Сибирский математический журнал
Июль—август, 2008. Том 49, № 4

УДК 517.983.51

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

М. В. Фалалеев, О. В. Коробова

Аннотация. Рассматриваются системы вырожденных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах специального вида. Основным исследовательским инструментом в работе является аппарат обобщенных функций в банаховых пространствах, а именно конструкция фундаментальной оператор-функции, введенная первым из авторов. Результаты, полученные ранее для одного уравнения, перенесены на системы различных типов и проиллюстрированы примерами.

Ключевые слова: обобщенная функция, фундаментальная оператор-функция, нётеров оператор.

Постановка задачи. В работе рассматривается система уравнений вида

$$B\dot{\bar{u}}(t) = \Lambda A\bar{u}(t) + \bar{f}(t) \tag{1}$$

с начальным условием

$$\bar{u}(0) = \bar{u}_0, \tag{2}$$

здесь $\bar{u}(t), \bar{f}(t)$ — вектор-функции (столбцы) размерности s, компоненты которых $u_\nu(t)$ — функции со значениями в банаховом пространстве E_1, а $f_\nu(t)$ — функции со значениями в банаховом пространстве E_2, $\nu = 1, \dots, s$, B, A — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, $\overline{D(A)} = \overline{D(B)} = E_1$, $D(B) \subset D(A)$, оператор B необратим, $\overline{R(B)} = R(B)$. Под записью $A\bar{u}(t)$ (или $B\bar{u}(t)$) понимается вектор-функция (столбец) с компонентами $Au_\nu(t)$ (или $Bu_\nu(t)$), $\nu = 1, \dots, s$, Λ — невырожденная квадратная матрица порядка s.

Ставится задача о построении как непрерывных, так и обобщенных решений рассматриваемых систем и связи между этими решениями. Отметим, что системы вида (1), (2) встречаются, например, при изучении продольных колебаний в молекулах ДНК (см. [1] и библиографию там же).

Некоторые вспомогательные сведения.

1^0. Поскольку $\det\Lambda \neq 0$, все характеристические числа $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$ матрицы Λ отличны от нуля, матрица Λ имеет нормальную жорданову форму квазидиагонального вида

$$J \equiv \{\lambda_1 E^{(q_1)} + H^{(q_1)}, \lambda_2 E^{(q_2)} + H^{(q_2)}, \dots, \lambda_\mu E^{(q_\mu)} + H^{(q_\mu)}\},$$

где

$$\lambda_i E^{(q_i)} + H^{(q_i)} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

— квадратная матрица порядка q_i, $q_1 + q_2 + \cdots + q_\mu = s$, и существует невырожденная матрица T порядка s такая, что

$$\Lambda = T \cdot J \cdot T^{-1}.$$

В частности, если все элементарные делители Λ первой степени, то жорданова форма имеет диагональный вид и в этом случае

$$\Lambda = T \cdot \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s\} \cdot T^{-1}$$

(среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ могут быть равные).

Здесь использованы обозначения и терминология из монографии [2].

2^0. В работах [3–7] введена конструкция фундаментальной оператор-функции, позволяющая в замкнутом виде строить обобщенные решения различных типов вырожденных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Построены обобщенные решения в классе $K'_+(E_1)$ распределений с ограниченным слева носителем. В данной работе идеи из [3–7] перенесены на системы (1), (2), при изложении представляемых далее результатов будут использоваться обозначения и терминология из этих же работ.

В обобщенных функциях задачу (1), (2) можно переписать в сверточном виде:

$$(B\delta'(t) - \Lambda A\delta(t)) * \tilde{\bar{u}}(t) = \bar{f}(t)\theta(t) + B\bar{u}_0\delta(t) \tag{3}$$

(определение свертки приведено в [3–5]). Здесь и далее под записью вида $B\delta'(t)$ будем понимать $E^{(s)}B\delta'(t)$, где $E^{(s)}$, как и выше, квадратная единичная матрица порядка s.

Определение. *Матричной фундаментальной оператор-функцией* $\mathscr{E}(t)$ для дифференциального оператора $(B\delta'(t) - \Lambda A\delta(t))$ на классе $K'_+(E_2)$ назовем такую матричную оператор-функцию, для которой выполняются следующие равенства:

$$(B\delta'(t) - \Lambda A\delta(t)) * \mathscr{E}(t) * \tilde{\bar{u}}(t) = \tilde{\bar{u}}(t) \quad \forall \tilde{\bar{u}}(t) \in K'_+(E_2), \tag{4}$$

$$\mathscr{E}(t) * (B\delta'(t) - \Lambda A\delta(t)) * \tilde{\bar{v}}(t) = \tilde{\bar{v}}(t) \quad \forall \tilde{\bar{v}}(t) \in K'_+(E_1). \tag{5}$$

