Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2010. Том 51, № 1

УДК 512.540+510.5

Σ–ОГРАНИЧЕННЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ. I

А. Н. Хисамиев

Аннотация. Введено понятие Σ-ограниченной алгебраической системы и доказано, что если система Σ-ограничена относительно некоторого своего подмножества A, то в наследственно конечном допустимом множестве над этой системой существует универсальная Σ-функция для семейства функций, определимых Σ-формулами с параметрами из A. Получено необходимое и достаточное условие существования универсальной Σ-функции в наследственно конечном допустимом множестве над Σ-ограниченной алгебраической системой. Доказано, что любой линейный порядок является Σ-ограниченной системой и в наследственно конечном допустимом множестве над ним существует универсальная Σ-функция.

Ключевые слова: допустимое множество, Σ-определимость, выполнимость, универсальная Σ-функция, линейный порядок.

В настоящее время общепризнанно, что одним из важных обобщений понятия вычислимости является Σ-определимость (обобщенная вычислимость) в допустимых множествах. Это обобщение дало возможность исследовать проблемы вычислимости над произвольными алгебраическими системами, например, над полем вещественных чисел. Наиболее важные результаты по теории вычислимости в допустимых множествах и их применении в теоретической информатике (семантическое программирование, динамическая логика, теория эффективных f-пространств и т. д.) приведены в монографии Ю. Л. Ершова [1].

Одним из принципиальных результатов абсолютной теории вычислимости является существование универсальной частично вычислимой функции. Как известно (см. [1]), в любом допустимом множестве существует универсальный Σ-предикат, но это неверно для Σ-функций. В [2] построена алгебраическая система $\mathfrak{M}$ такая, что в наследственно конечном допустимом множестве $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ не существует универсальной Σ-функции. Поэтому представляет интерес нахождение условия на алгебраическую систему $\mathfrak{M}$ для существования универсальной Σ-функции в наследственно конечном допустимом множестве $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ над $\mathfrak{M}$. В [1] доказано, что если $\mathfrak{M}$ — алгебраическая система разрешимой и модельно полной теории, то в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ существует универсальная Σ-функция. В [3–5] для одного класса K алгебраических систем найдены необходимые и достаточные условия существования универсальной Σ-функции в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M} \in K$. В [6] построена абелева группа без кручения A такая, что в $\mathbb{HF}(A)$ не существует универсальной Σ-функции.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00336), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–335.2008.1), а также гранта Президента РФ (№ МК–3721.2007.1).

В данной работе введено понятие Σ-ограниченной (относительно конечного подмножества) алгебраической системы. Доказано, что если система $\mathfrak{M}$ Σ-ограничена относительно конечного подмножества M_0, то в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ существует универсальная Σ-функция для семейства всех Σ-функций, определяемых Σ-формулами с параметром M_0. Получено необходимое и достаточное условие существования универсальной Σ-функции в наследственно конечном допустимом множестве над Σ-ограниченной алгебраической системой. Доказано, что любой линейный порядок является Σ-ограниченной системой и в наследственно конечных допустимых множествах над ним существуют универсальные Σ-функции.

Мы придерживаемся терминологии и обозначений по допустимым множествам из книги [1].

Будем пользоваться следующими обозначениями.

Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебраическая система конечной сигнатуры σ_0, основное множество которой обозначается через M, $M_0 \subseteq M$ — некоторое подмножество; $\sigma_1 = \{\sigma_0, \in, U^1, \varnothing\}$, $\sigma_i(M_0) = \sigma_i \cup \{m \mid m \in M_0\}$; $\langle \mathfrak{M}, M_0\rangle$ — обогащение системы $\mathfrak{M}$ до сигнатуры $\sigma_0(M_0)$; $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0)$ — множество всех Σ-формул сигнатуры $\sigma_1(M_0)$ без параметров; $F\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0)$ — множество всех функций в $\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0\rangle$, определенных формулами из $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0)$; $\mathfrak{F}^{M_0}$ — подмножество всех одноместных функций из $F\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0)$; $\mathfrak{M} \restriction \sigma'$ — обеднение системы $\mathfrak{M}$ до σ'.

Через X, Y, Z будем обозначать конечные последовательности из M такие, что если $X = \langle x_1, \dots, x_m\rangle$, то $x_i \neq x_j$, $i < j \le m$; $\mathrm{lh}\, X$ — длина последовательности X, $\mathrm{lh}\,\varnothing = 0$; $\mathrm{pr}_i(X)$ — i-я координата последовательности X; $\langle X\rangle$ — подсистема в $\langle \mathfrak{M}_0, M_0\rangle$, порожденная множеством $\{x_1, \dots, x_m\}$; $[\,]$ — нумерация всех конечных последовательностей натуральных чисел; $[\varnothing] = 0$; $\langle n\rangle$ — последовательность чисел номера n; $[n]_i$ — i-я координата последовательности номера n; $\mathrm{lh}\, n = \mathrm{lh}\langle n\rangle$; $\overline{m} = \langle 1, \dots, m\rangle$, если $m > 0$, и $\overline{0} = \varnothing$.

Пусть S_m — множество всех подстановок множества $\{1, \dots, m\}$, если $m > 0$, и S_0 — множество состоящее из тождественной подстановки множества $\{0\}$. Пусть даны последовательность X, $\mathrm{lh}\, X = m$, и $\sigma \in S_m$. Тогда $X_\sigma = \langle x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}\rangle$, $\varnothing_\sigma = \varnothing$. Если α — последовательность натуральных чисел номера n, $\mathrm{lh}\,\alpha = m$, и $\sigma \in S_m$, то $n_\sigma = [\alpha_\sigma]$.

Если $\tau = \tau(1, \dots, m) \in \mathbb{HF}(\omega)$ и $\mathrm{lh}\, n = m$, то $\tau(n) = \tau([n]_1, \dots, [n]_m)$, где $\omega = \langle \omega, +, \cdot, 0, 1\rangle$.

Если φ — отображение, а M — некоторое множество, то $\varphi \restriction M$ — ограничение φ на M.

Если $\Phi(x)$ — формула сигнатуры $\sigma_1(M_0)$ без параметров, то истинность $\Phi(a)$, где $a \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, означает, если не оговорено противное, истинность $\Phi(x)$ на элементе a в $\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0\rangle$.

Следуя [1], систему $\mathfrak{M}$ назовем *локально конструктивизируемой*, если для любого конечного подмножества M_0 $\exists$-теория системы $\langle \mathfrak{M}, M_0\rangle$ является вычислимо перечислимой. Систему $\mathfrak{M}$ назовем *локально конечной*, если каждая конечно порожденная подсистема конечна.

1. Σ-функция и вложение

Здесь приведены некоторые факты теории допустимых множеств, необходимые в дальнейшем.

Напомним, что носитель $\operatorname{sp} u$ элемента $u \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ определяется так: если $u \in M$, то $\operatorname{sp} u = \{u\}$. Пусть $u = \{x_1, \ldots, x_s\}$, тогда $\operatorname{sp} u = \bigcup\limits_{i=1}^{s} \operatorname{sp} x_i$. Элементами множества ω в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ являются ординалы. Поэтому $\operatorname{sp} n = \varnothing$ для любого $n \in \omega$. Нам также потребуется функция $\operatorname{sp}^* : \mathbb{HF}(\omega) \to \mathbb{HF}(\omega)$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, которая отличается от функции sp только тем, что элементы ω рассматриваются как праэлементы. Ранг $\operatorname{rank}(u)$ элемента $u \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ определяется так: если $u \in M$ или $u = \varnothing$, то $\operatorname{rank}(u) = 0$. Если $x = \{x_1, \ldots, x_s\}$, то $\operatorname{rank}(u) = \max\{\operatorname{rank}(x_1), \ldots, \operatorname{rank}(x_s)\} + 1$.

Лемма 1. *Для некоторого вычислимого подмножества $R \subseteq \omega$ существует однозначная вычислимая нумерация $\nu : \mathbb{HF}(\omega) \to R$ в $\mathbb{HF}(\varnothing)$.*

Действительно, положим $\nu(\varnothing) = 0$, $\nu(n) = 2^{n+1}$, $n \in \omega$. Если $a = \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ и $\nu(a_0) < \ldots < \nu(a_{n-1})$, то положим $\nu(a) = 3^{\nu(a_0)} 5^{\nu(a_1)} \ldots p_n^{\nu(a_{n-1})}$. □

В дальнейшем зафиксируем одну такую нумерацию ν. Через $\varkappa_n$ обозначим элемент номера n в $\mathbb{HF}(\omega)$. Пусть дан элемент $u \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Тогда существуют такие наименьшее n и последовательность $X = \langle x_1, \ldots, x_p \rangle$, $x_i \in M$, $x_i \neq x_j$, $i < j \leq p$, что $\operatorname{sp}^* \varkappa_n = \{1, \ldots, p\}$ и $u = \varkappa_n(x_1, \ldots, x_p)$. Такой элемент $\varkappa_n$ обозначим через $\varkappa_u$. Заметим, что если $\operatorname{sp} u = \varnothing$, то $\operatorname{sp} \varkappa_n = \varnothing$, и мы полагаем $p = 0$, $X = \varnothing$, т. е. $u = \varkappa_u(\varnothing)$.

Лемма 2. *Пусть даны элемент $u \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, $\operatorname{sp}^* \varkappa_u = \{1, \ldots, p\}$, и последовательности X, Y такие, что $\operatorname{lh} X = \operatorname{lh} Y = p$ и $u = \varkappa_u(X) = \varkappa_u(Y)$. Тогда существует такая перестановка $\sigma \in S_p$, что $X = Y_\sigma$.*

Действительно, носитель $\operatorname{sp} u$ элемента u определяется однозначно. Поэтому $\operatorname{sp} u = \operatorname{sp} X = \operatorname{sp} Y$. Отсюда получаем требуемое. □

Лемма 3. *Отношение $R(u, n) \rightleftharpoons (\varkappa_n = \varkappa_u)$ является Δ-отношением в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.*

Действительно, справедливы эквивалентности:

$$\begin{aligned} \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models R(u,n) \Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \exists m |\operatorname{sp} u| = m \ \&\ ((m = 0 \ \&\ u = \varkappa_n \ \&\\ \forall s < n(u \neq \varkappa_s)) \ \vee\ (m > 0 \ \&\ \exists X \in (\operatorname{sp} u)^m (\operatorname{sp}^* \varkappa_n = \{1, \ldots, m\}\\ \&\ u = \varkappa_n(X)) \ \&\ \forall s < n \forall Y \in (\operatorname{sp} u)^m (\operatorname{sp}^* \varkappa_s \neq \{1, \ldots, m\} \ \vee\ u \neq \varkappa_s(Y)))), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \neg R(u,n) \Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \exists m |\operatorname{sp} u| = m \ \&\ ((m = 0 \ \&\ (\exists s < n\\ u = \varkappa_s \vee u \neq \varkappa_n)) \vee\ (m > 0 \ \&\ (\exists s < n \exists X \in (\operatorname{sp} u)^m (\operatorname{sp}^* \varkappa_s = \{1, \ldots, m\}\\ \&\ u = \varkappa_s(X)) \ \vee\ \operatorname{sp}^* \varkappa_n \neq \{1, \ldots, m\} \ \vee\ \forall X \in (\operatorname{sp} u)^m \, u \neq \varkappa_n(X)))). \qquad \square \end{aligned}$$

В дальнейшем равенство $u = \varkappa(X)$, где $\varkappa \in \mathbb{HF}(\omega)$, $\operatorname{sp}^* \varkappa = \{1, \ldots, p\}$, $\operatorname{lh} X = p$, означает, что $\varkappa = \varkappa_u(1, \ldots, p)$, $X = \langle x_1, \ldots, x_p \rangle$, $x_i \neq x_j$, $1 \leq i < j \leq p$, и $u = \varkappa(x_1, \ldots, x_p)$.

