Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2009. Том 50, № 5

УДК 519.214.6+519.214.4

ПЕРЕХОДНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ ПРИ ОТСУТСТВИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ СКАЧКОВ

А. А. Боровков, П. С. Рузанкин

Аннотация. Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины,

$$S_n := \sum_{j=1}^{n} \xi_j, \quad \overline{S} := \sup_{n \geq 0} S_n.$$

Если существует $\mathbf{E}\xi = -a < 0$, то *переходными* называют явления, которые происходят с распределением $\overline{S}$, когда $a \to 0$ и $\overline{S}$ неограниченно возрастает по вероятности. Рассматривается случай, когда $\mathbf{E}\xi$ не существует, и изучаются переходные явления при $a \to 0$ для следующих двух моделей случайного блуждания.

1. Первая модель предполагает, что ξ_j представимы в виде $\xi_j = \zeta_j + a\eta_j$, где $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ и $\eta_1, \eta_2, \dots$ — две независимые последовательности независимых случайных величин, одинаково распределенных в каждой последовательности, таких, что $\sup\limits_{n \geq 0} \sum\limits_{j=1}^{n} \zeta_j = \infty$, $\sup\limits_{n \geq 0} \sum\limits_{j=1}^{n} \eta_j < \infty$, $\overline{S} < \infty$ п. н.

2. Во второй модели рассматривается схема серий с параметром a и предполагается, что правый хвост $\mathbf{P}(\xi_j \geq t) \sim V(t)$ при $t \to \infty$ мало зависит от a, а левый хвост имеет вид $\mathbf{P}(\xi_j < -t) = W(t/a)$, где V и W — правильно меняющиеся функции и $\overline{S} < \infty$ п. н. при каждом фиксированном $a > 0$.

Получены результаты как для одинаково распределенных, так и для разнораспределенных ξ_j.

Ключевые слова: переходное явление, случайное блуждание, время ожидания обслуживания, большое уклонение.

1. Введение

Под переходными явлениями в задачах о пересечении границы траекторией случайного блуждания обычно понимают следующее. Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины,

$$S_n := \sum_{j=1}^{n} \xi_j, \quad \overline{S} := \sup_{n \geq 0} S_n.$$

Хорошо известно, что если $\mathbf{E}\xi = -a < 0$, то $\overline{S}$ — собственная случайная величина и $\overline{S} = \infty$ п. н., если $a \geq 0$. *Переходными* называют явления, возникающие при изучении распределения $\overline{S}$ (или максимума конечного числа сумм), когда $0 < a \to 0$. Естественно ожидать, что в этом случае случайная величина $\overline{S}$ будет

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 08–01–00962 и 06–01–00738) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–3695.2008.1).

расти по вероятности. Задача состоит в том, чтобы выяснить, как быстро будет происходить этот рост, и найти соответствующее предельное распределение.

Первые результаты в этом направлении в случае $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$ появились в [1, 2]. Затем они были распространены на случай $\mathbf{E}\xi^2 = \infty$ и на случай разнораспределенных слагаемых ξ_j [3–6]. Обзор литературы и весьма полное изложение результатов о переходных явлениях см. в [7].

Цель настоящей работы — изучение переходных явлений в случае, когда $\mathbf{E}\xi_j$ не существует. Здесь необходимо изменение самой постановки задачи. Если существует $\mathbf{E}\xi_j = -a < 0$, то соотношение $a \to 0$ можно интерпретировать как такое «небольшое» изменение распределения $\mathbf{F}$ случайной величины ξ, которое превращает величину $\overline{S} \overset{\text{п.н.}}{=} \infty$ (при $a = 0$) в «большую», но собственную случайную величину при малых $a > 0$.

В случае отсутствия $\mathbf{E}\xi$ можно использовать аналогичный подход и рассмотреть следующие две близкие модели случайного блуждания. Для простоты сначала будем рассматривать случай одинаково распределенных случайных величин
$$\xi_j \underset{d}{=} \xi.$$

Первая модель. Будем предполагать, что случайные величины ξ_j представимы в виде
$$\xi_j = \zeta_j + a\eta_j, \quad a > 0, \tag{1}$$
где $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \dots$ и $\eta, \eta_1, \eta_2, \dots$ — две независимые последовательности независимых случайных величин, одинаково распределенных в каждой последовательности, таких, что
$$\overline{Z} := \sup_{k\ge 0} Z_k = \infty \text{ п. н.}, \quad \overline{Y} := \sup_{k\ge 0} Y_k < \infty \text{ п. н.}, \quad \overline{S} < \infty \text{ п. н.}, \tag{2}$$
где
$$Z_n := \sum_{j=1}^n \zeta_j, \quad Y_n := \sum_{j=1}^n \eta_j,$$
так что
$$S_n = S_n(a) := Z_n + aY_n.$$
Чтобы обеспечить выполнение соотношений (2) и возможность асимптотического анализа рассматриваемых случайных блужданий, будем предполагать следующее.

1. Правый хвост $F_{\zeta+}(t) := \mathbf{P}(\zeta \ge t)$, $t \ge 0$, распределения случайной величины ζ и левый хвост $F_{\eta-}(t) := \mathbf{P}(\eta < -t)$, $t \ge 0$, распределения случайной величины η являются правильно меняющимися функциями (п.м.ф.) при $t \to \infty$.

2. Левый хвост $F_{\zeta-}(t) := \mathbf{P}(\zeta < -t)$ имеет тот же порядок малости, что и $F_{\zeta+}(t)$ или $F_{\zeta-}(t) = o(F_{\zeta+}(t))$ при $t \to \infty$. Это обеспечивает выполнение первого соотношения в (2).

3. При $t \to \infty$
$$F_{\eta-}(t) \gg F_{\zeta+}(t), \quad F_{\eta-}(t) \gg F_{\eta+}(t) := \mathbf{P}(\eta \ge t).$$
Последнее неравенство (при некотором его усилении) обеспечивает выполнение двух последних соотношений в (2). Оба приведенных неравенства будут уточнены позже.

При выполнении этих предположений при любом $a > 0$
$$\overline{S}(a) := \sup_{n\ge 0} S_n(a) < \infty \text{ п. н.}$$

Если в рассматриваемой модели устремить a к нулю, то распределение ξ при этом будет мало меняться, а для предельного распределения $\overline{S}(a)$ будет выполняться $\overline{S}(0) = \overline{Z} \overset{\text{п. н.}}{=} \infty$, т. е. будет наблюдаться тот же эффект $\overline{S}(a) \to \infty$ п. н. при $a \to 0$, что и при рассмотрении переходных явлений в случае существования конечного $\mathbf{E}\xi$.

Описанная выше модель случайного блуждания возникает в теории очередей, где $\zeta_j \geq 0$ — времена обслуживания вызовов, а $\tau_j = -a\eta_j \geq 0$ — интервалы между приходами вызовов. Если $\mathbf{E}\zeta = \infty$, то эргодичность соответствующей системы обслуживания может поддерживаться лишь за счет появления очень больших интервалов τ_j. Стационарное время ожидания таких систем совпадает по распределению с $\overline{S}(a)$ при

$$\xi_j = \zeta_j - \tau_j = \zeta_j + a\eta_j, \tag{3}$$

так что мы приходим к постановке задачи (1) при малом a и при правом хвосте распределения τ_j (левом хвосте распределения η), существенно более «толстом», чем правый хвост распределения ζ.

Вторая модель предполагает более общую постановку задачи, в которой рассматривается схема серий, зависящая от параметра $a \to 0$. Предполагается, что распределения случайных величин ξ_j имеют правые хвосты вида

$$F_{\xi+}(t) := \mathbf{P}(\xi_j \geq t) = t^{-\alpha}L(t), \quad t \geq 0, \tag{4}$$

где $\alpha \in (0,1) \cup (1,2)$ и $L(t)$ есть медленно меняющаяся функция (м.м.ф.) при $t \to \infty$, а левые хвосты распределений ξ_j имеют вид

$$F_{\xi-}(t) := \mathbf{P}(\xi_j < -t) = W(t/a), \quad t \geq 0, \tag{5}$$

где $W(t) := t^{-\beta}L_W(t)$, $\beta < \alpha$, $L_W(t)$ — м.м.ф. при $t \to \infty$. Функции $F_{\xi+}$ и W также могут зависеть от a, но «несущественным образом».

Нетрудно видеть, что если в случае (3) обозначить $F_{\zeta+}(t) := \mathbf{P}(\zeta \geq t)$, $F_{\eta-}(t) := \mathbf{P}(\eta < -t)$ и предположить, что эти функции правильно меняются на ∞, то при $t \to \infty$

$$F_{\xi+}(t) = \int\limits_0^\infty \mathbf{P}(\tau \in du)\mathbf{P}(\zeta > t + u) \sim F_{\zeta+}(t),$$

$$F_{\xi-}(t) = \int\limits_0^\infty \mathbf{P}(\zeta \in du)\mathbf{P}(a\eta < -t - u) \sim F_{\eta-}(t/a)$$

и, стало быть, будут выполняться соотношения (4), (5). В разд. 4 мы покажем (в рамках моделей с разнораспределенными слагаемыми), что более общая вторая модель может быть в известном смысле сведена к первой модели.

Работа делится на четыре раздела. В разд. 2 рассматривается первая модель для одинаково распределенных слагаемых. В разд. 3 эта модель обобщается на случай схемы серий. Там же доказываются оценки для уклонений сумм и максимумов сумм разнораспределенных слагаемых, не имеющих первого момента. Эти оценки имеют и самостоятельный интерес. В разд. 4 рассматривается вторая модель.

Буквами c и C с индексами и без будем обозначать положительные постоянные, не обязательно одни и те же в разных местах.

2. Первая модель. Одинаково распределенные слагаемые

2.1. Формулировка основного результата. Пусть, как и прежде, $F_{\zeta+}(t) = \mathbf{P}(\zeta \geq t)$, $\quad F_{\zeta-}(t) = \mathbf{P}(\zeta < -t)$. Предположим, что при $t \to \infty$ «суммарный» хвост $F_\zeta(t) := F_{\zeta+}(t) + F_{\zeta-}(t)$ есть п.м.ф.:

$$F_\zeta(t) = t^{-\alpha} L(t) \quad \text{при } t \to \infty, \tag{6}$$

где $\alpha \in (0,1) \cup (1,2)$; $L(t)$ есть м.м.ф. при $t \to \infty$, и существуют пределы

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F_{\zeta\pm}(t)}{F_\zeta(t)} = \rho_\pm \geq 0. \tag{7}$$

Будем предполагать, что

$$\rho_+ > 0, \tag{8}$$

так что $F_{\zeta+}(t) \sim \rho_+ F_\zeta(t)$ есть также п.м.ф. Пусть, кроме того, при $t \to \infty$

$$F_{\eta-}(t) = \mathbf{P}(\eta < -t) = t^{-\beta} L_\eta(t), \quad F_{\eta+}(t) = \mathbf{P}(\eta \geq t) = o(F_{\eta-}(t)), \tag{9}$$

где

$$\beta \in (0,1), \quad \beta < \alpha \tag{10}$$

и $L_\eta(t)$ есть м.м.ф. при $t \to \infty$.