Здесь под $\tilde{\bar{u}} \in K'_+(E_2)$ (или $\tilde{\bar{v}} \in K'_+(E_1)$) мы понимаем вектор-столбец, каждая компонента которого является обобщенной функцией с ограниченным слева носителем. Матричная оператор-функция $\mathscr{E}(t)$ представляет собой квадратную матрицу порядка s, каждый элемент которой имеет вид $K_{ij}(t)g_{ij}(t)$, $K_{ij}(t) \in \mathscr{L}(E_2, E_1)$, $g_{ij}(t) \in D'_+$ [9]. Далее для системы (1) при различных условиях на операторный пучок $(B - \varepsilon A)$ получены явные представления для $K_{ij}(t)$, причем $K^*_{ij}(t) \in \mathscr{L}(E^*_1, E^*_2)$ существуют при почти всех $t \geq 0$ и $K^*_{ij}(t) \in C^\infty$ $(t \geq 0)$. Отметим, что дифференциальный оператор $(B\delta'(t) - \Lambda A\delta(t))$ (соответствующий системе (1)) в описанном смысле также является матричной оператор-функцией с компонентами вида $(\delta_{ij}B\delta'(t) - a_{ij}A\delta(t))$, $\Lambda = \|a_{ij}\|$. Под записью вида $\mathscr{E}(t) * \tilde{\bar{u}}$ будем понимать вектор-столбец $\tilde{\bar{w}}$, компоненты которого восстанавливаются по естественному правилу

$$w_i = \sum_{j=1}^{s} K_{ij}(t)g_{ij}(t) * u_j(t), \quad i = 1, \ldots, s.$$

Выбор класса $K'_+(E_1)$ продиктован тем, что в этом случае свертка существует и обладает свойством ассоциативности.

Если известна матричная фундаментальная оператор-функция $\mathscr{E}(t)$ для дифференциального оператора $(B\delta'(t)-\Lambda A\delta(t))$, то сверточное уравнение

$$(B\delta'(t)-\Lambda A\delta(t))*\tilde{\tilde{u}}(t)=\tilde{\tilde{h}}(t) \tag{6}$$

при любой правой части $\tilde{\tilde{h}}(t)\in K'_+(E_2)$ имеет единственное решение в классе $K'_+(E_1)$ вида $\tilde{\tilde{u}}(t)=\mathscr{E}(t)*\tilde{\tilde{h}}(t)$. Действительно, согласно определению в силу равенства (4) эта вектор-функция является решением уравнения (6). Покажем его единственность. Пусть $\tilde{\tilde{u}}_1(t)\in K'_+(E_1)$ — отличное от $\mathscr{E}(t)*\tilde{\tilde{h}}(t)$ решение. Тогда с учетом равенств (5), (6) и свойства ассоциативности свертки получаем

$$\tilde{\tilde{u}}_1(t)=\mathscr{E}(t)*(B\delta'(t)-\Lambda A\delta(t))*\tilde{\tilde{u}}_1(t)=\mathscr{E}(t)*\tilde{\tilde{h}}(t).$$

Фундаментальная оператор-функция в условиях фредгольмовости. Пусть выполнено условие

(A) Оператор B фредгольмов, т. е. $\dim N(B)=\dim N(B^*)=n$, и имеет полный A-жорданов набор [9], элементы $\{\varphi_i^{(j)},\ i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,p_i\}$ составляют этот набор, а функционалы $\{\psi_i^{(j)},\ i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,p_i\}$ образуют соответственно полный A^*-жорданов набор оператора B^*, $\langle\varphi_i^{(1)},\gamma_k\rangle=\langle z_i,\psi_k^{(1)}\rangle=\delta_{ik}$, $i,k=1,\dots,n$.

При выполнении условия (A) оператор

$$\Gamma=\left(B+\sum_{i=1}^{n}\langle\cdot,\gamma_i\rangle z_i\right)^{-1}$$

ограниченный [9], оператор

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)} \tag{7}$$

— проектор в E_2.

Теорема 1. *Пусть в системе* (1) $\det\Lambda\neq 0$ *и выполнено условие* (A). *Тогда дифференциальный оператор* $(B\delta'(t)-\Lambda A\delta(t))$ *имеет на классе* $K'_+(E_2)$ *матричную фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathscr{E}(t)=T\delta(t)*\{E_1(t),E_2(t),\dots,E_\mu(t)\}*T^{-1}\delta(t), \tag{8}$$

где $\{E_1(t),E_2(t),\dots,E_\mu(t)\}$ *— блочная квадратная квазидиагональная матрица порядка* s *вида*

$$\begin{pmatrix} E_1(t) & 0 & \dots & 0\\ 0 & E_2(t) & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & E_\mu(t)\end{pmatrix}, \tag{9}$$

диагональные блоки которой $E_\nu(t)$ *являются верхнетреугольными квадратными матрицами порядка* q_ν *вида* $E_\nu(t)=E^{(q_\nu)}\mathscr{E}_\nu(t)*\sigma_\nu(t)$:

$$\sigma_\nu(t)=\begin{pmatrix} I\delta(t) & A\delta(t)*\mathscr{E}_\nu(t) & (A\delta(t)*\mathscr{E}_\nu(t))^2 & \dots & \cdot & (A\delta(t)*\mathscr{E}_\nu(t))^{q_\nu-1}\\ 0 & I\delta(t) & A\delta(t)*\mathscr{E}_\nu(t) & \dots & \cdot & (A\delta(t)*\mathscr{E}_\nu(t))^{q_\nu-2}\\ 0 & 0 & I\delta(t) & \dots & \cdot & (A\delta(t)*\mathscr{E}_\nu(t))^{q_\nu-3}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \dots & I\delta(t) & A\delta(t)*\mathscr{E}_\nu(t)\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I\delta(t)\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Здесь $\nu = 1, \dots, \mu$ и

$$\mathscr{E}_\nu(t) = \Gamma e^{\lambda_\nu A\Gamma t}[I - Q]\theta(t) - \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle\frac{1}{\lambda_\nu^{k+1}}\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\delta^{(k)}(t)\right].$$

