Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2008. Том 49, № 3

УДК 510.67, 510.5+510.635

ОЦЕНКА АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ СЛОЖНОСТИ КЛАССОВ ВЫЧИСЛИМЫХ МОДЕЛЕЙ

Е. Н. Павловский

Аннотация. Оценивается алгоритмическая сложность индексных множеств естественных классов вычислимых моделей: конечных вычислимых моделей (Σ_2^0-полное), вычислимых моделей с ω-категоричными теориями (Δ_ω^0-сложное $\Pi_{\omega+2}^0$-множество), простых моделей (Δ_ω^0-сложное $\Pi_{\omega+2}^0$-множество), моделей с ω_1-категоричными теориями (Δ_ω^0-сложное $\Sigma_{\omega+1}^0$-множество). Получена универсальная нижняя оценка для теоретико-модельных свойств, сохраняющихся при маркеровских расширениях (Δ_ω^0).

Ключевые слова: вычислимая модель, индексное множество.

При исследовании структурных свойств теорий и алгебраических свойств моделей отдельный интерес представляет сложность определения этих свойств с алгоритмической точки зрения. Характеризация классов, а значит, и абстрактных свойств моделей в таком случае может быть получена с помощью оценки индексных множеств в универсальной нумерации вычислимых моделей [1, § 4].

Зафиксируем вычислимую сигнатуру σ без функциональных символов. Модель $\mathscr{M}$ этой сигнатуры называется *вычислимой*, если ее базисное множество и базисные отношения равномерно вычислимы. Без ограничения общности будем рассматривать модели, основаниями которых служат натуральные числа.

В работе [2] показано, что для любой конечной сигнатуры без функциональных символов существует универсальная вычислимая нумерация вычислимых моделей этой сигнатуры, т. е. такая вычислимая нумерация всех вычислимых моделей фиксированной сигнатуры, что любая другая вычислимая нумерация вычислимых моделей сводится к ней. Для случая бесконечной сигнатуры σ существует универсальная вычислимая нумерация всех вычислимых моделей сигнатуры σ вместе со всеми конечными вычислимыми моделями конечных частей этой сигнатуры [3, § 1.4; 4, § 1.3]. Обе эти нумерации являются главными, т. е. любая вычислимая последовательность вычислимых моделей сигнатуры σ сводится к этим нумерациям.

Существование таких универсальных нумераций моделей позволяет получить характеризацию классов вычислимых моделей соотнесением индексных множеств конкретных классов моделей с уровнем подходящей алгоритмической иерархии. Характеризация классов алгебраических систем в сигнатуре с функциональными символами может быть построена на основе этого подхода представлением функций своими графиками — предикатами.

Исследования автора поддержаны Советом по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–4413.2006.1), программой «Университеты России» (код проекта УР.04.01.198).

Пусть $\nu_\sigma = \{\mathscr{M}_0, \mathscr{M}_1, \dots, \mathscr{M}_n, \dots\}$ — упомянутая универсальная вычислимая нумерация моделей для соответствующей сигнатуры σ. Пусть K — некоторый класс моделей сигнатуры σ, замкнутый относительно изоморфизма.

Определение 1. *Индексным множеством* $I(K)$ класса моделей K называется множество $I(K) = \{i \mid \mathscr{M}_i \in K\}$.

Есть много работ по индексным множествам [5–12], в том числе и по оценке индексных множеств классов моделей [13].

В данной работе строятся оценки в соответствующих иерархиях сложности следующих индексных множеств известных классов вычислимых моделей, рассмотренных для разных сигнатур:

$\mathbf{Fin}_\sigma = \{i \mid \mathscr{M}_i$ конечна$\}$,

$\mathbf{Cat}_\sigma = \{i \mid \mathscr{M}_i$ имеет $\aleph_0$-категоричную теорию$\}$,

$\mathbf{UCat}_\sigma = \{i \mid \mathscr{M}_i$ имеет $\aleph_1$-категоричную теорию$\}$,

$\mathbf{Prim}_\sigma = \{i \mid \mathscr{M}_i$ — простая модель$\}$.

Напомним, что теория T называется λ-*категоричной*, если она имеет с точностью до изоморфизма одну модель мощности λ.

Далее в тексте $\aleph_0(\aleph_1)$-*категоричными моделями* будем называть модели, имеющие $\aleph_0(\aleph_1)$-категоричную теорию.

В § 1, 2, следуя идеям конструкции Маркера из [14] и их модификации из [15], мы определим два теоретико-модельных оператора, докажем лемму о представлении для Σ^0_2-подмножеств множества натуральных чисел и покажем, как с ее помощью строится нижняя оценка Δ^0_ω индексных множеств различных классов вычислимых моделей. В § 3–5 мы докажем что для сигнатуры $\sigma = \{P^2, P^4, \dots, P^{2n}, \dots\}$ предикатных символов неограниченно возрастающей местности множества $\mathbf{Cat}_\sigma$ и $\mathbf{Prim}_\sigma$ являются Δ^0_ω-сложными $\Pi^0_{\omega+2}$-множествами, а $\mathbf{UCat}_\sigma$ — Δ^0_ω-сложным $\Sigma^0_{\omega+1}$-множеством.

Обозначим через $\langle x, y\rangle$ канторовский номер пары натуральных чисел x, y, а через l и r — такие функции, что $l(\langle x, y\rangle) = x$, $r(\langle x, y\rangle) = y$, через $\operatorname{div}(x, y)$ — примитивно-рекурсивную функцию, возвращающую остаток от деления x на y. Будем пользоваться стандартной гёделевской нумерацией формул: φ_j — формула с номером j, $fv(j)$ — примитивно-рекурсивная функция, возвращающая по номеру формулы максимальный номер переменной из всех переменных, входящих в формулу свободно. Через $\mathrm{Form}(\sigma)$ обозначим множество всех формул логики предикатов сигнатуры σ. *Характеристической функцией* $\chi_A(x)$ для множества A назовем функцию, возвращающую 1, если $x \in A$, и 0 в противном случае.

Оценим сложность индексного множества $\mathbf{Fin}_\sigma$. Вычислимая модель *конечна*, когда множество ее элементов конечно. Рассмотрим вычислимую характеристическую функцию $\chi_i(x)$ для базисного множества модели $\mathscr{M}_i$. Существование такой функции следует из определения нумерации ν_σ. Утверждение о конечности модели $\mathscr{M}_i$ можно записать Σ^0_2-формулой

$$\exists x \forall y\ (\chi_i(y) = 1 \to y \leq x),$$

т. е. $\mathbf{Fin}_\sigma \in \Sigma^0_2$. Оценим наше индексное множество снизу.

Предложение 1. *Для любой сигнатуры σ без функциональных символов индексное множество $\mathbf{Fin}_\sigma$ конечных вычислимых моделей сигнатуры σ Σ^0_2-полно.*

Доказательство. Покажем справедливость нижней оценки. Для этого воспользуемся известным результатом [16, § 13.2, теорема VIII] о том, что множество $\{n \mid W_n$ бесконечно$\}$ является Π^0_2-полным. Здесь W_n — главная нумерация рекурсивно-перечислимых множеств. Пусть W^t_n — конечное подмножество элементов из W_n, перечисленных на шаге t.

Построим для каждого натурального числа n вычислимую модель $\mathscr{N}_n$ такую, что если W_n бесконечно, то и $\mathscr{N}_n$ бесконечна, в противном случае построим конечную модель.

Шаг 0: $N^0_n := \{0\}$.