Лемма 4. *Пусть дан элемент $u = \varkappa(X)$, $\operatorname{lh} X = p$. Тогда для любых $\tau \in \mathbb{HF}(\omega)$ и подстановки $\sigma \in S_p$*

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \varkappa(X) = \tau(X_\sigma) \Leftrightarrow \mathbb{HF}(\omega) \models \varkappa(\bar{p}) = \tau(\bar{p}_\sigma).$$

Доказательство. Пусть $\varkappa(X) = \tau(X_\sigma)$. Тогда $\operatorname{rank}(\varkappa) = \operatorname{rank}(\tau)$. Доказательство проведем индукцией по $\operatorname{rank}(\varkappa)$. Пусть $\operatorname{rank}(\varkappa) = 0$. Тогда $\varkappa = \tau = \varnothing$ или $\varkappa = \tau = 1$. Отсюда $\varkappa(\bar{p}) = \tau(\bar{p}_\sigma)$, $p = 0, 1$. Обратное тоже верно.

Пусть $\operatorname{rank}(\varkappa) = n+1$. Тогда

$$\varkappa(X) = \{\varkappa_1(X), \dots, \varkappa_s(X)\}, \quad \tau(X_\sigma) = \{\tau_1(X_\sigma), \dots, \tau_r(X_\sigma)\}.$$

Поэтому равенство $\varkappa(X) = \tau(X_\sigma)$ равносильно системе равенств

$$\varkappa_1(X) = \tau_{i_1}(X_\sigma), \dots, \varkappa_s(X) = \tau_{i_s}(X_\sigma),$$

$$\tau_1(X_\sigma) = \varkappa_{k_1}(X), \dots, \tau_r(X_\sigma) = \varkappa_{k_r}(X).$$

По индукции эта система эквивалентна следующей:

$$\varkappa_1(\bar{p}) = \tau_{i_1}(\bar{p}_\sigma), \dots, \varkappa_s(\bar{p}) = \tau_{i_s}(\bar{p}_\sigma), \quad \tau_1(\bar{p}_\sigma) = \varkappa_{k_1}(\bar{p}), \dots, \tau_r(\bar{p}_\sigma) = \varkappa_{k_r}(\bar{p}),$$

т. е. справедливо $\{\varkappa_1(\bar{p}), \dots, \varkappa_s(\bar{p})\} = \{\tau_1(\bar{p}_\sigma), \dots, \tau_r(\bar{p}_\sigma)\}$ или $\varkappa(\bar{p}) = \tau(\bar{p}_\sigma)$.

Аналогично доказывается обратное. $\square$

Замечание 1. Пусть даны элемент $u = \varkappa(X)$, $\operatorname{lh} X = p$, и последовательность Y такая, что $\operatorname{lh} Y = p$. Тогда для элемента $v = \varkappa(Y)$ справедливо $\varkappa = \varkappa_v$.

Действительно, пусть $v = \varkappa_v(Y_v) = \varkappa(Y)$ и $\nu(\varkappa_v) < \nu(\varkappa)$. Тогда $\operatorname{sp} v = \operatorname{sp} Y = \operatorname{sp} Y_v$ и $Y_v = Y_\sigma$ для некоторой $\sigma \in S_p$. Отсюда $\varkappa(Y) = \varkappa_v(Y_\sigma)$. Из леммы 4 следует, что $\varkappa(\bar{p}) = \varkappa_v(\bar{p}_\sigma)$ и $u = \varkappa(X) = \varkappa_v(X_\sigma)$. Отсюда $\nu(\varkappa) < \nu(\varkappa_v)$; противоречие. $\square$

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебраическая система сигнатуры σ_0 и $f : M^n \to M$ — n-местная функция, определенная $\exists$-формулой $\Phi(\bar{x}, y)$ сигнатуры σ_0 с параметрами из подмножества $M_0 \subseteq M$. Если $\mathfrak{M}_1$ — подсистема $\mathfrak{M}$ такая, что $\mathfrak{M}_1 \models \Phi(X, y)$, т. е. $f(X) = y$, где $X \in M_1^n$, $y \in M_1$, а φ — изоморфное вложение $\mathfrak{M}_1$ в $\mathfrak{M}$ такое, что $\varphi \restriction M_0 = \mathrm{id}$, то $f(\varphi X) = \varphi y$. В частности, если $\varphi X = X$, то $\varphi y = y$.*

Лемма 6. *Пусть $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ — наследственно конечное допустимое множество и $f : \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \to \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ — функция, определенная Σ-формулой $\Phi(x, y)$ с параметрами из подмножества $M_0 \subseteq M$. Если $\mathfrak{M}_1$ — подсистема $\mathfrak{M}$ такая, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_1) \models \Phi(u, v)$, т. е. $f(u) = v$, где $u, v \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_1)$, $u = \varkappa(X), v = \tau(Y)$, а φ_0 — изоморфное вложение $\mathfrak{M}_1$ в $\mathfrak{M}$ такое, что $\varphi_0 \restriction M_0 = \mathrm{id}$, то существует изоморфное вложение $\varphi : \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_1) \to \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, продолжающее φ_0, такое, что*

$$f\left(\varkappa(\varphi X)\right) = \tau(\varphi Y).$$

Действительно, вложение φ_0 можно продолжить естественным образом до вложения $\varphi : \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_1) \to \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, положив $\varphi(\varkappa(X)) = \varkappa(\varphi_0 X)$. Отсюда по лемме 5 имеем $f(\varkappa(\varphi_0 X)) = f(\varphi(\varkappa(X)) = \varphi\tau(Y) = \tau(\varphi_0 Y) = \tau(\varphi Y)$. $\square$

2. Σ-функции и Σ-ограниченная алгебраическая система

В данном разделе введено понятие Σ-ограниченной алгебраической системы $\mathfrak{M}$ относительно конечного подмножества $M_0 \subseteq M$ и доказано, что каждая Σ-функция в $\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0 \rangle$ однозначно определяется некоторой числовой Σ-функцией в $\mathbb{HF}(\omega)$ и некоторым Σ-подмножеством.

Определение 1. Пусть для локально конечной и локально конструктивизируемой алгебраической системы $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ_0 и конечного подмножества M_0 справедливы следующие условия.

1. Определено понятие базы для любого конечного подмножества $X \subseteq M$. Предикат $\mathfrak{B}_0^{M_0}(X, Y) \rightleftharpoons$ «конечная последовательность $Y \in M^{<\omega}$ есть база

подмножества X» является Δ-предикатом сигнатуры $\sigma_1(M_0)$ в $\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0\rangle$. Если Y^0, Y^1 — две базы подмножества X, то $X \subseteq \langle Y^\varepsilon\rangle$, $\varepsilon = 0,1$, и либо $\mathfrak{B}_0^{M_0}(\operatorname{sp} Y^0, Y^1)$, либо $\mathfrak{B}_0^{M_0}(\operatorname{sp} Y^1, Y^0)$ истинна. Последовательность Y называется *базой*, если $\mathfrak{B}^{M_0}(Y) \rightleftharpoons \mathfrak{B}_0^{M_0}(\operatorname{sp} Y, Y)$ истинна.

2. Для каждой базы Y определено число $\chi^{M_0}(Y)$, называемое *характеристикой базы* Y, такое, что $\chi^{M_0}(Y)$ является Σ-функцией сигнатуры $\sigma_1(M_0)$ в $\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0\rangle$. Множество всех характеристик Ξ^{M_0} является вычислимым подмножеством ω. Существует Δ-предикат $\operatorname{Cor}^{M_0}(z, Y, n)$ сигнатуры $\sigma_1(M_0)$ такой, что справедлива эквивалентность

$$z \in \langle Y\rangle \Leftrightarrow \langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0\rangle \models \exists! n(n \neq 0 \ \& \ \operatorname{Cor}^{M_0}(z, Y, n)).$$

Число n назовем *координатой* элемента z относительно базы Y. Если элементы не равны, то и их координаты не равны.

3. Пусть даны базы Y^ε одинаковой характеристики χ и конечные подсистемы $\mathfrak{M}^\varepsilon \supseteq \langle Y^\varepsilon\rangle$, $\varepsilon < 2$. Тогда существуют база Y^2 и подсистема $\mathfrak{M}^2 \supseteq \langle Y^2\rangle$, для которых справедливы следующие условия:

(1) $\chi = \chi(Y^2)$;

(2) существуют вложения $\varphi_0^\varepsilon : \mathfrak{M}^\varepsilon \to \mathfrak{M}^2$ такие, что $\varphi^\varepsilon \upharpoonright \langle M_0\rangle = \mathrm{id}$, $\varphi^\varepsilon Y^\varepsilon = Y^2$, где вложения $\varphi^\varepsilon : \mathbb{HF}(\mathfrak{M}^\varepsilon) \to \mathbb{HF}(\mathfrak{M}^2)$ естественным образом продолжают φ_0^ε.

В частности, любые две базы одной и той же характеристики имеют одинаковую длину.

4. Для любой частичной функции $f : \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \to \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, определенной Σ-формулой с параметрами из M_0, справедливо: если $u \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ и $u \in \delta f$, то существует такая база Y подмножества $\operatorname{sp} u$, что $\operatorname{sp} f(u) \subseteq \langle Y\rangle$.

Тогда $\mathfrak{M}$ назовем Σ-*ограниченной алгебраической системой относительно* M_0. Если для любого конечного подмножества M_0 существует конечное подмножество $M_0' \supseteq M_0$ такое, что $\mathfrak{M}$ Σ-ограничена относительно M_0', то $\mathfrak{M}$ назовем Σ-*ограниченной алгебраической системой*.

В дальнейшем у предикатов и функций, где это не вызывает недоразумений, будем опускать верхние индексы M_0. Продолжим предикат Cor на множество последовательностей из $\langle Y\rangle$, где Y — база. Пусть $Z = \langle z_1, \dots, z_p\rangle$. Если $Z \neq \varnothing$, то число $n = [n_1, \dots, n_p]$, где n_i — координата z_i, назовем *координатой* Z относительно Y. Координата пустой последовательности есть нуль. Очевидно, что предикат Cor является Δ-предикатом.

Лемма 7. *Пусть даны базы Y^0, Y^1 одной и той же характеристики χ. Тогда отображение $y_i^0 \mapsto y_i^1$ продолжается до изоморфизма $\varphi : \mathbb{HF}(\langle Y^0\rangle) \to \mathbb{HF}(\langle Y^1\rangle)$ и справедливы следующие условия.*

1. *Для любых Δ-предиката $\Phi(\bar{x})$, $\bar{x} = \langle x_1, \dots, x_n\rangle$, сигнатуры $\sigma_1(M_0)$ и последовательности $\bar{u}^0 = \langle u_1^0, \dots, u_n^0\rangle$, $u_i^0 \in \mathbb{HF}(\langle Y^0\rangle)$, $1 \leq i \leq n$, верно*

$$\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0\rangle \models \Phi(\bar{u}^0) \Leftrightarrow \langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0\rangle \models \Phi(\varphi\bar{u}^0). \tag{1}$$

2. *Для любых функции $f(x)$, определимой Σ-формулой сигнатуры $\sigma_1(M_0)$, и элемента $u \in \mathbb{HF}(\langle Y^0\rangle)$ верно*

$$\text{если } f(u) = v,\ v \in \mathbb{HF}(\langle Y^0\rangle) \text{ и } \varphi u \in \delta f,\ \text{ то } f(\varphi u) = \varphi v.$$

Доказательство. По условию 3 определения 1 существуют база Y^2 характеристики χ и подсистема $\mathfrak{M}^2$ такие, что найдутся изоморфные вложения

$$\varphi^\varepsilon : \mathbb{HF}(\langle Y^\varepsilon\rangle) \to \mathbb{HF}(\mathfrak{M}^2),\ \varphi^\varepsilon Y^\varepsilon = Y^2,\ \varphi^\varepsilon \upharpoonright \langle M_0\rangle = \mathrm{id}\,.$$

Отсюда $\varphi \rightleftharpoons (\varphi^1)^{-1}\varphi^0$ — изоморфизм $\mathbb{HF}(\langle Y^0\rangle)$ на $\mathbb{HF}(\langle Y^1\rangle)$.