Доказательство. В соответствии с определением для доказательства достаточно проверить справедливость равенств (4) и (5). Действительно,

$$\begin{aligned}(B\delta'(t) - \Lambda A\delta(t)) * \mathscr{E}(t) &= T\delta(t) * T^{-1}\delta(t) * (B\delta'(t) - \Lambda A\delta(t)) \\ &\quad * T\delta(t) * \{E_1(t), E_2(t), \dots, E_\mu(t)\} * T^{-1}\delta(t) \\ &= T\delta(t) * (B\delta'(t) - JA\delta(t)) * \{E_1(t), E_2(t), \dots, E_\mu(t)\} * T^{-1}\delta(t).\end{aligned}$$

Для завершения доказательства осталось проверить, что при всех $\nu = 1, \dots, \mu$

$$(B\delta'(t) - (\lambda_\nu E^{(q_\nu)} + H^{(q_\nu)})A\delta(t)) * E_\nu(t) = E^{(q_\nu)}\delta(t).$$

Но [4]

$$(B\delta'(t) - \lambda_\nu A\delta(t)) * \mathscr{E}_\nu(t) = I\delta(t),$$

$$(B\delta'(t) - \lambda_\nu A\delta(t)) * \mathscr{E}_\nu(t) * (A\delta(t) * \mathscr{E}_\nu(t))^i - A\delta(t) * \mathscr{E}_\nu(t) * (A\delta(t) * \mathscr{E}_\nu(t))^{i-1} \equiv 0,$$

поэтому

$$(B\delta'(t) - \Lambda A\delta(t)) * \mathscr{E}(t) = T\delta(t) * T^{-1}\delta(t) = I\delta(t),$$

что и завершает доказательство формулы (4).

Равенство (5) доказывается аналогично:

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(t) * (B\delta'(t) - \Lambda A\delta(t)) &= T\delta(t) * \{E_1(t), E_2(t), \dots, E_\mu(t)\} * T^{-1}\delta(t) \\ &\quad * (B\delta'(t) - \Lambda A\delta(t)) * T\delta(t) * T^{-1}\delta(t) \\ &= T\delta(t) * \{E_1(t), E_2(t), \dots, E_\mu(t)\} * (B\delta'(t) - JA\delta(t)) * T^{-1}\delta(t).\end{aligned}$$

Поскольку [4]

$$\mathscr{E}_\nu(t) * (B\delta'(t) - \lambda_\nu A\delta(t)) = I\delta(t),$$

$$-\mathscr{E}_\nu(t) * (A\delta(t) * \mathscr{E}_\nu(t))^i * A\delta(t) + \mathscr{E}_\nu(t) * (A\delta(t) * \mathscr{E}_\nu(t))^{i+1} * (B\delta'(t) - \lambda_\nu A\delta(t)) \equiv 0,$$

то

$$E_\nu(t) * (B\delta'(t) - (\lambda_\nu E^{(q_\nu)} + H^{(q_\nu)})A\delta(t)) = E^{(q_\nu)}\delta(t)$$

и, значит,

$$\mathscr{E}(t) * (B\delta'(t) - \Lambda A\delta(t)) = T\delta(t) * T^{-1}\delta(t) = I\delta(t).$$

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Если в условиях теоремы 1 все элементарные делители матрицы Λ первой степени, то матричная фундаментальная оператор-функция дифференциального оператора $(B\delta'(t) - \Lambda A\delta(t))$ имеет на классе $K'_+(E_2)$ (наиболее простой) вид*

$$\mathscr{E}(t) = T\delta(t) * \{\mathscr{E}_1(t), \mathscr{E}_2(t), \dots, \mathscr{E}_s(t)\} * T^{-1}\delta(t).$$

Следствие 2. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то единственное обобщенное решение задачи Коши* (1), (2) (*т. е. решение уравнения* (3)) *класса* $K'_+(E_1)$ *восстанавливается по формуле*

$$\tilde{\bar{u}}(t) = \mathscr{E}(t) * (\bar{f}(t)\theta(t) + B\bar{u}_0\delta(t)). \tag{11}$$

В случае, когда элементарные делители матрицы Λ первой степени, формула (11) переписывается в виде

$$\tilde{\bar{u}}(t) = T\widetilde{\overline{w}}(t),$$

где при $\nu = 1, \dots, s$

$$\widetilde{w}_\nu(t) = -\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{k} c_{ij}\lambda_\nu^{k-j}\varphi_i^{(k+1-j)}\right\}\delta^{(p_i-1-k)}(t)\right]$$
$$+\left(w_\nu^0 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} c_{ij}\lambda_\nu^{p_i-j}\varphi_i^{(p_i+1-j)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\xi_{ij}(t)\lambda_\nu^{j-1}\varphi_i^{(j)}\right.$$
$$\left. + \int_0^t \Gamma e^{\lambda_\nu A\Gamma(t-\tau)}[I-Q]\big(\lambda_\nu A w_\nu^0 + g_\nu(\tau)\big)\,d\tau\right)\theta(t).$$

Здесь введены обозначения $\overline{w}^0 = T^{-1}\bar{u}^0$, $\bar{g}(t) = T^{-1}\bar{f}(t)$,

$$\xi_{ij}(t) = -\sum_{k=0}^{p_i-j}\frac{1}{\lambda_\nu^{k+j}}\big\langle g_\nu^{(k)}(t) - g_\nu^{(k)}(0), \psi_i^{(p_i-k+1-j)}\big\rangle, \tag{12}$$

$$c_{ij} = -\frac{1}{\lambda_\nu^{p_i+1-j}}\big\langle \lambda_l A w_\nu^0 + g_\nu(0), \psi_i^{(j)}\big\rangle - \frac{1}{\lambda_\nu^{p_i+2-j}}\big\langle g'_\nu(0), \psi_i^{(j-1)}\big\rangle$$
$$- \dots - \frac{1}{\lambda_\nu^{p_i}}\big\langle g_\nu^{j-1}(0), \psi_i^{(1)}\big\rangle, \quad i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, p_i. \tag{13}$$