Шаг $t+1$: Если $\left|W^{t+1}_n\right| > \left|W^t_n\right|$, то полагаем $N^{t+1}_n := \{0, 1, \ldots, t+1\}$, иначе $N^{t+1}_n := N^t_n$. Базисное множество N_n полагаем равным $\bigcup\limits_t N^t_n$, а предикаты считаем пустыми.

Ясно, что конструкция удовлетворяет поставленным требованиям. $\square$

§ 1. Результаты из алгоритмической теории

Для фиксированной вычислимой сигнатуры σ обозначим через $i \models \varphi$ отношение истинности формулы φ сигнатуры σ на модели с номером i в универсальной вычислимой нумерации ν_σ. Считаем, что если формула φ содержит предикатный символ P, а на модели с индексом i этот предикат не определен, то $i \models \varphi$ ложно. Будем также рассматривать вместо формулы ее гёделевский номер. Примем обозначение $\exists^{=1} x \varphi(x)$ для утверждения, что существует единственный x, удовлетворяющий φ.

Для построения нижних оценок будем пользоваться следующими фактами.

Лемма 1. *Отношение $\models$ для нумерации ν_σ вычислимо с оракулом $\varnothing^{(\omega)}$.*

Доказательство. Рассмотрим отношение истинности $i \models \varphi(\bar{a})$ для модели $\mathscr{M}_i$ нумерации ν_σ и формулы φ сигнатуры σ. Ясно, что для атомарной формулы мы можем ответить на вопрос об ее истинности и без оракула (вследствие вычислимости самой модели). Но в случае, когда формула имеет несколько кванторов, требуется определить принадлежность кортежа $\bar{a}$ некоторому $\Sigma^0_n(\Pi^0_n)$-вычислимому множеству, заданному соответственно $\Sigma^0_n(\Pi^0_n)$-формулой. Ясно, что сложность произвольной формулы не выше сложности арифметики $\varnothing^{(\omega)}$. Поэтому достаточно спросить об истинности формулы у оракула $\varnothing^{(\omega)}$. $\square$

Рассмотрим результат из алгоритмической теории.

Определение 2. Σ^0_2-множество P называется *однозначно представимым*, если для некоторого вычислимого предиката $Q \subset \omega^3$ выполнены следующие условия:

(1) $\forall n \in \omega$: $\exists a \forall b\, Q(n, a, b) \Leftrightarrow n \in P$;
(2) $\forall n \in \omega$: $\exists a \forall b\, Q(n, a, b) \Leftrightarrow \exists^{=1} a \forall b\, Q(n, a, b)$;
(3) $\forall b \exists^{=1} n, a\, \neg Q(n, a, b)$;
(4) $\forall n, a$ либо $\exists^{=1} b\, \neg Q(n, a, b)$, либо $\forall b\, Q(n, a, b)$;
(5) $\forall a \exists^{=1} n \forall b\, Q(n, a, b)$.

Лемма 2. *Пусть P — кобесконечное Σ^0_2-множество, содержащее вычислимое подмножество S такое, что $P \setminus S$ бесконечно и для каждого $i \in \omega$ множество S содержит бесконечно много элементов $\langle i, x \rangle$. Тогда P имеет однозначное представление.*

Доказательство леммы. Для Σ_2^0-множества P существует вычислимое множество H такое, что $n \in P \Leftrightarrow \exists a \forall b H(n,a,b)$. Более того, существует вычислимое множество H', для которого $\exists a \forall b\, H(n,a,b) \Leftrightarrow \exists^{=1} a \forall b\, H'(n,a,b)$. Чтобы доказать это, опишем процедуру построения предиката P_n, $n \in \omega$. Для определения P_n вначале определяем значения $a_0 = 0$, $r_0 = 0$, $h_0 = 0$. На шаге t предикат P_n будет определен на всех парах (i,j) таких, что $j \le t$, $i \le r_t$. Значение для a_t будем определять так, что a_t станет единственным свидетелем принадлежности n множеству P, т. е. $n \in P \Leftrightarrow \forall b\, P_n(a_t, b)$. Значение для h_t будем определять так, что если $n \in P$, то h_t выдает минимальное значение $h \le t$, для которого $(\forall b \le t) H(n,h,b)$.

Шаг $t+1$. Вычислим $H(n,i,j)$ для всех $i,j \le t+1$. Если выполнено $(\forall i \le t+1)(\exists j \le t+1)\neg H(n,i,j)$, то полагаем $r_{t+1} = r_t + 1$, а h_{t+1} и a_{t+1} будут неопределенными. Считаем $P_n(i,j)$ ложным на всех парах (i,j), для которых $i \le r_{t+1}$, $j \le t+1$ и на которых предикат P_n еще не был определен. Если значение h_t не определено и условие $(\forall j \le t+1)\, H(n, t+1, j)$ выполнено, то определим $h_{t+1} = t+1$, $r_{t+1} = r_t + 1$ и $a_{t+1} = r_{t+1}$. Полагаем $P_n(a_{t+1}, j)$ истинным для всех $j \le t+1$ и $P_n(i,j)$ ложным на всех парах, для которых $i \le r_{t+1}, j \le t+1$ и на которых предикат P_n еще не был определен. Если значение h_t определено и условие $(\forall j \le t+1)\, H(n, h_t, j)$ выполнено, то полагаем $h_{t+1} = h_t$, $a_{t+1} = a_t$, $r_{t+1} = r_t + 1$ и определим $P_n(a_{t+1}, j)$ истинным для всех $j \le t+1$ и $P_n(i,j)$ ложным на всех (i,j), для которых $i \le r_{t+1}$, $j \le t+1$ и на которых предикат P_n еще не был определен.

Определим предикат H' следующим образом: $(n,a,b) \in H' \Leftrightarrow P_n(i,j)$. Теперь можно считать, что для P существует вычислимое множество H такое, что $n \in P \Leftrightarrow \exists^{=1} a \forall b\, H(n,a,b)$. Определим предикат

$$H_1(n,a,b) \;\Leftrightarrow\; a = \langle n, x\rangle \;\&\; H(n,x,b).$$

Легко проверить, что формулы $\exists a \forall b\, H(n,a,b)$ и $\exists a \forall b\, H_1(n,a,b)$ эквивалентны. Более того, для любого a существует не более одного n такого, что $\forall b\, H_1(n,a,b)$.

Пусть H_2 определен так:

$$\neg H_2(n,a,b) \Leftrightarrow b = \langle n,a,x\rangle \& \neg H_1(n,a,x) \;\&\; (\forall z < x) H_1(n,a,z).$$

Нетрудно видеть, что предикат H_2 обладает следующими свойствами.

1. Формулы $\exists a \forall b\, H_1(n,a,b)$ и $\exists a \forall b\, H_2(n,a,b)$ эквивалентны.
2. Формулы $\forall b\, H_1(n,a,b)$ и $\forall b\, H_2(n,a,b)$ эквивалентны.
3. $\forall n, a \exists^{\le 1} b\, \neg H_2(n,a,b)$.
4. $\forall a \exists^{\le 1} n \forall b\, H_2(n,a,b)$.
5. $\forall b \exists^{\le 1} (n,a) \neg H_2(n,a,b)$.

Следовательно, можем предполагать, что H удовлетворяет свойствам 3–5. Используя предикат H, построим искомый предикат Q.

На шаге t предикат Q_t будет определен на $[0,t] \times [0, r_2(t)] \times [0, r_3(t)]$, где значения функций $r_2(t)$, $r_3(t)$ получаются эффективно на шаге t. Предикат Q_t будет удовлетворять следующим условиям, обозначаемым через P.

