Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2009. Том 50, № 3

УДК 510.5+519.7

ОБ ЭФФЕКТИВНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ РЕШЕТОК ФОРМАЛЬНЫХ ПОНЯТИЙ

А. С. Морозов

Аннотация. Типы изоморфизма упорядоченных структур формальных понятий вычислимых формальных контекстов изучаются с точки зрения теории конструктивных моделей. Показано, что, несмотря на то, что эти структуры могут иметь мощность континуума или в случае, когда эти структуры счетны, могут иметь сколь угодно высокую гиперарифметическую сложность, они в некотором смысле очень близки к вычислимым порядкам. Доказаны достаточные условия для того, чтобы эти порядки имели вычислимые представления. Приведено полное описание типов изоморфизма дискретных решеток понятий. Построен ряд контрпримеров.

Ключевые слова: анализ формальных концепций, вычислимый формальный контекст, вычислимое формальное понятие, решетка понятий, вычислимая структура.

1. Введение

Работа находится на границе между теорией вычислимости и формальным концептуальным анализом (FCA). В ней изучаются проблемы, имеющие в основном теоретико-вычислительную природу. Здесь мы продолжаем изучение вычислимых формальных контекстов, начатое в [1], где нас главным образом интересовали отдельные формальные понятия и их аппроксимации. Здесь же рассматриваются структурные и алгоритмические свойства решеток формальных понятий для вычислимых формальных контекстов.

Основными задачами данной работы являются нахождение достаточных условий для существования вычислимых представлений упорядочения на формальных понятиях, а также нахождение верхних границ на теоретико-рекурсивную сложность решеток формальных понятий вычислимых формальных контекстов.

Мы предполагаем, что читатель знаком с основами теории вычислимости, теории обобщенной вычислимости (см. [2–4]) и теории вычислимых моделей (см., например, [5]). Знания необходимых определений и фактов из теории моделей и математической логики, необходимые для понимания данной работы, в большинстве случаев содержатся в стандартном университетском курсе.

Основные идеи формального концептуального анализа сформулированы профессором Вилле и в дальнейшем существенно развиты им, его учениками и коллегами (см. [6]).

Первое основное понятие FCA — это понятие *формального контекста.* Предположим, что у нас есть множество объектов G (Gegenstände) и множество свойств M (Merkmale). В этом случае мы можем рассмотреть естественное

Работа выполнена при финансовой поддержке российско-германского гранта РФФИ-DFG 05–01–04003–ННИОа (DFG 436 RUS 113/829/0–1).

бинарное отношение $\models \subseteq G \times M$, определенное как

$$x \models y \Leftrightarrow x \text{ удовлетворяет } y.$$

Мы приходим к следующему определению.

Определение 1 [6]. Любая тройка $\mathfrak{F} = \langle G, M, \models \rangle$, где $\models \subseteq G \times M$, называется *формальным контекстом.*

С каждым множеством объектов $A \subseteq G$ мы можем связать его *теорию*

$$\mathtt{Th}(A) = \{y \in M \mid \forall x \in A (x \models y)\}$$

и с каждым множеством свойств $B \subseteq M$ — класс его моделей

$$\mathtt{Mod}(B) = \{x \in G \mid \forall y \in B (x \models y)\}.$$

Если $A \subseteq G$ и $B \subseteq M$, то будем говорить, что пара $\langle A, B\rangle$ является *формальным понятием,* если одновременно $A = \mathtt{Mod}(B)$ и $B = \mathtt{Th}(A)$. Если $\alpha = \langle A, B\rangle$ — формальное понятие, будем говорить, что A — *экстент* α и B — *интент* α, и использовать следующие обозначения: $A = \mathtt{ext}(\alpha)$, $B = \mathtt{int}(\alpha)$. Заметим, что экстент формального понятия однозначно определяет его интент, и наоборот. Множество всех формальных понятий частично упорядочено отношением $\langle X_0, Y_0\rangle \leq \langle X_1, Y_1\rangle \ \Leftrightarrow \ X_0 \subseteq X_1$; последнее, как легко установить, эквивалентно условию $Y_0 \supseteq Y_1$.

Мы будем использовать следующие естественные сокращения:

$$A \models B \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall x \in A\, \forall y \in B\, (x \models y); \quad a \models B \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall y \in B\, (a \models y);$$

$$A \models b \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall x \in A\, (x \models b).$$

Известно, что для любого формального контекста $\mathfrak{F}$ множество всех его формальных понятий образует полную решетку, называемую *решеткой понятий для* $\mathfrak{F}$ и обозначаемую через $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$. Также известно, что каждая полная решетка $\langle L; \leq\rangle$ изоморфна решетке понятий формального контекста $\mathfrak{F}_L = \langle L, L, \leq\rangle$. Более того, все формальные понятия из $\mathscr{L}(\mathfrak{F}_L)$ имеют вид $\langle \hat{a}, \overset{\vee}{a}\rangle$ для подходящего $a \in L$, где $\hat{a} = \{x \in L \mid x \leq a\}$ и $\overset{\vee}{a} = \{x \in L \mid a \leq x\}$. Эти утверждения известны под названием *основной теоремы формального концептуального анализа* (см. [4]).

Наименьший и наибольший элементы решетки обычно будут обозначаться соответственно через $\perp$ и $\top$. Формальное понятие α назовем *нетривиальным,* если $\alpha \notin \{\top, \perp\}$.

Поскольку в данной работе приводится пример, лишающий нас надежды на получение более или менее нетривиальных результатов по вычислимым решеткам понятий в решеточной сигнатуре, содержащей операции $\sup(x, y)$ и $\inf(x, y)$, мы предпочтем рассматривать решетки понятий в сигнатуре $\langle \leq \rangle$ и вместо решеток понятий говорить об *упорядочении понятий.*

Будем предполагать, что каждый элемент множества G имеет свой уникальный номер. То же самое предполагается и для M. Предполагаем, что множества таких номеров вычислимо перечислимы и что существует алгоритм, который по данному номеру k для объекта и номеру l для свойства эффективно определяет, удовлетворяет ли этот объект данному свойству. Нас не будет интересовать случай, когда одно из множеств объектов или свойств конечно, поскольку в этом случае решетка понятий конечна и все изучаемые нами проблемы тривиальны. Без потери общности можем предполагать, что множества всех возможных номеров для объектов и свойств равны множеству натуральных чисел ω. Номера объектов и свойств могут появляться естественным путем, например, они могут быть следствием структуры объекта или свойства, или, например, если мы нумеруем объекты или свойства по мере их появления, то можем присваивать им номера в порядке их перечисления. Безусловно, сформулированные здесь предположения можно обсуждать и подвергать сомнению, но в данной работе мы их постулируем.

Примеры. 1. Зафиксируем язык первого порядка конечной сигнатуры. Пусть множество G объектов состоит из всех конечных моделей для этого языка, основные множества которых являются подмножествами ω, и пусть множеством свойств M будет множество всех первопорядковых предложений этого языка. Определим отношение $\models$ как обычное отношение истинности, т. е. $\mathfrak{M} \models \varphi$ означает, что модель $\mathfrak{M}$ удовлетворяет φ. Можно определить кодирование этих моделей и предложений натуральными числами так, чтобы при этом были задействованы все натуральные числа и по данному натуральному числу n можно эффективно перечислить диаграмму модели с этим номером, а также эффективно выписать предложение с этим номером (примеры таких кодирований можно найти в любом руководстве по математической логике, в котором определяются Гёделевы нумерации). Можно убедиться, что по данным номеру модели и номеру предложения можно эффективно определить, удовлетворяет ли модель предложению.

2. В качестве другого более сложного примера можно рассмотреть множество $(n \times n)$-матриц над $\mathbb{Q}$ с отношением $\models$, определенным как «A сопряжена B», для фиксированного $n < \omega$.

Таким образом, мы приходим к следующему определению *вычислимого формального контекста.*

Определение 2 [1]. Тройка $\mathfrak{F} = \langle G, M, \models \rangle$ называется *вычислимым* (*соответственно арифметическим, гиперарифметическим*) *формальным контекстом*, если множества G и M — вычислимые (арифметические, гиперарифметические) подмножества натуральных чисел и отношение $\models \subseteq G \times M$ вычислимо (арифметическое, гиперарифметическое).

Формальное понятие $\alpha = \langle A, B \rangle$ из $\mathfrak{F}$ назовем *вычислимым* (*арифметическим, гиперарифметическим*), если оба множества A и B (т. е. интент и экстент) вычислимы (арифметические, гиперарифметические). Множество всех вычислимых формальных понятий будем обозначать через $\mathscr{L}_c(\mathfrak{F})$.

Чтобы подчеркнуть, что G и M независимы, т. е. в большинстве ситуаций возможные равенства $g = m$ для $g \in G$ и $m \in M$ не играют абсолютно никакой роли в наших рассмотрениях, будем обозначать элементы этих множеств соответственно через $g_0, g_1, \ldots$ и $m_0, m_1, \ldots$, хотя иногда они и будут явно отождествлены с натуральными числами.