Теорема 2. *Если в условиях теоремы* 1 *все элементарные делители матрицы* Λ *первой степени и* $c_{ij} = 0$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p_i$, *то обобщенное решение* (11) *задачи Коши* (1), (2) *окажется классическим* (*гладким*) *и имеет вид*

$$\bar{u}(t) = T\overline{w}(t),$$

где при $\nu = 1, \dots, s$

$$w_\nu(t) = w_\nu^0 + \int_0^t \Gamma e^{\lambda_\nu A\Gamma(t-\tau)}[I-Q]\big(\lambda_\nu A w_\nu^0 + g_\nu(\tau)\big)\,d\tau + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\xi_{ij}(t)\lambda_\nu^{j-1}\varphi_i^{(j)}.$$

Фундаментальная оператор-функция в условиях нётеровости. Пусть выполнено условие

(B) оператор B нётеров, т. е. $n = \dim N(B) \neq \dim N(B^*) = m$, имеет полный A-жорданов набор [10], элементы $\{\varphi_i^{(j)},\ i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, p_i\}$ составляют этот набор, а функционалы $\{\psi_i^{(j)},\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, p_i\}$ образуют соответствующий полный A^*-жорданов набор оператора B^*, $\langle\varphi_i^{(1)}, \gamma_k\rangle = \delta_{ik}$, $i, k = 1, \dots, n$, $\langle z_k, \psi_j^{(1)}\rangle = \delta_{kj}$, $k, j = 1, \dots, m$.

Введем проекторы

$$\widetilde{P} = \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i, \quad \widetilde{Q} = \sum_{j=1}^{m} \langle \cdot, \psi_j \rangle z_j.$$

Фиксированным системам $\{\varphi_i^{(1)}\}$, $\{\psi_j^{(1)}\}$, $\{\gamma_i\}$, $\{z_j\}$ соответствует единственный псевдообратный оператор, обозначаемый через B^+ и однозначно определяемый следующим набором своих свойств [11]:

$$D(B^+) = R(B) \oplus \{z_1, \dots, z_m\}, \quad R(B^+) = N(\widetilde{P}) \cap D(B),$$

$$BB^+ = I - \widetilde{Q} \quad \text{на } D(B^+), \quad B^+B = I - \widetilde{P} \quad \text{на } D(B),$$

причем $N(B^+) = \{z_1, \dots, z_m\}$, $BB^+B = B$, $B^+BB^+ = B^+$. На $R(I-\widetilde{Q})$ оператор B^+, очевидно, непрерывно обратим.

Теорема 3. *Пусть в системе* (1) $\det \Lambda \neq 0$, *выполнено условие* (B) *и* $n > m$. *Тогда дифференциальный оператор* $(B\delta'(t) - \Lambda A\delta(t))$ *имеет на классе* $K'_+(E_2)$ *матричную фундаментальную оператор-функцию, определяемую формулами* (8)–(10), *в которых при* $\nu = 1, \dots, \mu$

$$\mathscr{E}_\nu(t) = B^+ e^{\lambda_\nu AB^+ t}[I - Q]\theta(t) - \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=0}^{p_i - 1} \left\{ \sum_{j=1}^{p_i - k} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle \frac{1}{\lambda_\nu^{k+1}} \varphi_i^{(p_i - k + 1 - j)} \right\} \delta^{(k)}(t) \right],$$

где Q *(см.* (7)), $\psi_i^{(1)} = 0$ *при* $i = m+1, \dots, n$, *а функционалы* $\psi_i^{(j)} \in E_2^*$, $i = m+1, \dots, n$, $j = 2, \dots, p_i$, *произвольны.*

Доказательство этой теоремы в идейном плане не отличается от доказательства теоремы 1, поэтому опустим его. Отметим только, что учет технических нюансов, связанных со спецификой случая $n > m$ нётеровости оператора B, осуществляется так же, как при доказательстве теоремы 1 в работе [5].

Теорема 4. *Пусть в системе* (1) $\det \Lambda \neq 0$, *выполнено условие* (B) *и* $n < m$. *Тогда матричная оператор-функция из теоремы* 3 *является фундаментальной для дифференциального оператора* $(B\delta'(t) - \Lambda A\delta(t))$ *на подклассе обобщенных функций из* $K'_+(E_2)$, *удовлетворяющих условиям*

$$\{\sigma_1^r(t), \sigma_2^r(t), \dots, \sigma_\mu^r(t)\} * \tilde{\tilde{u}}(t) = 0, \quad r = n+1, \dots, m, \tag{14}$$

где $\{\sigma_1^r(t), \sigma_2^r(t), \dots, \sigma_\mu^r(t)\}$, *как и в теореме* 1, *и блочная квадратная квазидиагональная матрица порядка* s *вида* (9) *с диагональными блоками верхнетреугольного типа*

$$\sigma_\nu^r(t) = E^{(q_\nu)} \langle e^{\lambda_\nu AB^+ t} \cdot, \psi_r \rangle z_r \theta(t) * \sigma_\nu(t), \quad \nu = 1, \dots, \mu$$

(представление для $\sigma_\nu(t)$ *см. в формуле* (10)).