(P_1) Для всех $n \le t$, $a \le r_2(t)$ либо $Q_t(n,a,b)$ истинно для всех $b \le r_3(t)$, либо $(\exists^{=1} b \le r_3(t)) \neg Q_t(n,a,b)$.

(P_2) Если $a \le r_2(t)$ является (Q,t)-*свидетелем для* $n \le t$ (т. е. $(\forall b \le r_2(t))\, Q_t(n,a,b)$), тогда существует единственный (Q,t)-свидетель для n.

(P_3) Не существует двойных (Q,t)-свидетелей (которые могут совпадать для различных n_1 и n_2).

(P_4) Для каждого $b \le r_3(t)$ существует единственная пара (n, a) такая, что $\neg Q_t(n, a, b)$, и если для каких-то i, z имеем $b = \langle i, 3z+2 \rangle$, то $l(n) = i$.

Пусть $H_0 \subset H_1 \subset \ldots$ будет аппроксимацией H такой, что $H = \bigcup_t H_t$, где $H_t = H \cap [0,t] \times [0,t] \times [0,b_t]$ и b_t минимальный $b \ge t$ такой, что выполнены следующие свойства.

1. Если $a \le t$ является (H,t)-*свидетелем для* $n \le t$ (т. е. $\forall j \le b\, H(n,a,j)$), то существует единственный (H,t)-свидетель для n.

2. Нет двойных (H,t)-свидетелей (которые могли бы совпасть для различных n_1 и n_2).

3. Для всех $n, a \le t$ либо $(\forall j \le b) H(n,a,b)$, либо $(\exists^{=1} j \le b) \neg H(n,a,j)$.

Заметим, что b_t корректно определен. Если же для некоторого $n \le t$ существует (H,t)-свидетель для n, то обозначим его через $h(n,t)$.

Без потери общности предполагаем, что $H(0,0,0)$ истинно. В нашей конструкции на шаге t мы используем функции $r_2(t)$, $r_3(t)$, $h(n,t)$ и $a(n,t)$. Функции $r_2(t)$ и $r_3(t)$ говорят нам, что вторая и третья координаты Q_t не превосходят $r_2(t)$ и $r_3(t)$ соответственно; $h(n,t)$ является (H,t)-свидетелем для n, а $a(n,t)$ является (Q,t)-свидетелем для n, если они существуют. Наша конструкция гарантирует, что $h(n,t)$ определено $\Leftrightarrow$ $a(n,t)$ определено. В начале мы полагаем $r_2(0) = 0$, $r_3(0) = 0$, $h(0,0) = 0$ и $a(0,0) = 0$. Некоторые из номеров $a \le r_2(t)$ будут помечены через $\square_s$, где $s \in S$. В этом случае конструкция гарантирует, что a является Q-свидетелем для s, т. е. $\forall b\, Q(s,a,b)$.

Опишем теперь шаг t конструкции. Предполагаем, что на Q_{t-1} выполнены все свойства (P_1)–(P_4). Дополнительно, предполагаем, что каждый элемент $a \le r_2(t-1)$ либо $(Q, t-1)$-свидетель вида $a(n, t-1)$ (для некоторого $n \le t$), либо отмечен некоторой меткой $\square_s$ для некоторого $s \in S$.

Шаг t. Если $t \in S$ и некоторый элемент $a \le r_2(t-1)$ отмечен меткой $\square_t$, то делаем a (Q,t)-свидетелем для t, полагаем $r_2(t) = r_2(t-1)$, $r_3(t) = r_3(t-1) + w(t)$, расширяем Q_{t-1} до Q_t на $[0,t] \times [0, r_2(t)] \times [0, r_3(t)]$, сохраняя всех $(Q, t-1)$-свидетелей как (Q,t)-свидетелей и так, что Q_t удовлетворяет свойствам (P_1)–(P_4). Заметим, что свойство (P_4) может быть удовлетворено. Это следует из определения $r_3(t)$, где вычислимая функция $w(t)$ может быть определена из условий: каждому элементу $b = \langle i, 3z+2 \rangle$ сопоставляются числа n, a такие, что $l(n) = i \,\&\, \neg Q(n,a,b)$.

В противном случае поступаем следующим образом.

Вычислим значение H_t. Пусть $i_1, \ldots, i_k \le t$ — возрастающая цепочка такая, что $h(i_j, t)$ определено и $h(i_j, t) \ne h(i_j, t-1)$, $j = 1, \ldots, k$. Заметим, что $h(i_j, t-1)$ может быть не определено. Также заметим, что $k \le 2$. Возьмем первые неиспользованные числа $s_1, s_2 \in S$ такие, что $l(s_j) = l(a(i_j, t-1))$. Отметим каждый элемент $a(i_j, t-1)$ меткой $\square_{s_j}$ и определим так, что $a(i_j, t-1)$ является (Q, t')-свидетелем для s_j на всех шагах $t' \ge s_j$, $j = 1, \ldots, k$. Далее, возьмем номера $n_1 = r_2(t-1) + u_1(t)$, $\ldots$, $n_k = r_2(t-1) + u_k(t)$, где $u_j(t) = \mu z(z > r_2(t-1) \,\&\, l(r_2(t-1) + z) = l(i_k))$. Положим $a(i_j, t) = n_j$ для $j = 1, \ldots, k$, $r_2(t) = n_k$, $r_3(t) = r_3(t-1) + (k+1) w(t)$ и расширим Q_{t-1} до Q_t на множестве $[0,t] \times [0, r_2(t)] \times [0, r_3(t)]$, делая каждый $a(i_j, t)$ (Q,t)-свидетелем для i_j. На остальных $a \in [r_2(t-1), r_2(t)]$, не равных $a(i_j, t)$, ставим такие еще не использованные метки s из S, что $l(s) = l(a)$. Сохраняем всех других $(Q, t-1)$-свидетелей как (Q,t)-свидетелей так, что Q_t удовлетворяет всем свойствам (P_1)–(P_4). Как видно из определения $r_3(t)$, (P_4) может быть удовлетворено.

Пусть не существует требуемой выше последовательности $i_1, \dots, i_k \leq t$. Возьмем первое неиспользованное число $s \in S$ такое, что $l(t) = l(s)$, и отметим t меткой $\Box_s$. Определим, что t является (Q, t')-свидетелем для s на всех шагах $t' \geq s$. Положим $r_2(t) = r_2(t-1)+1$, $r_3(t) = r_3(t-1)+2w(t)+1$ и расширим Q_{t-1} до Q_t на множестве $[0, t] \times [0, r_2(t)] \times [0, r_3(t)]$, сохраняя всех $(Q, t-1)$-свидетелей как (Q, t)-свидетелей так, что Q_t удовлетворяет свойствам (P_1)–(P_4). На этом шаг t заканчивается.