Будем предполагать также, что распределение η таково, что

$$\overline{Y} < \infty \text{ п. н.} \tag{11}$$

Обозначим через $F^{(-1)}(y)$ обобщенную обратную функцию к положительной и сходящейся к 0 при $t \to \infty$ функции $F(t)$:

$$F^{(-1)}(y) := \sup\{t > 0 : F(t) > y\}.$$

Вместо условия (11) в основной теореме ниже на распределение η будет наложено следующее условие. Существует п.м.ф. $V_+(t)$ (будем считать ее, не ограничивая общности, монотонной) такая, что

$$F_{\eta+}(t) \leq V_+(t) \text{ при всех } t > 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} V_+\bigl(F_{\eta-}^{(-1)}(1/k)\bigr) < \infty \tag{12}$$

(так что с необходимостью $V_+(t) = o(F_{\eta-}(t))$ при $t \to \infty$).

Условие (12) является в известном смысле необходимым и достаточным для выполнения (11). А именно, из (12) следует (11) (см. теорему 2.5.3 и лемму 2.5.1 в [7]). И если существует п.м.ф. (при $t \to \infty$) $V_+(t)$ такая, что

$$F_{\eta+}(t) \geq V_+(t), \quad \sum_{k=1}^{\infty} V_+(F_{\eta-}^{(-1)}(1/k)) = \infty,$$

то $\overline{Y} = \infty$ п. н. (см. теорему 2.5.3 и лемму 2.5.1 в [7]).

При выполнении названных условий

$$\overline{S}(a) < \infty \text{ п. н. при } a > 0$$

и $\overline{S}(a) \to \infty$ по вероятности при $a \to 0$ (см. [7, гл. 2]).

Заметим также, что для выполнения (12) достаточно, чтобы при всех достаточно больших t

$$F_{\eta+}(t) \leq cF_{\eta-}(t)(\ln t)^{-\kappa}, \quad \text{где } \kappa > 1$$

(и κ не зависит от t; см. следствие 2.5.2 в [7]).

Будем предполагать, не ограничивая общности, что

$$\mathbf{E}\zeta = 0, \quad \text{если } \alpha \in (1,2). \tag{13}$$

Для того чтобы сформулировать основные утверждения, нам понадобятся следующие обозначения.

Пусть $T > 0$ — некоторая постоянная. Обозначим через $D(0, T)$ пространство функций на отрезке $[0, T]$ без разрывов второго рода с метрикой Скорохода

$$d(f, g) := \inf_{\lambda} \sup_{t} \{|g(t) - f(\lambda(t))| + |\lambda(t) - t|\},$$

где инфимум берется по всем непрерывным возрастающим функциям $\lambda(t)$ на $[0, T]$ таким, что $\lambda(0) = 0, \lambda(T) = T$.

Положим

$$R(n) := \frac{F_{\zeta}^{(-1)}(1/n)}{F_{\eta}^{(-1)}(1/n)} = n^{(1/\alpha)-(1/\beta)} L_R(n),$$

где $L_R(n)$ есть м.м.ф. при $n \to \infty$,

$$F_{\eta}(t) := F_{\eta+}(t) + F_{\eta-}(t).$$

Пусть $m = m(a)$ — функция, обратная к $R(n)$:

$$m := R^{(-1)}(a). \tag{14}$$

Тогда, как мы увидим позже, при $a \to 0$ процесс

$$S(t, a) := \frac{S_{\lfloor mt \rfloor}}{b(a)}, \tag{15}$$

где

$$b(a) := F_{\zeta}^{(-1)}(1/m) := \sup\{t > 0 : F_{\zeta}(t) > 1/m\}, \quad m = m(a), \tag{16}$$

по распределению сходится в $D(0, T)$ при любом фиксированном T к процессу

$$X(t) := X^{(\alpha,\rho)}(t) + X^{(\beta,-1)}(t),$$

который представляет собой сумму двух независимых устойчивых случайных процессов $X^{(\alpha,\rho)}(\cdot)$ и $X^{(\beta,-1)}(\cdot)$, где $X^{(\alpha,\rho)} := X^{(\alpha,\rho)}(1)$ имеет устойчивое распределение $\mathbf{F}^{(\alpha,\rho)}$ с параметрами (α, ρ) и характеристической функцией

$$\varphi^{(\alpha,\rho)}(t) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} \mathbf{F}^{(\alpha,\rho)}(dy) = \exp\left\{-\Gamma(1-\alpha)|t|^{\alpha-1}\left(|t| \cos\frac{\alpha\pi}{2} - it\rho \sin\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right\},$$

где $\Gamma(1-\alpha) := \Gamma(2-\alpha)/(1-\alpha)$, если $\alpha \in (1, 2)$.

Замечание, поясняющее естественность нормировки (15), (16), помещено после теоремы 2.2. Нашей целью в этом разделе является доказательство следующего основного утверждения. Положим

$$\overline{S}(\infty, a) := \sup_{t \geq 0} S(t, a), \quad \overline{X}(\infty) := \sup_{t \geq 0} X(t).$$

Теорема 2.1. *Пусть выполняются условия* (6)–(10), (12) *и* (13). *Тогда при* $a \to 0$ *имеет место слабая сходимость* $\overline{S}(\infty, a)$ *к* $\overline{X}(\infty)$ *по распределению:*

$$\overline{S}(\infty, a) \Rightarrow \overline{X}(\infty).$$

Заметим, что в условиях этой теоремы $\overline{X}(\infty) < \infty$ п. н. (см. теорему 15.2.2 в [7]).

2.2. Вспомогательные теоремы о сходимости процессов. Для того чтобы доказать теорему 2.1, нам понадобится следующая теорема о сходимости случайных процессов. Пусть, как и прежде, процесс $S(t, a)$ определен в (15).

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* (6)–(11), (13). *Тогда при* $a \to 0$ *имеет место слабая сходимость процессов* $S(\cdot, a)$ *к* $X(\cdot)$ *по распределению в пространстве* $D(0, T)$:

$$S(\cdot, a) \Rightarrow X(\cdot) = X^{(\alpha,\rho)}(\cdot) + X^{(\beta,-1)}(\cdot),$$

где последняя сумма обозначает сумму двух независимых устойчивых процессов с соответствующими параметрами.

Замечание 2.1. Прежде чем переходить к доказательству теоремы 2.2, приведем некоторые предварительные соображения, считая для простоты, что $\zeta \geq 0$ ($\alpha \in (0,1)$) и $\eta \leq 0$. Эти соображения проясняют природу предельных процессов и естественность нормировки $b(a)$ в теоремах 2.1 и 2.2.

Итак, пусть $\zeta \geq 0$ и $\eta \leq 0$ п. н. Тогда при больших n уклонения сумм Z_n имеют порядок

$$F_\zeta^{(-1)}(1/n) := \sup\{t > 0 : F_\zeta(t) > 1/n\},$$

а уклонения сумм Y_n — порядок $F_\eta^{(-1)}(1/n)$. Значит, если $a \to 0$ и $m = m(a)$ таково, что

$$F_\zeta^{(-1)}(1/m) \sim aF_\eta^{(-1)}(1/m),$$

то при таких m снос вниз сумм $S_{\lfloor m \rfloor}$, обеспечиваемый слагаемым $aY_{\lfloor m \rfloor}$, «уравновешивает» (несмотря на малое значение a) снос вверх за счет слагаемых ζ_j. Для таких $m = m(a)$ имеем

$$a \sim R(m) = \frac{F_\zeta^{(-1)}(1/m)}{F_\eta^{(-1)}(1/m)} = m^{(1/\alpha)-(1/\beta)} L_R(m),$$

где $L_R(n)$ есть м.м.ф. при $n \to \infty$. Тогда при $a \to 0$

$$\frac{a}{F_\zeta^{(-1)}(1/m)} \sim \frac{1}{F_\eta^{(-1)}(1/m)}$$

и имеет место слабая сходимость по распределению:

$$\frac{Z_{\lfloor m \rfloor}}{b(a)} \Longleftarrow\!\!\!\Rightarrow \mathbf{F}^{(\alpha,1)}, \quad \frac{aY_{\lfloor m \rfloor}}{b(a)} \overset{\text{п. н.}}{\sim} \frac{Y_{\lfloor m \rfloor}}{F_\eta^{(-1)}(1/m)} \Longleftarrow\!\!\!\Rightarrow \mathbf{F}^{(\beta,-1)}, \tag{17}$$

где, как и ранее, $b(a) := F_\zeta^{(-1)}(1/m)$, $\mathbf{F}^{(\alpha,\rho)}$ — устойчивое распределение с параметрами (α, ρ), знак $\Longleftarrow\!\!\!\Rightarrow$ обозначает слабую сходимость распределений случайных величин к некоторому предельному распределению.

В общем случае для разнозначных ζ и η при выполнении вышеназванных условий будет иметь место сходимость

$$\frac{Z_{\lfloor m \rfloor}}{b(a)} \Longleftarrow\!\!\!\Rightarrow \mathbf{F}^{(\alpha,\rho)}, \quad \frac{aY_{\lfloor m \rfloor}}{b(a)} \Longleftarrow\!\!\!\Rightarrow \mathbf{F}^{(\beta,-1)}, \tag{18}$$

где $\rho := \rho_+ - \rho_-$.

Таким образом, $\frac{1}{b(a)} S_{\lfloor m \rfloor}$ слабо сходится по распределению к $X^{(\alpha,\rho)} + X^{(\beta,-1)}$, где слагаемые независимы и имеют устойчивые распределения с соответствующими параметрами.

Сказанное выше поясняет естественность нормировки $b(a)$ и само утверждение теоремы 2.2 применительно к конечномерным распределениям процесса $S(t, a)$ (напомним, что $\frac{1}{b(a)} S_{\lfloor m \rfloor} = S(1, a)$).