Допустим противное, т. е. эквивалентность (1) неверна. Тогда существует конечно порожденная подсистема $\mathfrak{M}^* \supseteq \langle Y^\varepsilon\rangle$, $\varepsilon < 2$, такая, что

$$\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}^*), M_0\rangle \models \Phi(\bar u^0) \ \&\ \neg\Phi(\varphi\bar u^0).$$

По условию 3 определения 1 существуют база Y^3 характеристики χ и подсистема $\mathfrak{M}^3$ такие, что найдутся изоморфные вложения

$$\varphi_1^\varepsilon : \mathbb{HF}(\mathfrak{M}^*) \to \mathbb{HF}(\mathfrak{M}^3), \quad \varphi_1^\varepsilon Y^\varepsilon = Y^3, \quad \varphi_1^\varepsilon \restriction \langle M_0\rangle = \mathrm{id}\,.$$

Отсюда $\varphi = \left(\varphi_1^1\right)^{-1}\varphi_1^0 \restriction \mathbb{HF}(\langle Y^0\rangle)$ и справедливо

$$\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0\rangle \models \Phi\left(\varphi_1^0\bar u^0\right) \ \&\ \neg\Phi\left(\varphi_1^1\varphi\bar u^0\right).$$

Поскольку $\varphi_1^0\bar u^0 = \varphi_1^1\varphi\bar u^0$, получаем противоречие. Аналогично доказывается обратная импликация.

Так как отношение $f(\varphi u) \neq \varphi v$ является Σ-предикатом, то доказательство п. 2 аналогично доказательству п. 1. $\square$

Следствие 1. *Следующие равенства и эквивалентность:*

$$K^0(\chi) = \{n \mid \langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0\rangle \models \exists Z \exists Y (\mathfrak{B}_0(Z, Y) \ \&\ \chi = \chi(Y) \ \&\, \mathrm{Cor}(Z, Y, n)\},$$

$$K^1(\chi) = \{n \mid \langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0\rangle \models \exists Z \exists Y (\mathfrak{B}(Y) \ \&\ \chi = \chi(Y) \ \&\, \mathrm{Cor}(Z, Y, n)\},$$

$$\Pi(\chi^0, \chi^1) = \{m \mid \langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0\rangle \models \exists Y^0 \exists Y^1 (\mathfrak{B}(Y^0) \ \&\ \chi(Y^0) \\ = \chi^0 \ \&\mathfrak{B}_0(\mathrm{sp}\, Y^0, Y^1) \ \&\ \chi(Y^1) = \chi^1 \ \&\ \mathrm{Cor}(Y^0, Y^1, m))\},$$

$$b(\chi^0, \chi^1, m, n) = s \Leftrightarrow \langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0\rangle \models \exists Y^0 \exists Y^1 \exists Z (\mathfrak{B}(Y^0) \ \&\ \chi(Y^0) = \chi^0 \ \& \\ \mathfrak{B}_0(\mathrm{sp}\, Y^0, Y^1) \ \&\ \chi(Y^1) = \chi^1 \ \&\ \mathrm{Cor}(Y^0, Y^1, m) \ \&\ \mathrm{Cor}(Z, Y^0, n) \ \&\, \mathrm{Cor}(Z, Y^1, s)).$$

задают частично вычислимые функции $K^\varepsilon(\chi)$, $\Pi(\chi^0, \chi^1)$, $b(\chi^0, \chi^1, m, n)$, $\varepsilon < 2$, соответственно, и области определения данных функций — вычислимые множества.

Доказательство. Из леммы 7 следует, что для любой базы Y^1 характеристики χ^1 справедливы равенство и эквивалентность:

$$\Pi(\chi^0, \chi^1) = \{m \mid \langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0\rangle \models \exists Y^0 \in \langle Y^1\rangle (\mathfrak{B}(Y^0) \ \&\ \chi(Y^0) \\ = \chi^0 \ \&\mathfrak{B}_0(\mathrm{sp}\, Y^0, Y^1) \ \&\ \mathrm{Cor}(Y^0, Y^1, m))\},$$

$$b(\chi^0, \chi^1, m, n) = s \Leftrightarrow \langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0\rangle \models \exists Y^0 \in \langle Y^1\rangle \exists Z \in \langle Y^1\rangle (\mathfrak{B}(Y^0) \\ \&\ \chi(Y^0) = \chi^0 \ \&\ \mathfrak{B}_0(\mathrm{sp}\, Y^0, Y^1) \ \&\ \mathrm{Cor}(Y^0, Y^1, m) \ \&\ \mathrm{Cor}(Z, Y^0, n) \ \&\, \mathrm{Cor}(Z, Y^1, s)).$$

Аналогично для K^ε, $\varepsilon < 2$.

Отсюда и локальной конечности системы $\mathfrak{M}$ следует, что для любых характеристик χ^0, χ^1 значения функций $K^\varepsilon(\chi^0)$, $\Pi(\chi^0, \chi^1)$ принадлежат $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, а функция b корректно определена.

Так как $\delta K^\varepsilon = \Xi$, а $\delta\Pi$ — Δ-подмножество Ξ^2 и $\mathfrak{M}$ локально конструктивизируема, то δK^ε, $\delta\Pi$ являются вычислимыми множествами. Отсюда легко следует вычислимость множества δb. $\square$

Если m, Y^0, Y^1 удовлетворяют бескванторной части формулы, определяющей функцию Π, то число m будем называть *переходом* от базы Y^0 к базе Y^1. В дальнейшем $\langle\mathfrak{M}, M_0\rangle$ обозначает систему, Σ-ограниченную относительно M_0, а f — Σ-функцию в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, определенную Σ-формулой с параметрами из M_0. Определим класс $\mathfrak{H}$ частичных одноместных числовых Σ-функций в $\mathbb{HF}(\omega)$. Каждой Σ-функции f в $\langle\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0\rangle$ сопоставим функцию $h \in \mathfrak{H}$. Обратно, по каждой функции $h \in \mathfrak{H}$ определим Σ-функцию f_h в $\langle\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0\rangle$. Это соответствие почти взаимно однозначно, т. е. график функции f_h — расширение графика функции f. Класс $\mathfrak{H}$ состоит из всех частичных Σ-функций h в $\mathbb{HF}(\omega)$ таких, что графики Γ_h содержатся в множестве $\{\langle\langle\varkappa,\chi,n\rangle,\langle\tau,s\rangle\rangle \mid \operatorname{sp}\varkappa = \{1,\dots,\operatorname{lh} n\},\ \chi\in\Xi,\ n\in K^0(\chi), \operatorname{sp}\tau = \{1,\dots,\operatorname{lh} s\},\ s\in K^1(\chi)\}$ и удовлетворяют некоторым условиям «корректности». Условия «корректности» выражаются следующими формулами $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ в сигнатуре допустимого множества $\mathbb{HF}(\omega)$, обогащенной функциональным символом h (вместо $h(\langle x,y,z\rangle)$ будем писать $h(x,y,z)$).

1^0. $\mathfrak{A}_1^*(h,\varkappa,\chi,n) \rightleftharpoons \exists p\forall\sigma\in S_p(\operatorname{sp}\varkappa = \operatorname{sp}(\bar p)\ \&\ \varkappa(\bar p) = \varkappa(\bar p_\sigma)\ \&\ \langle\varkappa,\chi,n\rangle \in \delta h \to h(\varkappa,\chi,n) = h(\varkappa,\chi,n_\sigma))$, $\mathfrak{A}_1(h) \rightleftharpoons \forall\varkappa\forall\chi\forall n\ \mathfrak{A}_1^*(h,\varkappa,\chi,n)$.

2^0. $\mathfrak{A}_2^*(h,\varkappa,\chi^0,\chi^1,\tau,n,s) \rightleftharpoons \exists q\forall m\in\Pi(\chi^0,\chi^1)[(q = \operatorname{lh}(\langle s\rangle)\ \&\ h(\varkappa,\chi^0,n) = \langle\tau,s\rangle\ \&\ b(\chi^0,\chi^1,m,n)\in K^0(\chi^1)) \to \exists\sigma_0\in S_q\forall\sigma\in S_q(\tau(\bar q) = \tau(\bar q_{\sigma_0})\ \&\ (\tau(\bar q) = \tau(\bar q_\sigma) \to b(\chi^0,\chi^1,m,s)_{\sigma_0} \le b(\chi^0,\chi^1,m,s)_\sigma)\ \&\ h(\varkappa,\chi^1,b(\chi^0,\chi^1,m,n)) = \langle\tau, b(\chi^0,\chi^1,m,s)_{\sigma_0}\rangle)]$, $\mathfrak{A}_2(h) \rightleftharpoons \forall\varkappa\forall\chi^0\forall\chi^1\forall\tau\forall n\forall s\ \mathfrak{A}_2^*(h,\varkappa,\chi^0,\chi^1,\tau,n,s)$.

Введем также следующую формулу Ψ сигнатуры $\sigma_1(M_0,h)$, определяющую Σ-функцию f_h.

3^0. $\Psi(u,v,h) \rightleftharpoons \exists Y\exists X\exists Z\exists\varkappa\exists\chi\exists n\exists\tau\exists s(\mathfrak{B}_0(\operatorname{sp} u, Y) \& u = \varkappa(X) \& \operatorname{Cor}(X,Y,n)\ \& \operatorname{Cor}(Z,Y,s)\ \&\ \chi = \chi(Y) \& h(\varkappa,\chi,n) = \langle\tau,s\rangle \& v = \tau(Z))$.

Предложение 1. *Пусть алгебраическая система $\mathfrak{M}$ и ее конечное подмножество M_0 удовлетворяют условиям* 1–3 *определения* 1 *и $h\in\mathfrak{H}$. Тогда формула $\Psi(u,v,h)$ определяет некоторую Σ-функцию f_h в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.*

Доказательство. Пусть $\langle\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0, h\rangle \models \Psi(u,v^\varepsilon)$, $\varepsilon < 2$.