Доказательство теоремы 4 не приводим по тем же соображениям, что и в предыдущем случае. Появление в этой теореме специального подкласса в пространстве $K'_+(E_2)$ определяется условием $n < m$ и является естественным следствием теоремы 2 работы [5].

Замечание 1. Если $m = n$, т. е. оператор B фредгольмов, то $B^+ = \Gamma$ и теорема 3 превращается в теорему 1.

Замечание 2. Из теорем 3, 4 вытекают следствия, аналогичные двум приведенным выше для теоремы 1.

Если все элементарные делители матрицы Λ первой степени, то обобщенное решение задачи Коши (1), (2) определяется формулой (11) и в случае $n > m$ представимо в виде

$$\tilde{\bar{u}}(t) = T\widetilde{\overline{w}}(t),$$

где при $\nu = 1, \dots, s$

$$\begin{aligned}\widetilde{w}_\nu(t) = &-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{k} c_{ij}\lambda_\nu^{k-j}\varphi_i^{(k+1-j)}\right\}\delta^{(p_i-1-k)}(t)\right] \\ &+\Bigg(w_\nu^0 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p_i} c_{ij}\lambda_\nu^{p_i-j}\varphi_i^{(p_i+1-j)} + \sum_{m+1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} c_{ij}B^+e^{\lambda_\nu AB^+t}A\varphi_i^{(p_i-j)} \\ &+\int_0^t B^+e^{\lambda_\nu AB^+(t-\tau)}[I-Q_1]\left(\lambda_\nu Aw_\nu^0 + g_\nu(\tau) + \sum_{k=m+1}^{n}\xi_{k1}(\tau)\lambda_\nu A\varphi_k^{(1)}\right)d\tau \\ &+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p_i}\xi_{ij}(t)\lambda_\nu^{j-1}\varphi_i^{(j)} + \sum_{k=m+1}^{n}\xi_{k1}(t)\varphi_k^{(1)}\Bigg)\theta(t). \qquad (15)\end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot, \psi_1^j\rangle A\varphi_i^{p_i+1-j}, \quad l = \min(n, m), \quad \overline{w}^0 = T^{-1}\bar{u}^0, \quad \bar{g}(t) = T^{-1}\bar{f}(t),$$

при $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, p_i$ коэффициенты c_{ij} определяются по формулам (13), функции $\xi_{ij}(t)$ — по формулам (12), при $i = m+1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p_i$ соответствующие коэффициенты c_{ij} являются свободными параметрами, а функции $\xi_{ij}(t)$ — произвольными (локально интегрируемыми). Таким образом, в этом случае обобщенное решение оказывается многопараметрическим. Отсюда вытекает

Теорема 5. *Если в условиях теоремы* 3 *все элементарные делители матрицы* Λ *первой степени, свободные параметры* c_{ij}, $i = m+1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p_i$, *в формуле* (15) *положить равными нулю, входные данные задачи* (1), (2) $\bar{u}_0$ *и* $\bar{f}(t)$ *выбрать такими, чтобы* $c_{ij} = 0$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, p_i$ (*см. формулу* (13)), *а функции* $\xi_{i1}(t)$, $i = m+1, \dots, n$, *выбрать гладкими, то обобщенное решение* (15) *задачи Коши* (1), (2) *окажется классическим (гладким), содержащим свободные функции* $\xi_{i1}(t)$, $i = m+1, \dots, n$.

При $n < m$ обобщенное решение задачи (1), (2) восстанавливается по формулам (11)–(14), если обобщенная функция $(\bar{f}(t)\theta(t) + B\bar{u}_0\delta(t))$ принадлежит подклассу пространства $K'_+(E_2)$, описываемому условиями (14), при этом свободных параметров и произвольных функций в решении нет. Таким образом, доказана

Теорема 6. *Если в условиях теоремы* 4 *все элементарные делители матрицы* Λ *первой степени, данные задачи* (1), (2) *таковы, что* (*см.* (13)) $c_{ij} = 0$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p_i$, *и*

$$\int_0^t \left\langle e^{\lambda_\nu AB^+(t-\tau)}\big(Au_0^\nu + f_\nu(\tau)\big), \psi_r\right\rangle d\tau = 0, \quad \nu = 1, \dots, s, \ r = n+1, \dots, m,$$

то обобщенное решение (15) *окажется классическим* (*гладким*).

Фундаментальная оператор-функция в условиях спектральной ограниченности. В этом пункте конструкция матричной фундаментальной оператор-функции перенесена на случай спектрально ограниченных операторов, в отличие от фредгольмова и нётерова случаев здесь допускаются бесконечными как размерность ядра B, так и длины A-жордановых цепочек.

Следуя работе [12], будем называть оператор A *спектрально ограниченным относительно* B, если существует $a > 0$ такое, что при любом $|\mu| > a$ оператор $(\mu B - A)$ непрерывно обратим. Пусть $\gamma \equiv \{\mu \in C : |\mu| = r > 0\}$, тогда операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} (\mu B - A)^{-1} B\, d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} B(\mu B - A)^{-1}\, d\mu$$

являются проекторами в E_1 и E_2 соответственно и порождают разложения пространств E_1 и E_2 в прямые суммы $E_1 = E_1^0 \oplus E_1^1 = \ker P \oplus \operatorname{im} P$ и $E_2 = E_2^0 \oplus E_2^1 = \ker Q \oplus \operatorname{im} Q$. Действия операторов B и A расщепляются, причем $A_0 : E_1^0 \to E_2^0$ и $B_1 : E_1^1 \to E_2^1$ непрерывно обратимы, $A_1 : E_1^1 \to E_2^1$ ограничен, $QB = BP$, $QA = AP$.