Доказательство теоремы 2.2. Так как

$$S(t, a) = Z(t, a) + Y(t, a),$$

где

$$Z(t,a) := \frac{Z_{\lfloor mt \rfloor}}{b(a)}, \quad Y(t,a) := \frac{aY_{\lfloor mt \rfloor}}{b(a)} \overset{\text{п. н.}}{\sim} \frac{Y_{\lfloor mt \rfloor}}{F_\eta^{(-1)}(1/m)}$$

и процессы $Z(\cdot,a)$ и $Y(\cdot,a)$ независимы, утверждение теоремы есть следствие известных теорем о сходимости процессов $Z(\cdot,a)$ и $Y(\cdot,a)$ к соответствующим устойчивым процессам. Эти теоремы устанавливаются стандартным образом как следствие сходимости конечномерных распределений (см. (17)) и выполнения условий компактности (ср. с теоремой 12.4.2 в [7]). Доказательство аналогичного утверждения в более общей ситуации см. в п. 3.3 (теорема 3.2).

Теорема 2.2 доказана.

Обозначим

$$\overline{S}(T,a) := \sup_{0\le t\le T} S(t,a) \equiv \frac{\max\limits_{0\le k\le mT} S_k}{b(a)}, \quad \overline{X}(T) := \sup_{0\le t\le T} X(t).$$

Следствие 2.1. *Пусть выполнены условия* (6)–(11), (13). *Тогда при произвольном фиксированном $T>0$ и $a\to 0$ имеет место слабая сходимость по распределению:*

$$\overline{S}(T,a) \Rightarrow \overline{X}(T).$$

Это утверждение следует непосредственно из теоремы 2.2 и непрерывности в метрике $D(0,T)$ функционала $f(x(\cdot)) := \sup\limits_{u\le T} x(u)$.

Для доказательства теоремы 2.1 нам понадобятся следующие две теоремы.

Теорема 2.A [7, следствие 2.2.1 и теорема 3.1.1]. *Пусть $\psi_1, \psi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что при всех $x>0$*

$$\mathbf{P}(\psi_1 \ge x) \le V(t) := t^{-\alpha} L_V(t),$$

где $\alpha\in(0,2)$, $L_V(t)$ — м.м.ф. при $t\to\infty$. Пусть также

$$\mathbf{P}(\psi_1 < -x) \le cV(t)$$

при всех $x>0$, если $\alpha\in[1,2)$.

Тогда

$$\mathbf{P}\left(\max_{j\le n}\sum_{k=1}^{j}\psi_k \ge x\right) \le nV(x)(1+\delta(nV(x))),$$

где функция δ определяется только функцией V и такова, что

$$\delta(u)\to 0 \quad \text{при } u\to 0.$$

Теорема 2.B. *Пусть выполняются условия* (9), (10) *и* (12). *Тогда найдутся такие положительные постоянные c, c_1 и Θ, зависящие только от распределения η, что для всех $u\in\left(0, \frac12 F_{\eta-}^{(-1)}(1/n)\right)$ и всех достаточно больших n*

$$\mathbf{P}(Y_n \ge -u) \le c_1 n V_+\big(F_{\eta-}^{(-1)}(1/n)\big) + \exp\left(-c\left(\frac{u}{F_{\eta-}^{(-1)}(1/n)}\right)^{-\Theta}\right).$$

Доказательство теоремы 2.B. Эта теорема следует из теоремы 2.3.2 в [7], которая утверждает, что в условиях теоремы 2.B

$$\mathbf{P}(Y_n \ge -u) \le c_1 n V_+(F_{\eta-}^{(-1)}(1/n)) + \exp\left(-c\left(\frac{u}{F_{\eta-}^{(-1)}(1/n)}\right)^{-\Theta}\right) + \exp\left(-c\left(\frac{V_+^{(-1)}(1/n)}{F_{\eta-}^{(-1)}(1/n)}\right)^{-\Theta}\right). \quad (19)$$

Нужно только оценить последнее слагаемое в (19). Для этого воспроизведем рассуждения из доказательства теоремы 2.5.3 в [7].

При всех достаточно больших n имеем

$$nV_+\big(F_{\eta-}^{(-1)}(1/n)\big) = nV_+\left(V_+^{(-1)}(1/n)\frac{F_{\eta-}^{(-1)}(1/n)}{V_+^{(-1)}(1/n)}\right)$$
$$\geq n\frac{1}{n}\left(\frac{F_{\eta-}^{(-1)}(1/n)}{V_+^{(-1)}(1/n)}\right)^{-2\beta} \geq \exp\left(-c\left(\frac{F_{\eta-}^{(-1)}(1/n)}{V_+^{(-1)}(1/n)}\right)^{\Theta}\right). \quad (20)$$

В неравенстве (20) использованы свойства п.м.ф. (см., например, [7, § 1.1]).

Таким образом, при всех достаточно больших n последнее слагаемое в (19) не превосходит первого. Теорема 2.B доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Выберем произвольное $z > 0$. Нам нужно доказать, что

$$\mathbf{P}(\overline{S}(\infty, a) > z) \to \mathbf{P}(\overline{X}(\infty) > z) \quad \text{при } a \to 0.$$

Имеем

$$|\mathbf{P}(\overline{S}(\infty, a) > z) - \mathbf{P}(\overline{X}(\infty) > z)| \leq D_1 + D_2 + D_3, \quad (21)$$

где

$$D_1 := |\mathbf{P}(\overline{S}(\infty, a) > z) - \mathbf{P}(\overline{S}(T, a) > z)|, \quad D_2 := |\mathbf{P}(\overline{S}(T, a) > z) - \mathbf{P}(\overline{X}(T) > z)|,$$
$$D_3 := |\mathbf{P}(\overline{X}(T) > z) - \mathbf{P}(\overline{X}(\infty) > z)|.$$

Рассмотрим разность D_2. Из теоремы 2.2 следует, что для каждого фиксированного T

$$|\mathbf{P}(\overline{S}(T, a) > z) - \mathbf{P}(\overline{X}(T) > z)| \to 0 \quad (22)$$

при $a \to 0$. Отсюда получаем, что если $T = T(a)$ стремится к ∞ достаточно медленно при $a \to 0$, то (22) также будет иметь место. В дальнейшем будем считать, что T зависит от a именно таким образом.

Для таких (неограниченно возрастающих) T, очевидно,

$$\lim_{a\to 0} D_3 = 0. \quad (23)$$

Докажем теперь, что $\lim\limits_{a\to 0} D_1 = 0$. Обозначим $\nu := \inf\{n \geq 1 : S_n > zb(a)\}$. Имеем

$$\mathbf{P}(\overline{S}(\infty, a) > z) - \mathbf{P}(\overline{S}(T, a) > z) = \mathbf{P}(mT < \nu < \infty). \quad (24)$$

Далее, для последовательности целых чисел $n_0 = \lfloor mT \rfloor < n_1 < n_2 < \cdots$, которую мы определим ниже, выполняется

$$\mathbf{P}(mT < \nu < \infty) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}(n_j < \nu \leq n_{j+1}). \quad (25)$$

При любых $u_j > 0$ имеем

$$\mathbf{P}(n_j < \nu \leq n_{j+1}) \leq \mathbf{P}(\max_{n_j < n \leq n_{j+1}} S_n > zb(a)) \leq \mathbf{P}(Y_{n_j} \geq -u_j)$$
$$+ \mathbf{P}\left(Z_{n_j} \geq a\frac{u_j}{2}\right) + \mathbf{P}\left(Y_{n_j} < -u_j,\ Z_{n_j} < a\frac{u_j}{2},\ \max_{n_j < n \leq n_{j+1}} S_n > zb(a)\right). \quad (26)$$

Так как $\{Y_{n_j} < -u_j,\ Z_{n_j} < au_j/2\} \subset \{S_{n_j} < -au_j/2\}$ и $z > 0$, последнее слагаемое в правой части (26) при $r_j = n_{j+1} - n_j$ не превосходит

$$\mathbf{P}\left(\overline{S}_{r_j} > zb(a) + a\frac{u_j}{2}\right) \leq \mathbf{P}\left(\overline{S}_{r_j} > a\frac{u_j}{2}\right)$$
$$\leq \mathbf{P}\left(\overline{Z}_{r_j} + a\overline{Y}_{r_j} > a\frac{u_j}{2}\right) \leq \mathbf{P}\left(\overline{Z}_{r_j} > a\frac{u_j}{4}\right) + \mathbf{P}\left(\overline{Y}_{r_j} > \frac{u_j}{4}\right).$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}(n_j < \nu \le n_{j+1}) \le \mathbf{P}(Y_{n_j} \ge -u_j) + \mathbf{P}\left(Z_{n_j} \ge a\frac{u_j}{2}\right) + \mathbf{P}\left(\overline{Z}_{r_j} > a\frac{u_j}{4}\right) + \mathbf{P}\left(\overline{Y}_{r_j} > \frac{u_j}{4}\right). \quad (27)$$

Зададим теперь числа n_j и u_j следующим образом. Положим

$$n_j := 2^j \lfloor mT \rfloor, \quad u_j := C(\ln((j+1)g(m)))^{-1/\Theta} F_{\eta-}^{(-1)}(1/n_j),$$

где Θ из теоремы 2.B, $g(m) \le \ln m$ — функция, стремящаяся к ∞ при $m \to \infty$, которая будет определена ниже, а постоянная C выбирается так, чтобы при всех достаточно малых a

$$\mathbf{P}(Y_{n_j} \ge -u_j) \le c_1 n V_+\big(F_{\eta-}^{(-1)}(1/n)\big) + c_2((j+1)g(m))^{-2} \quad (28)$$

для всех j (см. теорему 2.B). Здесь постоянные C, c_1 и c_2 зависят только от распределения η, функция $V_+(t)$ монотонно не возрастает. Напомним, что функция $V_+(t) \ge F_{\eta+}(t)$ из условия (12).