Мы используем стандартные понятия теории вычислимости. Зафиксируем вычислимые функции c, ℓ и r, кодирующие и раскодирующие пары натуральных чисел натуральными числами, т. е. функции, удовлетворяющие следующим тождествам:

$$c(\ell(x), r(x)) = x, \quad r(c(x, y)) = y, \quad \ell(c(x, y)) = x.$$

Доказательство существования таких функций можно найти почти во всех учебниках по вычислимости.

Определим нумерацию D конечных множеств натуральных чисел следующим образом:

$$S = D_n \Leftrightarrow n = \sum_{k \in S} 2^k.$$

Семейство $(S_i)_{i<\omega}$ конечных множеств называется *сильно вычислимым*, если существует вычислимая функция f такая, что выполнено $S_i = D_{f(i)}$ для всех $i < \omega$. Если $S = D_n$, то n называется *индексом* для S. Другими словами, сильная вычислимость семейства $(S_i)_{i<\omega}$ конечных множеств означает, что по данному номеру $i < \omega$ мы можем эффективно перечислить все элементы S_i и эффективно определить момент в этом перечислении, после которого новые элементы уже никогда не будут перечисляться в S_i.

Напомним, что структура конечного языка называется *вычислимой структурой*, если ее основное множество — начальный сегмент множества натуральных чисел и все ее операции и предикаты вычислимы.

Семейство формальных понятий $(\alpha_i)_{i<\omega} \in \mathscr{L}(\mathfrak{F})^\omega$ назовем *вычислимым*, если существует вычислимая функция $f(i,x)$ такая, что для всех $i < \omega$ функция $r(f(i,x))$ характеристическая для $\mathtt{ext}(\alpha_i)$ и $\ell(f(i,x))$ характеристическая для $\mathtt{int}(\alpha_i)$. Другими словами, семейство $(\alpha_i)_{i<\omega}$ вычислимо, если можно эффективно отвечать на вопросы «$x \in \mathtt{ext}(\alpha_i)$?» и «$x \in \mathtt{int}(\alpha_i)$?» равномерно для всех x и i.

Формальные контексты $\mathfrak{F}_0 = \langle G_0, M_0, \models_0\rangle$ и $\mathfrak{F}_1 = \langle G_1, M_1, \models_1\rangle$ называются *изоморфными*, если существуют две биекции $f_G : G_0 \to G_1$ и $f_M : M_0 \to M_1$, сохраняющие отношение выполнимости, т. е. для всех $g \in G$ и $m \in M$ выполнено $g \models_0 m \Leftrightarrow f_G(g) \models_1 f_M(m)$; в этом случае пара f_G, f_M называется *изоморфизмом* между $\mathfrak{F}_0$ и $\mathfrak{F}_1$.

Пусть $\mathfrak{F}_0$ и $\mathfrak{F}_1$ — вычислимые формальные контексты. Они называются *вычислимо изоморфными*, если существует изоморфизм между ними, обе компоненты f_G и f_M которого являются частичными вычислимыми функциями. Легко проверяется, что вычислимые изоморфизмы сохраняют вычислимые формальные понятия и вычислимые семейства понятий.

Естественная топология на формальных понятиях, которая в дальнейшем называется просто *топологией*, будет играть важную роль в наших рассмотрениях. Она порождается семейством открытых окрестностей $U_{A,B} = \{\alpha \in \mathscr{L}(\mathfrak{F}) \mid A \subseteq \mathtt{ext}(\alpha)$ и $B \subseteq \mathtt{int}(\alpha)\}$, где A и B — конечные подмножества G и M соответственно. Легко видеть, что эта топология совпадает с топологией из [1], порожденной следующим семейством открытых окрестностей:

$$U'_{f_0,f_1} = \{\alpha \in \mathscr{L}(\mathfrak{F}) \mid f_0 \subseteq \chi^G_{\mathtt{ext}(\alpha)} \text{ и } f_1 \subseteq \chi^M_{\mathtt{int}(\alpha)}\},$$

где χ^W_S — характеристическая функция подмножества S в W и f_0, f_1 — отображения из конечных подмножеств в G в M в множество $\{0,1\}$ соответственно. По теореме плотности, доказанной в [1], окрестность $U_{A,B}$ непуста тогда и только тогда, когда $A \models B$. Напомним, что точка $\alpha \in \mathscr{L}(\mathfrak{F})$ называется *изолированной*, если множество $\{\alpha\}$ открыто. Это эквивалентно тому, что существует окрестность $U_{A,B}$ такая, что $\{\alpha\} = U_{A,B}$. Изолированные точки соответствуют формальным понятиям, которые могут быть полностью охарактеризованы конечным числом свойств B и конечным числом примеров A.

2. Основной алгоритм

Здесь будет описан конкретный и достаточно простой алгоритм, который по данной паре конечных множеств $A \subseteq G$, $B \subseteq M$ таких, что $A \models B$, строит некоторое вычислимое формальное понятие $\alpha \in U_{A,B}$, и будут доказаны некоторые его свойства. Этот алгоритм играет центральную роль в наших дальнейших рассмотрениях. Ввиду этого будем называть его *основным алгоритмом.* Фактически этот алгоритм уже содержался в [1]. Будем предполагать, что $G = \{g_0, g_1, \dots\}$, $M = \{m_0, m_1, \dots\}$ и $g_i \neq g_j$, $m_i \neq m_j$ для всех $i < j < \omega$. Мы также будем использовать основной алгоритм в случае, когда $G = M = \omega$, подразумевая выполнение равенств $g_i = i$ и $m_i = i$ для всех $i < \omega$. Фактически основной алгоритм строит две сильно вычислимые цепочки конечных множеств

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots, \quad B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$$

такие, что их объединения образуют соответственно экстент и интент вычислимого формального понятия α.

Описание основного алгоритма.

Шаг 0. Полагаем $A_0 = \varnothing$, $B_0 = \varnothing$.

Шаг $t+1$. Полагаем

$$A_{t+1} = \begin{cases} A_t \cup \{g_t\}, & \text{если } g_t \models B_t \cup B, \\ A_t & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$B_{t+1} = \begin{cases} B_t \cup \{m_t\}, & \text{если } A_{t+1} \cup A \models m_t, \\ B_t & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Описание основного алгоритма закончено.

Ясно, что $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, $B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$.
Полагаем $A^* = \bigcup\limits_{t<\omega} A_t$ и $B^* = \bigcup\limits_{t<\omega} B_t$.

Если мы начнем построение с какой-то другой пары множеств, скажем, C, D, то соответствующие множества, определяемые в ходе построения, будут также обозначаться через C_t, D_t и C^*, D^*.

Докажем некоторые свойства основного алгоритма.

Заметим, что у произвольного g_t, $t < \omega$, имеется лишь один шанс попасть в A^*. А именно, на шаге $t+1$ элемент g_t добавляется к A^* при условии, что он проходит проверку $g_t \models B_t \cup B$, и если g_t не попал в A^* на шаге $t+1$, то у него в дальнейшем нет возможности попасть в A^*. Симметричное утверждение выполнено и для B^*: на шаге $t+1$ элемент m_t попадает в B^*, если он проходит проверку $A_{t+1} \cup A \models m_t$, и если m_t не попало в B^* на шаге $t+1$, то у него больше не будет шансов оказаться в B^*. Таким образом, множества A_t и B_t полностью сформированы к концу шага $t+1$. Поэтому семейства $(A_t)_{t<\omega}$ и $(B_t)_{t<\omega}$ сильно вычислимы.

Предложение 1. *Множества A^* и B^* обладают свойствами $A \subseteq A^*$ и $B \subseteq B^*$.*

Доказательство. В самом деле, предположим, что $g_t \in A$. Надо убедиться, что g_t попадет в A^* на шаге $t+1$. Для того чтобы попасть в A^*, элемент g_t должен удовлетворять условию $g_t \models B_t \cup B$. Поскольку $g_t \in A$ и $A \models B$, имеем $g_t \models B$. Если $g_t \models B_t \cup B$ не выполнено, то существует элемент $t' < t$ такой, что $m_{t'} \in B_t$ и $g_t \not\models m_{t'}$. Поскольку элемент $m_{t'}$ принадлежит B^*, он успешно проходит проверку $A_t \cup A \models m_{t'}$ и, в частности, выполнено $g_t \models m_{t'}$; противоречие.