Теорема 7. *Пусть в системе* (1) $\det \Lambda \neq 0$, *оператор* A *спектрально ограничен относительно* B. *Тогда дифференциальный оператор* $(B\delta'(t) - \Lambda A\delta(t))$ *имеет на классе* $K'_+(E_2)$ *матричную фундаментальную оператор-функцию, определяемую формулами* (8)–(10), *в которых при* $\nu = 1, \dots, \mu$

$$\mathscr{E}_\nu(t) = U_\nu(t) B_1^{-1} Q\theta(t) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(A_0^{-1}B_0\right)^k}{\lambda_\nu^{k+1}} A_0^{-1}(I - Q)\delta^{(k)}(t),$$

где

$$U_\nu(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} (\mu B - \lambda_\nu A)^{-1} B e^{\mu t}\, d\mu.$$

Если дополнительно предположить, что ∞ — *несущественно особая точка* [12, 13] *операторного пучка* $(\mu B - A)^{-1}$ (*т. е. существует* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ *такое, что* $\left(A_0^{-1}B_0\right)^p \neq 0$, *но* $\left(A_0^{-1}B_0\right)^{p+1} \equiv 0$), *то, очевидно,*

$$\mathscr{E}_\nu(t) = U_\nu(t) B_1^{-1} Q\theta(t) - \sum_{k=0}^{p} \frac{\left(A_0^{-1}B_0\right)^k}{\lambda_\nu^{k+1}} A_0^{-1}(I - Q)\delta^{(k)}(t).$$

Как и для теорем 1 и 3, доказательство этой теоремы состоит в проверке определения, при этом специфика рассматриваемого случая учитывается так же, как при доказательстве теоремы 1 в работе [6].

Если в условиях теоремы 7 ∞ — несущественно особая точка и у матрицы Λ все элементарные делители первой степени, то задача Коши (1), (2) имеет обобщенное решение (11), представимое в виде $\tilde{\tilde{u}}(t) = T\tilde{\tilde{w}}(t)$, где при $\nu = 1, \dots, s$

$$\widetilde{w}_\nu(t) = \Bigg[U_\nu(t) P w_\nu^0 + \int\limits_0^t U_\nu(t - \tau) B_1^{-1} Q g_\nu(\tau)\, d\tau$$
$$- \sum_{k=0}^{p} \frac{\left(A_0^{-1}B_0\right)^k}{\lambda_\nu^{k+1}} A_0^{-1}(I - Q) g_\nu^{(k)}(t) \Bigg] \theta(t) - \sum_{k=0}^{p} \frac{\left(A_0^{-1}B_0\right)^{k+1}}{\lambda_\nu^{k+1}} \omega_\nu \delta^{(k)}(t), \quad (16)$$

$$\overline{w}^0 = T^{-1}\bar{u}^0, \quad \bar{g}(t) = T^{-1}\bar{f}(t), \quad \omega_\nu = (I-P)w_\nu^0 + \sum_{k=0}^{q} \frac{\left(A_0^{-1}B_0\right)^k}{\lambda_\nu^{k+1}} A_0^{-1}(I-Q)g_\nu^{(k)}(0).$$

Отсюда получается следующая

Теорема 8. *Если в условиях теоремы* 7 ∞ — *несущественно особая точка, все элементарные делители матрицы* Λ *первой степени,* $\omega_\nu = 0$, $\nu = 1, \dots, s$, *то обобщенное решение* (16) *окажется классическим* (гладким).

Замечание 3. Теоремы 7 и 8 допускают прямое обобщение на случаи секториальности и радиальности [12, 13] оператора A относительно B. Для этого необходимо будет привлечь соответствующие теоремы из [7].

Пример 1 (система уравнений Баренблатта — Желтова — Кочиной). Рассмотрим систему уравнений

$$(\alpha - \Delta)\bar{u}_t = \Lambda\Delta\bar{u} + \bar{f}(x),$$

здесь $x \in \Omega \subset R^m$, Ω — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Рассмотрим для этой системы задачу Коши — Дирихле в цилиндре $R_+ \times \Omega$:

$$\bar{u}|_{t=0} = \bar{u}_0(x),\ x \in \Omega; \quad \bar{u}|_{\partial\Omega} \equiv 0,\ (t,x) \in R_+ \times \partial\Omega.$$

Пусть все элементарные делители матрицы Λ первой степени.

Данную задачу редуцируем к уравнениям в банаховых пространствах по схеме работы [12], а именно пусть $E_1 \equiv \{u \in W_p^{k+2} : u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\}$, $E_2 \equiv W_p^k$ либо $E_1 \equiv \{u \in \mathrm{C}^{k+2+\nu} : u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\}$, $E_2 \equiv C^{k+\nu}$, здесь $W_p^k \equiv W_p^k(\Omega)$, $1 < p < \infty$, — пространство Соболева $C^{k+\nu} \equiv C^{k+\nu}(\Omega)$, $0 < \nu < 1$, $k = 0, 1, \dots,$ — пространство Гёльдера, $B = \alpha - \Delta$, $A = \Delta$, $\alpha \in \sigma(\Delta)$. При таком выборе пространств E_1 и E_2, как показано в работе [12], оператор A спектрально ограничен относительно B, причем ∞ — устранимая особая точка, т. е. $A_0^{-1}B_0 \equiv 0$, и в обозначениях теорем 7 и 8 фундаментальные оператор-функции $\mathscr{E}_\nu(t)$ при $\nu = 1, \dots, s$ имеют вид

$$\mathscr{E}_\nu(t) = {\sum_{k=1}^{\infty}}' \frac{1}{\alpha - \mu_k} e^{\frac{\lambda_\nu \mu_k}{\alpha - \mu_k}t}(\cdot, \varphi_k)\varphi_k\theta(t) - \frac{1}{\lambda_\nu\alpha} \sum_{\mu_k = \alpha} (\cdot, \varphi_k)\varphi_k\delta(t).$$