Введем вспомогательный ряд

$$Q = \sum_{l=1}^{\infty} q_l,$$

где $q_l := V_+\big(F_{\eta-}^{(-1)}(1/n_j)\big)$ при $n_{j-1} < l \le n_j$, $n_0 := 0$. Так как

$$q_l \le V_+\big(F_{\eta-}^{(-1)}(1/l)\big),$$

в силу условия (12) ряд Q сходится, причем каждый его член ограничен сверху соответствующим членом сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} V_+\big(F_{\eta-}^{(-1)}(1/n)\big)$. Кроме того, каждый член ряда Q стремится к 0 при $a \to 0$, поскольку для любого фиксированного l начиная с некоторого значения a будет выполняться $l \le n_1$, и $V_+\big(F_{\eta-}^{(-1)}(1/n_1)\big) \to 0$ при $a \to 0$. Следовательно, по теореме о мажорируемой сходимости $Q \to 0$ при $a \to 0$, и так как $\sum\limits_{j=1}^{\infty} n_j V_+\big(F_{\eta-}^{(-1)}(1/n_j)\big) \le 2Q$, то

$$\sum_{j=1}^{\infty} n_j V_+\big(F_{\eta-}^{(-1)}(1/n_j)\big) \to 0 \quad \text{при } a \to 0. \quad (29)$$

Отсюда в силу (28) получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(Y_{n_j} > -u_j) \to 0 \quad \text{при } a \to 0. \quad (30)$$

Оценим теперь последнюю вероятность в (27), воспользовавшись теоремой 2.A. Для всех достаточно малых a (а значит, достаточно больших m и T) имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\overline{Y}_{r_j} > \frac{u_j}{4}\right) &\le c_1 r_j F_{\eta+}(u_j) \le c_2 r_j V_+\big(F_{\eta-}^{(-1)}(1/n_j)(\ln((j+1)g(m)))^{-1/\Theta}\big) \\ &\le c_3 n_j V_+\big(F_{\eta-}^{(-1)}(1/n_j)\big)(\ln((j+1)g(m)))^{2\beta/\Theta} \\ &\le c_4 mT 2^j (\ln(j+3))^{2\beta/\Theta} (\ln g(m))^{2\beta/\Theta} V_+\big(F_{\eta-}^{(-1)}(1/n_j)\big) \\ &\le c_5 (\ln g(m))^{2\beta/\Theta} n_j V_+\big(F_{\eta-}^{(-1)}(1/n_j)\big).\end{aligned}$$

Отсюда в силу (29) можно подобрать функцию $g(m)$ так, чтобы она возрастала настолько медленно, что

$$\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{P}\left(\overline{Y}_{r_j} > \frac{u_j}{4}\right) \to 0 \quad \text{при } a \to 0. \tag{31}$$

Рассмотрим теперь предпоследнюю вероятность в (27), вновь используя теорему 2.A. Для всех достаточно малых a имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\overline{Z}_{r_j} > a\frac{u_j}{4}\right) &\le c_1 r_j F_{\zeta+}(au_j)\\
&\le c_2 r_j F_\zeta\left(F_\zeta^{(-1)}(1/m)\frac{F_\eta^{(-1)}(1/n_j)}{F_\eta^{(-1)}(1/m)}(\ln((j+1)g(m)))^{-1/\Theta}\right)\\
&\le c_3 r_j F_\zeta\big(F_\zeta^{(-1)}(1/m)\big)\left(\frac{F_\eta^{(-1)}(1/n_j)}{F_\eta^{(-1)}(1/m)}(\ln((j+1)g(m)))^{-1/\Theta}\right)^{-\alpha+\varepsilon}\\
&\le c_4\frac{r_j}{m}\left(\left(\frac{n_j}{m}\right)^{(1/\beta)-\varepsilon}(\ln((j+1)g(m)))^{-1/\Theta}\right)^{-\alpha+\varepsilon} \le c_5\frac{m^\gamma}{n_j^\gamma}(\ln((j+1)g(m)))^{(\alpha-\varepsilon)/\Theta}\\
&\le c_6 T^{-\gamma}2^{-\gamma j}(\ln(j+3))^{(\alpha-\varepsilon)/\Theta}(\ln g(m))^{(\alpha-\varepsilon)/\Theta},
\end{aligned} \tag{32}$$

где $\gamma = (\alpha-\varepsilon)((1/\beta)-\varepsilon)-1$ и $\varepsilon > 0$ настолько мало, что $\gamma > 0$.

Выбрав функцию $g(m)$ таким образом, что

$$T^{-\gamma}(\ln g(m))^{(\alpha-\varepsilon)/\Theta} \to 0 \tag{33}$$

при $a \to 0$, в силу (32) получим

$$\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{P}\left(\overline{Z}_{r_j} > a\frac{u_j}{4}\right) \to 0 \quad \text{при } a \to 0. \tag{34}$$

Поскольку $\mathbf{P}(Z_{n_j} > au_j/2) \le \mathbf{P}(\overline{Z}_{r_j} > au_j/2)$, кроме того, имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{P}\left(Z_{n_j} > a\frac{u_j}{2}\right) \to 0 \quad \text{при } a \to 0. \tag{35}$$

В итоге, сопоставив (24), (25), (27), (30), (31), (34) и (35), получим, что

$$\limsup_{a\to 0} D_1 = 0. \tag{36}$$

Соотношения (21), (22), (23) и (36) влекут за собой утверждение теоремы. Теорема 2.1 доказана.

3. Первая модель. Разнораспределенные слагаемые

3.1. Формулировка основного результата. В этом разделе мы распространим результаты разд. 2 на следующую схему серий. Случайные величины ζ_j, η_j, $j = 1, 2, \dots$, будут независимыми и не обязательно одинаково распределенными, причем их распределения будут зависеть от j и от параметра схемы серий a, который будет сходиться к 0. Для того, чтобы избежать значительных технических трудностей, и для упрощения изложения, будем предполагать в этом разделе, что

$$\eta_j \le 0 \quad \text{п. н. для всех } j. \tag{37}$$

Через $m = m(a)$ будем обозначать функцию от a такую, что $m \to \infty$ при $a \to 0$ (точнее она будет определена позже). Положим

$$F_{\zeta_j-}(t) := \mathbf{P}(\zeta_j < -t), \quad F_{\zeta_j+}(t) := \mathbf{P}(\zeta_j \ge t), \quad t \ge 0,$$

$$F^{(m)}_{\zeta\pm,(k,\Delta)}(t) := \frac{1}{\lfloor m\Delta \rfloor} \sum_{j=k+1}^{k+\lfloor m\Delta \rfloor} F_{\zeta_j \pm}(t).$$

Для изучения сходимости рассматриваемых процессов к однородным устойчивым процессам нам понадобятся условия однородного равномерно правильного изменения. (Эти условия повторяют соответствующие условия [7, § 12.5].)

[HUR(ζ)]. *Существуют фиксированная (не зависящая от параметра a) п.м.ф.*

$$F_\zeta(t) := t^{-\alpha} L_\eta(t),$$

где $\alpha \in (0,1) \cup (1,2)$ и $L_\zeta(t)$ есть м.м.ф. при $t \to \infty$, и фиксированное число $\rho_+ \in (0,1]$ такие, что для любой функции $m = m(a)$ при каждом фиксированном $\Delta > 0$

$$\lim_{a\to 0, t\to\infty} \frac{F^{(m)}_{\zeta+,(k,\Delta)}(t)}{F_\zeta(t)} = \rho_+, \quad \lim_{a\to 0, t\to\infty} \frac{F^{(m)}_{\zeta-,(k,\Delta)}(t)}{F_\zeta(t)} = \rho_- := 1 - \rho_+,$$

где сходимость равномерна по k. Кроме того, предполагается, что

$$\mathbf{E}\zeta_j = 0 \quad \text{при всех } j, \text{ если } \alpha \in (1,2).$$

Положим

$$F_{\eta_j -}(t) := \mathbf{P}(\eta_j < -t),\ t \ge 0, \quad F^{(m)}_{\eta-,(k,\Delta)}(t) := \frac{1}{\lfloor m\Delta \rfloor} \sum_{j=k+1}^{k+\lfloor m\Delta \rfloor} F_{\eta_j -}(t).$$

Условия однородного равномерно правильного изменения для случайных величин η_j выглядят аналогично [HUR(ζ)].

[HUR(η)]. *Выполняется условие (37). Кроме того, существует такая фиксированная (не зависящая от параметра a) п.м.ф.*

$$F_\eta(t) := t^{-\beta} L_\eta(t),$$

где $\beta \in (0,1)$ и $L_\eta(t)$ есть м.м.ф. при $t \to \infty$, что для любой функции $m = m(a)$ при каждом фиксированном $\Delta > 0$

$$\lim_{a\to 0, t\to\infty} \frac{F^{(m)}_{\eta-,(k,\Delta)}(t)}{F_\eta(t)} = 1,$$

где сходимость равномерна по k.

Как и ранее, положим

$$b(a) := F_\zeta^{(-1)}(1/m), \quad S(t,a) := \frac{S_{\lfloor mt \rfloor}}{b(a)}, \quad \overline{S}(T,a) := \sup_{0\le t\le T} S(t,a) \equiv \frac{\max\limits_{0\le k\le mT} S_k}{b(a)}.$$

Пусть, как и прежде, $\rho = \rho_+ - \rho_-$, $X^{(\alpha,\rho)}(\cdot)$ и $X^{(\beta,-1)}(\cdot)$ — независимые устойчивые процессы с соответствующими параметрами, $X(t) := X^{(\alpha,\rho)}(t) + X^{(\beta,-1)}(t)$, $\overline{X}(T) := \sup\limits_{0\le t\le T} \{X(t)\}$.

Мы можем привести теперь основное утверждение этого раздела.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* [HUR(ζ)], [HUR(η)] *и*

$$\beta < \alpha. \tag{38}$$

Пусть, кроме того, функция $m = m(a)$ задана следующим образом:

$$m = m(a) = R^{(-1)}(a), \quad R(n) := \frac{F_\zeta^{(-1)}(1/n)}{F_\eta^{(-1)}(1/n)}.$$

Тогда $\overline{S}(\infty, a) < \infty$ *п. н. при всех достаточно малых* a, $\overline{X}(\infty) < \infty$ *п. н. и имеет место слабая сходимость случайных величин* $\overline{S}(\infty, a)$ *по распределению:* $\overline{S}(\infty, a) \Rightarrow \overline{X}(\infty)$ *при* $a \to 0$.

Замечание 3.1. Если нам априори известны такие $F_\zeta(t)$, ρ_+ и $F_\eta(t)$, что при $m = m(a) = R^{(-1)}(a)$ выполняются условия [HUR(ζ)] и [HUR(η)] с этими $F_\zeta(t)$, ρ_+ и $F_\eta(t)$, то в условиях теоремы 3.1 можно заменить требование выполнения [HUR(ζ)] и [HUR(η)] более слабым требованием выполнения этих условий лишь для указанной функции $m = m(a)$.