Пусть теперь $m_t \in B$. Надо проверить, что m_t попадает в B^* на шаге $t+1$. Это эквивалентно условию $A_{t+1} \cup A \models m_t$. Предположим противное, а именно, что это утверждение ложно. Тогда ввиду $A \models B$ и $m_t \in B$ существует $t' \le t$ такое, что $g_{t'} \in A_{t+1}$ и $g_{t'} \not\models m_t$. Отсюда следует, что $g_{t'} \models B_{t'} \cup B$ и, в частности, $g_{t'} \models m_t$; противоречие. $\square$

Предложение 2. *Результаты работы основного алгоритма удовлетворяют условиям $\langle A^*, B^* \rangle \in \mathscr{L}_c(\mathfrak{F})$, $\langle A^*, B^* \rangle \in U_{A,B}$, и существует эффективная равномерная процедура для ответов на вопросы «$x \in A^*$?» и «$x \in B^*$?» по индексам конечных множеств A и B.*

Доказательство. Вспомним, что произвольный элемент $g_t \in G$ либо оказывается в A^* на шаге $t+1$, либо уже никогда туда не попадает. Аналогичное утверждение выполнено также и для B^*. Это доказывает равномерность.

Надо проверить, что

$$A^* = \{g \in G \mid g \models B^*\}, \tag{1}$$

$$B^* = \{m \in G \mid A^* \models m\}. \tag{2}$$

Докажем включение ($\subseteq$) в (1). Возьмем произвольный элемент $g = g_t \in A^*$. Из описания основного алгоритма следует, что $g_t \models B_t \cup B$ и $g_t \in A_{t+1}$. В частности, $g_t \models B_t$. Если некоторый новый элемент $m_{t'}$, $t' \ge t$, впоследствии будет добавлен к B^* на шаге $t'+1 \ge t+1$, то получим $A_{t'+1} \cup A \models m_{t'}$. Таким образом, $g_t \in A_{t+1} \subseteq A_{t'+1} \models m_{t'}$, откуда следует, что $g_t \models m_{t'}$. Значит, $g = g_t \models B^*$.

Докажем включение ($\supseteq$) в (1). Возьмем произвольный элемент $g = g_t$ из правой части (1). Имеем $g_t \models B^*$. По предложению 1 $B \subseteq B^*$. Следовательно, $g_t \models B_t \cup B$. Отсюда вытекает, что g_t будет перечислено в A^* на шаге $t+1$, т. е. $g = g_t \in A^*$.

Докажем включение ($\subseteq$) в (2). Возьмем произвольный элемент $m = m_t \in B^*$. Из описания основного алгоритма следует, что $A_{t+1} \cup A \models m_t$ и $m_t \in B_{t+1}$. В частности, $A_{t+1} \models m_t$. Если некоторый новый элемент $g_{t'}$, $t' > t$, перечисляется в A^* на шаге $t'+1 > t+1$, то получим $g_{t'} \models B_{t'} \cup B$. Далее, $m_t \in B_{t+1} \subseteq B_{t'}$, откуда выводим $g_{t'} \models m_t$. Отсюда $A^* \models m_t$.

Докажем включение ($\supseteq$) в (2). Возьмем произвольный элемент $m = m_t$ из правой части (2). Имеем $A^* \models m_t$. По предложению 1 $A \subseteq A^*$. Отсюда $A_{t+1} \cup A \subseteq A^*$, т. е. $A_{t+1} \cup A \models m_t$, и m_t будет перечислен в B^*, т. е. $m = m_t \in B^*$.

Поскольку $\langle A^*, B^* \rangle \in \mathscr{L}_c(\mathfrak{F})$, предложение 1 влечет $\langle A^*, B^* \rangle \in U_{A^*,B^*}$. $\square$

Предложение 3. *Предположим, что $A, A' \subseteq G$, $B, B' \subseteq M$, $A \models B$, $A' \models B'$ и $A \subseteq A'$, $B' \subseteq B$. Пусть понятие α является результатом исполнения основного алгоритма на паре A, B и понятие α' является результатом исполнения основного алгоритма на паре A', B'. Тогда $\alpha \le \alpha'$.*

Доказательство. Докажем по индукции, что $A_t \subseteq A'_t$ и $B'_t \subseteq B_t$ для всех $t < \omega$, откуда и будет следовать требуемое.

Для $t = 0$ все эти множества пусты, и условие выполняется.

Предположим, что $A_t \subseteq A'_t$ и $B'_t \subseteq B_t$.

Выполним шаг $t+1$ и посмотрим, что произойдет. Предположим, что t перечисляется в A_{t+1} на шаге $t+1$. Это означает, что $t \models B_t \cup B$. Поскольку $B'_t \subseteq B_t$ и $B' \subseteq B$, имеем $t \models B'_t \cup B'$, т. е. t также попадет в A'_{t+1} на шаге $t+1$. Поэтому $A_{t+1} \subseteq A_t \cup \{t\} \subseteq A'_t \cup \{t\} = A'_{t+1}$. Если t не помещается в A_{t+1} на шаге $t+1$, то $A_{t+1} = A_t \subseteq A'_t \subseteq A'_{t+1}$. В любом случае выполнено $A_{t+1} \subseteq A'_{t+1}$.

Исполним теперь оставшуюся часть шага $t+1$. Если t помещается в B'_{t+1} на шаге $t+1$, то $t \models A'_{t+1} \cup A'$. Принимая во внимание включения $A_{t+1} \subseteq A'_{t+1}$

и $A \subseteq A'$, получим $t \models A_{t+1} \cup A$. Отсюда следует, что t помещается в B_{t+1} на шаге $t+1$. Тем самым $B'_{t+1} = B'_t \cup \{t\} \subseteq B_t \cup \{t\} = B_{t+1}$. Если t не помещается в B'_{t+1} на шаге $t+1$, то $B'_{t+1} = B'_t \subseteq B_t \subseteq B_{t+1}$. В любом случае $B'_{t+1} \subseteq B_{t+1}$. $\square$

Предложение 4. *Пусть понятие $\alpha = \langle A^*, B^* \rangle$ — результат применения основного алгоритма к паре $\langle A, B \rangle$, $A \models B$. Пусть $A \subseteq A' \subseteq A^*$ и $B \subseteq B' \subseteq B^*$. Тогда результат выполнения основного алгоритма для пары $\langle A', B' \rangle$ будет тем же самым, т. е. $(A')^* = A^*$ и $(B')^* = B^*$.*

Доказательство. Достаточно доказать по индукции, что $A_i = A'_i$ и $B_i = B'_i$ для всех $i < \omega$.

Для $i = 0$ это следует из определения шага 0.

Предположим, что условия выполнены для $i = t$. Докажем, что $A_{t+1} = A'_{t+1}$ и $B_{t+1} = B'_{t+1}$. По индукции это даст нам доказательство утверждения.

Предположим, что g_t перечисляется в A^* на шаге $t+1$. В частности, это означает, что $g_t \in A^*$ и, таким образом, $g_t \models B^*$. Используя условия $B'_t = B_t \subseteq B^*$ (по предложению 1) и $B' \subseteq B^*$, получаем $g_t \models B'_t \cup B'$, и тем самым g_t попадает в $(A')^*$ на шаге $t+1$. С другой стороны, если g_t попадет в $(A')^*$ на шаге $t+1$, то $g_t \models B'_t \cup B'$, откуда получим $g_t \models B_t \cup B$, что, в свою очередь, означает, что g_t будет перечислено в A^*. Отсюда следует, что на шаге $t+1$ элемент g_t будет перечислен в A^* тогда и только тогда, когда он будет перечислен в $(A')^*$, т. е. $A_{t+1} = A'_{t+1}$.

Далее, мы должны доказать, что $B_{t+1} = B'_{t+1}$. Это будет сделано тем же способом с использованием уже доказанного равенства $A_{t+1} = A'_{t+1}$. Предположим, что m_t перечисляется в B^* на шаге $t+1$. Тогда $A^* \models m_t$. Поскольку $A'_{t+1} = A_{t+1} \subseteq A^*$ и $A' \subseteq A^*$, имеем $A'_{t+1} \cup A' \models m_t$, тем самым m_t будет перечислено в $(B')^*$ на шаге $t+1$. С другой стороны, предположим, что m_t попадает в $(B')^*$ на шаге $t+1$. Это означает, что $(A')^* \models m_t$. Отсюда следует, что, в частности, $A'_{t+1} \cup A' \models m_t$. Принимая в расчет равенства $A'_{t+1} = A_{t+1}$ и $A \subseteq A'$, получаем, что $A'_{t+1} \cup A \models m_t$, т. е. m_t попадет в B^* на шаге $t+1$. Таким образом, m_t либо одновременно добавляется, либо одновременно не добавляется к множествам B_t и B'_t. Поскольку $B_t = B'_t$, имеем $B_{t+1} = B'_{t+1}$. $\square$

3. Регулярные понятия и их свойства

Определение 3. Пусть $\mathfrak{F}$ — вычислимый формальный контекст. Понятие $\alpha \in \mathscr{L}(\mathfrak{F})$ называется *регулярным*, если оно может быть построено основным алгоритмом из некоторой пары A, B конечных множеств таких, что $A \subseteq \mathtt{ext}(\alpha)$, $B \subseteq \mathtt{int}(\alpha)$ и $A \models B$.

Обозначим множество всех регулярных понятий из $\mathfrak{F}$ через $\mathscr{L}_r(\mathfrak{F})$. Из построения следует, что всякое регулярное понятие вычислимо.