Здесь $\{\varphi_k\}$ и $\{\mu_k\}$ — множества ортонормированных собственных функций и соответствующих им собственных значений однородной задачи Дирихле

$$\Delta u = \alpha u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

в области Ω, занумерованные по убыванию собственных значений с учетом кратности. Штрих в знаке суммы означает отсутствие слагаемых, для которых $\mu_k = \alpha$.

Тогда обобщенное решение рассматриваемой системы восстанавливается по формулам (16), в которых

$$\widetilde{w}_\nu(t) = \Bigg(-\frac{1}{\lambda_\nu\alpha} \sum_{\mu_k=\alpha} (g_\nu, \varphi_k)\varphi_k + {\sum_{k=1}^{\infty}}' e^{\frac{\lambda_\nu\mu_k}{\alpha-\mu_k}t}(w_\nu^0, \varphi_k)\varphi_k + {\sum_{k=1}^{\infty}}' \frac{1}{\lambda_\nu\mu_k}(e^{\frac{\lambda_\nu\mu_k}{\alpha-\mu_k}t} - 1)(g_\nu, \varphi_k)\varphi_k\Bigg)\theta(t), \quad \nu = 1, \dots, s. \tag{17}$$

Обобщенное решение не содержит сингулярной составляющей, поэтому условия, при которых оставшаяся регулярная составляющая решения удовлетворяет начальному условию, и будут условиями разрешимости в классическом смысле, т. е. $\bar{u}_0(x) = T\widetilde{\overline{w}}(0)$, где

$$\widetilde{w}_\nu(0) = {\sum_{k=1}^{\infty}}' (w^0_\nu, \varphi_k)\varphi_k - \frac{1}{\lambda_\nu \alpha} \sum_{\mu_k=\alpha} (g_\nu, \varphi_k)\varphi_k = w^0_\nu - \frac{1}{\lambda_\nu \alpha} \sum_{\mu_k=\alpha} (g_\nu + \lambda_\nu \alpha w^0_\nu, \varphi_k)\varphi_k.$$

Итак, при выборе начальных условий $\bar{u}_0(x)$ и $\bar{f}(x)$ такими, чтобы

$$\big(g_\nu + \alpha\lambda_\nu w^0_\nu, \varphi_k\big) = 0 \quad \forall \varphi_k : \mu_k = \alpha,\ \nu = 1, \dots, s,$$

рассматриваемая система уравнений Баренблатта — Желтова — Кочиной однозначно разрешима в классе гладких (по t) функций и искомое решение совпадет с (17).

Замечание 4. Все приведенные в этой работе теоремы допускают обобщения на системы уравнений следующих видов:

$$B\bar{u}^{(N)}(t) = \Lambda A\bar{u}(t) + \bar{f}(t),$$

$$B\frac{\partial^N \bar{u}}{\partial t^N} = \Lambda A(\bar{u}(t, x - \mu) - \bar{u}(t, x)) + \bar{f}(t, x), \tag{18}$$

$$B\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \Lambda A \Delta \bar{u}(t, \overline{x}) + \bar{f}(t, \overline{x}), \tag{19}$$

при этом в системе (18) аргумент x может быть векторным, а для исследования системы (19) потребуется привлечение результатов работы [14].

Проиллюстрируем сказанное на следующем примере.

Пример 2 (задача о продольных колебаниях в молекулах ДНК). Рассмотрим линейную систему уравнений вида

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[b + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] u(t, x) = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t, x),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[b + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] w(t, x) = d\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(t, x)$$

с начальными данными

$$u|_{t=0} = u_0(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x),\ w|_{t=0} = w_0(x),\ \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = w_1(x),\ 0 \le x \le 1,$$

и краевыми условиями

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = w|_{x=0} = w|_{x=1} = 0, \quad t \ge 0,$$

где $u, w \in C^2(t \ge 0) \cap C^2[0, 1]$, $a, b, c, d \in R$, $ad \ne 0$, $f(t, x)$ и $g(t, x)$ достаточно гладкие по совокупности переменных функции, функции начальных условий $u_0(x), u_1(x), w_0(x), w_1(x) \in C^2[0, 1]$ также удовлетворяют граничным условиям.

Представляемую задачу можно рассматривать как линеаризацию системы уравнений, описывающей распространение продольных волн в молекуле ДНК [1]. Здесь $N = 2$.