Докажем, что $v^0 = v^1$. Пусть Y^ε, X^ε, Z^ε, $\varkappa^\varepsilon$, χ^ε, n^ε, τ^ε, s^ε такие, что

$$u = \varkappa^\varepsilon(X^\varepsilon), \tag{2}$$

$$\mathfrak{B}_0(\operatorname{sp} u, Y^\varepsilon), \tag{3}$$

$$\chi^\varepsilon = \chi(Y^\varepsilon),$$

$$\operatorname{Cor}(X^\varepsilon, Y^\varepsilon, n^\varepsilon),\ \operatorname{Cor}(Z^\varepsilon, Y^\varepsilon, s^\varepsilon), \tag{4}$$

$$h(\varkappa^\varepsilon,\chi^\varepsilon,n^\varepsilon) = \langle\tau^\varepsilon, s^\varepsilon\rangle, \tag{5}$$

$$v^\varepsilon = \tau^\varepsilon(Z^\varepsilon). \tag{6}$$

Учитывая определение $\varkappa_u$, равенство (2) и леммы 2, 4, имеем $\varkappa^0 = \varkappa^1 \rightleftharpoons \varkappa$ и существует подстановка $\sigma^0 \in S_p$, где $p = \operatorname{lh} X^0$, такая, что

$$X^1 = X^0_{\sigma^0}, \quad \varkappa(\bar p) = \varkappa(\bar p_{\sigma^0}). \tag{7}$$

В силу (3) справедливо либо $\mathfrak{B}_0(\operatorname{sp} Y^0, Y^1)$, либо $\mathfrak{B}_0(\operatorname{sp} Y^1, Y^0)$. Пусть для определенности существует переход m от Y^0 к Y^1, т. е.

$$\operatorname{Cor}(Y^0, Y^1, m). \tag{8}$$

Поэтому из (4), (7) по следствию 1 имеем $\operatorname{Cor}(X^1, Y^1, b(\chi^0,\chi^1,m,n^0)_{\sigma^0})$.

Отсюда и из (4) по условию 2 определения 1 получаем

$$n^1 = b(\chi^0, \chi^1, m, n^0)_{\sigma^0}. \tag{9}$$

Из (5) при $\varepsilon = 0$ и истинности $\mathfrak{A}_2(h)$ в $\mathbb{HF}(\omega)$ следует существование подстановки $\sigma^1 \in S_{q^0}$, где $q^0 = |\operatorname{sp}\tau^0|$, такой, что справедливо

$$\tau^0(\bar q^0) = \tau^0(\bar q^0_{\sigma^1}), \tag{10}$$

$$h(\varkappa, \chi^1, b(\chi^0, \chi^1, m, n^0)) = \langle \tau^0, b(\chi^0, \chi^1, m, s^0)_{\sigma^1}\rangle.$$

Отсюда и из (7) в силу истинности $\mathfrak{A}_1(h)$ в $\mathbb{HF}(\omega)$ получим

$$h(\varkappa, \chi^1, b(\chi^0, \chi^1, m, n^0)_{\sigma^0}) = \langle \tau^0, b(\chi^0, \chi^1, m, s^0)_{\sigma^1}\rangle.$$

Тогда ввиду (9) $h(\varkappa, \chi^1, n^1) = \langle \tau^1, s^1\rangle = \langle \tau^0, b(\chi^0, \chi^1, m, s^0)_{\sigma_1}\rangle$.

Отсюда

$$\tau^0 = \tau^1,\ s^1 = b(\chi^0, \chi^1, m, s^0)_{\sigma^1}. \tag{11}$$

Из (4), (8) по следствию 1 вытекает истинность $\operatorname{Cor}(Z^0, Y^1, b(\chi^0, \chi^1, m, s^0))$, а из (4), (11) — $\operatorname{Cor}(Z^1, Y^1, b(\chi^0, \chi^1, m, s^0)_{\sigma^1})$. Следовательно, $Z^1 = Z^0_{\sigma^1}$. Отсюда из (6), (10), (11) имеем $v^0 = v^1$, т. е. формула $\Psi(u, v, h)$ определяет некоторую функцию f_h в $\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0\rangle$.

Из условий 1–3 определения 1 и условий предложения следует, что $\Psi(u, v, h)$ — Σ-формула. □

Пусть семейство $\mathfrak{H}$ и формула Ψ такие, как определены перед предложением 1. Тогда справедлива

Теорема 1. *Пусть алгебраическая система $\mathfrak{M}$ Σ-ограничена относительно конечного подмножества M_0 и дана функция $f \in \mathfrak{F}^{M_0}$, определимая Σ-формулой с параметрами из M_0. Тогда существует функция $h \in \mathfrak{H}$ и формула $\Psi(u, v, h)$ в $\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0\rangle$ определяет функцию f_h, которая является расширением функции f.*

Доказательство. По функции f определим функцию h. Пусть дана последовательность $\xi = \langle \varkappa, \chi, n\rangle$. Введем формулу

$$\Phi_f(\xi, \tau, s, Y) \rightleftharpoons \exists X \exists Z \exists q (\operatorname{Cor}(X, Y, n)\ \&\ \mathfrak{B}_0(\operatorname{sp} X, Y)\ \&\ \operatorname{Cor}(Z, Y, s) \&\ \chi = \chi(Y)$$
$$\&\ f(\varkappa(X)) = \tau(Z)\ \&\ \operatorname{sp}^* \tau = \{1, \dots, q\}\ \&\ \forall \sigma \in S_q (\tau(\bar q) = \tau(\bar q_\sigma) \to s \le s_\sigma)).$$

Значение $h(\xi)$ определим эквивалентностью

$$h(\xi) = \langle \tau, s\rangle \Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \exists Y \Phi_f(\xi, \tau, s, Y).$$

Покажем, что h — корректно определенная функция. Пусть Y^ε, τ^ε, s^ε, $\varepsilon < 2$, такие, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Phi_f(\xi, \tau^\varepsilon, s^\varepsilon, Y^\varepsilon)$. Тогда $\chi = \chi(Y^\varepsilon)$ и существуют последовательности X^ε, Z^ε такие, что

$$\operatorname{Cor}(X^\varepsilon, Y^\varepsilon, n), \quad \operatorname{Cor}(Z^\varepsilon, Y^\varepsilon, s^\varepsilon), \tag{12}$$

$$f(\varkappa(X^\varepsilon)) = \tau^\varepsilon(Z^\varepsilon).$$

Из леммы 7 следует, что существует изоморфизм $\varphi : \mathbb{HF}(\langle Y^0\rangle) \to \mathbb{HF}(\langle Y^1\rangle)$ такой, что $\varphi(Y^0) = Y^1$ и $f(\varkappa(\varphi X^0)) = \tau^0(\varphi Z^0)$.

Из (12) и леммы 7 получаем, что $\varphi X^0 = X^1$, откуда

$$\tau^1(Z^1) = \tau^0(\varphi Z^0). \tag{13}$$

Отсюда по замечанию 1 имеем, что $\tau^0 = \tau^1 \rightleftharpoons \tau$, следовательно, $q^0 = q^1 = q$. По леммам 2 и 4 из (13) вытекает, что существует такая подстановка $\sigma \in S_q$, что $\tau(\bar{q}) = \tau(\bar{q}_\sigma)$, $Z^1 = (\varphi Z^0)_\sigma$.

Поскольку $\mathrm{Cor}(\varphi Z^0, Y^1, s^0)$, из (12) имеем $s^1 = s^0_\sigma$.

Пусть $s^1 < s^0$. Тогда $s^0_\sigma < s^0$; противоречие. Аналогично приходим к противоречию, если $s^0 < s^1$. Значит, $s^0 = s^1$.

Таким образом, h — корректно определенная функция. Так как $h : \mathbb{HF}(\omega) \to \mathbb{HF}(\omega)$ является Σ-функцией в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, из локальной конструктивизируемости системы $\mathfrak{M}$ вытекает, что h — Σ-функция и в $\mathbb{HF}(\omega)$.

Докажем истинность $\mathfrak{A}_1(h)$ в $\mathbb{HF}(\omega)$.

Пусть даны числа p, n, характеристика χ и элементы $\varkappa \in \mathbb{HF}(\{1, \dots, p\})$ и $\sigma \in S_p$ такие, что $\mathrm{lh}(\langle n \rangle) = p$ и

$$\varkappa(\bar{p}) = \varkappa(\bar{p}_\sigma), \tag{14}$$

$$h(\varkappa, \chi, n) = \langle \tau, s \rangle. \tag{15}$$

Докажем, что

$$h(\varkappa, \chi, n_\sigma) = \langle \tau, s \rangle. \tag{16}$$

Из (15) по определению функции h следует, что существуют база Y и последовательности X, Z такие, что

$$\chi = \chi(Y), \tag{17}$$

$$\mathrm{Cor}(X, Y, n),\ \mathrm{Cor}(Z, Y, s), \tag{18}$$

$$f(\varkappa(X)) = \tau(Z). \tag{19}$$

Из (18) вытекает

$$\mathrm{Cor}(X_\sigma, Y, n_\sigma). \tag{20}$$

Из (14) по лемме 4 имеем $\varkappa(X) = \varkappa(X_\sigma)$, откуда в силу (19) получим $f(\varkappa(X_\sigma)) = \tau(Z)$. Отсюда и из (17), (18), (20) по определению функции h следует (16), т. е. формула $\mathfrak{A}_1(h)$ истинна в $\mathbb{HF}(\omega)$.

Докажем истинность $\mathfrak{A}_2(h)$ в $\mathbb{HF}(\omega)$. Пусть равенство (15) справедливо. Тогда по определению функции h существуют база Y^0 и последовательности X^0, Z^0 такие, что $\chi^0 = \chi(Y^0)$,

$$\mathrm{Cor}(X^0, Y^0, n), \quad \mathrm{Cor}(Z^0, Y^0, s), \tag{21}$$

$$f\left(\varkappa(X^0)\right) = \tau(Z^0). \tag{22}$$

Пусть $\chi^1 \in \Xi$ и $m \in \Pi(\chi^0, \chi^1)$. Из определения функций Π и леммы 7 следует существование базы Y^1 такой, что m является переходом от Y^0 к Y^1 и $\chi(Y^1) = \chi^1$.

Отсюда и из (21) по следствию 1 получим

$$\mathrm{Cor}(X^0, Y^1, b(\chi^0, \chi^1, m, n)), \quad \mathrm{Cor}(Z^0, Y^1, b(\chi^0, \chi^1, m, s)). \tag{23}$$

Так как $b(\chi^0, \chi^1, m, n) \in K^0(\chi^1)$, из (22), (23) по определению функции h имеем $h(\varkappa, \chi^1, b(\chi^0, \chi^1, m, n)) = \langle \tau, s^1 \rangle$, где s^1 определяется из условия: существует такая подстановка $\sigma^0 \in S_q$, где $q = |\mathrm{sp}\,\tau|$, $\tau(\bar{q}) = \tau(\bar{q}_{\sigma^0})$, что $s^1 = b(\chi^0, \chi^1, m, s)_{\sigma^0}$, и для любой подстановки $\sigma \in S_q$ из равенства $\tau(\bar{q}) = \tau(\bar{q}_\sigma)$ следует $s^1 \leq b(\chi^0, \chi^1, m, s)_\sigma$. Отсюда получаем истинность формулы $\mathfrak{A}_2(h)$ в $\mathbb{HF}(\omega)$.

Из истинности формул $\mathfrak{A}_i(h)$, $i = 1, 2$, в $\mathbb{HF}(\omega)$ и предложения 1 следует, что формула $\Psi(u, v)$ определяет некоторую Σ-функцию f_h в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Докажем, что f_h — расширение функции f.

Предположим, что $f(u) = v$. Покажем, что $f_h(u) = v$. Для этого нужно доказать, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Psi(u, v)$.