Разумеется, свойство регулярности понятий существенно зависит от конкретного вычислимого представления формального контекста и даже от конкретного вычислимого перечисления множеств G и M.

Покажем, что в некотором смысле всякое нетривиальное вычислимое понятие может оказаться регулярным. Для этого ограничимся рассмотрением так называемых *цилиндрических формальных контекстов*. Позже мы увидим, что ограничение рассмотрений на этот класс не влияет на результаты о вычислимых представлениях упорядочений на понятиях.

Определение 4. Пусть $\mathfrak{F} = \langle \omega, \omega, \models \rangle$ — вычислимый формальный контекст. Определим формальный контекст $\mathfrak{F}^c$ следующим образом:

$$\mathfrak{F}^c = \langle \omega, \omega, \models^c \rangle, \quad \text{где} \ \ x \models^c y \Leftrightarrow \ell(x) \models \ell(y).$$

Этот формальный контекст $\mathfrak{F}^c$ назовем *цилиндрификацией* контекста $\mathfrak{F}$. Если формальный контекст $\mathfrak{F}$ вычислимо изоморфен формальному контексту вида $(\mathfrak{F})^c$, то будем называть его *цилиндрическим формальным контекстом.*

Цилиндрификация формального контекста может рассматриваться как замена каждой его точки бесконечным множеством ее копий.

Следующие свойства легко проверяются, и мы оставляем их проверку читателю.

Предложение 5. 1. *Существует естественный изоморфизм* $(\cdot)^c$ *между* $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$ *и* $\mathscr{L}(\mathfrak{F}^c)$*, задаваемый равенством*

$$(\langle A, B\rangle)^c = \langle c(A \times \omega); c(B \times \omega)\rangle.$$

Более того, $\alpha \in \mathfrak{F}$ *вычислимо тогда и только тогда, когда* $\alpha^c \in \mathfrak{F}^c$ *вычислимо, и семейство* $(\alpha_i)_{i<\omega}$ *вычислимо тогда и только тогда, когда вычислимо семейство* $\left(\alpha_i^c\right)_{i<\omega}$.

2. *Если* $\mathfrak{F} = \langle G, M, \models\rangle$ *— цилиндрический формальный контекст, то для всех* $x \in G$ *существует бесконечно много* x' *таких, что для всех* $b \in M$ *выполнено*

$$x \models b \Leftrightarrow x' \models b.$$

3. *Если* $\mathfrak{F} = \langle G, M, \models\rangle$ *— цилиндрический формальный контекст, то для всех* $A \subseteq G$ *и* $y \subseteq M$ *существует бесконечно много* y' *таких, что для всех* $a \in A$ *выполнено*

$$a \models y \Leftrightarrow a \models y'.$$

Таким образом, если нас интересуют вычислимые представления упорядочений на понятиях и вычислимые семейства формальных понятий, то мы можем ограничиться изучением цилиндрических формальных контекстов.

Предложение 6. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— цилиндрический вычислимый формальный контекст и* $\alpha = \langle A, B\rangle$ *— его вычислимое формальное понятие такое, что* $\mathtt{ext}(\alpha) \neq \varnothing$ *и* $\mathtt{int}(\alpha) \neq \varnothing$*. Тогда существуют такие вычислимые перечисления* $G = \{g_i' \mid i < \omega\}$ *и* $M = \{m_i' \mid i < \omega\}$ *множеств* G *и* M *соответственно, что основной алгоритм, примененный к паре* $\varnothing, \varnothing$*, строит понятие* α.

Доказательство. Предположим, что построены конечные последовательности $(g_i')_{i<t}$ и $(m_i')_{i<t}$ так, что если исполнены первые t шагов основного алгоритма для пары $\varnothing, \varnothing$ на последовательностях $(g_i')_{i<t}$ и $(m_i')_{i<t}$, то получены множества A_t и B_t такие, что

$$A_t = \mathtt{ext}(\alpha) \cap \{g_i' \mid i < t\}, \tag{3}$$

$$B_t = \mathtt{int}(\alpha) \cap \{m_i' \mid i < t\}. \tag{4}$$

Заметим, что эти условия тривиально выполнены на пустых последовательностях при $t = 0$, т. е. наше предположение выполнено для $t = 0$.

Пусть g — элемент вида g_l с минимальным $l < \omega$ такой, что $g \notin \{g_i' \mid i < t\}$, и пусть m — элемент вида m_l с минимальным $l < \omega$ такой, что $m \notin \{m_i' \mid i < t\}$. Здесь может возникнуть несколько случаев.

Случай 1: $g \in \mathtt{ext}(\alpha)$, $m \in \mathtt{int}(\alpha)$.

В этом случае полагаем $g'_t = g$ и $m'_t = m$. На следующем шаге основной алгоритм на последовательностях $(g'_i)_{i<t+1}$ и $(m'_i)_{i<t+1}$ перечислит $g = g'_t$ в экстент и $m = m'_t$ в интент понятия α.

Случай 2: $g \in \mathtt{ext}(\alpha)$, $m \notin \mathtt{int}(\alpha)$.

Нам требуется добавить g в экстент и предохранить m от попадания в интент. Чтобы гарантировать это, нам может потребоваться добавление новых элементов в A_t и в B_t, прежде чем иметь дело с g и m.

Поскольку $m \notin \mathtt{int}(\alpha)$, существует $g^* \in \mathtt{ext}(\alpha)$ такой, что $g^* \not\models m$. Более того, по предложению 5 мы можем выбрать такой элемент g^* вне множества $A_t \cup \{g\}$. Возьмем в качестве g^* элемент $g_l \in \mathtt{ext}(\alpha)$ такой, что $g_l \not\models m$, $g_l \notin A_t \cup \{g\}$ и номер l является минимально возможным. Пусть m^* будет элементом $m_l \in \mathtt{int}(\alpha) \setminus (B_t \cup \{m\})$ с минимально возможным l. Полагаем $g'_t = g^*$, $g'_{t+1} = g$, $m'_t = m^*$, $m'_{t+1} = m$. Непосредственная проверка показывает, что на первых $t+2$ шагах на конечных последовательностях $(g'_i)_{i<t+2}$ и $(m'_i)_{i<t+2}$ основной алгоритм выдаст конечные множества A_{t+2} и B_{t+2}, удовлетворяющие условиям (3) и (4) для $t+2$.

Случай 3: $g \notin \mathtt{ext}(\alpha)$, $m \in \mathtt{int}(\alpha)$. Этот случай рассматривается аналогично случаю 2. А именно, найдем $g^* = g_l$ с минимальным номером l так, что $g^* \in \mathtt{ext}(\alpha)$ и $g^* \notin A_t \cup \{g\}$; после этого найдем $m^* = m_l$ с минимальным номером l так, что $m^* \in \mathtt{int}(\alpha)$, $m^* \notin B_t \cup \{m\}$ и $g \not\models m^*$. Положим $g'_t = g^*$, $g'_{t+1} = g$, $m'_t = m^*$, $m'_{t+1} = m$. Как и ранее, непосредственная проверка показывает, что после первых $t+2$ шагов на конечных последовательностях $(g'_i)_{i<t+2}$ и $(m'_i)_{i<t+2}$ основной алгоритм построит конечные множества A_{t+2} и B_{t+2}, удовлетворяющие условиям (3) и (4) для $t+2$.

Случай 4: $g \notin \mathtt{ext}(\alpha)$, $m \notin \mathtt{int}(\alpha)$.

Найдем элемент $g^* = g_l$ с минимальным номером l такой, что $g_l \notin A_t \cup \{g\}$, $g_l \in \mathtt{ext}(\alpha)$ и $g_l \not\models m$; затем найдем элемент $m^* = m_l$ с минимальным номером l так, чтобы $m_l \notin B_t \cup \{m\}$, $m_l \in \mathtt{int}(\alpha)$ и $g \not\models m_l$. Положим $g'_t = g^*$, $g'_{t+1} = g$, $m'_t = m^*$, $m'_{t+1} = m$. Остается проверить, что условия (3) и (4) опять выполнятся после первых $t+2$ шагов. Построение закончено.

Способ выбора g и m на каждом шаге гарантирует, что мы построим полное перечисление всех элементов G и M соответственно, и условия (3) и (4) гарантируют регулярность понятия α, если будем использовать построенные перечисления. $\square$

Следующая теорема показывает, что регулярные понятия имеют очень хорошие свойства: они могут быть равномерно эффективно перечислены таким образом, что мы сможем эффективно распознавать порядок на них.