Эту задачу можно редуцировать к уравнениям в банаховых пространствах по следующей схеме. Введем пару пространств

$$E_1 \equiv \{v(x) : v(x) \in C^2[0, 1],\ v(0) = v(1) = 0\}, \quad E_2 \equiv C[0, 1]$$

и зададим операторы из E_1 в E_2 правилами

$$B = \frac{d^2}{dx^2} + b, \quad A = \frac{d^2}{dx^2}.$$

Если $b \neq (n\pi)^2$, то оператор B непрерывно обратим и исходная задача однозначно разрешима при любых начальных данных $u_0(x), u_1(x), w_0(x), w_1(x)$ и правых частях $f(t,x)$ и $g(t,x)$. Если же $b = (n\pi)^2$, то оператор B фредгольмов. Ядра операторов B и B^* одномерные, $\varphi = \sin(n\pi x)$ и $\psi = -\frac{2}{d(n\pi)^2}\sin(n\pi x)$ — базисные элементы этих ядер, $z = A_2\varphi = -d(n\pi)^2\sin(n\pi x)$, $\gamma = A_2^*\varphi = 2\sin(n\pi x)$, $\langle z, \gamma\rangle = 1$, т. е. элемент φ имеет A-жорданову цепочку длины 1. Опуская далее тождественные преобразования, приведем условия, при которых система разрешима в классическом смысле (т. е. $u, w \in C^2(t \geq 0) \cap C^2[0,1]$):

$$\int_0^1 \sin(n\pi x)(g(0,x) - d(n\pi)^2 w_0(x))\,dx = 0,$$

$$\int_0^1 \sin(n\pi x)(g_t'(0,x) - d(n\pi)^2 w_1(x))\,dx = 0,$$

$$\int_0^1 \sin(n\pi x)(f(0,x) - a(n\pi)^2 u_0(x) - c(n\pi)^2 w_0(x))\,dx = 0,$$

$$\int_0^1 \sin(n\pi x)(f_t'(0,x) - a(n\pi)^2 u_1(x) - c(n\pi)^2 w_1(x))\,dx = 0.$$

Замечание 5. Во всех приведенных теоремах условие $\det\Lambda \neq 0$ может быть снято, и это будут уже новые задачи, несколько отличающиеся от рассмотренных.

Замечание 6. Представленные результаты можно распространить и на системы вида

$$MB\bar{u}^{(N)}(t) = \Lambda A\bar{u}(t) + \bar{f}(t),$$

где M и Λ — квадратные матрицы порядка s, при этом необходимо будет привлечь идеи монографий [15, 16]. Аналогичные обобщения возможны и для систем (17) и (18).

Данная работа является развернутым, дополненным и существенно расширенным изложением материалов из [17–20].

В заключение авторы искренне благодарят сотрудников кафедры математического анализа Иркутского гос. университета и лично заведующего этой кафедрой профессора Николая Александровича Сидорова за полезные и конструктивные обсуждения материалов статьи на кафедральном семинаре.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chen G., Zhang H.* Initial boundary value problem for a system of generalized IMBq equations // Math. Meth. Appl. Sci. 2004. V. 27. P. 497–518.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.
3. *Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M.* Lyapunov–Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.

4. *Фалалеев М. В.* Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1167–1182.
5. *Фалалеев М. В., Гражданцева Е. Ю.* Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных и дифференциально-разностных операторов с нётеровым оператором в главной части в банаховых пространствах // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 6. С. 1393–1406.
6. *Фалалеев М. В., Гражданцева Е. Ю.* Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в условиях спектральной ограниченности // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 6. С. 769–774.
7. *Фалалеев М. В.* Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в условиях секториальности и радиальности // Изв. вузов. Математика. 2006. № 10. С. 68–75.
8. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
9. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
10. *Сидоров Н. А., Романова О. А., Благодатская Е. Б.* Уравнения с частными производными с оператором конечного индекса при главной части // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 4. С. 726–728.
11. *Nashed M. Z.* Generalized inverses and applications. New York: Acad. Press, 1976.
12. *Свиридюк Г. А.* К общей теории полугруппы операторов // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49, № 4. С. 47–74.
13. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht: VSP, 2003.
14. *Фалалеев М. В.* Задача Коши для уравнения теплопроводности с фредгольмовым оператором при производной по времени в банаховых пространствах // Математика. Механика. Информатика: Материалы Всерос. науч. конф., Челябинск, 19–22 сент. 2006 г./ Отв. ред. С. В. Матвеев. Челябинск: Челябинск. гос. ун-т, 2007. С. 201–210.
15. *Бояринцев Ю. Е.* Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1988.
16. *Чистяков В. Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечным ядром. Новосибирск: Наука, 1996.
17. *Коробова О. В.* Сингулярные системы дифференциальных уравнений в банаховых пространствах // Вестн. Иркутск. ун-та. Специальный выпуск: Материалы ежегодной науч.-теор. конф. молодых ученых. Иркутск: Иркутск. гос. ун-т, 2006. С. 101–103.
18. *Коробова О. В.* Сингулярные системы дифференциальных уравнений в банаховых пространствах // Математика. Механика. Информатика: Тез. докл. Всерос. науч. конф., Челябинск, 19–22 сент. 2006 г. / Отв. ред. А. М. Ильин. Челябинск: Челябинск. гос. ун-т, 2006. С. 72.
19. *Коробова О. В.* Сингулярные системы дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной в банаховых пространствах // Математика и проблемы ее преподавания в вузе: Тр. III межвуз. зональной конф., посвященной памяти профессора Б. А. Бельтюкова. Иркутск: Изд-во Иркутск. гос. пед. ун-та, 2007. С. 51–53.
20. *Фалалеев М. В.* Обобщенные решения линеаризованной системы уравнений Буссинеска // Математика и проблемы ее преподавания в вузе: Тр. III межвуз. зональной конф., посвященной памяти профессора Б. А. Бельтюкова. Иркутск: Изд-во Иркутск. гос. пед. ун-та, 2007. С. 77–79.

Статья поступила 29 мая 2007 г.

Фалалеев Михаил Валентинович, Коробова Ольга Викторовна
Иркутский гос. университет, ул. К. Маркса, 1, Иркутск 664003
mihail@ic.isu.ru