Пусть число p, элемент $\varkappa \in \mathbb{HF}(\bar{p})$ и последовательность $X \in M^p$ такие, что

$$u = \varkappa(X). \tag{24}$$

По условию 4 определения 1 существует база Y подмножества $\operatorname{sp} X$ такая, что $\operatorname{sp} v \subseteq \langle Y \rangle$. Пусть характеристика базы Y равна χ и числа n, s, q, элемент $\tau \in \mathbb{HF}(\bar{q})$, последовательность Z такие, что

$$\begin{gathered} \operatorname{Cor}(X, Y, n), \quad \operatorname{Cor}(Z, Y, s),\ v = \tau(Z), \\ \forall \sigma \in S_q(\tau(\bar{q}) = \tau(\bar{q}_\sigma) \to s \le s_\sigma). \end{gathered} \tag{25}$$

Тогда из (24), (25) следует, что истинна $\Psi(u, v, h)$. Стало быть, $f_h(u) = v$ и $f = f_h \restriction \delta f$. $\square$

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{M}$ — Σ-ограниченная алгебраическая система относительно конечного подмножества $M_0 \subseteq M$. Тогда семейство $\mathfrak{F}^{M_0}$ всех одноместных функций, определяемых в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ Σ-формулой сигнатуры $\sigma_1(M_0)$ без параметров, совпадает с семейством*

$$\overline{\mathfrak{F}}^{M_0} \rightleftharpoons \{f_h \restriction E \mid h \in \mathfrak{H},\ E \in \Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0)\}.$$

Так как формулы $\mathfrak{A}_j$ зависят от M_0, семейство $\mathfrak{H}$ также зависит от M_0. Поэтому в следствии 3 $\mathfrak{H}$ обозначается через $\mathfrak{H}^{M_0}$.

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{M}$ — Σ-ограниченная алгебраическая система и для любого конечного подмножества $M_0 \subseteq M$ справедливы условия 1–3 определения 1. Тогда семейство $\mathfrak{F}$ всех одноместных Σ-функций в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ совпадает с семейством*

$$\overline{\mathfrak{F}} \rightleftharpoons \{f_h \restriction E \mid h \in \mathfrak{H}^{M_0},\ E \in \Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0),\ M_0 \in P_\omega(M)\},$$

где $P_\omega(M)$ — множество всех конечных подмножеств M.

Доказательство. Действительно, по предложению 1 $\overline{\mathfrak{F}} \subseteq \mathfrak{F}$. Докажем обратное включение. Пусть $f \in \mathfrak{F}$ и M_0 — множество всех параметров формулы, определяющей график функции f. Тогда существует конечное множество $M_0' \supseteq M_0$ такое, что $\mathfrak{M}$ Σ-ограничена относительно M_0' и $f \in \mathfrak{F}^{M_0'}$. Отсюда по теореме 1 существует Σ-функция h в $\mathbb{HF}(\omega)$ такая, что в $\mathbb{HF}(\omega)$ истинны формулы $\mathfrak{A}_j^{M_0'}(h)$, $j = 1, 2$, и $f = f_h \restriction \delta f$. $\square$

3. Универсальные функции

Здесь дано необходимое и достаточное условие существования универсальной Σ-функции в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ для Σ-ограниченной системы $\mathfrak{M}$.

Пусть для алгебраической системы $\mathfrak{M}$ и ее конечного подмножества M_0 выполнены условия 1–3 определения Σ-ограниченной системы.

Покажем, что в $\mathbb{HF}(\omega)$ существует универсальная Σ-функция для семейства $\mathfrak{H}$. Для этого докажем следующий аналог предложения 3.1.5 из [1].

Лемма 8. *Пусть $\mathbb{A}$ — резольвентная KPU-модель, $\nu : B \to S \subseteq \Sigma(\mathbb{A})$ — вычислимая $\mathbb{A}$-нумерация некоторого семейства S Σ-подмножеств $\mathbb{A}$. Если семейство S замкнуто относительно подмножеств (т. е. $R \in S$, $Q \in \Sigma(\mathbb{A})$, $Q \subseteq R \Rightarrow Q \in S$), $P(x_0, \dots, x_n)$ — произвольный Δ-предикат, $S_0 \rightleftharpoons \{R \mid R \in S,\ \mathbb{A} \models \forall x_0 \in R \dots \forall x_n \in RP(x_0, \dots, x_n)\}$, то существует вычислимая $\mathbb{A}$-нумерация $\nu_0 : B \to S_0$ такая, что $b \in B$, $\nu b \in S_0$ влечет $\nu_0 b = \nu b$.*

Доказательство. Пусть $f : \mathrm{Ord}(\mathbb{A}) \to \mathbb{A}^*$ — резольвента для $\mathbb{A}$, где $\hat{a} = \{b \mid b \in A,\ \mathbb{A} \models b \in a\}$, $\mathbb{A}^* = \{\hat{a} \mid a \in A,\ \mathbb{A} \models \neg U(a)\}$. Пусть $\Psi(x, y, z, u)$ — Δ_0-формула и $a_0 \in A$ такой, что

$$a \in \nu(b) \Leftrightarrow \mathbb{A} \models \exists z \Psi(a, b, z, a_0).$$

Для $b \in B$ и $\alpha \in \mathrm{Ord}(\mathbb{A})$ определим $\nu(b)_\alpha$ таким образом:

$$\nu(b)_\alpha \rightleftharpoons \{c \mid c \in f(\alpha),\ \mathbb{A} \models \exists z \in f(\alpha) \Psi(c, b, z, a_0)\}.$$

Тогда $\nu(b)_\alpha \subseteq \nu(b)_\beta \subseteq \nu(b)$ для всех $\alpha < \beta \in \mathrm{Ord}(\mathbb{A})$ и

$$\nu(b) = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}(\mathbb{A})} \nu(b)_\alpha,$$

$\nu(b)_\alpha \in \mathbb{A}^*$, т. е. функция $\alpha \mapsto \nu(b)_\alpha$ является резольвентой для $\nu(b)$.

Пусть Δ_0-формулы Φ_0, Φ_1 такие, что

$$\mathbb{A} \models \neg P(\bar{x}) \Leftrightarrow \mathbb{A} \models \exists z \Phi_0(z, \bar{x}), \quad \mathbb{A} \models P(\bar{x}) \Leftrightarrow \mathbb{A} \models \exists z \Phi_1(z, \bar{x}).$$

Для любых $b \in B$ и $\alpha, \gamma \in \mathrm{Ord}(\mathbb{A})$ положим

$$\Theta_0(b, \alpha, \gamma) \rightleftharpoons \exists c_0 \in \nu(b)_\alpha \dots \exists c_n \in \nu(b)_\alpha \exists z \in f(\gamma) \Phi_0(z, \bar{c}),$$

$$\Theta_1(b, \alpha, \gamma) \rightleftharpoons \forall c_0 \in \nu(b)_\alpha \dots \forall c_n \in \nu(b)_\alpha \exists z \in f(\gamma) \Phi_1(z, \bar{c}).$$

Справедливы следующие свойства.

1^0. Для любых b, α существует такое γ, что $\mathbb{A} \models \Theta_0(b, \alpha, \gamma) \vee \Theta_1(b, \alpha, \gamma)$.

2^0. Если для некоторого γ верно $\mathbb{A} \models \Theta_0(b, \alpha, \gamma)$, то для всех $\alpha_0 \geq \alpha$, $\gamma_0 \geq \gamma$ верно $\mathbb{A} \models \Theta_0(b, \alpha_0, \gamma_0)$.

3^0. Если для некоторого γ верно $\mathbb{A} \models \Theta_1(b, \alpha, \gamma)$, то для всех $\alpha_0 \leq \alpha$, $\gamma_1 \geq \gamma$ верно $\mathbb{A} \models \Theta_1(b, \alpha_0, \gamma_1)$.

4^0. Для любых b, α, γ справедлива альтернатива

$$\mathbb{A} \models \Theta_0(b, \alpha, \gamma) \vee \Theta_1(b, \alpha, \gamma) \vee \left(\neg \Theta_0(b, \alpha, \gamma) \wedge \neg \Theta_1(b, \alpha, \gamma)\right).$$

Определим функцию

$$h(b, \alpha, \gamma) = \begin{cases} \bigcup\limits_{\substack{\alpha_0 < \alpha, \\ \gamma_0 \leq \gamma}} h(b, \alpha_0, \gamma_0), & \text{если } \mathbb{A} \models \Theta_0(b, \alpha, \gamma) \vee (\neg \Theta_0(b, \alpha, \gamma) \wedge \neg \Theta_1(b, \alpha, \gamma)); \\ \nu(b)_\alpha, & \text{если } \mathbb{A} \models \Theta_1(b, \alpha, \gamma). \end{cases}$$

Легко проверить, что $h(b, \alpha, \gamma)$ — Σ-функция с областью определения $B \times \mathrm{Ord}(\mathbb{A}) \times \mathrm{Ord}(\mathbb{A})$ и для любых b, α, γ справедлива формула

$$h(b, \alpha, \gamma) \subseteq \nu(b)_\alpha. \tag{26}$$

Положим

$$\nu_0(b)_\alpha = \bigcup_{\gamma \in \mathrm{Ord}(\mathbb{A})} h(b, \alpha, \gamma), \quad \nu_0(b) = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}(\mathbb{A})} \nu_0(b)_\alpha.$$

Покажем, что для всех b, $\alpha \le \beta$ справедливо включение

$$\nu_0(b)_\alpha \subseteq \nu_0(b)_\beta. \tag{27}$$

Для этого рассмотрим возможные случаи.

1. Для некоторого γ справедливо $\mathbb{A} \models \Theta_1(b,\beta,\gamma)$. Тогда в силу свойства 3^0 и (26) имеем $\nu_0(b)_\alpha = \nu(b)_\alpha$, $\nu_0(b)_\beta = \nu(b)_\beta$, а потому верно (27).

2. Пусть для некоторых γ_0, γ_1 имеет место

$$\mathbb{A} \models \Theta_0(b,\beta,\gamma_0) \wedge \Theta_1(b,\alpha,\gamma_1).$$

Ввиду свойств 2^0 и 3^0 имеем $\nu_0(b)_\alpha = \nu(b)_\alpha = h(b,\alpha,\gamma_1)$,

$$\nu_0(b)_\beta = \bigcup_{\beta_0<\beta,\gamma\in\mathrm{Ord}(\mathbb{A})} h(b,\beta_0,\gamma) \supseteq h(b,\alpha,\gamma_1) = \nu_0(b)_\alpha.$$

3. Пусть для некоторого γ_0 имеет место $\mathbb{A} \models \Theta_0(b,\alpha,\gamma_0)$. Тогда в силу 2^0

$$\nu_0(b)_\alpha = \bigcup_{\alpha_0<\alpha,\gamma\in\mathrm{Ord}(\mathbb{A})} h(b,\alpha_0,\gamma) \subseteq \bigcup_{\beta_0<\beta,\gamma\in\mathrm{Ord}(\mathbb{A})} h(b,\beta_0,\gamma) = \nu_0(b)_\beta.$$

Таким образом, (27) доказано.

Пусть $\nu(b) \in S_0$. Тогда для любого α существует γ такое, что $h(b,\alpha,\gamma) = \nu(b)_\alpha$. Следовательно, $\nu_0(b)_\alpha = \nu(b)_\alpha$ и $\nu_0(b) = \nu(b)$. $\square$

Лемма 9. *Пусть для алгебраической системы $\mathfrak{M}$ и ее конечного подмножества M_0 справедливы условия* 1–3 *определения Σ-ограниченной системы. Тогда в $\mathbb{HF}(\omega)$ существует универсальная Σ-функция F для семейства $\mathfrak{H}^{M_0}$.*

Доказательство. Воспользуемся леммой 8. Для этого введем семейство $S \rightleftharpoons S^{M_0}$ и Δ-предикат $P \rightleftharpoons P^{M_0}$ в $\mathbb{HF}(\omega)$ следующим образом.