Теорема 1. 1. *Пусть $\mathfrak{F} = \langle G, M, \models \rangle$ — вычислимый формальный контекст. Тогда множество $\mathscr{L}_r(\mathfrak{F})$ всех регулярных понятий допускает вычислимую нумерацию $\nu : \omega \to \mathscr{L}_r(\mathfrak{F})$ такую, что по любым двум номерам m и n можно эффективно узнать, верно ли, что $\nu(m) \leq \nu(n)$.*

2. *Пусть $\mathfrak{F} = \langle G, M, \models \rangle$ — вычислимый формальный контекст и все элементы $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$, за исключением, может быть, $\perp$ и $\top$, изолированы. Тогда некоторое семейство всех формальных понятий между $\mathscr{L}(\mathfrak{F}) \setminus \{\perp, \top\}$ и $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$ допускает вычислимую нумерацию $\nu : \omega \to \mathscr{L}(\mathfrak{F})$ такую, что по любым данным номерам m и n можно эффективно отвечать на вопросы $\nu(m) \leq \nu(n)$. В частности, в этом случае все нетривиальные понятия из $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$ вычислимы и $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$ изоморфна вычислимому порядку.*

Доказательство теоремы. Зафиксируем нумерацию μ множества всех пар $\langle A, B\rangle$, образованных конечными множествами $A \subseteq G$, $B \subseteq M$ и удовлетворяющих условию $A \models B$, такую, что по произвольному номеру n можно эффективно найти индексы конечных множеств A и B таких, что $\mu(n) = \langle A, B\rangle$, и по произвольным индексам конечных множеств A и B таких, что $A \models B$, можно эффективно найти некоторое n такое, что $\mu(n) = \langle A, B\rangle$.

Определим нумерацию ν следующим образом: $\nu(n)$ — это формальное понятие, которое строится основным алгоритмом на паре $\mu(n)$.

Из свойств основного алгоритма следует, что по данному $n < \omega$ можно эффективно найти алгоритмы для распознавания экстента и интента $\nu(n)$. Отсюда следует, что нумерация ν вычислима.

Проверим, что в условиях п. 2 образ ν содержит все элементы $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$, кроме, быть может, $\top$ и $\perp$. В самом деле, поскольку каждая точка из $\mathscr{L}(\mathfrak{F}) \setminus \{\perp, \top\}$ изолирована, каждое формальное понятие $\alpha \in \mathscr{L}(\mathfrak{F}) \setminus \{\perp, \top\}$ является единственным элементом в некоторой окрестности вида $U_{A,B}$, т. е. $\{\alpha\} = U_{A,B}$. По предложению 2 основной алгоритм из пары $\langle A, B\rangle$ построит нам α. Теперь выберем k так, что $\mu(k) = \langle A, B\rangle$. Имеем $\nu(k) = \alpha$.

Необходимо понять, как проверить свойство $\nu(m) \le \nu(n)$.

Сначала по заданным произвольным $m, n \in \omega$ эффективно находим пары $\langle A^m, B^m\rangle$ и $\langle A^n, B^n\rangle$ такие, что $\mu(m) = \langle A^m, B^m\rangle$ и $\mu(n) = \langle A^n, B^n\rangle$. Затем исполняем основной алгоритм, ожидая наименьший шаг t^* такой, что

$$\big(A^m \subseteq A^m_{t^*}\big) \wedge \big(B^m \subseteq B^m_{t^*}\big) \wedge \big(A^n \subseteq A^n_{t^*}\big) \wedge \big(B^n \subseteq B^n_{t^*}\big).$$

Такой шаг найдется по предложению 1.

Из определения основного алгоритма следует, что для всех $t \le t^*$ выполнены условия

$$t \in (A^m)^* \Leftrightarrow t \in A^m_{t^*}, \quad t \in (B^m)^* \Leftrightarrow t \in B^m_{t^*},$$
$$t \in (A^n)^* \Leftrightarrow t \in A^n_{t^*}, \quad t \in (B^n)^* \Leftrightarrow t \in B^n_{t^*}.$$

Если как минимум одно из включений

$$A^m_{t^*} \subseteq A^n_{t^*}, \quad B^m_{t^*} \supseteq B^n_{t^*} \tag{5}$$

ложно, то как минимум одно из включений $(A^m)^* \subseteq (A^n)^*$, $(B^m)^* \supseteq (A^m)^*$ также окажется ложным, т. е. $\nu(m) \nleq \nu(n)$.

Если оба включения (5) верны, то по предложению 3 $(A^m)^* \subseteq (A^n)^*$ и $(B^m)^* \supseteq (A^m)^*$, откуда $\nu(m) \le \nu(n)$.

Таким образом, $\mathscr{L}_r(\mathfrak{F})$ допускает вычислимую нумерацию ν, относительно которой мы можем эффективно решать, верно ли, что $\nu(m) \le \nu(n)$.

Заметим,что если все точки из $\mathscr{L}(\mathfrak{F}) \setminus \{\perp, \top\}$ изолированы, то

$$\mathscr{L}(\mathfrak{F}) \setminus \{\perp, \top\} \subseteq \mathscr{L}_r(\mathfrak{F}) \subseteq \mathscr{L}(\mathfrak{F}).$$

Далее, семейство $\mathscr{L}_r(\mathfrak{F})$ имеет вычислимое представление. Используя то, что $\perp$ и $\top$ являются соответственно наименьшим и наибольшим элементами $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$, мы можем легко расширить это вычислимое представление до вычислимого представления всего порядка $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$. $\square$

В доказательстве теоремы 1 мы определили вычислимую нумерацию ν множества $\mathfrak{F}$. Будем называть такую нумерацию *стандартной нумерацией понятий.*

Дадим полное описание всех возможных типов изоморфизма решеток понятий вычислимых формальных контекстов, у которых все нетривиальные понятия изолированы.

Следствие 1. *Пусть $\langle L; \leq \rangle$ — упорядоченное множество. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\langle L; \leq \rangle$ изоморфно упорядочению решетки понятий некоторого вычислимого формального контекста, у которого все нетривиальные понятия изолированы,*

(2) *$\langle L; \leq \rangle$ — полная решетка и имеет вычислимое представление.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Следует из теоремы 1 и основной теоремы FCA.

(2) $\Rightarrow$ (1). Заметим, что если $\langle L; \leq \rangle$ — вычислимая полная решетка, то $\langle L; L; \leq \rangle$ — вычислимый формальный контекст. По основной теореме FCA его решетка понятий изоморфна $\langle L; \leq \rangle$ и все его формальные понятия имеют вид $\alpha_a = \langle \{x \mid x \leq a\}, \{x \mid a \leq x\} \rangle$. Любое такое формальное понятие α_a является единственным элементом в окрестности $U_{\{a\},\{a\}}$, т. е. все точки в $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$ изолированы. $\square$

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — вычислимый формальный контекст и выполнено хотя бы одно из двух условий:*

(1) *для всякого $x \in G$ множество $\mathtt{Th}(x) = \{y \mid x \models y\}$ конечно;*

(2) *для всякого $y \in M$ множество $\mathtt{Mod}(y) = \{x \mid x \models y\}$ конечно.*

Тогда каждое нетривиальное формальное понятие из $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$ вычислимо и $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$ изоморфно некоторому вычислимому порядку.

Доказательство. Докажем, что при условиях (1), (2) каждое нетривиальное понятие изолировано. Результат будет вытекать из следствия 1.

Предположим, что для всякого $x \in G$ множество $\mathtt{Th}(x) = \{y \mid x \models y\}$ конечно. Пусть $\alpha = \langle A, B \rangle$ — нетривиальное понятие из $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$. Тогда

$$B = \mathtt{Th}(A) = \bigcap_{x \in A} \mathtt{Th}(x).$$

Возьмем произвольное $a \in A$. Имеем $B \subseteq \mathtt{Th}(a)$. Отсюда по первоначальному предположению получаем, что B конечно. Для каждого $b \in \mathtt{Th}(a) \setminus B$ выберем элемент $a' \in A$ так, что $a' \not\models b$. Выбранные элементы вместе с a образуют конечное множество $A_0 \subseteq A$ такое, что

$$B = \mathtt{Th}(A_0) = \bigcap_{x \in A_0} \mathtt{Th}(x).$$

Покажем, что окрестность $U_{\langle A_0, B \rangle}$ содержит единственный элемент α. Ясно,что $\alpha \in U_{\langle A_0, B \rangle}$. Предположим, что некоторое β принадлежит $U_{\langle A_0, B \rangle}$. По определению окрестности имеем $B \subseteq \mathtt{int}(\beta)$. Покажем включение $\mathtt{int}(\beta) \subseteq B$. Пусть $b \in \mathtt{int}(\beta)$. Поскольку $A_0 \subseteq \mathtt{ext}(\beta)$, имеем $A_0 \models b$, откуда $b \in \mathtt{Th}(A_0) = B$. Таким образом, $\mathtt{int}(\beta) = B = \mathtt{int}(\alpha)$, и, значит, $\alpha = \beta$.

Доказательство оставшегося утверждения проводится аналогично. $\square$

Теперь докажем некоторые результаты о взаимоотношении между множествами всех регулярных формальных понятий и всех формальных понятий.

Напомним следующее стандартное определение из теории моделей.