3.2. Вспомогательные теоремы о сходимости к устойчивым процессам. Для того чтобы доказать теорему 3.1, нам понадобится следующая теорема о сходимости случайных процессов.

Пусть, как и прежде, $m = m(a)$ — функция такая, что $m \to \infty$ при $a \to 0$. Положим, как и ранее, $Z_n := \sum_{j=1}^{n} \zeta_j$, $b(a) := F_\zeta^{(-1)}(1/m)$,

$$Z(t, a) := \frac{Z_{\lfloor mt \rfloor}}{b(a)}.$$

Теорема 3.2. *Пусть выполняется условие* [HUR(ζ)]. *Тогда для любого фиксированного* $T > 0$ *при* $a \to 0$

$$Z(\cdot, a) \Rightarrow X^{(\alpha,\rho)}(\cdot),$$

т. е. распределения процессов $Z(\cdot, a)$ *слабо сходятся в* $D(0, T)$ *к распределению устойчивого процесса* $X^{(\alpha,\rho)}(\cdot)$.

Пусть, как и раньше, $Y_n := \sum_{j=1}^{n} \eta_j$,

$$Y(t, a) := \frac{aY_{\lfloor mt \rfloor}}{b(a)}.$$

Следствие 3.1. *Пусть выполняется условие* [HUR(ζ)].

Тогда для любого фиксированного $T > 0$ *при* $a \to 0$, *во-первых, имеет место слабая сходимость процессов* $S(\cdot, a)$ *по распределению в* $D(0, T)$:

$$S(\cdot, a) \Rightarrow X(\cdot), \tag{39}$$

и, во-вторых,

$$\overline{S}(T, a) \Rightarrow \overline{X}(T), \tag{40}$$

т. е. распределение случайной величины $\overline{S}(T, a)$ *слабо сходится к распределению* $\overline{X}(T)$.

В условиях следствия 3.1

$$Y(t, a) = \frac{aY_{\lfloor mt \rfloor}}{b(a)} \sim \frac{Y_{\lfloor mt \rfloor}}{F_\eta^{(-1)}(1/m)} \quad \text{при } a \to 0,$$

поэтому в силу теоремы 3.2

$$Y(\cdot, a) \Rightarrow X^{(\beta,-1)}(\cdot) \quad \text{при } a \to 0. \tag{41}$$

Соотношение (39) следует непосредственно из теоремы 3.2 и соотношения (41). Соотношение (40) следует из (39) в силу непрерывности функционала $f(x(\cdot)) = \sup\limits_{0 \le t \le T} x(t)$ в $D(0, T)$.

Чтобы доказать теорему 3.2, нам потребуются следующие обозначения и условия. Положим

$$F_{\zeta-}^{(m)}(t) := \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} F_{\zeta_j -}(t), \quad F_{\zeta+}^{(m)}(t) := \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} F_{\zeta_j +}(t).$$

Условия однородного равномерно правильного изменения, введенные ранее, являются усилением для случайных процессов следующих условий равномерно правильного изменения, служащих для изучения сходимости распределений случайных величин $Z(t,a)$.

[UR(ζ)]. *Существуют фиксированная (не зависящая от параметра a) п.м.ф.*

$$F_\zeta(t) := t^{-\alpha} L_\eta(t),$$

где $\alpha \in (0,1) \cup (1,2)$ и $L_\zeta(t)$ есть м.м.ф. при $t \to \infty$, и фиксированное число $\rho_+ \in (0,1]$ такие, что для любой функции $m = m(a) \to \infty$ при $a \to 0$ выполняется

$$\lim_{a\to 0, t\to\infty} \frac{F^{(m)}_{\zeta+}(t)}{F_\zeta(t)} = \rho_+, \quad \lim_{a\to 0, t\to\infty} \frac{F^{(m)}_{\zeta-}(t)}{F_\zeta(t)} = \rho_- := 1 - \rho_+.$$

Кроме того, предполагается, что

$$\mathbf{E}\zeta_j = 0 \quad \text{при всех } j, \text{ если } \alpha \in (1,2).$$

Нам понадобится также условие «пренебрежимой малости» слагаемых $\frac{\zeta_j}{b(a)}$.

[S(ζ)]. *Для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $m = m(a) \to \infty$ при $a \to 0$ выполняется*

$$\max_{j\le m} \mathbf{P}\{|\zeta_j| > \varepsilon b(a)\} = \max_{j\le m} (F_{\zeta_j +}(\varepsilon b(a)) + F_{\zeta_j -}(\varepsilon b(a))) \to 0$$

при $a \to 0$.

Теорема 3.A. *Пусть выполняются условия [UR(ζ)] и [S(ζ)]. Тогда при $a \to 0$ распределение случайной величины $\frac{1}{b(a)} Z_{\lfloor m \rfloor}$ слабо сходится к устойчивому распределению $\mathbf{F}^{(\alpha,\rho)}$:*

$$\frac{1}{b(a)} Z_{\lfloor m \rfloor} \Rightarrow X^{(\alpha,\rho)},$$

где $X^{(\alpha,\rho)} := X^{(\alpha,\rho)}(1)$ имеет устойчивое распределение с соответствующими параметрами.

Эта теорема доказана в [7] для случая $\alpha \in (1,2)$ (см. теорему 12.4.1 в [7]). Там же содержится замечание о том, что доказательство этой теоремы без изменений переносится на случай $\alpha \in (0,1)$ (см. замечание после теоремы 12.4.1 в [7]). Действительно, для этого в доказательстве теоремы 12.4.1 нужно всего лишь опустить требование равенства нулю математических ожиданий слагаемых.

Доказательство теоремы 3.2. При $\alpha \in (1,2)$ утверждение этой теоремы следует непосредственно из теоремы 12.4.2 в [7]. Поэтому далее в доказательстве будем считать, что $\alpha \in (0,1)$. Доказательство для таких значений α аналогично доказательству той же теоремы 12.4.2 в [7].

Поскольку при каждом a процесс $Z(t,a)$ имеет независимые приращения, достаточно доказать, что выполняются следующие два условия (см. теорему VI.5.5 в [8]).

1. Конечномерные распределения процесса $Z(\cdot,a)$ слабо сходятся к соответствующим конечномерным распределениям $X^{(\alpha,\rho)}(\cdot)$ при $m \to \infty$.

2. Для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{h\to 0} \limsup_{a\to 0} \sup_{s,t\le T: |s-t|\le h} \mathbf{P}(|Z(t,a) - Z(s,a)| > \varepsilon) = 0.$$

Выполнение условия 1 следует из теоремы 3.A. Выполнение первого из условий теоремы 3.A — условия [UR(ζ)] — очевидно. Проверим выполнение второго условия — условия пренебрежимой малости [S(ζ)]. Имеем

$$\max_j \mathbf{P}(|\zeta_j| > \varepsilon b(a)) \le m\Delta \max_k \bigl(F^{(m)}_{\zeta-,(k,\Delta)}(\varepsilon b(a)) + F^{(m)}_{\zeta+,(k,\Delta)}(\varepsilon b(a))\bigr) \le 2m\Delta F_\zeta(\varepsilon b(a)) \le 3\Delta\varepsilon^{-\alpha}$$

для всех достаточно малых $a > 0$. Так как $\Delta > 0$ может быть сколь угодно малым, условие пренебрежимой малости выполнено.

Покажем теперь, что выполняется условие 2. Без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon < 1$. Из условия [HUR(ζ)] следует, что для любого $h > 0$ существуют такие постоянные m_0 и v_0, что

$$F^{(m)}_{\zeta+,(k,2h)}(v) \le 2F_\zeta(v), \quad F^{(m)}_{\zeta-,(k,2h)}(v) \le 2F_\zeta(v) \quad \text{при всех } k,\ v \ge v_0 \text{ и } m \ge m_0.$$

Отсюда в силу следствия 3.2, приведенного ниже, получим, что для любого $h > 0$ существует такое m_0, что при $m \ge m_0$ и $|s-t| \le h$

$$\mathbf{P}(|Z(t,a) - Z(s,a)| > \varepsilon) \le \mathbf{P}(Z(t,a) - Z(s,a) > \varepsilon) + \mathbf{P}(Z(t,a) - Z(s,a) < -\varepsilon) \le c_1 mhF_\zeta(\varepsilon b(a)) \le c_2 mh\varepsilon^{-\alpha/2} F_\zeta\bigl(F_\zeta^{(-1)}(1/m)\bigr) \le c_3 h\varepsilon^{-\alpha/2}.$$

Значит,

$$\limsup_{a\to 0} \sup_{s,t\le T:|s-t|\le h} \mathbf{P}(|Z(t,a) - Z(s,a)| > \varepsilon) \le c_3 h\varepsilon^{-\alpha/2},$$

и выполняется условие 2.

Теорема 3.2 доказана.

3.3. Некоторые оценки для уклонений сумм разнораспределенных слагаемых. Для доказательства теоремы 3.1 нам понадобятся аналоги теорем 2.A и 2.B для разнораспределенных слагаемых. Утверждения теорем 2.A и 2.B формулируются и доказываются в [7] для сумм одинаково распределенных случайных величин. Однако в этих доказательствах почти ничего не изменится (в случае неположительных слагаемых η_j), если рассматриваемые там фиксированные распределения заменить усредненными распределениями слагаемых. Поэтому доказательства теорем этого раздела во многом аналогичны доказательствам соответствующих теорем в [7].

Обозначения п. 3.3 автономны — обозначения из других разделов не используются.

Пусть $\eta_1, \eta_2, \dots$ — независимые неположительные случайные величины. Обозначим

$$Y_n := \sum_{j=1}^n \eta_j, \quad F_{\eta_j -}(t) := \mathbf{P}(\eta_j < -t), \quad F^{(n)}_{\eta-}(t) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n F_{\eta_j -}(t), \quad t \ge 0.$$

Теорема 3.3. *Пусть*

$$F^{(n)}_{\eta-}(t) \ge W(t) := t^{-\beta} L_W(t), \tag{42}$$

где $\beta \in (0,1)$ и $L_W(t)$ есть м.м.ф. при $t \to \infty$. Тогда найдутся положительные постоянные C, c и Θ такие, что для всех $z \ge C(W^{(-1)}(1/n))^\beta$ и всех достаточно больших n

$$\mathbf{P}(Y_n \ge -z) \le \exp\left(-c\left(\frac{z}{W^{(-1)}(1/n)}\right)^{-\Theta}\right).$$

Если $L_W(t)$ не возрастает при достаточно больших t или $L_W(t) \to \mathrm{const}$ при $t \to \infty$, то можно положить $\Theta = \beta/(1-\beta)$. В общем случае в качестве Θ можно взять любое фиксированное число $\Theta < \beta/(1-\beta)$.