Определим $Q = \bigcup\limits_{t \in \omega} Q_t$. Нетрудно видеть, что Q является однозначным представлением для P. Действительно, на любом шаге t каждый элемент $a \leq r_2(t)$ либо помечен меткой $\Box_s$, либо имеет вид $a(n, t)$. Если a отмечен меткой $\Box_s$, то выполнено $\forall b\, Q(s, a, b)$, так как a является (Q, t')-свидетелем для s на каждом шаге $t' \geq s$. Предположим, что a не помечен меткой $\Box_s$ для $s \in S$. Рассмотрим шаг a. Существует число n такое, что $a = a(n, a)$. Тогда для всех $t \geq a$ имеем $a(n, t) = a(n, a)$. Поэтому $\forall b\, Q(n, a, b)$. Таким образом, каждый элемент $a \in \omega$ является Q-свидетелем для некоторого $n \in P$. Все остальные искомые свойства предиката Q следуют из того факта, что Q_t удовлетворяет свойствам (P_1)–(P_4) на каждом шаге t. $\Box$

Замечание 1. Если $a \in X_i = \{\langle i, 3x+1\rangle \mid x \in \omega\}$, то существует единственный n такой, что $l(n) = i \,\&\, \forall b\, Q(n, a, b)$. Если $b \in Y_i = \{\langle i, 3x+2\rangle \mid x \in \omega\}$, то существуют единственные n, a такие, что $l(n) = i \,\&\, \neg Q(n, a, b)$.

Действительно, из доказательства леммы видно, что каждый a является Q-свидетелем для некоторого $n \in P$. На каждом шаге конструкции мы либо ставим метку $\Box_t$ такую, что $l(t) = i$, либо убираем поставленную ранее метку $\Box_t$ для $l(t) = i$ и делаем a (Q, t)-свидетелем для t. Но все (Q, t)-свидетели для n по построению сохраняются для всех $s \geq t$. Существование указанных n, a для $b = \langle i, 3z+2\rangle$ следует из определения функции $r_3(t)$.

Ясно, что определение однозначного представления для Σ^0_2-множеств может быть релятивизовано относительно любого оракула X. Релятивизованная версия вышеприведенной леммы дает следующее утверждение, которое мы и будем использовать, называя его леммой о релятивизованном однозначном представлении.

Лемма 3. *Пусть P — кобесконечное $\Sigma^{0,X}_2$-множество, содержащее бесконечное X-вычислимое подмножество S такое, что $P \setminus S$ бесконечно и для каждого $i \in \omega$ множество S содержит бесконечно много элементов $\langle i, x\rangle$. Тогда существует X-вычислимое множество $Q \subset \omega^3$ такое, что Q является однозначным представлением P.*

Следующее замечание относится к понятию Σ_n-индекса. Определение Σ_n-индекса см. в [16, § 14.2].

Замечание 2. Из равномерного характера построения искомого предиката в лемме следует, что если множество P обладает Σ^0_{n+2}-индексом, то по нему вычислимым образом получается Σ^0_n-индекс Q.

§ 2. Маркеровские расширения

Пусть σ — предикатная сигнатура, $P^k \in \sigma$ и $\mathscr{M}$ — некоторая модель сигнатуры σ, $M = |\mathscr{M}|$. Предполагаем, что для предиката P этой модели оба множества $M^k \setminus P$ и P бесконечны.

Следующие формулировки взяты из [15].

Определение 3. *Маркеровское $\exists$-расширение* предиката P обозначим через $P_\exists$ и определим следующим образом. Пусть X — некоторое бесконечное множество, не пересекающееся с M. Тогда $P_\exists$ как предикат арности $k+1$ удовлетворяет следующим условиям.

(1$\exists$) Если $P_\exists(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1})$, то $P(a_1, \dots, a_k)$ и $a_{k+1} \in X$.

(2$\exists$) Для любого $a \in X$ существует единственный k-набор $(a_1, \dots, a_k)$ такой, что $P_\exists(a_1, a_2, \dots, a_k, a)$.

(3$\exists$) Если $P(a_1, \dots, a_k)$, то $\exists^{=1} a\, P_\exists(a_1, a_2, \dots, a_k, a)$.

Маркеровское $\forall$-расширение предиката P обозначим через $P_\forall$ и определим следующим образом. Пусть X — некоторое бесконечное множество, не пересекающееся с M. Тогда $P_\forall$ определяется как предикат арности $k+1$, удовлетворяющий следующим условиям.

(1$\forall$) Для любого набора $(a_1, \dots, a_k) \in M^k$ существует не более одного элемента $a_{k+1} \in X$ такого, что $\neg P_\forall(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1})$.

(2$\forall$) Если $P_\forall(a_1, \dots, a_k, a_{k+1})$ для всех $a_{k+1} \in X$, то $P(a_1, \dots, a_k)$.

(3$\forall$) Для любого $a \in X$ существует единственный k-набор $(a_1, \dots, a_k)$ такой, что $\neg P_\forall(a_1, a_2, \dots, a_k, a)$.

Назовем множество X в любом $\exists$- ($\forall$-)расширении *спутником* P.

Определим маркеровское расширение модели.

Определение 4. Пусть $\mathscr{M} = \left\langle M, P_0^{n_0}, \dots, P_m^{n_m} \right\rangle$ — произвольная модель конечной предикатной сигнатуры.

1. Модель $\mathscr{M}_\exists$ определим так:

$$\left\langle M \cup \bigcup_{i=0}^{m} X_i, P_0^{n_0+1}, \dots, P_m^{n_m+1}, X_0, X_1, \dots, X_m \right\rangle,$$

где каждый предикат $P_i^{n_i+1}$, $i = 0, \dots, m$, совпадает с маркеровским $\exists$-расширением $P_i^{n_i}$ со спутником X_i, $i = 0, \dots, m$, а спутники различных предикатов — попарно не пересекающиеся множества X_i, $i = 0, \dots, m$.

2. Аналогично $\mathscr{M}_\forall$ определим так:

$$\left\langle M \cup \bigcup_{i=0}^{m} X_i, P_0^{n_0+1}, \dots, P_m^{n_m+1}, X_0, X_1, \dots, X_m \right\rangle,$$

где каждый предикат $P_i^{n_i+1}$, $i = 0, \dots, m$, совпадает с маркеровским $\forall$-расширением $P_i^{n_i}$ со спутником X_i, $i = 0, \dots, m$, а спутники различных предикатов — попарно не пересекающиеся множества X_i, $i = 0, \dots, m$.

Для слова w в алфавите $\{\exists, \forall\}$ определим $\mathscr{M}_w$ по индукции:

(1) если w — пустое слово, то $\mathscr{M}_w = \mathscr{M}$;

(2) если $w = w'\exists$, то $\mathscr{M}_w = (\mathscr{M}_{w'})_\exists$;

(3) если $w = w'\forall$, то $\mathscr{M}_w = (\mathscr{M}_{w'})_\forall$.

Пусть $\mathbb{R}$ — некоторое теоретико-модельное свойство, например, такое, как ω-категоричность модели, простота, однородность.

Определение 5. Теоретико-модельное свойство $\mathbb{R}$ называется *маркеровским*, если для любой модели $\mathscr{M}$ любой конечной предикатной сигнатуры σ модель $\mathscr{M}$ обладает свойством $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда маркеровские расширения $\mathscr{M}_\exists$ и $\mathscr{M}_\forall$ обладают свойством $\mathbb{R}$. Назовем свойство *маркеровским**, если оно маркеровское и для сигнатур σ, содержащих предикатный символ P местности $n \geq 1$, существуют модели $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ сигнатуры σ такие, что

(1*) $\mathscr{A}$ обладает свойством $\mathbb{R}$, $\mathscr{B}$ не обладает свойством $\mathbb{R}$,

(2*) модели $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ вычислимы,

(3*) предикаты $P^{\mathscr{A}}$, $P^{\mathscr{B}}$ являются бесконечными кобесконечными множествами.