Пусть $R \rightleftharpoons \{\langle\langle\varkappa,\chi,n\rangle,\langle\tau,s\rangle\rangle \in \mathbb{HF}(\omega) \mid \chi \in \Xi,\ n \in K^0(\chi), \mathrm{sp}\,\varkappa = \{1,\dots,\mathrm{lh}(n)\},\ s \in K^1(\chi),\ \mathrm{sp}\,\tau = \{1,\dots,\mathrm{lh}(s)\}\}$.

Из следствия 1 вытекает, что R является Δ-предикатом в $\mathbb{HF}(\omega)$. Через S обозначим семейство всех Σ-подмножеств множества R. Пусть $a_i = \langle\langle\varkappa^i,\chi^i,n^i\rangle,\langle\tau^i,s^i\rangle\rangle \in R$, $i<2$. Определим следующие формулы для Ψ_i, $i=1,2$:

$$\begin{aligned}\Psi_1(a_0,a_1) = \exists q \forall \sigma \in S_q((q=\mathrm{lh}(n^0)\ \&\ \varkappa^0=\varkappa^1\ \&\ \chi^0=\chi^1\ \&\ n^1=n^0_\sigma \\ \&\ \varkappa^0(\bar q)=\varkappa^1(\bar q_\sigma)) \to\ (\tau^0=\tau^1\ \&\ s^0=s^1)),\\
\Psi_2(a_0,a_1) = \exists q \forall m \in \Pi(\chi^0,\chi^1)[(q=\mathrm{lh}(s^0)\ \&\ \varkappa^0=\varkappa^1\ \&\ n^1=b(\chi^0,\chi^1,m,n^0)) \\ \to (\tau^0=\tau^1\ \&\ \exists\sigma_0\in S_q\forall\sigma\in S_q(\tau^0(\bar q)=\tau^1(\bar q_{\sigma_0})\ \&\ (\tau^0(\bar q)=\tau^1(\bar q_\sigma) \\ \to b(\chi^0,\chi^1,m,s^0)_{\sigma_0} \le b(\chi^0,\chi^1,m,s^0)_\sigma)\ \&\ s^1=b(\chi^0,\chi^1,m,s^0)_{\sigma_0}))].\end{aligned}$$

Так как отношения

$$P_0(q,n) \rightleftharpoons q=\mathrm{lh}(n),\quad P_1(\sigma,n) \rightleftharpoons \sigma\in S_n,\quad P_2(\varkappa,n,m) \rightleftharpoons \varkappa(\langle n\rangle)=\varkappa(\langle m\rangle),$$

$$P_3(\chi^0,\chi^1,m,n,s) \rightleftharpoons b(\chi^0,\chi^1,n,m)=s,\quad P_4(\chi^0,\chi^1,m) \rightleftharpoons m\in\Pi(\chi^0,\chi^1)$$

являются Δ-предикатами в $\mathbb{HF}(\omega)$ (см. следствие 1 для P_3, P_4), то отношение $P(a_0,a_1) \rightleftharpoons \Psi_1(a_0,a_1)\ \&\ \Psi_2(a_0,a_1)$ также Δ-предикат в $\mathbb{HF}(\omega)$.

Введем семейство функций $\mathfrak{H}_1^{M_0} = \{T \in S \mid \forall a_1 \in T\ \forall a_2 \in T\ P(a_1,a_2)\}$.

Из леммы 8 следует, что семейство $\mathfrak{H}_1$ вычислимо. Для доказательства вычислимости семейства $\mathfrak{H}$ определим Σ-оператор F [1, с. 122] следующим образом. Для любого $a \in \mathbb{HF}(\omega)$ положим

$$\begin{aligned}
F(a) = \{&\langle\langle \varkappa, \chi, n_\sigma\rangle, \langle\tau, s\rangle\rangle \mid \exists c \in a(c = \langle\langle \varkappa, \chi, n\rangle, \langle \tau, s\rangle\rangle\\
&\& \ \exists p(\operatorname{sp}\varkappa = \operatorname{sp}(\bar p) \ \& \ \sigma \in S_p \ \& \ \varkappa(\bar p) = \varkappa(\bar p_\sigma)))\} \ \cup \ \{\langle\langle \varkappa, \chi^1, b(\chi^0, \chi^1, m, n)\rangle,\\
&\langle \tau, b(\chi^0, \chi^1, m, s)_{\sigma_0}\rangle\rangle \mid \exists c \in a(c = \langle\langle \varkappa, \chi^0, n\rangle, \langle\tau, s\rangle\rangle \ \& \ m \in \Pi(\chi^0, \chi^1)\\
&\& \ b(\chi^0, \chi^1, m, n) \in K^0(\chi^1) \ \& \ \exists q \forall \sigma \in S_q(\operatorname{sp}\tau = \operatorname{sp}(\bar q) \ \& \ \sigma_0 \in S_q \ \& \ \tau(\bar q)\\
&= \tau(\bar q_{\sigma_0}) \ \& \ (\tau(\bar q) = \tau(\bar q_\sigma) \to b(\chi^0, \chi^1, m, s)_{\sigma_0} \le b(\chi^0, \chi^1, m, s)_\sigma)))\}.
\end{aligned}$$

Для любого подмножества $T \subseteq \mathbb{HF}(\omega)$ положим

$$F(T) = \{d \mid \exists a \in \mathbb{HF}(\omega)(a \subseteq T \ \& \ d \in F(a))\}.$$

Легко проверить, что F является Σ-оператором и $\mathfrak{H}^{M_0} \subseteq F(\mathfrak{H}_1) \rightleftharpoons \{F(T) \mid T \in \mathfrak{H}_1^{M_0}\}$. Докажем обратное включение. Для этого достаточно показать, что для любого $T \in \mathfrak{H}_1$ множество $F(T)$ является графиком некоторой функции.

Пусть

$$\begin{gathered}
c^\varepsilon = \big\langle\big\langle \varkappa, \chi^0_\varepsilon, n^\varepsilon\big\rangle, \langle \tau, s^\varepsilon\rangle\big\rangle, \ \varepsilon = 0, 1, \quad m^\varepsilon \in \Pi\big(\chi^0_\varepsilon, \chi^1\big), \quad \operatorname{sp}\tau = \{1, \dots, q\},\\
r^\varepsilon = b\big(\chi^0_\varepsilon, \chi^1, m^\varepsilon, n^\varepsilon\big), \quad r^0 = r^1, \quad t^\varepsilon = b\big(\chi^0_\varepsilon, \chi^1, m^\varepsilon, s^\varepsilon\big)_{\sigma^\varepsilon_0},
\end{gathered} \tag{28}$$

где $\sigma^\varepsilon_0 \in S_q$, $\tau(\bar q) = \tau(\bar q_{\sigma^\varepsilon_0})$ и $\forall \sigma \in S_q\big(\tau(\bar q) = \tau(\bar q_\sigma) \to t^\varepsilon \le t^\varepsilon_\sigma\big)$.

Докажем, что тогда $t^0 = t^1$. Пусть Y^0_ε и Y^1 — базы характеристик χ^0_ε и χ^1 соответственно такие, что m^ε является переходом от базы Y^0_ε к Y^1. Так как $c^\varepsilon \in T$, то из (28) по следствию 1 существуют последовательности X^ε, Z^ε такие, что истинны

$$\operatorname{Cor}\big(X^\varepsilon, Y^0_\varepsilon, n^\varepsilon\big), \quad \operatorname{Cor}\big(Z^\varepsilon, Y^0_\varepsilon, s^\varepsilon\big). \tag{29}$$

Отсюда и из (28) по следствию 1 получим, что истинны $\operatorname{Cor}(X^\varepsilon, Y^1, r^\varepsilon)$.

Так как $r^0 = r^1$, то $X^0 = X^1 \rightleftharpoons X$. Отсюда и из условия 1 определения 1 либо $\mathfrak{B}_0\big(\operatorname{sp} Y^0_0, Y^0_1\big)$, либо $\mathfrak{B}_0\big(\operatorname{sp} Y^0_1, Y^0_0\big)$. Пусть для определенности имеем $\mathfrak{B}_0\big(\operatorname{sp} Y^0_0, Y^0_1\big)$. Тогда существует переход m^0_1 от Y^0_0 к Y^0_1. Отсюда и из (29) получим $n^1 = b\big(\chi^0_0, \chi^0_1, m^0_1, n^0\big)$. Так как $c^\varepsilon \in T$, истинна формула $\Psi_2(c^0, c^1)$. Значит, существует перестановка $\sigma_* \in S_q$ такая, что $\tau(\bar q) = \tau(\bar q_{\sigma_*})$ и верно

$$b\big(\chi^0_0, \chi^0_1, m^0_1, s^0\big)_{\sigma_*} = s^1, \quad \forall \sigma \in S_q \ \big(\tau(\bar q) = \tau(\bar q_\sigma) \to s^1 \le s^1_\sigma\big).$$

Отсюда и из (29) имеем $Z^1 = Z^0_{\sigma_*}$. Тогда в силу (28) последовательность Z^1 в базе Y^1 имеет координату $t^0_{(\sigma^0_0)^{-1}\sigma_*}$. С другой стороны, Z^1 в базе Y^1 имеет координату $t^1_{(\sigma^1_0)^{-1}}$, откуда $t^0_{\sigma'} = t^1_{\sigma''}$, где $\sigma' = \big(\sigma^0_0\big)^{-1}\sigma_*$, $\sigma'' = \big(\sigma^1_0\big)^{-1}$. Пусть $\sigma = (\sigma'')(\sigma')^{-1}$. Тогда $t^0 = t^1_\sigma$.

Допустим, что $t^0 < t^1$. Тогда $t^1_\sigma < t^1$. Это противоречит определению t^1. Аналогично предположение $t^1 < t^0$ приводит к противоречию. Следовательно, $t^0 = t^1$, т. е. $F(T)$ определяет график функции, для которой справедливы формулы $\mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2$. Значит, $F\big(\mathfrak{H}_1^{M_0}\big) \subseteq \mathfrak{H}^{M_0}$, и, следовательно, $F(\mathfrak{H}_1^{M_0}) = \mathfrak{H}^{M_0}$, т. е. семейство $\mathfrak{H}^{M_0}$ вычислимо. $\square$

Следствие 4. *Если алгебраическая система $\mathfrak{M}$ Σ-ограничена относительно конечного подмножества $M_0 \subseteq M$, то существует универсальная Σ-функция $U^{M_0}(x, y) \in F\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0)$ для семейства $\mathfrak{F}^{M_0}$ такая, что для любой функции $f \in \mathfrak{F}^{M_0}$ справедливо равенство $\lambda y U^{M_0}(n, y) = f(y)$ для некоторого n.*

Доказательство. По следствию 2 имеем

$$\mathfrak{F}^{M_0} = \{f_h \restriction E \mid h \in \mathfrak{H}^{M_0},\ E \in \Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0)\}.$$

Из доказательства теоремы 2.6.2 в [1] (существование универсального Σ-предиката) следует, что существует универсальная Σ-формула $\Psi^{M_0}(M_0, x, y)$ для $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0)$ такая, что для любой формулы $\Phi(M_0, x) \in \Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0)$ в $\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), M_0\rangle$ справедлива эквивалентность $\Psi^{M_0}(M_0, m, x) \leftrightarrow \Phi(M_0, x)$ для некоторого числа m. Отсюда и из леммы 9 получаем требуемое. $\square$

Пусть алгебраическая система $\mathfrak{M}$ Σ-ограничена относительно конечного подмножества $C \subseteq M$. Через Y^C_X будем обозначать некоторую базу подмножества X относительно параметров C.