Определение 5. Если $\mathfrak{A}$ — подструктура структуры $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$), то будем говорить, что $\mathfrak{A}$ является 1-*подструктурой в* $\mathfrak{B}$, если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ удовлетворяют одним и тем же $\exists$-формулам с параметрами из $\mathfrak{A}$. Этот факт будем обозначать через $\mathfrak{A} \leq_1 \mathfrak{B}$.

Следующая теорема показывает, что упорядочения на формальных понятиях вычислимых формальных контекстов в некотором смысле очень близки к вычислимым структурам, а именно, они всегда содержат вычислимый $\le_1$-подпорядок с хорошими структурными и нумерационными свойствами.

Теорема 2. *Для каждого вычислимого формального контекста $\mathfrak{F}$ выполнено $\mathscr{L}_r(\mathfrak{F}) \le_1 \mathscr{L}(\mathfrak{F})$.*

Доказательство теоремы. Достаточно доказать, что для любых элементов $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathscr{L}_r(\mathfrak{F})$ и любых $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathscr{L}(\mathfrak{F})$ существуют $\beta'_1, \dots, \beta'_n \in \mathscr{L}_r(\mathfrak{F})$ такие, что отображение

$$\alpha_i \mapsto \alpha_i,\ i = 1, \dots, m, \quad \beta_j \mapsto \beta'_j,\ j = 1, \dots, n, \tag{6}$$

является изоморфизмом между структурами

$$\langle \{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n\}; \le \rangle \quad \text{и} \quad \langle \{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta'_1, \dots, \beta'_n\}; \le \rangle.$$

Предположим, что каждое понятие α_i построено основным алгоритмом из пары множеств A_i, B_i, $i = 1, \dots, m$. Обозначим $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n\}$. Сначала зафиксируем $t_0 < \omega$ такие, что

1) для всех $\gamma_0, \gamma_1 \in S$ если $\gamma_0 \ne \gamma_1$, то существует $t < t_0$ такое, что $\neg(t \in \mathtt{ext}(\gamma_0) \leftrightarrow t \in \mathtt{ext}(\gamma_1)) \vee \neg(t \in \mathtt{int}(\gamma_0) \leftrightarrow t \in \mathtt{int}(\gamma_1))$,

2) t_0 больше любого элемента множеств A_i и B_i, $i = 1, \dots, m$.

Далее, заметим, что по определению формального понятия,

1) для каждого $\gamma \in S$ и каждого $t < t_0$ такого, что $t \notin \mathtt{ext}(\gamma)$, найдется $t' \in \mathtt{int}(\gamma)$ такое, что $t \not\models t'$ (свидетель для $t \notin \mathtt{ext}(\gamma)$),

2) для каждого $\gamma \in S$ и каждого $t < t_0$ такого, что $t \notin \mathtt{int}(\gamma)$, существует $t' \in \mathtt{ext}(\gamma)$ такое, что $t' \not\models t$ (свидетель для $t \notin \mathtt{int}(\gamma)$).

Для каждого $\gamma \in S$ и каждого $t < t_0$ такого, что $t \notin \mathtt{ext}(\gamma)$ или $t \notin \mathtt{int}(\gamma)$, зафиксируем по одному свидетелю. Пусть $t_1 \ge t_0$ — натуральное число, большее всех таких свидетелей.

Далее для краткости будем использовать общепринятое в теории множеств понимание произвольного натурального числа t как конечного ординала, т. е. как множества всех натуральных чисел, меньших t, а именно $t = \{t' \mid t' < t\}$, так что использованные ниже выражения типа $\mathtt{ext}(\gamma) \cap t_1$ будут иметь вполне понятный смысл.

Если мы запустим основной алгоритм на парах $\mathtt{ext}(\gamma) \cap t_1$, $\mathtt{int}(\gamma) \cap t_1$ для всех $\gamma \in S$, то по предложению 4 результат его работы на парах $\mathtt{ext}(\alpha_i) \cap t_1$, $\mathtt{int}(\alpha_i) \cap t_1$ для $i = 1, \dots, m$ будет снова α_i. Пусть β'_i — результат применения основного алгоритма к паре $\mathtt{ext}(\beta_j) \cap t_1, \mathtt{int}(\beta_j) \cap t_1$ для всех $j = 1, \dots, n$. По предложению 3 и выбору t_0 и t_1 отображение (6) будет требуемым изоморфизмом между конечными структурами. Действительно, если некоторые γ и δ из S не равны, то эта ситуация уже закреплена в начальных конечных множествах, а если вначале было $\gamma \le \delta$, так то же самое будет выполнено для результатов работы основного алгоритма, запущенного с их начальных частей, и будет сохранено в процессе построения. $\square$

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{F} = \langle G, M; \models \rangle$ — вычислимый формальный контекст. Тогда $\exists$-теория каждой структуры $\langle \mathscr{L}(\mathfrak{F}), \bar{a} \rangle$, где $\bar{a} = a_1, \dots, a_m \in \mathscr{L}_r(\mathfrak{F})$, совпадает с $\exists$-теорией структуры $\langle \mathscr{L}_r(\mathfrak{F}), \bar{a} \rangle$, которая является вычислимо перечислимой, поскольку $\langle \mathscr{L}_r(\mathfrak{F}), \le \rangle$ изоморфна вычислимой структуре.*

Более того, если $\mathfrak{F}$ — вычислимый формальный контекст и ν — стандартная нумерация элементов множества $\mathscr{L}_r(\mathfrak{F})$, то алгоритм, перечисляющий $\exists$-теорию структуры $\langle \mathscr{L}(\mathfrak{F}), \nu(m_1), \dots, \nu(m_k) \rangle$, находится равномерно эффективно по числам $m_1, \dots, m_k \in \omega$.

Следствие 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — вычислимый формальный контекст. Тогда для любого его вычислимого понятия α $\exists$-теория структуры $\langle \mathscr{L}(\mathfrak{F}), \alpha\rangle$ вычислимо перечислима.*

Доказательство. Для нетривиальных понятий утверждение вытекает непосредственно из следствия 3 вместе с предложениями 5 и 6.

Пусть α — тривиальное формальное понятие, т. е. $\alpha \in \{\top, \bot\}$. Чтобы доказать утверждение для тривиальных формальных понятий, нам нужно найти вычислимый формальный контекст $\mathfrak{F}'$ такой, что структура $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$ изоморфна $\mathscr{L}(\mathfrak{F}')$ и изоморфный образ $\alpha' \in \mathscr{L}(\mathfrak{F}')$ элемента α вычислим и имеет свойства $\mathtt{ext}(\alpha') \neq \varnothing$ и $\mathtt{int}(\alpha') \neq \varnothing$. Сначала рассмотрим новые элементы $g \notin G$ и $m \notin M$ и положим $\mathfrak{F}^* = \langle G \cup \{g\}, M \cup \{m\}; \models^*\rangle$, где

$$\models^* \stackrel{df}{=} \models \cup [\{g\} \times (M \cup \{m\})] \cup [(G \cup \{g\}) \times \{m\}].$$

Непосредственная проверка показывает, что существует изоморфизм между $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$ и $\mathscr{L}(\mathfrak{F}^*)$, сохраняющий вычислимые понятия, при этом наибольший и наименьший элементы в $\mathscr{L}(\mathfrak{F}^*)$ имеют непустые экстенты и интенты. Остается взять в качестве $\mathfrak{F}'$ цилиндрификацию $\mathfrak{F}^*$ и снова применить следствие 3 вместе с предложениями 5 и 6. $\square$

Следствие 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — вычислимый формальный контекст. Тогда если понятие $\alpha \in \mathscr{L}(\mathfrak{F})$ содержится в конечном множестве $S \subseteq \mathscr{L}(\mathfrak{F})$, определяемом $\exists$-формулой с параметрами из $\mathscr{L}_r(\mathfrak{F})$, то $\alpha \in \mathscr{L}_r(\mathfrak{F})$ и понятие α вычислимо.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathscr{L}(\mathfrak{F})$ и $\exists$-формула $\varphi(x, \bar\beta)$ с параметрами $\bar\beta$ из $\mathscr{L}_r(\mathfrak{F})$ такова, что $\mathscr{L}(\mathfrak{F}) \models \varphi(\alpha, \bar\beta)$ и множество, определяемое этой формулой, содержит в точности m элементов. Тогда

$$\mathscr{L}(\mathfrak{F}) \models \exists x_1 \ldots \exists x_m \left(\bigwedge_{i=1}^{m} \varphi(x_i, \bar\beta) \wedge \bigwedge_{1 \le i < j \le m} x_i \neq x_j \right),$$

откуда по теореме 2 вытекает, что то же верно и на $\mathscr{L}_r(\mathfrak{F})$. Поскольку множество, определяемое формулой $\varphi(x, \bar\beta)$ в $\mathscr{L}_r(\mathfrak{F})$, является подмножеством множества, определяемого этой формулой в $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$, получаем, что все элементы последнего принадлежат множеству $\mathscr{L}_r(\mathfrak{F})$. В частности, таково и понятие α. $\square$

Из следствия 5 получаем

Следствие 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — вычислимый формальный контекст. Пусть всякое нетривиальное понятие $x \in \mathscr{L}(\mathfrak{F})$ содержится в конечном множестве $S \subseteq \mathscr{L}(\mathfrak{F})$, определяемом $\exists$-формулой с параметрами из $\mathscr{L}_r(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathscr{L}(\mathfrak{F}) \setminus \{\top, \bot\} \subseteq \mathscr{L}_r(\mathfrak{F})$ и, таким образом, упорядочение $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$ имеет вычислимое представление.*

4. Некоторые примеры

Следующее утверждение показывает, что в общем случае невозможно (и, может быть, не имеет смысла) расширять предыдущие результаты на вычислимые решетки в сигнатуре, содержащие теоретико-множественные операции взятия точных нижней и верхней граней.