Заметим, что при подходящем выборе основного множества моделей $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ мы можем добиться выполнения дополнительных условий:

(4*) $P^{\mathscr{A}} \cap P^{\mathscr{B}}$ содержит вычислимое бесконечное кобесконечное множество S,

(5*) для каждого $i \in \omega$ множество S содержит бесконечное количество элементов $\langle\langle i, x\rangle, \langle i, y\rangle\rangle$.

Обозначим теоретико-модельные свойства: ω-категоричность как $\mathbb{R}_{\mathbf{Cat}}$, ω_1-категоричность как $\mathbb{R}_{\mathbf{UCat}}$, свойство модели быть простой как $\mathbb{R}_{\mathbf{Prim}}$.

Теорема 1. *Свойства* $\mathbb{R}_{\mathbf{Cat}}$, $\mathbb{R}_{\mathbf{UCat}}$, $\mathbb{R}_{\mathbf{Prim}}$ *маркеровские**.

Доказательство. Маркеровость указанных свойств следует из того, что каждый элемент маркеровского расширения алгебраичен над оригинальным базисным множеством. Доказательство сохранения свойств ω- и ω_1-категоричности приведено в [15]. Разберем свойство модели быть простой.

Пусть $\mathscr{M} = \left\langle M, P_0^{n_0}, P_1^{n_1}, \dots, P_m^{n_m} \right\rangle$ — простая модель, $\mathscr{M}_\exists$ — маркеровское расширение модели $\mathscr{M}$. Покажем, что $\mathscr{M}_\exists$ тоже простая модель.

Пусть $T' = \mathrm{Th}(\mathscr{M}_\exists)$. Рассмотрим произвольную модель $\mathscr{N}' \models T'$. Выделим в ней подмодель $\mathscr{N}$ следующим образом: $|\mathscr{N}| = \left\{ a \mid \mathscr{N}' \models \mathop{\&}\limits_{i=0}^{n} \neg X_i(a) \right\}$, где X_i — это спутники предикатов P_i. Это будет подмоделью, так как выделяемое множество непусто и даже счетно (счетность сохраняет теория T'). Теперь на этом основании модели $|\mathscr{N}|$ вместо предикатов $P_{i\exists}$ рассмотрим предикаты P_i, определяемые тождествами $P_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \Leftrightarrow \exists x P_{i\exists}(x_1, \dots, x_{n_i}, x)$. Нетрудно видеть, что получится модель $\mathscr{N}^* = \left\langle |\mathscr{N}|, P_0^{n_0}, P_1^{n_1}, \dots, P_m^{n_m} \right\rangle \models \mathrm{Th}(\mathscr{M})$, так как все предложения, истинные на $\mathscr{M}$, будут на ней выполняться. Ввиду того, что модель $\mathscr{M}$ простая, можно построить элементарное вложение $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}^*$. Но его можно и расширить до элементарного вложения $\mathscr{M}_\exists$ в $\mathscr{N}'$, так как для каждого элемента $a \in X_i$ существует единственный набор $a_1, \dots, a_{n_i}$ из оригинального множества $|\mathscr{M}|$ такой, что $P_{i\exists}(a_1, \dots, a_{n_i}, a)$ выполнено в $\mathscr{M}_\exists$, а для элементов $f(a_1), \dots, f(a_{n_i}) \in |\mathscr{N}|$ существует единственный $b \in |\mathscr{N}'|$ такой, что $\mathscr{N}' \models X_i(b) \& P_{i\exists}(f(a_1), \dots, f(a_{n_i}), b)$. Тогда полагаем $f(a) := b$. Таким образом, по шагам можно достроить элементарное вложение.

Теперь укажем модели $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ для следующих соответствующих свойств.

Cat. Пусть $\mathscr{A} := \left\langle \omega, P_{cyc}^2 = \{(2i, 2i+1), (2i+1, 2i) \mid i \in \omega\} \right\rangle$ — это модель 2-циклов, а $\mathscr{B} := \left\langle \omega, P_s^2 = \{(i, i+1) \mid i \in \omega\} \right\rangle$ — модель следования. Известно, что теория модели 2-циклов ω-категорична. А теория модели следования не является ω-категоричной, так как допускает модели с недостижимыми от нуля элементами. Множество S определим как $\{(2i, 2i+1) \mid i \in \omega\}$.

UCat. Пусть $\mathscr{A} := \left\langle \omega, P_s^2 \right\rangle$ — модель следования, а $\mathscr{B} := \langle \omega, E^2 \rangle$ — модель теории отношения эквивалентности такого, что для каждого $n \in \omega$ существует единственный класс размера n. Известно, что теория модели следования ω_1-категорична, а теория указанного отношения эквивалентности не является таковой. Множество S можно задать тем же, что и в предыдущем случае, если считать, что эквивалентность E задана так: каждый четный элемент эквивалентен следующему нечетному ($\forall i \in \omega\ E(2i, 2i+1)$).

Prim. Пусть $\mathscr{A} := \left\langle \omega, P^2_{cyc} \right\rangle$ — модель 2-циклов (она простая, так как счетна и ее теория ω-категорична), а $\mathscr{B} := \left\langle \omega, P^2_{s'} \right\rangle$ — модель следования типа $\mathbb{N} + \mathbb{Z}$, т. е. модель, где после достижимых от нуля элементов $\mathbb{N}$ располагаются недостижимые от нуля элементы в естественном порядке следования по типу $\mathbb{Z}$. Множество S можно взять таким же, как и в предыдущем пункте, если считать, что на четных элементах ω следование идет по типу $\mathbb{N}$ (т. е. $(\forall i \in \omega)\ \mathscr{B} \models P^{\mathscr{B}}_{s'}(2i, 2i+2)$). $\square$

Определим конструкцию, в результате которой из $\varnothing^{(\omega)}$-вычислимой модели получается вычислимая модель, сохраняющая маркеровские свойства своих подмоделей. В дальнейшем будем считать, что все модели заданы на натуральных числах.

Пусть заданы сигнатура $\sigma = \{P^2, P^4, \dots, P^{2n}, \dots\}$ и некоторое маркеровское* свойство $\mathbb{R}$.

Каждой паре $\langle m, n \rangle$ сопоставим модель $\mathscr{A}$ (из п. (1*)), если $m \in \varnothing^{(n)}$, и модель $\mathscr{B}$ в противном случае.

Задача заключается в том, чтобы по номеру $\langle m, n \rangle$ вычислимым образом получить вычислимую модель, обладающую маркеровским свойством, если $m \in \varnothing^{(n)}$, и не обладающую им в противном случае. Для этого рассмотрим модель $\mathbf{\Omega}_n = \left\langle \omega, P^2_n \right\rangle$ такую, что при фиксированном m подмодель $\mathscr{M}_m = \langle M_m = \{\langle m, x \rangle \mid x \in \omega\}, P_{nm} \rangle$, где $P_{nm} = P_n \restriction_{\mathscr{M}_m}$, вычислимо-изоморфна модели $\mathscr{A}$, если $m \in \varnothing^{(n)}$, или модели $\mathscr{B}$ в противном случае. При таком рассмотрении из п. (2*) следует, что предикат P_n является Σ^0_n-вычислимым множеством и имеет вид

$$P_n = \{\langle \langle m, x \rangle, \langle m, y \rangle \rangle \mid \text{ если } m \in \varnothing^{(n)}, \text{ то } \langle x, y \rangle \in P^{\mathscr{A}}, \text{ иначе } \langle x, y \rangle \in P^{\mathscr{B}}\}.$$

Далее, с помощью P_n построим предикаты $Q^1_n, Q^2_n, \dots, Q^n_n = Q_n$, обладающие свойствами:

(1Q) модель $\mathscr{N}^i_m = \left\langle M_m, Q^i_{nm} \right\rangle$, где $Q^i_{nm} = Q^i_n \restriction_{\mathscr{N}^i_m}$, является маркеровским $(\exists\forall)^i$-расширением модели $\mathscr{M}_m$;

(2Q) Q^i_n Σ^0_{n-i}-вычислим.