Теорема 2. *Пусть алгебраическая система $\mathfrak{M}$ Σ-ограничена. Тогда в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ существует универсальная Σ-функция с параметром A, если и только если для любого конечного подмножества C, относительно которого $\mathfrak{M}$ Σ-ограничена, найдется конечное подмножество C^1 такое, что для любого конечного подмножества X и любой базы Y^C_X существует база $Y^A_{X^*}$, для которой справедливо $\langle Y^C_X\rangle \subseteq \langle Y^A_{X^*}\rangle$, где $X^* = C^1 \cup X$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ существует универсальная функция $H(y, x)$, определяемая Σ-формулой, содержащей параметр A. Можно считать, что $\mathfrak{M}$ Σ-ограничена относительно A. По следствию 4 существует универсальная функция U^A для семейства функций $\mathfrak{F}^A$, определяемых Σ-формулами с параметром A. Поэтому существует такое r_0, что $U^A(r_0, x) = H(\mathrm{pr}_1(x), \mathrm{pr}_2(x))$, т. е. $U^A(r_0, \langle y, x\rangle) = H(y, x)$.

Следовательно, $U^A(r_0, \langle y, x\rangle)$ также является универсальной функцией в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Пусть дано конечное подмножество $C \subseteq M$. Для функции $U^C(\mathrm{pr}_1(x), \mathrm{pr}_2(x))$, где U^C — универсальная функция для семейства $\mathfrak{F}^C$, найдется элемент $\varkappa(C')$ такой, что $U^A(r_0, \langle \varkappa(C'), x\rangle) = U^C(\mathrm{pr}_1(x), \mathrm{pr}_2(x))$. Тогда для любого числа $r \in \omega$ имеем $U^A(r_0, \langle \varkappa(C'), \langle r, x\rangle\rangle) = U^C(r, x)$.

Определим функцию f следующим образом: для любого конечного подмножества $X \subseteq M$ и любой базы Y^C_X характеристики χ положим

$$f(\langle \chi, X\rangle) = \langle Y^C_X\rangle. \tag{30}$$

Из условия 1 определения 1 и леммы 7 следует, что равенство (30) определяет функцию. Легко заметить, что функция f определима Σ-формулой с параметром C. По следствию 4 для некоторого числа $r_1 \in \omega$ верно

$$U^C(r_1, \langle \chi, X\rangle) = f(\langle \chi, X\rangle).$$

По условию 4 определения Σ-ограниченной системы существует такая база $Y^A_{X^*}$, что

$$\mathrm{sp}\, U^A(r_0, \langle \varkappa(C'), \langle r_1, X\rangle\rangle) \subseteq \langle Y^A_{X^*}\rangle, \tag{31}$$

где $X^* = \mathrm{sp}\, C' \cup X$. Положим $C^1 \rightleftharpoons \mathrm{sp}\, C'$. Так как $\mathrm{sp}\, U^A(r_0, \langle \varkappa(C'), \langle r_1, X\rangle\rangle) = \mathrm{sp}\langle Y^C_X\rangle = \langle Y^C_X\rangle$, из (31) следует, что $\langle Y^C_X\rangle \subseteq \langle Y^A_{X^*}\rangle$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы и дана функция f, определенная Σ-формулой с параметром C. Без ограничения общности можно считать, что $\mathfrak{M}$ Σ-ограничена относительно C.

По функции f определим функцию h. Пусть дана последовательность $\xi = \langle \varkappa, \chi, n\rangle$ и C_* — произвольная последовательность всех элементов из C^1. Введем формулу

$$\Phi_f(\xi,\tau,s,Y) \rightleftharpoons \exists X_1\exists\varkappa_1\exists X\exists Z\exists q(f(\varkappa_1(X_1)) = \tau(Z)\ \&\ \varkappa(X) = \langle C_*, \varkappa_1(X_1)\rangle$$
$$\&\ \mathfrak{B}_0^A(\operatorname{sp} X, Y)\ \&\ \chi = \chi^A(Y)\ \&\ \operatorname{Cor}^A(X,Y,n)\ \&\ \operatorname{Cor}^A(Z,Y,s)\&\ \operatorname{sp}^*\tau = \{1,\dots,q\}$$
$$\&\ \forall\sigma\in S_q(\tau(\bar q) = \tau(\bar q_\sigma) \to s \le s_\sigma)).$$

Заметим, что если $f(\varkappa_1(X_1)) = \tau(Z)$ и $\varkappa(X) = \langle C_*, \varkappa_1(X_1)\rangle$, то в силу условия 4 определения 1 существует база Y_1 множества $\operatorname{sp} X_1$ такая, что $\operatorname{sp} Z \subseteq \langle Y_1\rangle$. D силу условия теоремы существует база Y множества $\operatorname{sp} X$ такая, что $\langle Y_1\rangle \subseteq \langle Y\rangle$. Отсюда следует, что формула $\Phi_f(\xi,\tau,s,Y)$ истинна.

Значение $h(\xi)$ определим эквивалентностью

$$h(\xi) = \langle\tau,s\rangle \Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \exists Y\Phi_f(\xi,\tau,s,Y).$$

Покажем, что h — корректно определенная функция. Пусть Y^ε, τ^ε, s^ε, $\varepsilon < 2$, такие, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Phi_f(\xi,\tau^\varepsilon,s^\varepsilon,Y^\varepsilon)$. Тогда $\chi = \chi^A(Y^\varepsilon)$ и существуют последовательности X_1^ε, X^ε, Z^ε и элементы $\varkappa_1^\varepsilon$ такие, что

$$f\big(\varkappa_1^\varepsilon\big(X_1^\varepsilon\big)\big) = \tau^\varepsilon(Z^\varepsilon), \tag{32}$$

$$\varkappa(X^\varepsilon) = \big\langle C_*, \varkappa_1^\varepsilon\big(X_1^\varepsilon\big)\big\rangle, \tag{33}$$

$$\operatorname{Cor}^A(X^\varepsilon, Y^\varepsilon, n),\quad \operatorname{Cor}^A(Z^\varepsilon, Y^\varepsilon, s^\varepsilon). \tag{34}$$

Из леммы 7 и (34) следует, что существует изоморфизм $\varphi : \mathbb{HF}(\langle Y^0\rangle) \to \mathbb{HF}(\langle Y^1\rangle)$ такой, что $\varphi(Y^0) = Y^1$ и $\varphi X^0 = X^1$. Отсюда и из (33) вытекает, что $\big\langle \varphi C_*, \varkappa_1^0\big(\varphi X_1^0\big)\big\rangle = \big\langle C_*, \varkappa_1^1\big(X_1^1\big)\big\rangle$.

Значит, $\varkappa_1^0\big(\varphi X_1^0\big) = \varkappa_1^1\big(X_1^1\big)$. Отсюда и из (33) следует, что $f\big(\varkappa_1^0\big(\varphi X_1^0\big)\big) = f\big(\varkappa_1^1\big(X_1^1\big)\big)$. Таким образом,

$$\tau^1(Z^1) = \tau^0(\varphi Z^0), \tag{35}$$

откуда по замечанию 1 имеем $\tau^0 = \tau^1 \rightleftharpoons \tau$, следовательно, $q^0 = q^1 \rightleftharpoons q$. По леммам 2 и 4 из (35) вытекает существование такой подстановки $\sigma \in S_q$, что $\tau(\bar q) = \tau(\bar q_\sigma)$, $Z^1 = (\varphi Z^0)_\sigma$.

Поскольку $\operatorname{Cor}(\varphi Z^0, Y^1, s^0)$, то $s^1 = s^0_\sigma$.

Пусть $s^1 < s^0$. Тогда $s^0_\sigma < s^0$. Это противоречит выбору s^0. Аналогично приходим к противоречию, если $s^0 < s^1$. Значит, $s^0 = s^1$, т. е. h — корректно определенная функция.

Так как $h : \mathbb{HF}(\omega) \to \mathbb{HF}(\omega)$ является Σ-функцией в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ и система $\mathfrak{M}$ локально конструктивизируема, то h — Σ-функция и в $\mathbb{HF}(\omega)$.

Докажем истинность формул $\mathfrak{A}_i^A(h)$, $i = 1, 2$, определенных перед предложением 1. Пусть даны числа p, n, характеристика χ и элементы $\varkappa \in \mathbb{HF}(\{1,\dots,p\})$ и $\sigma \in S_p$ такие, что $\operatorname{lh}(\langle n\rangle) = p$ и

$$\varkappa(\bar p) = \varkappa(\bar p_\sigma), \tag{36}$$

$$h(\varkappa,\chi,n) = \langle\tau,s\rangle. \tag{37}$$

Докажем, что

$$h(\varkappa,\chi,n_\sigma) = \langle\tau,s\rangle. \tag{38}$$

Из определения функции h следует, что существуют база Y, последовательности X_1, X, Z и элемент $\varkappa_1$ такие, что

$$\chi = \chi^A(Y), \tag{39}$$

$$f(\varkappa_1(X_1)) = \tau(Z), \tag{40}$$

$$\varkappa(X) = \langle C_*, \varkappa_1(X_1)\rangle, \tag{41}$$

$$\mathrm{Cor}^A(X, Y, n), \quad \mathrm{Cor}^A(Z, Y, s). \tag{42}$$

Из (42) имеем

$$\mathrm{Cor}(X_\sigma, Y, n_\sigma), \tag{43}$$

а из (36), (41) по лемме 4 — $\varkappa(X) = \varkappa(X_\sigma) = \langle C_*, \varkappa_1(X_1)\rangle$. Отсюда и из (39)–(43) по определению функции h следует (38), т. е. формула $\mathfrak{A}_1^A(h)$ истинна в $\mathbb{HF}(\omega)$.

Докажем истинность $\mathfrak{A}_2^A(h)$ в $\mathbb{HF}(\omega)$.

Пусть равенство (37) справедливо. Тогда по определению функции h существуют база Y^0, последовательности X_1, X, Z и элемент $\varkappa_1$ такие, что

$$\chi = \chi^A(Y^0), \quad f(\varkappa_1(X_1)) = \tau(Z), \quad \varkappa(X) = \langle C_*, \varkappa_1(X_1)\rangle, \tag{44}$$

$$\mathrm{Cor}^A(X, Y^0, n), \quad \mathrm{Cor}^A(Z, Y^0, s). \tag{45}$$

Пусть χ^1 — некоторая характеристика и $m \in \Pi(\chi^0, \chi^1)$. Из определения функций Π, c и леммы 7 следует существование базы Y^1 характеристики χ^1 такой, что m является переходом от Y^0 к Y^1. Отсюда и из (45) по следствию 1 получим

$$\mathrm{Cor}(X, Y^1, b(\chi^0, \chi^1, m, n)), \quad \mathrm{Cor}(Z, Y^1, b(\chi^0, \chi^1, m, s)). \tag{46}$$

Так как $b(\chi^0, \chi^1, m, n) \in K^0(\chi^1)$, из (44), (46) по определению функции h имеем

$$h(\varkappa, \chi^1, b(\chi^0, \chi^1, m, n)) = \langle \tau, s^1\rangle,$$

где s^1 определяется из условия: существует такая подстановка $\sigma^0 \in S_q$, где $q = |\operatorname{sp}\tau|$, $\tau(\bar q) = \tau(\bar q_{\sigma^0})$, что $s^1 = b(\chi^0, \chi^1, m, s)_{\sigma^0}$ и для любой подстановки $\sigma \in S_q$ из равенства $\tau(\bar q) = \tau(\bar q_\sigma)$ следует $s^1 \le b(\chi^0, \chi^1, m, s)_\sigma$. Отсюда получаем истинность формулы $\mathfrak{A}_2^A(h)$ в $\mathbb{HF}(\omega)$.