Предложение 7. *Существует вычислимый частичный порядок $\langle L; \leq \rangle$, образующий полную решетку, но не изоморфный никакой вычислимой решетке в сигнатуре $\langle \inf, \sup \rangle$.*

Доказательство. Пусть R_n — решетка, изображенная на рис. 1.

Рис. 1. Решетка R_n.

Зафиксируем некоторое вычислимо перечислимое, но не вычислимое множество $A \subseteq \omega$. Решетка L будет состоять из наибольшего элемента $\top$, наименьшего элемента $\bot$ и для каждого $n < \omega$ будет содержать фрагмент между ними, показанный на рис. 2. Ясно, что это полная решетка и что она имеет вычислимое представление.

Рис. 2. Фрагменты L. Слева — при $n \in A$, справа — при $n \notin A$.

Предположим, что у нас есть вычислимое представление этой решетки в сигнатуре $\langle \inf, \sup \rangle$. Тогда мы можем эффективно перечислять все неупорядоченные пары e_n, f_n, используя следующее их свойство: они несравнимы между собой, обладают верхней гранью, строго меньшей $\top$, и каждая из них содержится в качестве наименьшего элемента в цепи длины как минимум 6.

Далее, по данной паре e_n, f_n можно эффективно восстановить номер n, изучая структуру элементов над ними. Достаточно распознать структуру R_n, что осуществляется однозначно, поскольку, как нетрудно убедиться, R_m и R_n не вложимы друг в друга при $m \neq n$.

Если структура L обладает алгоритмом для вычисления точных нижних граней, то можно эффективно распознавать членство в A. В самом деле, достаточно перечислить пары e_n, f_n, восстановить соответствующее n и потом использовать свойство, что $n \in A$ эквивалентно условию $\inf\{e_n, f_n\} \neq \bot$. $\square$

Следующая теорема очерчивает область возможных сложностей решеток понятий вычислимых формальных контекстов, а заодно и показывает нетривиальность некоторых предыдущих результатов.

Теорема 3. 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — вычислимый формальный контекст. Если его решетка понятий $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$ имеет мощность менее, чем континуум, то она не более, чем счетна и изоморфна некоторой гиперарифметической решетке.*

2. *Для каждого рекурсивного ординала α существует вычислимый формальный контекст, решетка понятий которого имеет следующее свойство: для всех $H \subseteq \omega$ эта решетка имеет H-вычислимое представление тогда и только тогда, когда тьюрингова степень H больше или равна $\mathbf{0}^{(\alpha)}$.*

Доказательство теоремы. П. 1 был частично упомянут в [1]. Он следует из теоремы о совершенном множестве (см. [2, 4]).

Докажем п. 2. Зафиксируем некоторое вычислимое дерево $T \subseteq \omega^{<\omega}$, имеющее в точности одну вычислимую бесконечную ветвь, причем тьюрингова степень этой ветви равна $\mathbf{0}^{(\alpha)}$. Такие деревья существуют (см. [3, 4]). Мы представляем себе это дерево «растущим вниз» упорядоченным множеством, т. е. если $\alpha, \beta \in T$, то $\alpha \leq \beta$ эквивалентно утверждению: «β является начальным сегментом α». Нам необходимо пометить дуги этого дерева натуральными числами. Поэтому между каждыми двумя элементами $\langle k_1, \dots, k_n \rangle$ и $\langle k_1, \dots, k_n, k_{n+1} \rangle$ из T вставим дополнительную структуру $R_{c(n,k_{n+1})}$, определенную ранее. Предполагаем, что наибольший элемент вставляемой структуры отождествляется с $\langle k_1, \dots, k_n \rangle$, а наименьший — с $\langle k_1, \dots, k_n, k_{n+1} \rangle$. Получим вычислимый порядок, который будем обозначать через L. Пусть L^* — обратный к нему порядок. Возьмем вычислимую копию L^*, не пересекающуюся с L. Если $l \in L^*$, то его изоморфный образ в L обозначим через l^*, и если $l \in L$, то его изоморфный образ в L^* также обозначим через l^*. Расширим объединение порядков на L и L^* до упорядочения на $L \cup L^*$ по правилу: если $a \in L^*$ и $b \in L$, то $a \leq b$ тогда и только тогда, когда a^* и b сравнимы (это эквивалентно условию сравнимости a и b^*). Множество элементов, соответствующих какой-либо одной добавленной структуре R_j, будем называть *областью.* Заметим, что каждые две области могут иметь не более одной общей точки и что любой элемент содержится в некоторой области.

Рассмотрим вычислимый формальный контекст $\mathscr{L} = \langle L \cup L^*, L \cup L^*, \leq \rangle$. Легко видеть, что если экстент или интент формального понятия α содержит пару элементов, расположенных на несовместных ветвях T или T^* и в одной и той же части L или L^*, то это понятие изолировано и имеет вид $\langle \hat{a}, \check{a} \rangle$ для подходящего $a \in L \cup L^*$. Единственное неизолированное α имеет вид $\langle \zeta, \zeta^* \rangle$, где $\zeta \subseteq L^*$ соответствует максимальной ветви T и ζ^* — ее изоморфному образу в L. Существует в точности одно понятие, экстент и интент которого бесконечны, а именно понятие, соответствующее бесконечной ветви T.

Нам понадобится следующая комбинаторная лемма.

Лемма 1. *Пусть A — подструктура в $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$, изоморфная структуре вида R_j без наибольшего и наименьшего элементов. Тогда все элементы A лежат в одной и той же области и заполняют всю область, за исключением наибольшего и наименьшего элементов.*

Доказательство леммы. Из того, что A — подмножество некоторой области, уже следует, что A совпадает с этой областью без наибольшего и наименьшего элементов, поскольку структуры R_i и R_j не вкладываются друг в друга при $i \neq j$.

Рассмотрим ситуацию, когда хотя бы два различных элемента a и b из A содержатся в одной и той же области. Рассмотрим несколько возможных случаев.

Случай 1: a — один из минимальных, а b — один из максимальных элементов A.

Элемент b больше некоторого $a' \in A$, $a' \neq a$, и если a' не лежит в той же самой области, то $a' < a$, что невозможно. Стало быть, все остальные элементы из A лежат в той же самой области. Аналогично устанавливаем, что и все максимальные элементы A лежат в этой же области.

Случай 2: a и b — максимальные элементы в A.

Если хотя бы один из минимальных элементов A не содержится в той же области, то он расположен ниже ее, откуда $c < a, b$. Значит, все остальные минимальные элементы лежат в этой области. Иначе $c, c' < a, b$ для различных минимальных элементов c и c', что невозможно. Отсюда следует, что и c меньше всех остальных минимальных элементов; противоречие. Аналогично доказывается, что все максимальные элементы лежат в этой области.

Случай 3: a и b — минимальные элементы в A.

Рассматривается аналогично.

Значит, остается исключить лишь случай, когда все элементы A лежат в различных областях, т. е. когда A вложена в $T \cup T^* \cup \{s\}$, где s — единственное неизолированное формальное понятие. Для этого покажем, что туда нельзя вложить даже структуру, напоминающую букву N. В самом деле, если эту структуру составляют элементы a, b, c и d, причем элементы a и c в ней минимальны, b и d максимальны и $c < b$, то, как легко видеть, c должен располагаться в нижней половинке, а b — в верхней. При этом из $c < b$ следует, что c^* и b сравнимы в T. Рассматривая все случаи их взаимного расположения, получим, что либо a будет сравнимо с c, либо d будет сравнимо с b; противоречие. $\square$

Если рассматриваемая решетка понятий имеет H-вычислимое представление, то по лемме 1 можно использовать это понятие для эффективного восстановления этой ветви дерева T, перебирая все конечные структуры R_j, изоморфно вложимые в интент этого понятия, и извлекая соответствующую информацию из индексов j. Значит, тьюрингова степень $\mathbf{0}^{(\alpha)}$ сводится к H. С другой стороны, легко видеть, что, используя бесконечную ветвь дерева T в качестве оракула, мы можем эффективно построить вычислимую изоморфную копию для $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$, так как для этого нужно добавить к $\langle L \cup L^*, \leq \rangle$ всего лишь один элемент, расположенный между элементами бесконечной ветви и элементами ее изоморфной копии. $\square$

Теорема 4. *Существует вычислимый формальный контекст $\mathfrak{F}$, у которого все понятия вычислимы, но решетка $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$ не имеет вычислимых изоморфных представлений.*

Доказательство теоремы. Напомним некоторые понятия из теории вычислимости. Пусть S — множество функций из ω в ω. Вычислимая функция $F(n, x)$ называется ее *вычислимой нумерацией,* если $S = \{F(n, x) \mid n < \omega\}$.