Обозначим

$$\mathbf{O}_n = \langle \omega, Q_n \rangle = \bigcup_{m \in \omega} \mathscr{N}_m.$$

Предложение 2. *Модель* $\mathbf{O}_n$ *вычислима.*

Доказательство. Укажем, как из Σ^0_n-вычислимого предиката P_n получить вычислимый предикат Q_n, удовлетворяющий вышеперечисленным свойствам. Для этого построим последовательность предикатов:

$$P_n = Q^0_n, Q^2_n, \dots, Q^n_n = Q_n.$$

Каждый Q^{i+1}_n получается из Q^i_n с помощью леммы об однозначном представлении индуктивно.

База. $P_n = Q^0_n$ является двухместным Σ^0_n-вычислимым предикатом. Определим одноместный предикат P:

$$P(\langle l(x), \langle r(x), r(y) \rangle \rangle) \rightleftharpoons Q^0_n(x, y).$$

Множество S из пп. (4*)–(5*) преобразуется с сохранением свойств, необходимых в лемме 2.3, следовательно, существует трехместный Σ^0_{n-2}-вычислимый предикат $Q(m,a,b)$, который является однозначным представлением P. Можно считать, что предикат Q четырехместный (будем писать $Q(x,y,a,b)$ вместо $Q(\langle l(x),\langle r(x),r(y)\rangle\rangle,a,b))$. По $Q(x,y,a,b)$ построим предикат $Q^1(x,y,a,b)$, удовлетворяющий (1Q), (2Q). В чем необходимость такого перехода? Если мы будем просто строить Q по P, как указано в лемме 2.3, то у нас некоторые элементы (Q-свидетели a для (s,t), т. е. такие a, для которых $\forall b\, Q(s,t,a,b)$) могут не попасть в $\mathscr{N}_m^1$ при ограничении предиката Q на элементы $\mathscr{N}_m^1$, тогда маркеровость расширения исчезает. Для сохранения маркеровости расширения мы добавим множества X_m, элементы которых будем назначать Q-свидетелями, и элементы $g\in Y_m$, которые отвечают за ложность: $\neg Q(s,t,a,g)$.

Сначала определим предикат $Q'(x,y,a,b)$:

$$Q'(x,y,a,b) \rightleftharpoons a=\langle l(x),3z+1\rangle \ \&\ Q(x,y,z,b).$$

Ясно, что формулы $\exists a\forall b\, Q(x,y,a,b)$ и $\exists a\forall b\, Q'(x,y,a,b)$ эквивалентны. Кроме того, если существует такой z, что $\forall b\, Q(x,y,z,b)$, то $a=\langle l(x),3z+1\rangle$, выполняющий формулу $\forall b\, Q'(x,y,a,b)$, уже лежит в том же M_m, что и x (из однозначности представления такие z и a единственны).

Определим предикат $Q^1(x,y,a,b)$ следующим образом:

$$\neg Q^1(x,y,a,b) \rightleftharpoons (b=\langle l(x),3\langle \mathrm{div}(r(a),3),z\rangle+2\rangle \\ \ \&\ \neg Q'(x,y,a,z)\ \&\ (\forall t<z)\, Q'(x,y,a,t)).$$

Ясно, что формулы $\exists a\forall b\, Q'(x,y,a,b)$ и $\exists a\forall b\, Q^1(x,y,a,b)$ эквивалентны. Формулы $\forall b\, Q'(x,y,a,b)$ и $\forall b\, Q^1(x,y,a,b)$ также эквивалентны. Проследим выполнение условий маркеровости расширений предикатов $Q^0_{nm}(x,y) \rightleftharpoons (\exists a\in M_m)(\forall b\in M_m)\, Q^1(x,y,a,b)$, $Q^0_{nm\exists}(x,y,a) \rightleftharpoons (\forall b\in M_m)\, Q^1(x,y,a,b)$, $Q^0_{nm\exists\forall}(x,y,a,b) \rightleftharpoons Q^1(x,y,a,b)$ на элементах M_m. Пусть $Y_m=\{\langle m,3x+2\rangle \mid x\in\omega\}$ — это $\forall$-спутник $Q^0_{nm\exists}$, а множество $X_m=\{\langle m,3x+1\rangle \mid x\in\omega\}$ — $\exists$-спутник Q^0_n.

(1$\exists$) Пусть $x,y\in M_m$ и $Q^0_{nm\exists}(x,y,a)$, тогда $(\forall b\in M_i)Q^1(x,y,a,b)$, т. е.

$$(\forall b\in M_m)(b=\langle l(x),3\langle \mathrm{div}(r(a),3),z\rangle+2\rangle \to \\ ((\forall t<z)Q'(x,y,a,t)\to Q'(x,y,a,z))).$$

Надо показать, что $a\in X_m$ и $Q^0_{nm}(x,y)$. Если $l(x)\neq l(a)$, то $\neg Q'(x,y,a,t)$ для любых t (в том числе и для $t=0$), значит, взяв $b=\langle l(x),3\langle \mathrm{div}(r(a),3),0\rangle+2\rangle$, получаем $\neg Q^0_{nm\exists}(x,y,a)$; противоречие. Значит, x,y и a попадают в одну M_m и, как мы уже показали ранее, $a\in X_m$.

(2$\exists$) Пусть $a\in X_m$, $a=\langle m,3z+1\rangle$. Надо показать, что существуют единственные x,y такие, что $Q^0_{nm\exists}(x,y,a)$. Из леммы 2 и замечания 1 получаем, что для z существуют такие x,y, что $x\in M_m \,\&\, \forall b\, Q(x,y,z,b)$. Очевидно, что $a,x\in M_m$ и $y\in M_m$, так как если бы y лежал в некотором другом $M_{m'}$, то предикат $Q^0_n(x,y)$ был бы ложен. Рассмотрим формулу

$$(\forall b\in M_m)(b=\langle l(x),3\langle z,t\rangle+2\rangle \to ((\forall u<t)\, Q'(x,y,a,u)\to Q'(x,y,a,t))).$$

Она истинна, когда $(\forall b\in M_m)\, Q'(x,y,a,b)$, и, в свою очередь, тогда и только тогда, когда $l(x)=m\ \&\ \forall b\, Q(x,y,z,b)$. Как мы уже показали, такие x,y существуют.

(3$\exists$) Пусть верно $Q^0_{nm}(x,y)$. Тогда ввиду однозначности представления Q существует единственный z такой, что $(\forall b\in M_m)\, Q(x,y,z,b)$. Значит, существует единственный $a=\langle l(x),3z+1\rangle$, выполняющий $(\forall b\in M_m)\, Q'(x,y,a,b)$. Легко заметить, что только a удовлетворяет $Q^0_{nm\exists}(x,y,a)$.