Следовательно, $h \in \mathfrak{H}^A$. Поэтому существует такое число k_0, что

$$h^A_{k_0} = h. \tag{47}$$

Пусть $r_0 = [k_0, l_0]$, где l_0 — номер Σ-подмножества, определяемого формулой $x = x$. Тогда по следствию 4 имеем $U^A(r_0, x) = f_{h^A_{k_0}}(x)$.

Пусть $\Phi_u(x_0, x)$ — универсальный Σ-предикат, определенный в [1, с. 144], и элемент $a \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ такой, что $\delta f = \Phi^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}[a, x]$. Из определения функции h и (47) для любого элемента $x \in \delta f$ верно $U^A(r_0, \langle C_*, x\rangle) = f(x)$. Таким образом, функция

$$U(\langle r, C, a\rangle, x) = U^A(r, \langle C, x\rangle) \restriction \Phi^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}[a, x]$$

является универсальной, где величины $r \in \omega$, последовательность C элементов из M и $a \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ рассматриваются как параметры. $\square$

4. Линейные порядки

В данном разделе доказываются Σ-ограниченность любого линейного порядка L и существование универсальной Σ-функции в $\mathbb{HF}(L)$.

Теорема 3. *Любой бесконечный линейный порядок является Σ-ограниченной системой относительно любого конечного подмножества $L_0 \subseteq L$.*

Доказательство. Пусть $L_0 = \{l_1 < \ldots < l_s\}$. Докажем справедливость условий 1–4 определения Σ-ограниченной системы для пары L и L_0. Введем элементы $l_0, l_{s+1} \notin L$ и будем считать, что $\forall l \in L(l_0 < l)$ и $\forall l \in L(l_{s+1} > l)$. Пусть

$$L_0^* \rightleftharpoons \cup\{(l_i, l_{i+1}) \mid \|(l_i, l_{i+1})\| < \omega,\ 0 \leq i \leq s\} \cup \{l_1, \ldots, l_s\}.$$

1. Последовательность $Y = \langle y_1 < \ldots < y_q\rangle$, $y_i \in L$, назовем *базой* подмножества $X \subseteq L$, если верно равенство $\operatorname{sp} Y = X \cup L_0^*$.

2. Пусть Y — база. Для определенности будем считать, что интервал (l_i, l_{i+1}) бесконечен для $0 \leq i < e$, а (l_j, l_{j+1}) конечен при $e \leq j \leq s$. Если в $(l_i, l_{i+1}]$ содержится точно p_i элементов из Y, то последовательность $\langle p_0, \ldots, p_{e-1}\rangle$ назовем *характеристикой* базы Y.

Если $Y = \langle y_1 < \ldots < y_q\rangle$ — база, то положим $\langle \mathbb{HF}(L), L_0\rangle \models \operatorname{Cor}(y_i, Y, i)$.

Очевидна следующая

Лемма 10. *Пусть L — линейный порядок и (l_1, l_2) — бесконечный интервал. Тогда для любого числа $n \in \omega$ существует последовательность*

$$l_1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < l_2.$$

3. Справедливость этого условия вытекает из следующей леммы.

Лемма 11. *Пусть даны базы Y^ε, $\varepsilon < 2$, одинаковой характеристики χ и конечные подпорядки $L^\varepsilon \supseteq Y^\varepsilon$. Тогда существуют база Y^2 той же характеристики χ и конечный подпорядок $L^2 \supseteq Y^2$ такие, что существуют вложения $\varphi_0^\varepsilon : L^\varepsilon \to L^2$ такие, что $\varphi^\varepsilon \restriction L_0 = \mathrm{id}$, $\varphi^\varepsilon Y^\varepsilon = Y^2$, где вложения $\varphi^\varepsilon : \mathbb{HF}(L^\varepsilon) \to \mathbb{HF}(L^2)$ естественным образом продолжают φ_0^ε.*

Доказательство. Пусть все элементы Y^ε, содержащиеся в $(l_i, l_{i+1}]$, $0 \leq i < e$, такие, что

$$l_i < y^\varepsilon_{\tilde{p}_{i-1}+1} < \ldots < y^\varepsilon_{\tilde{p}_{i-1}+p_i} \leq l_{i+1},$$

где $\tilde{p}_{-1} = 0$, $\tilde{p}_i = \tilde{p}_{i-1} + p_i$. Допустим, что все элементы системы L^ε, содержащиеся в интервалах $\big(l_0, y_1^\varepsilon\big)$, $\big(y^\varepsilon_{\tilde{p}_{i-1}+j}, y^\varepsilon_{\tilde{p}_{i-1}+j+1}\big)$, $i = 0$, $1 \leq j < p_0$, $1 \leq i < e$, $0 \leq j < p_i$, и $\big(y^\varepsilon_{\tilde{p}_{e-1}}, l_e\big)$, такие:

$$l_0 < z_1^\varepsilon < \ldots < z^\varepsilon_{k_0^\varepsilon} < y_1^\varepsilon,$$

$$y^\varepsilon_{\tilde{p}_{i-1}+j} < z^\varepsilon_{ij1} < \ldots < z^\varepsilon_{ijk^\varepsilon_{ij}} < y^\varepsilon_{\tilde{p}_{i-1}+j+1}, \quad y^\varepsilon_{\tilde{p}_{e-1}} < u_1^\varepsilon < \ldots < u^\varepsilon_{k_e^\varepsilon} < l_e.$$

Пусть

$$k_{ij} = \max\big\{k^0_{ij}, k^1_{ij}\big\}, \quad k_0 = \max\big\{k^0_0, k^1_0\big\}, \quad k_e = \max\big\{k^0_e, k^1_e\big\}.$$

Так как интервал (l_i, l_{i+1}) бесконечен, то по лемме 10 можно выбрать такие элементы $y^2_{\tilde{p}_{i-1}+j}$, y_1^2, $y^2_{\tilde{p}_{e-1}}$, что в интервалах $\big(y^2_{\tilde{p}_{i-1}+j}, y^2_{\tilde{p}_{i-1}+j+1}\big)$, $\big(l_0, y_1^2\big)$, $\big(y^2_{\tilde{p}_{e-1}}, l_e\big)$ содержатся по крайней мере k_{ij}, k_0, k_e элементов соответственно.

Отсюда следует существование системы L^2 и требуемых вложений L^ε в L^2. $\square$

4. Справедливость этого условия вытекает из следующей леммы.

Лемма 12. *Пусть даны бесконечный линейный порядок L и функция $f : \mathbb{HF}(L) \to \mathbb{HF}(L)$, график которой задан Σ-формулой $\Phi(x, y, L_0)$, где $L_0 = \{l_1 < \ldots < l_s\}$, и для любого $0 \leq i \leq s$ интервал (l_i, l_{i+1}) в L либо бесконечен, либо* *пуст. Тогда для любого элемента $u = \varkappa(X) \in \mathbb{HF}(L)$, $\varkappa \in \mathbb{HF}(\omega)$ если $u \in \delta f$, то* $\operatorname{sp} f(u) \subseteq L_0 \cup \operatorname{sp} X$.

Доказательство. Допустим противное и $f(u) = v$, $v = \tau(Z)$, $z_i \notin L_0 \cup \operatorname{sp} X$ для некоторого i.

Пусть $\Phi(x, y) = \exists w \Phi^{(w)}(x, y, w, L_0)$ и элемент $d = \varkappa_0(D)$ таков, что

$$\langle \mathbb{HF}(L), L_0 \rangle \models \Phi^{(d)}(u, v, d, L_0). \tag{48}$$

Допустим для определенности, что последовательности X, Z, D и множество L_0 расположены следующим образом:

$$L^0 : \ldots < l_1 < x_k < d_s < z_i < d_{s+1} < x_{k+1} < \ldots < l_2 < \ldots .$$

По лемме 10 существует последовательность

$$L : \ldots < l_1 < x_k^0 < d_s^0 < z_i^0 < z_i^1 < d_{s+1}^0 < x_{k+1}^0 < \ldots < l_2 < \ldots .$$

Тогда существуют вложения

$$\varphi_0^\varepsilon : L^0 \to L, \quad \varepsilon = 0, 1,$$

такие, что

$$\varphi_0^\varepsilon \restriction L_0 = \mathrm{id}, \quad \varphi_0^\varepsilon(x_k) = x_k^0, \quad \varphi_0^\varepsilon(d_s) = d_s^0, \quad \varphi_0^\varepsilon z_i = z_i^\varepsilon.$$

По лемме 6 имеем

$$f(\varphi^\varepsilon u) = \varphi^\varepsilon v,$$

где $\varphi^\varepsilon : \mathbb{HF}(L^0) \to \mathbb{HF}(L)$ естественным образом продолжают φ_0^ε. Так как $\varphi^0 u = \varphi^1 u$, $\operatorname{sp} \varphi^0 v \neq \operatorname{sp} \varphi^1 v$, то получили противоречие. Другие случаи рассматриваются аналогично. $\square$

Таким образом, доказана справедливость всех условий определения Σ-ограниченной системы для пары $\langle L, L_0 \rangle$. Теорема доказана. $\square$

Следствие 5. *Пусть L — линейный порядок. Тогда для любого конечного подмножества L_0 существует универсальная Σ-функция $U^{L_0}(x, y) \in F\Sigma(\mathbb{HF}(L), L_0)$ для семейства функций $\mathfrak{F}^{L_0}$ такая, что для любой функции $f \in \mathfrak{F}^{L_0}$ справедливо равенство*

$$\lambda y U^{L_0}(n, y) = f(y)$$

для некоторого n.

Следствие 6. *Пусть L — линейный порядок. Тогда в $\mathbb{HF}(L)$ существует универсальная Σ-функция для семейства всех одноместных Σ-функций.*

Действительно, легко заметить, что для любых конечного подмножества X и баз $Y_X^{L_0}$, $Y_{X^*}^{\varnothing}$, где $X^* = L_0^* \cup X$, справедливо $\left\langle Y_X^{L_0} \right\rangle \subseteq \left\langle Y_{X^*}^{\varnothing} \right\rangle$. Тогда справедливы условия теоремы 2, где нужно положить $A = \varnothing$, $C = L_0$, $C^1 = L_0^*$. По этой теореме получаем требуемое.

В заключение автор выражает благодарность Ю. Л. Ершову и С. С. Гончарову, работы, советы и внимание которых оказали большую помощь автору при работе над данной статьей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов Ю. Л.* Определимость и вычислимость. Новосибирск: Научная книга, 1996.
2. *Руднев В. А.* Об универсальной рекурсивной функции на допустимых множествах // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 4. С. 425–436.
3. *Морозов А. С., Пузаренко В. Г.* О Σ-подмножествах натуральных чисел // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 3. С. 291–320.

4. *Калимуллин И. Ш., Пузаренко В. Г.* О принципах вычислимости на структурах // Мат. труды. 2004. Т. 7, № 2. С. 35–72.
5. *Пузаренко В. Г.* К вычислимости на специальных моделях // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 1. С. 185–208.
6. *Хисамиев А. Н.* О Σ-подмножествах натуральных чисел над абелевыми группами // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 45, № 3. С. 211–228.

Статья поступила 28 октября 2008 г.

Хисамиев Асылхан Назифович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`hisamiev@math.nsc.ru`