Хорошо известен факт, что семейство всех вычислимых функций из ω в ω не имеет вычислимой нумерации (достаточно взять n такое, что $F(n, x) = F(x, x) + 1$, и взять $x = n$).

Лемма 2. *Существует вычислимо перечислимое дерево $T \subseteq \omega^{<\omega}$ без минимальных элементов, у которого все бесконечные ветви вычислимы, но которое не имеет вычислимой нумерации всех бесконечных ветвей.*

Доказательство. Мы снова предполагаем, что элементы $T \subseteq \omega^{<\omega}$ упорядочены отношением $a \leq b \overset{df}{\Leftrightarrow} b$ — начальный сегмент a. Здесь мы обозначаем конкатенацию произвольных конечных цепочек a и b натуральных чисел через $a \oplus b$, а 0^m является сокращением для цепочки $\underbrace{0 \ldots 0}_{n\,\text{раз}}$. Пусть $\varkappa_n(x)$ — универсальная частичная вычислимая функция для класса всех функций из ω в $\{0, 1\}$, т. е. это частичная вычислимая функция, и для каждой частичной вычислимой функции $f(x)$ найдется $n < \omega$ такое, что для всех x значения $\varkappa_n(x)$ и $f(x)$ либо одновременно определены и равны, либо оба не определены. Существование такой функции — одно из основополагающих утверждений в теории вычислимости [5]. Если $f : \omega \to \omega$, то определим *операцию сдвига* $(\cdot)^-$ для функций $f : \omega \to \omega$ равенством $f^-(x) \overset{df}{\Leftrightarrow} f(x+1)$.

Пусть

$$T = \{\langle n, \varkappa_n(0), \ldots, \varkappa_n(k-1)\rangle \oplus 0^m \mid m, n, k < \omega \wedge \varkappa_n(0), \ldots, \varkappa_n(k-1) \in \mathtt{dom}(\varkappa_n)\}.$$

Поскольку T для каждого $a \in T$ содержит элемент $a \oplus 0$, она не имеет минимальных элементов. Отсюда следует, что каждая максимальная ветвь T бесконечна и имеет один из следующих видов: $\{\langle n, \varkappa_n(0), \ldots, \varkappa_n(k-1)\rangle \mid k < \omega\}$ для некоторого $n < \omega$, если $\varkappa_n$ всюду определена, или $\{\langle n, \varkappa_n(0), \ldots, \varkappa_n(k-1)\rangle \oplus 0^m \mid k, m < \omega\}$. Таким образом, семейство всех максимальных ветвей T имеет следующее свойство: $\{\xi^- \mid \xi$ — вычислимая ветвь $T\} = \{f : \omega \to \omega \mid f$ вычислима$\}$. Значит, если $F(n,x)$ — вычислимая функция такая, что множество всех бесконечных ветвей T совпадает с $\{F(n,x) \mid n < \omega\}$, то можно определить вычислимую нумерацию всех всюду определенных вычислимых функций из ω в ω как $\{F^-(n,x) \mid n < \omega\} = \{F(n, x+1) \mid n < \omega\}$, что невозможно. $\square$

Зафиксируем перечислимое дерево T, как в лемме 2. Пусть $\varepsilon : T \mapsto \omega$ — некоторое эффективное кодирование элементов T такое, что по данному $a \in T$ можно эффективно вычислить его код и по данному $m = \varepsilon(a)$ можно эффективно восстановить последовательность a.

Преобразуем T в новое упорядоченное множество V_i, $i = 0, 1$, вставляя между каждыми последовательными элементами $a, a \oplus k \in T$ конечный порядок $R_{c(c(\varepsilon(a),k),0)}$, определенный нами ранее, причем так, чтобы наибольший элемент $R_{c(c(\varepsilon(a),k),0)}$ совпадал с a, а наименьший элемент совпадал с $a \oplus k$. Возьмем две непересекающиеся изоморфные копии V_0 и V_1. Ясно, что оба этих порядка вычислимы. Пусть $(V_1)^*$ — порядок, обратный к V_1, имеющий то же самое основное множество V_1. Элементы, соответствующие наибольшим элементам вставленных таким образом конечных порядков, естественно соответствуют элементам T. Назовем такие элементы *нормальными.* Если a — нормальный элемент из V_0 или $(V_1)^*$, то его изоморфный образ в другом множестве $(V_1)^*$ или V_0 соответственно обозначается через a^*. Рассмотрим порядок $\leq$ на $L = V_0 \cup (V_1)^*$, который определяется следующим образом: если a и b принадлежат одновременно одному из множеств V_0 или $(V_1)^*$, то они находятся в том же отношении порядка, как и в этих множествах. Если же $a \in V_0$ и $b \in (V_1)^*$ — нормальные элементы, то полагаем $b \leq a \overset{df}{\Leftrightarrow} b^*$ сравнимо с a в V_0. Возьмем в качестве порядка $\leq$ транзитивное замыкание отношения, определенного к настоящему моменту. Ясно, что упорядоченное множество $\langle L, \leq\rangle$ допускает естественное вычислимое представление.

Рассмотрим формальный контекст $\mathfrak{F} = \langle L, L, \leq\rangle$. Можно непосредственно проверить, что все формальные понятия $\mathfrak{F}$ имеют один из следующих видов: $\langle \hat{a}, \check{a}\rangle$, $\langle A(\zeta), B(\zeta)\rangle$ для некоторой бесконечной ветви ζ дерева T, где $A(\zeta) = \bigcup\{\hat{a} \mid a^* \in \zeta\}$, $B(\zeta) = \bigcup\{\check{a} \mid a \in \zeta\}$. Отсюда по лемме 1 получаем, что все элементы $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$ вычислимы.

Заметим, что для структуры $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$ также справедлива лемма 1.

Предположим теперь, что $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$ имеет изоморфное вычислимое представление $\mathscr{L}'$.

Лемма 3. *Существует эффективная процедура, которая по данному $a \in \mathscr{L}'$ перечисляет некоторое максимальное линейно упорядоченное подмножество L_a в $\mathscr{L}'$ такое, что $a \in L_a$.*

Доказательство леммы. Сначала перечислим a в L_a. Последовательно рассматриваем все элементы из $\mathscr{L}'$, и если новый элемент вместе с конечным множеством уже перечисленных к этому моменту элементов образуют линейно упорядоченное множество, то также перечисляем этот элемент в L_a. $\square$

Каждое множество L_a, $a \in \mathscr{L}'$, содержит в точности одну бесконечную ветвь дерева T, и каждая бесконечная ветвь ζ дерева T попадает в некоторое множество L_a; это случится как минимум, когда a — единственный элемент в $\mathscr{L}'$, расположенный между изоморфными образами множеств ζ и $\zeta^* = \{x^* \mid x \in \zeta\}$ в $\mathscr{L}'$.

Назовем элемент структуры R_m *внутренним*, если он отличается от ее наибольшего и наименьшего элементов. Определим вычислимую нумерацию всех вычислимых всюду определенных функций из ω в ω следующим образом: $F(a,x) = y \overset{df}{\Leftrightarrow}$ существует подструктура в $\mathscr{L}'$, изоморфная R_m, имеющая общий внутренний элемент с L_a, причем $m = c(c(\varepsilon(b \oplus x), y), 0)$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Благодарности. Автор благодарен профессору Карлу Эриху Вольффу за замечательную рабочую атмосферу, которую он обеспечил во время визита автора в Дармштадский технический университет в ноябре–декабре 2006 г., где и была получена большая часть этих результатов, а также всем участникам международного проекта РФФИ-DFG за полезные замечания и обсуждения. Автор также благодарит анонимного рецензента за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Морозов А. С., Львова М. А.* О вычислимых формальных понятиях в вычислимых формальных контекстах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1088–1092.
2. *Barwise J.* Admissible sets and structures. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verl., 1975.
3. *Rogers H.* Theory of Recursive functions and effective computability. New York; St. Louis; San Francisco; Toronto; London; Sydney: McGraw-Hill Book Comp., 1967.
4. *Sacks G. E.* Higher recursion theory. Heidelberg: Springer-Verl, 1990.
5. *Ershov Yu. L., Goncharov S. S.* Constructive models. New York, etc.: Kluwer Acad./Plenum Publ., 2000. (Siberian School of Algebra and Logic).
6. *Ganter B., Wille R.* Formal concept analysis: Mathematical foundations. Berlin; New York: Springer-Verl., 1999.

Статья поступила 15 февраля 2007 г.

Морозов Андрей Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
morozov@math.nsc.ru