(1$\forall$) Покажем, что для любых $x, y \in M_m$, $a \in M_m$ существует не более одного элемента $b \in Y_m$ такого, что $\neg Q^0_{nm\exists\forall}(x, y, a, b)$. Допустим, что таких элементов два: $b_1, b_2 \in Y_m$. Тогда

$$b_1 = \langle l(x), 3\langle \operatorname{div}(r(a), 3), z_1\rangle + 2\rangle, \quad b_2 = \langle l(x), 3\langle \operatorname{div}(r(a), 3), z_2\rangle + 2\rangle.$$

Пусть $z_1 < z_2$. Тогда из определения предиката Q^1 получаем

$$Q^1(x, y, a, b_1) \to \neg Q'(x, y, a, z_1).$$

С другой стороны,

$$Q^1(x, y, a, b_2) \to \forall t < z_2 Q'(x, y, a, z_2);$$

противоречие. Значит, таких $b \in Y_m$ не более одного.

(2$\forall$) Пусть $(\forall b \in M_m)\, Q^0_{nm\exists\forall}(x, y, a, b)$. Тогда по определению получаем $Q^0_{nm\exists}(x, y, a)$.

(3$\forall$) Необходимо показать, что для любого $b \in Y_m$ существует единственный набор $x, y, a \in M_m$ такой, что $\neg Q^0_{nm\exists\forall}(x, y, a, b)$. Пусть $b = \langle m, 3t + 2\rangle$. Из замечания 1 к лемме 2 получаем, что для предиката Q и элемента b существуют такие s, z, что $\neg Q(s, z, b)$ (в обозначениях леммы), причем $l(s) = m$. Возьмем $x = \langle m, lr(s)\rangle$, $y = \langle m, rr(s)\rangle$. Тогда получаем истинность $\neg Q(x, y, z, b)$ (в обозначениях данного предложения). Берем $a = \langle m, 3z + 1\rangle$.

Далее определяем предикат

$$Q^1_n(x, y, a, b) \rightleftharpoons l(x) = l(y) = l(a) = l(b) \,\&\, Q^1(x, y, a, b).$$

Для того чтобы на следующих шагах можно было применять лемму 3, необходимо показать существование вычислимого множества S с указанными в лемме свойствами. В получившемся предикате такое множество можно определить, рассматривая S уже не как пары, а как четверки элементов $\langle m, x\rangle$. Это можно сделать, например, таким образом: вместо пары $(\langle m, x\rangle, \langle m, y\rangle)$ взять четверку $(\langle m, 3x\rangle, \langle m, 3y\rangle, \langle m, 3x + 1\rangle, \langle m, 3y + 2\rangle)$.

Индукционный шаг. Q^i_n является $2i+2$-местным предикатом. Определим одноместный предикат P:

$$P(\langle l(x_1), \langle r(x_1), \dots, r(x_{2i+2})\rangle\rangle) \rightleftharpoons Q^i_n(x_1, \dots, x_{2i+2}).$$

По лемме 3 имеем однозначное представление $Q(x, a, b)$ и действуем так же, как при $i = 0$. Получаем предикат Q^{i+1}_n. $\square$

Следующая теорема является очевидным следствием предложения 2 и завершает основную конструкцию построения нижних оценок.

Пусть $\sigma = \{P^2, P^4, \dots, P^{2n}, \dots\}$ — вычислимая предикатная сигнатура, $\nu_\sigma = \{\mathscr{M}_0, \dots, \mathscr{M}_n, \dots\}$ — универсальная вычислимая нумерация вычислимых моделей этой сигнатуры.

Теорема 2. *Для любого маркеровского* свойства $\mathbb{R}$ существует вычислимая функция $f_\mathbb{R}(m, n)$ такая, что $\mathscr{M}_{f(m,n)}$ обладает свойством $\mathbb{R}$, если $m \in \varnothing^{(n)}$, и не обладает им в противном случае.*

Доказательство. Переопределим модель $\mathbf{O}_n$ в сигнатуре σ тождественно ложными предикатами, при этом положив $2n+2$-местный предикат P^{2n+2} равным Q_n. Получили модель $\overline{\mathbf{O}}_n \in \nu_\sigma$. Более того, ее подмодели $\overline{\mathscr{N}}_m$, доопределенные подобным образом, также перечисляются в этой нумерации. Тогда пусть функция $f_\mathbb{R}$ указывает подмодель $\overline{\mathscr{N}}_m$ в модели $\overline{\mathbf{O}}_n$. $\square$

Обратимся к гиперарифметической иерархии, введенной в [16, § 16.8].

Следствие. *Пусть* $\mathbb{R}$ — *маркеровское* свойство. Тогда любое* Δ^0_ω*-множество* m*-сводится к индексному множеству* $I(\mathbb{R}) = \{i \mid \mathscr{M}_i$ *обладает свойством* $\mathbb{R}\}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное Δ^0_ω-множество A. Из определения гиперарифметической иерархии следует, что $\mathbf{a}$ (степень множества A) сводится к степени $\mathbf{h}_\omega$ множества $\varnothing^{(\omega)}$. Таким образом, по транзитивности сводимости получаем, что любое Δ^0_ω-множество сводится к множеству $I(\mathbb{R})$. $\square$

§ 3. Множество вычислимых $\aleph_0$-категоричных моделей

Целью параграфа является доказательство следующей теоремы для индексного множества ω-категоричных моделей $\mathbf{Cat}_\sigma$.

Теорема 3. *Для сигнатуры* $\sigma = \{P^2, P^4, \dots, P^{2n}, \dots\}$ *предикатных символов неограниченно возрастающей местности множество* $\mathbf{Cat}_\sigma$ *является* Δ^0_ω*-сложным* $\Pi^0_{\omega+2}$*-множеством.*

Доказательство. Оценим сверху множество $\mathbf{Cat}_\sigma$. Для этого воспользуемся синтаксической характеризацией ω-категоричности теории, полученной Рылль-Нардзевским.

Обозначим через $[\varphi]_T = \{\psi \mid T \vdash (\varphi \to \psi)\&(\psi \to \varphi)\}$ класс эквивалентности относительно теории, через $FV(\varphi)$ — множество всех свободных переменных формулы φ.

Теорема 4 (Рылль-Нардзевский). *Теория* T ω*-категорична тогда и только тогда, когда для каждого* $n \in \omega$ *алгебра Линденбаума* $\mathfrak{B}_n(T) = \{[\varphi]_T \mid FV(\varphi) = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}\}$ *конечна.*

Утверждение конечности алгебры Линденбаума формульно записывается так:

$$(\forall n)(\exists k)(\forall i)(\exists j \le k)((FV(\varphi_i) = FV(\varphi_j) = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}) \to \varphi_i \equiv_T \varphi_j), \qquad (1)$$

где φ_i — формула с гёделевским номером i, отношение $\varphi \equiv_T \psi$ означает выводимость секвенции: $T \vdash (\varphi \to \psi)\&(\psi \to \varphi)$. Само это отношение может иметь любую арифметическую сложность, так как по теореме Гёделя о полноте эквивалентно проверке условия: $\mathscr{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathscr{M} \models \psi$, а φ, ψ — это некоторые Σ^0_n-(Π^0_n)-формулы. Следовательно, по алгоритму Тарского — Куратовского формула (1) задает $\Pi^0_{\omega+2}$-множество.

Нижняя оценка следует из того факта, что свойство ω-категоричности является маркеровским*. $\square$

Из доказательства теоремы вытекает более сильный результат относительно верхней оценки множества $\mathbf{Cat}_\sigma$.

Следствие. *Множество* $\mathbf{Cat}_\sigma$ *является* $\Pi^0_{\omega+2}$*-множеством для произвольной вычислимой сигнатуры без функциональных символов.*

§ 4. Множество вычислимых простых моделей

Оценим множество вычислимых простых моделей $\mathbf{Prim}_\sigma$ вычислимой сигнатуры σ. Для верхней оценки воспользуемся понятием атомности модели и теоремой, связывающей простоту модели с ее атомностью.