Доказательство. Как уже отмечалось, доказательство этой теоремы во многом повторяет доказательство теоремы 2.3.1 в [7].

Имеем

$$\mathbf{P}(Y_n \ge -z) \le e^{\lambda z}\mathbf{E}e^{\lambda Y_n} = e^{\lambda z}\prod_{j=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\lambda t}dF_{\eta_j-}(-t)$$

$$= e^{\lambda z}\prod_{j=1}^{n}\left(1-\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}F_{\eta_j-}(t)\,dt\right) = e^{\lambda z}\exp\left(\sum_{j=1}^{n}\ln\left(1-\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}F_{\eta_j-}(t)\,dt\right)\right)$$

$$\le e^{\lambda z}\exp\left(-\lambda\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}F_{\eta_j-}(t)\,dt\right) = e^{\lambda z}\exp\left(-\lambda n\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}F^{(m)}_{\eta-}(t)\,dt\right)$$

$$\le \exp\left(\lambda z - \lambda n\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}W(t)\,dt\right).$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}(Y_n \ge -z) \le \exp\left(\lambda z - \lambda n\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}W(t)\,dt\right). \tag{43}$$

Осталось оценить правую часть в (43). Эти оценки повторяют соответствующие рассуждения в доказательстве теоремы 2.3.1 в [7], поэтому мы ограничимся их кратким изложением.

При $\lambda \to 0$ имеем

$$\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}W(t)\,dt = \int\limits_0^\infty e^{-v}W(v/\lambda)\,dv \sim \Gamma(1-\beta)W(1/\lambda).$$

Положим $u = z/W^{(-1)}(1/n)$ и возьмем $\lambda = (\beta\Gamma(1-\beta)/u)^{1/(1-\beta)}/W^{(-1)}(1/n)$, так что при $z \ge C(W^{(-1)}(1/n))^\beta$ выполняется $\lambda \le C^{-1/(1-\beta)}(\beta\Gamma(1-\beta))^{1/(1-\beta)}$ и для некоторой (достаточно большой) постоянной C

$$\lambda z - \lambda n\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}W(t)\,dt \le u(\beta\Gamma(1-\beta)/u)^{1/(1-\beta)}$$
$$-\sqrt{1-\frac{1-\beta}{2}}n\Gamma(1-\beta)W((\beta\Gamma(1-\beta)/u)^{-1/(1-\beta)}W^{(-1)}(1/n)).$$

Если $L_W(t)$ не возрастает при всех достаточно больших t или $L_W(t) \to \mathrm{const}$ при $t \to \infty$, то при всех достаточно больших n

$$nW((\beta\Gamma(1-\beta)/u)^{-1/(1-\beta)}W^{(-1)}(1/n)) \ge \sqrt{1-\frac{1-\beta}{2}}(\beta\Gamma(1-\beta)/u)^{\beta/(1-\beta)},$$

следовательно,

$$\lambda z - \lambda n\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}W(t)\,dt \le -\frac{1}{2}(1-\beta)\beta^{\beta/(1-\beta)}(\Gamma(1-\beta))^{1/(1-\beta)}u^{\beta/(1-\beta)},$$

откуда и следует утверждение теоремы в силу (43).

Если же $L_W(t)$ — произвольная м.м.ф., то для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n и $\mu W^{(-1)}(1/n)$ выполняется

$$W(\mu W^{(-1)}(1/n)) \ge \mu^{-\beta+\varepsilon}/n.$$

Полагая здесь $\mu=(\beta\Gamma(1-\beta)/u)^{-1/(1-\beta)}$ и повторяя приведенные выше рассуждения, получим утверждение теоремы для таких $L_W(t)$.

Теорема 3.3 доказана.

Перейдем теперь к обобщению теоремы 2.A на случай разнораспределенных слагаемых. Пусть ζ_1, ζ_2, … — независимые случайные величины. Обозначим

$$Z_n:=\sum_{j=1}^n\zeta_j,\quad \overline{Z}_n:=\max_{j=1,\dots,n}Z_j,\quad F_{\zeta_j-}(t):=\mathbf{P}(\zeta_j<-t),\quad F_{\zeta_j+}(t):=\mathbf{P}(\zeta_j\ge t),$$

$$F^{(n)}_{\zeta-}(t):=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n F_{\zeta_j-}(t),\quad F^{(n)}_{\zeta+}(t):=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n F_{\zeta_j+}(t).$$

В этом разделе будем предполагать, что при $t>0$ и всех достаточно больших n выполняется

$$F^{(n)}_{\zeta+}(t)\le V(t):=t^{-\alpha}L_V(t),\tag{44}$$

где $\alpha>0$ и $L_V(t)$ есть м.м.ф. при $t\to\infty$. Никакие другие условия на распределения случайных величин ζ_j не накладываются.

Положим

$$E_j:=\{\zeta_j<y\},\quad E:=\bigcap_{j=1}^n E_j,\quad R_j(\mu,y):=\int\limits_{-\infty}^{y}e^{-\mu x}d\mathbf{P}(\zeta_j<x).$$

Далее нам понадобится следующая

Лемма 3.A (см. [7, лемма 12.1.1] и неравенство (12.1.3) в [7]). *При любых* y, $\mu\ge0$, $x\ge0$

$$\mathbf{P}(\overline{Z}_n>x,E)\le e^{-\mu x}\max_{k\le n}\prod_{j=1}^k R_j(\mu,y).$$

Теорема 3.4. *Пусть выполняется условие* (44) *и* $\alpha\in(0,1)$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(\overline{Z}_n>x,E)\le C(nV(y))^{x/y},\tag{45}$$

где $C=e^{(x/y)-(x/y)\ln(x/y)}+\varepsilon(nV(y))$, *функция* $\varepsilon(u)$ *ограничена и стремится к* 0 *при* $u\to0$.

Доказательство этой теоремы во многом повторяет доказательство теоремы 2.2.1 в [7].

Поскольку $R_j(\mu,y)>0$ для всех j, имеем

$$\prod_{j=1}^k R_j(\mu,y)\le e^{\sum\limits_{j=1}^k(R_j(\mu,y)-1)}.\tag{46}$$

Далее,

$$R_j(\mu,y)=\int\limits_{-\infty}^{0}e^{\mu t}d\mathbf{P}(\zeta_j<t)+\int\limits_0^y e^{\mu t}d\mathbf{P}(\zeta_j<t)$$

$$\le\mathbf{P}(\zeta_j<0)+(1-\mathbf{P}(\zeta_j<0))-e^{\mu y}F_{\zeta_j+}(y)+\mu\int\limits_0^y e^{\mu t}F_{\zeta_j+}(t)\,dt.$$

Таким образом,

$$\sum_{j=1}^k(R_j(\mu,y)-1)\le\sum_{j=1}^k\left(\mu\int\limits_0^y e^{\mu t}F_{\zeta_j+}(t)\,dt\right)\le\mu\int\limits_0^y e^{\mu t}nF^{(m)}_{\zeta+}(t)\,dt\le\mu n\int\limits_0^y e^{\mu t}V(t)\,dt.$$

Отсюда по лемме 3.A

$$\mathbf{P}(\overline{Z}_n > x, E) \le e^{-\mu x} \exp\left(\mu n \int\limits_0^y e^{\mu t} V(t)\, dt\right). \tag{47}$$

Оценим интеграл $\int\limits_0^y e^{\mu t} V(t)\, dt$ точно так же, как это сделано в доказательстве теоремы 2.2.1 в [7]. Имеем

$$\int\limits_0^y e^{\mu t} V(t)\, dt = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \int\limits_0^M e^{\mu t} V(t)\, dt, \quad I_2 = \int\limits_M^y e^{\mu t} V(t)\, dt, \quad M = 2\alpha/\mu < y.$$

Далее,

$$I_1 \le e^{\mu M} \int\limits_0^M V(t)\, dt \le \frac{e^{2\alpha} M V(M)}{\alpha + 1}(1 + o(1))$$

при $\mu \to 0$. Таким образом, при всех достаточно малых μ

$$I_1 \le \frac{c}{\mu} V\left(\frac{1}{\mu}\right). \tag{48}$$

Оценим теперь

$$I_2 = \int\limits_M^y e^{\mu t} V(t)\, dt = \frac{e^{\mu y}}{\mu} V(y) \int\limits_0^{(y-M)\mu} \frac{V(y - u/\mu)}{V(y)} e^{-u}\, du,$$

где $V(y - u/\mu) \sim V(y)$ при $\mu y \to \infty$. Нетрудно показать, что при всех достаточно больших μy

$$\frac{V(y - u/\mu)}{V(y)} e^{-u} \le e^{-u/4}$$

на интервале $u \in [0, (y - M)\mu]$ (см. доказательство теоремы 2.2.1 в [7]). Поэтому при $y \to \infty$, $\mu \to 0$, $\mu y \to \infty$

$$\int\limits_0^{(y-M)\mu} \frac{V(y - u/\mu)}{V(y)} e^{-u}\, du \sim \int\limits_0^{\infty} e^{-u} du = 1$$

и, следовательно,

$$I_2 \sim \frac{e^{\mu y}}{\mu} V(y). \tag{49}$$

Сопоставляя (48) и (49), получим, что

$$\int\limits_0^y e^{\mu t} V(t)\, dt \le \frac{c}{\mu} V\left(\frac{1}{\mu}\right) + \frac{e^{\mu y}}{\mu} V(y)(1 + \varepsilon(\mu, y)),$$

где $\varepsilon(\mu, y) \to 0$ при $y \to \infty$, $\mu \to 0$, $\mu y \to \infty$. Стало быть, в силу (47)

$$\ln \mathbf{P}(\overline{Z}_n > x, E) \le -\mu x + cnV(1/\mu) + nV(y)e^{\mu y}(1 + \varepsilon(\mu, y)).$$

Положим
$$\mu = \frac{1}{y} \ln \left(\frac{x}{ynV(y)} \right).$$
Такой выбор μ обеспечит нам выполнение требуемого неравенства (45).

Теорема 3.4 доказана.

