition of tangent cones in a Carnot–Caratheodory space // J. Anal. Math. 2000. V. 80. P. 299–317.

12. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // Ann. Math. 1989. V. 119. P. 1–60.
13. *Hörmander L.* Hypoelliptic second order differential equations // Acta Math. 1967. V. 119, N 3–4. P. 147–171.
14. *Грешнов А. В.* Локальная аппроксимация равномерно регулярных квазипространств Карно — Каратеодори их касательными конусами // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 290–312.
15. *Водопьянов С. К., Карманова М. Б.* Формула площади и коплощади для гладких контактных многообразий Карно // Докл. РАН. 2007. Т. 417, № 5. С. 583–588.
16. *Водопьянов С. К., Карманова М. Б.* Формула площади для C_1-гладких контактных отображений многообразий Карно // Докл. РАН. 2008. Т. 422, № 1. С. 15–20.
17. *Vodopyanov S. K., Karmanova M. B.* An area formula for contact C^1-mappings of Carnot manifolds // Complex Variables and Elliptic Equations. (To appear).
18. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
19. *Buliga M.* Dilatation structures. I: Fundamentals // J. Gen. Lie Theory Appl. 2007. V. 2, N 1. P. 65–95.
20. *Buliga M.* Dilatation structures in sub-Riemannian geometry // arxiv.org: 0708.4298.
21. *Gromov M.* Groups of polynomial growth and expanding maps // Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 1981. V. 53, N 18. P. 53–73.
22. *Gromov M.* Structures metriques pour les varietes riemanniennes. Paris: CEDIC, 1981.
23. *Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В.* Курс метрической геометрии. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004.
24. *Берестовский В. Н.* Однородные многообразия с внутренней метрикой. I // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 6. С. 17–29.
25. *Petersen V. P.* Gromov–Hausdorff convergence in metric space // Differential geometry: Riemannian geometry (Proc. Sympos. Pure Math.; V. 54, Pt. 3). Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993. P. 489–504.
26. *Cheeger J.* Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces // Geom. Funct. Anal. 1998. V. 9, N 3. P. 428–517.
27. *Le Donne E.* Geodesic manifolds with a transitive subset of smooth bilipschitz maps // arxiv.org: 0804.0403v1.
28. *Mitchell J.* On Carnot–Caratheodory metrics // J. Differ. Geom. 1985. V. 21, N 1. P. 35–45.
29. *Водопьянов С. К., Селиванова С. В.* Алгебраические свойства касательного конуса к квазиметрическому пространству со структурой растяжений // Докл. РАН. 2009. Т. 428, № 5. С. 586–590.
30. *Водопьянов С. К., Карманова М. Б.* Локальная геометрия многообразий Карно в условиях минимальной гладкости // Докл. РАН. 2007. Т. 413, № 3. С. 305–311.
31. *Водопьянов С. К., Карманова М. Б.* Субриманова геометрия при минимальной гладкости векторных полей // Докл. РАН. 2008. Т. 422, № 5. С. 583–588.
32. *Водопьянов С. К.* Дифференцируемость отображений в геометрии пространств Карно — Каратеодори // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 251–271.

Статья поступила 21 ноября 2008 г., окончательный вариант — 3 июня 2009 г.

Селиванова Светлана Викторовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`s_seliv@yahoo.com`