Следствие 3.2. *Пусть выполняется условие* (44) *и* $\alpha \in (0,1)$. *Тогда*
$$\mathbf{P}(\overline{Z}_n > x) \le nV(x)(1 + \delta(nV(x))),$$
где функция δ *определяется только функцией* V *и такова, что*
$$\delta(u) \to 0 \quad \text{при } u \to 0.$$

Доказательство этого следствия совершенно аналогично доказательству следствия 2.2.1 в [7]. Поэтому мы приведем это доказательство в кратком виде.

Пусть v таково, что $nV(x) \le v$. Без ограничения общности считаем, что $v < 1$.

В силу теоремы 3.4 имеем
$$\mathbf{P}(\overline{Z}_n > x) \le \mathbf{P}(\overline{Z}_n > x, E) + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(\zeta_j > y) \le (1 + c(nV(y))^{(x/y)-1})nV(y). \quad (50)$$
Возьмем $y = x/(1 + |\ln v|^{-1/2})$. Тогда соотношения $v \to 0$ и $nV(x) \le v$ влекут за собой $x \to \infty$ и $x/y \to 1$. Значит, найдется такая функция $\varepsilon_1(v) \to 0$ при $v \to 0$, что при $nV(x) \le v$
$$V(y) \le (1 + \varepsilon_1(v))V(x).$$
Кроме того, при $nV(x) \le v$ выполняется
$$(nV(y))^{(x/y)-1} \le \exp\left(\frac{\ln v}{|\ln v|^{1/2}} \right) =: \varepsilon_2(v).$$

Подставляя полученные неравенства в (50), получим
$$\mathbf{P}(\overline{Z}_n > x) \le (1 + c(1 + \varepsilon_1(v))^{(x/y)-1}\varepsilon_2(v))nV(x).$$
Следствие 3.2 доказано.

Доказательство теоремы 3.1. Используем обозначения пп. 3.1, 3.2. Для доказательства теоремы 3.1 нам понадобится еще один результат, дополняющий следствие 3.2 для $\alpha \in (1,2)$.

Теорема 3.B. *Пусть для* $\alpha \in (1,2)$ *выполняется условие* [HUR(ζ)]. *Тогда для любого фиксированного* $t > 0$ *и всех достаточно малых* a *(т. е. достаточно больших* $m = m(a)$*)*
$$\mathbf{P}(\overline{Z}_{\lfloor tm \rfloor} > x) \le cmF_\zeta(x),$$
где постоянная c *зависит только функции* F_ζ.

Эта теорема следует непосредственно из теоремы 12.1.1 в [7].

Доказательство теоремы 3.1 во многом аналогично доказательству теоремы 2.2. Выберем произвольное $z > 0$ и докажем, что
$$\mathbf{P}(\overline{S}(\infty, a) > z) \to \mathbf{P}(\overline{X}(\infty) > z) \quad \text{при } a \to 0.$$
Имеем
$$|\mathbf{P}(\overline{S}(\infty, a) > z) - \mathbf{P}(\overline{X}(\infty) > z)| \le D_1 + D_2 + D_3, \quad (51)$$
где
$$D_1 := |\mathbf{P}(\overline{S}(\infty, a) > z) - \mathbf{P}(\overline{S}(T, a) > z)|, \quad D_2 := |\mathbf{P}(\overline{S}(T, a) > z) - \mathbf{P}(\overline{X}(T) > z)|,$$

$$D_3 := |\mathbf{P}(\overline{X}(T) > z) - \mathbf{P}(\overline{X}(\infty) > z)|.$$

Если $T = T(a)$ стремится к ∞ достаточно медленно при $a \to 0$, то $D_2 \to 0$ в силу следствия 3.1. Далее будем считать, что T зависит от a именно таким образом. Кроме того, будем предполагать, что $T(a)$ принимает только целые значения. Это даст нам возможность воспользоваться условиями равномерно правильного изменения для $\Delta = 1$.

Для таких (неограниченно возрастающих) T

$$\lim_{a\to 0} D_3 = 0. \tag{52}$$

Докажем теперь, что $\lim\limits_{a\to 0} D_1 = 0$. Обозначим $\nu := \inf\{n \ge 1 : S_n > zb(a)\}$. Имеем

$$\mathbf{P}(\overline{S}(\infty, a) > z) - \mathbf{P}(\overline{S}(T, a) > z) = \mathbf{P}(mT < \nu < \infty).$$

Положим $n_j = 2^j \lfloor mT \rfloor$. Тогда

$$\mathbf{P}(mT < \nu < \infty) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}(n_j < \nu \le n_{j+1}) \tag{53}$$

и при любых $u_j > 0$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(n_j < \nu \le n_{j+1}) &\le \mathbf{P}(Y_{n_j} > -u_j) + \mathbf{P}\left(Z_{n_j} > a\frac{u_j}{2}\right)\\ &+ \mathbf{P}\Bigg(Y_{n_j} \le -u_j,\ Z_{n_j} \le a\frac{u_j}{2},\ \frac{1}{b(a)}\max\{\zeta_{n_j+1}, \zeta_{n_j+1} + \zeta_{n_j+2},\\ &\qquad \ldots, \zeta_{n_j+1} + \cdots + \zeta_{n_{j+1}}\} > z + \frac{au_j}{2b(a)}\Bigg)\\ &\le \mathbf{P}(Y_{n_j} > -u_j) + \mathbf{P}\left(Z_{n_j} > a\frac{u_j}{2}\right) + \mathbf{P}\left(\overline{Z}'_{n_j} > a\frac{u_j}{2}\right),\end{aligned} \tag{54}$$

где $\overline{Z}'_{n_j} = \max\{\zeta_{n_j+1}, \zeta_{n_j+1} + \zeta_{n_j+2}, \ldots, \zeta_{n_j+1} + \cdots + \zeta_{n_{j+1}}\}$.

Положим $V(t) = 2F_\zeta(t)$. В сумме $Z_{n_j} = \sum\limits_{i=1}^{2^{j-1}} (\zeta_{(i-1)k+1} + \zeta_{(i-1)k+2} + \cdots + \zeta_{ik})$ усредненное распределение всех слагаемых удовлетворяет условию (44) (для всех достаточно малых a), так как этому условию удовлетворяет усредненное распределение слагаемых $\zeta_{(i-1)k+1}, \zeta_{(i-1)k+2}, \ldots, \zeta_{ik}$ для каждого i в силу условия равномерно правильного изменения для $\Delta = 1$. Точно так же усредненное распределение всех слагаемых ζ, участвующих в выражении $\max\{\zeta_{n_j+1}, \zeta_{n_j+1} + \zeta_{n_j+2}, \ldots, \zeta_{n_j+1} + \cdots + \zeta_{n_{j+1}}\}$, удовлетворяет условию (44) для всех достаточно малых a.

Аналогично если положить

$$W(t) = \frac{1}{2}F_\eta(t),$$

то усредненное распределение слагаемых в сумме $Y_{n_j} = \sum\limits_{i=1}^{n_j} \eta_j$ будет удовлетворять условию (42) для всех достаточно малых a.

Выберем u_j так, чтобы выполнялось

$$\mathbf{P}(Y_{n_j} > -u_j) \le ((j+1)g(m))^{-2}, \tag{55}$$

где $g(m)$ — некоторая функция такая, что $m \ge g(m) \to \infty$ при $a \to 0$. В силу теоремы 3.3 неравенство (55) будет верно для всех достаточно малых a, если положить

$$u_j = c_1(\ln((j+1)g(m)))^{-1/\Theta}W^{(-1)}(1/n_j)$$
$$= c_1(\ln((j+1)g(m)))^{-1/\Theta}F_\eta{}^{(-1)}(1/(2^{j-2}k)),$$

где постоянная c_1 зависит только от функции W.

Оценим теперь последнюю вероятность в (54), воспользовавшись следствием 3.2 и теоремой 3.B. Для всех достаточно малых a (а значит, достаточно больших m и T) имеем

$$\mathbf{P}\left(\overline{Z}'_{n_j} > a\frac{u_j}{2}\right) \le c_2 n_j V(au_j)$$
$$\le c_3 mT2^j F_\zeta\left(F_\zeta^{(-1)}(1/m)\frac{F_\eta^{(-1)}(1/(mT2^{j-2}))}{F_\eta^{(-1)}(1/m)}(\ln((j+1)g(m)))^{-1/\Theta}\right)$$
$$\le c_4 mT2^j F_\zeta\big(F_\zeta^{(-1)}(1/m)(T2^j)^{(1/\beta)-\varepsilon}(\ln((j+1)g(m)))^{-1/\Theta}\big)$$
$$\le c_5 mT2^j F_\zeta\big(F_\zeta^{(-1)}(1/m)\big)((T2^j)^{(1/\beta)-\varepsilon}(\ln((j+1)g(m)))^{-1/\Theta})^{-\alpha+\varepsilon}$$
$$\le c_6 T^{-\gamma}2^{-\gamma j}(\ln(3j+3))^{(\alpha-\varepsilon)/\Theta}(\ln g(m))^{(\alpha-\varepsilon)/\Theta}, \quad (56)$$

где $\gamma := (\alpha-\varepsilon)((1/\beta)-\varepsilon)-1$ и $\varepsilon \in (0,\alpha)$ настолько мало, что $\gamma > 0$.

Совершенно аналогично

$$\mathbf{P}\left(Z_{n_j} > a\frac{u_j}{2}\right) \le c_6 T^{-\gamma}2^{-\gamma j}(\ln(3j+3))^{(\alpha-\varepsilon)/\Theta}(\ln g(m))^{(\alpha-\varepsilon)/\Theta}. \quad (57)$$

Осталось выбрать функцию $g(m)$ таким образом, что

$$T^{-\gamma}(\ln g(m))^{(\alpha-\varepsilon)/\Theta} \to 0 \quad (58)$$

при $a \to 0$. В итоге, сопоставив (53), (54), (28), (56), (57) и (58), получим

$$\mathbf{P}(mT < \nu < \infty, \overline{A})$$
$$\le \sum_{j=1}^{\infty}(g(m))^{-2}j^{-2} + \sum_{j=1}^{\infty}2c_6 T^{-\gamma}(\ln g(m))^{(\alpha-\varepsilon)/\Theta}2^{-\gamma j}(\ln(3j))^{(\alpha-\varepsilon)/\Theta}$$
$$\le c_7((g(m))^{-2} + T^{-\gamma}(\ln g(m))^{(\alpha-\varepsilon)/\Theta}) \to 0$$

при $a \to 0$. Следовательно,

$$\limsup_{a\to 0} D_1 = 0. \quad (59)$$

Соотношения (51), (52) и (59) влекут за собой утверждение теоремы.

Теорема доказана.

4. Вторая модель

В этом разделе рассмотрим вторую модель для одинаково распределенных слагаемых, сведя ее в известном смысле к первой модели для разнораспределенных слагаемых. Будем предполагать, что случайные величины $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и одинаково распределены, причем их распределение зависит от параметра a. Замечание по поводу второй модели для разнораспределенных слагаемых см. в конце раздела.

Обозначим

$$p_a := \mathbf{P}(\xi \ge 0), \quad F^{(+)}(t) := \mathbf{P}(\xi \ge t \mid \xi \ge 0), \quad F^{(-)}(t) := \mathbf{P}(\xi < -t \mid \xi < 0).$$

Для того чтобы сформулировать основной результат, нам понадобится условие на асимптотическое поведение распределения ξ.

[R(ξ)]. *Существуют фиксированные (не зависящие от параметра a) функции*

$$F_\zeta(t) := t^{-\alpha} L_\zeta(t) \quad \text{и} \quad W(t) = t^{-\beta} L_W(t), \tag{60}$$

где $\alpha \in (0,1) \cup (1,2)$, $\beta \in (0,1)$, $L_\zeta(t)$ и $L_W(t)$ — м.м.ф. при $t \to \infty$ такие, что $\beta < \alpha$,

$$\lim_{\substack{a\to 0,\\ t\to\infty}} \frac{F^{(+)}(t)}{F_\zeta(t)} = 1, \quad \lim_{\substack{a\to 0,\\ t\to\infty}} \frac{F^{(-)}(ta)}{W(t)} = 1,$$

пределы являются двойными по a и t (не последовательными). Кроме того, существует такое фиксированное $p \in (0,1)$, что

$$\lim_{a\to 0} p_a = p.$$

Положим

$$m = m(a) := R^{(-1)}(a), \quad R(n) := \frac{F_\zeta^{(-1)}(1/n)}{W^{(-1)}(1/n)},$$

$$S(t,a) := \frac{S_{\lfloor mt \rfloor}}{F_\zeta^{(-1)}(1/m)}, \quad \overline{S}(T,a) := \sup_{0\le t\le T} S(t,a).$$

Заметим, что $m(a) \to \infty$ при $a \to 0$.

Основным результатом этого раздела является

Теорема 4.1. *Пусть выполнено условие* [R(ξ)]. *Тогда при $a \to 0$ имеет место слабая сходимость случайных величин $\overline{S}(\infty,a)$ по распределению:*

$$\overline{S}(\infty,a) \Rightarrow \max_{t\ge 0}\{p^{1/\alpha} X^{(\alpha,1)}(t) + (1-p)^{1/\beta} X^{(\beta,-1)}(t)\}, \tag{61}$$

где $X^{(\alpha,1)}(\cdot)$ и $X^{(\beta,-1)}(\cdot)$ — независимые устойчивые процессы с соответствующими параметрами.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Пусть выполнено условие* [R(ξ)].

Тогда для любого фиксированного $T \in (0,\infty)$ при $a \to 0$, во-первых, имеет место слабая сходимость процессов $S(\cdot,a)$ по распределению в $D(0,T)$:

$$S(\cdot,a) \Rightarrow p^{1/\alpha} X^{(\alpha,1)}(\cdot) + (1-p)^{1/\beta} X^{(\beta,-1)}(\cdot), \tag{62}$$

где $X^{(\alpha,1)}(\cdot)$ и $X^{(\beta,-1)}(\cdot)$ — независимые устойчивые процессы с соответствующими параметрами; и, во-вторых,

$$\overline{S}(T,a) \Rightarrow \max_{t\le T}\{p^{1/\alpha} X^{(\alpha,1)}(t) + (1-p)^{1/\beta} X^{(\beta,-1)}(t)\}, \tag{63}$$

т. е. распределение случайной величины $\overline{S}(T,a)$ слабо сходится к распределению правой части (63).

Доказательство теоремы 4.2. Докажем сходимость (62). Для этого рассмотрим случайные величины $\delta_j := I(\xi_j \ge 0)$. Распределение S_n совпадает с распределением суммы

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_j \zeta_j + a(1-\delta_j)\eta_j,$$

где случайные величины ζ_j, η_j независимы, не зависят от случайных величин ξ_j и таковы, что при $t \ge 0$

$$\mathbf{P}(\zeta_j < 0) = 0, \quad \mathbf{P}(\zeta_j \ge t) = \mathbf{P}(\xi \ge t \mid \xi \ge 0),$$

$$\mathbf{P}(\eta_j \geq 0) = 0, \quad \mathbf{P}(\eta_j < -t) = \mathbf{P}(\xi < -ta \mid \xi < 0).$$

При фиксации траектории δ_j, $j = 1, 2, \dots, \lfloor mT \rfloor$, имеет место равенство распределений

$$S_{\lfloor mT \rfloor} \underset{d}{=} \sum_{j: j \leq mT, \delta_j = 1} \zeta_j + a \sum_{j: j \leq mT, \delta_j = 0} \eta_j. \tag{64}$$

При этом на множестве элементарных исходов

$$A_a := \left\{ \left| \sum_{j=1}^{\lfloor mT \rfloor} \delta_j - \lfloor mT \rfloor p_a \right| \leq (mT)^{2/3} \right\}$$

количество слагаемых ζ_j в (64) асимптотически эквивалентно pmT, а количество слагаемых η_j асимптотически эквивалентно $(1-p)mT$. Воспользовавшись центральной предельной теоремой для схемы серий (см., например, теорему 8.3.3 в [9]), получим

$$\mathbf{P}(A_a) \to 1 \quad \text{при } a \to 0.$$

Обозначим, как и раньше,

$$Z_n := \sum_{j=1}^{n} \zeta_j, \quad Y_n := \sum_{j=1}^{n} \eta_j,$$

$$Z(t, a) := Z_{\lfloor mt \rfloor} / F_\zeta^{(-1)}(1/m), \quad Y(t, a) := a Y_{\lfloor mt \rfloor} / F_\zeta^{(-1)}(1/m).$$

Тогда по теореме 3.2 для любого фиксированного $T > 0$ имеет место слабая сходимость распределений при $a \to 0$:

$$Z(T, a) \Rightarrow X^{(\alpha,1)}(T), \quad Y(T, a) \Rightarrow X^{(\beta,-1)}(T).$$

Для фиксированного $T > 0$ в силу вышесказанного распределение $S(T, a)$ имеет тот же слабый предел при $a \to 0$, что и распределение суммы независимых случайных величин $Z(pT, a) + Y((1-p)T, a)$:

$$S(T, a) \Rightarrow X^{(\alpha,1)}(pT) + X^{(\beta,-1)}((1-p)T) \underset{d}{=} p^{1/\alpha} X^{(\alpha,1)}(T) + (1-p)^{1/\beta} X^{(\beta,-1)}(T).$$

Это доказывает слабую сходимость конечномерных распределений процесса $S(\cdot, a)$ к соответствующим конечномерным распределениям правой части (62).

Для завершения доказательства следует повторить соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 3.2.

Теорема 4.2 доказана.

Доказательство теоремы 4.1 полностью аналогично доказательству теоремы 3.1.

Замечание 4.1. В случае разнораспределенных случайных величин ξ_j можно сформулировать достаточно широкие условия сходимости вида (61), но они будут выглядеть весьма сложно. Сравнительно просто рассматриваются лишь следующие два случая:

- когда

$$\lim_{j \to \infty, a \to 0} \mathbf{P}(\xi_j \geq 0) = p \in (0, 1),$$

$$\lim_{j \to \infty, a \to 0, t \to \infty} \frac{F_{\xi_j +}(t)}{F_{\zeta +}(t)} = p, \quad \lim_{j \to \infty, a \to 0, t \to \infty} \frac{F_{\xi_j -}(ta)}{W(t)} = 1 - p;$$

• когда распределения величин ξ_j образуют периодическую последовательность: $\xi_j \underset{d}{=} \xi_{j-k}$ при всех $j > k$ и некотором $k = k(a)$, где $k(a)$ может расти (достаточно медленно) при $a \to 0$, причем

$$\lim_{a\to 0, t\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{k} F_{\xi_j+}(t)/\mathbf{P}(\xi_j \ge 0)}{kF_{\zeta+}(t)} = 1, \quad \lim_{a\to 0, t\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{k} F_{\xi_j-}(ta)/\mathbf{P}(\xi_j < 0)}{kW(t)} = 1,$$

$$\lim_{a\to 0} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \mathbf{P}(\xi_j \ge 0) = p \in (0,1),$$

$$\liminf_{a\to 0} \min_{j=1,\dots,k} \mathbf{P}(\xi_j \ge 0) > 0, \quad \limsup_{a\to 0} \max_{j=1,\dots,k} \mathbf{P}(\xi_j \ge 0) < 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прохоров Ю. В.* Переходные явления в процессах массового обслуживания // Лит. мат. сб. 1963. Т. 3, № 1. С. 199–206.
2. *Kingman F. G.* On queues in heavy traffic // J. R. Statistical Soc. Ser. B. 1962. V. 24. P. 383–392.
3. *Боровков А. А.* Переходные явления для случайных блужданий с разнораспределенными скачками, имеющими бесконечные дисперсии // Теория вероятностей и ее применения. 2005. Т. 50, № 2. С. 224–240.
4. *Boxma O. J, Cohen J. W.* Heavy-traffic analysis for the GI/G/1 queue with heavy-tailed distributions // Queueing Syst. 1999. V. 33. P. 177–204.
5. *Cohen J. W.* A heavy-traffic theorem for the GI/G/1 queue with Pareto-type service time distributions // J. Appl. Math. Stochastic Anal. 1998. V. 11. P. 247–254.
6. *Cohen J. W.* Random walk with a heavy-tailed jump distribution // Queueing Syst. 2002. V. 40. P. 35–73.
7. *Боровков А. А., Боровков К. А.* Асимптотический анализ случайных блужданий. Том I. Медленно убывающие распределения скачков. М.: Физматлит, 2008.
8. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. М.: Наука, 1971. Т. 1.
9. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 1999.

Статья поступила 17 октября 2008 г.

Боровков Александр Алексеевич, Рузанкин Павел Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`borovkov@math.nsc.ru, ruzankin@math.nsc.ru`