Определение 6. Модель $\mathscr{M}$ называется *атомной*, если для всякой n-ки $a_1, \dots, a_n \in |\mathscr{M}|$ тип этой n-ки $p_{\bar a} = \{\varphi(\bar x) \mid \mathscr{M} \models \varphi(\bar a)\}$ главный.

Теорема 5. *Для сигнатуры $\sigma = \{P^2, P^4, \dots, P^{2n}, \dots\}$ предикатных символов неограниченно возрастающей местности множество $\mathbf{Prim}_\sigma$ является Δ^0_ω-сложным $\Pi^0_{\omega+2}$-множеством.*

Доказательство. Известно, что модель проста тогда и только тогда, когда она счетна и атомна (см., например, в [17, 2.3.4]). Таким образом, утверждение, что $\mathscr{M}_i$ является простой моделью, можно записать в виде $\Pi^0_{\omega+2}$-формулы:

$$\Phi(i) := (\forall n)(\forall \bar a)(\bar a = (a_1, \dots, a_n) \in M_i^n \& (\exists j)(fv(j) = n \; \& \; i \models \varphi_j(\bar a)$$
$$\& \; (\forall k)((fv(k) = n \; \& \; i \models \varphi_k(\bar a)) \to i \models \forall \bar x(\varphi_j(\bar x) \to \varphi_k(\bar x))))).$$

Перепишем эту формулу в таком виде:

$$(\forall n)(\forall \bar a)(\exists j)(\forall k)(\bar a = \langle a_1, \dots, a_n\rangle \in M_i \& fv(j) = n \& i \models \varphi_j(\bar a)$$
$$\& \; (fv(k) = n \; \& \; i \models \varphi_k(\bar a) \to i \models \forall \bar x(\varphi_j(\bar x) \to \varphi_k(\bar x)))).$$

Поскольку формулы φ_i и φ_k могут иметь сколь угодно сложную кванторную приставку, для установления их истинности потребуется оракул $\varnothing^{(\omega)}$.

Нижняя оценка получается так же, как и в случае с ω-категоричными моделями, ввиду маркеровости* свойства простоты модели. □

Из доказательства теоремы вытекает более сильный результат относительно верхней оценки множества $\mathbf{Prim}_\sigma$.

Следствие. *Множество $\mathbf{Prim}_\sigma$ является $\Pi^0_{\omega+2}$-множеством для произвольной вычислимой сигнатуры без функциональных символов.*

§ 5. Множество вычислимых $\aleph_1$-категоричных моделей

В этом параграфе рассмотрим доказательство следующей теоремы для индексного множества ω_1-категоричных моделей $\mathbf{UCat}_\sigma$.

Теорема 6. *Для сигнатуры $\sigma = \{P^2, P^4, \dots, P^{2n}, \dots\}$ предикатных символов неограниченно возрастающей местности множество $\mathbf{UCat}_\sigma$ является Δ^0_ω-сложным $\Sigma^0_{\omega+1}$-множеством.*

Доказательство. Для оценки сверху множества $\mathbf{UCat}_\sigma$ воспользуемся критерием Еримбетова несчетной категоричности теории. Для этого дадим понятие 1-кардинальной формулы. Пусть T — полная счетная теория сигнатуры σ с бесконечной моделью. Обозначим через $|A|$ мощность множества A, $\varphi(\mathscr{M}) = \{a \in \mathscr{M} \mid \mathscr{M} \models \varphi(a)\}$.

Определение 7. Формула $\varphi(x)$ называется 1-*кардинальной*, если $|\varphi(\mathscr{M})| = \|\mathscr{M}\|$ для любой модели $\mathscr{M}$ теории T.

Определение 8. Формула $\varphi(x)$ называется *сильно-минимальной в* T, если для любой модели $\mathscr{M}$ теории T множество $\varphi(\mathscr{M})$ бесконечно и для любой другой формулы $\psi(x)$ или $(\varphi\&\psi)(\mathscr{M})$ конечно, или $(\varphi\&\neg\psi)(\mathscr{M})$ конечно.

Теорема 7 [18]. *Полная теория T счетного языка категорична в несчетных мощностях тогда и только тогда, когда она имеет 1-кардинальную сильно-минимальную формулу $\varphi(x, \bar a)$ с константами $\bar a$ из некоторой своей модели.*

Найдем формулу $\Phi(i)$, которая будет утверждать, что модель с номером i обладает сильно-минимальной 1-кардинальной формулой с константами из этой модели.

Следующая формула утверждает, что формула с номером j и константами $\bar{a}$ является сильно-минимальной в модели с номером i:

$$SM(i,j,\bar{a}) := (\forall k)(\exists n)(i \models ((\exists^{\leq n} x)(\varphi_j(x,\bar{a}) \& \varphi_k(x)) \vee (\exists^{\leq n} x)(\varphi_j(x,\bar{a}) \& \neg\varphi_k(x))) \& A),$$

где подформула A содержит дополнительные вычислимые требования к формулам φ_i и φ_k (количество свободных переменных).

Введем обозначение φ^P для формулы φ, в которой действие всех кванторов ограничивается одноместным предикатом P.

Построим формулу, которая утверждает, что формула с номером j и константами $\bar{a}$ является 1-кардинальной в теории $\mathrm{Th}(\mathscr{M}_i)$. Для этого рассмотрим множество формул сигнатуры $\sigma' = \sigma \cup \langle a_1, \dots, a_n, P^1\rangle$ с добавленным новым одноместным предикатным символом P и выделенной формулой φ_j сигнатуры σ:

$$T := \mathrm{Th}(\mathscr{M}_i) \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4,$$

где

$$\Gamma_0 := \Big\{\forall x_1, \dots, x_n \Big(\mathop{\&}_{t=1}^{n} P(x_t) \to (\Phi(\bar{x}) \Leftrightarrow \Phi^P(\bar{x}))\Big) \mid \Phi \in \mathrm{Form}(\sigma), n \in \omega\Big\},$$

$$\Gamma_1 := \{P(a_t) \mid a_t \in \bar{a}\}, \quad \Gamma_2 := \{\exists^{\geq m} x \varphi_j(x,\bar{a}) \mid m \in N\},$$

$$\Gamma_3 := \big\{\forall x\big(\varphi_j^P(x,\bar{a}) \to P(x)\big)\big\}, \quad \Gamma_4 := \big\{\exists x\big(\varphi_j(x,\bar{a}) \& \neg\varphi_j^P(x,\bar{a})\big)\big\}.$$

Совместность этого множества означает, что теория $\mathrm{Th}(\mathscr{M}_i)$ двукардинальна (подобные рассуждения с добавлением предикатного символа можно посмотреть, например, в [19, лемма 6.1.14]), так как предикат P определяет собственную элементарную подмодель такую, что в ней формула φ_j определяет то же множество, что и в надмодели. Существование такой формулы противоречит недвукардинальности.

Противоречивость этого множества будет означать недвукардинальность теории, а также 1-кардинальность формулы $\varphi_j(x,\bar{a})$. Выпишем это утверждение в таком виде:

$$OC(i,j,\bar{a}) := (\exists q)(\forall k \in D_q)((\varphi_k \in \mathrm{Form}(\sigma')) \& (\text{«}\varphi_k \text{ — аксиома ИП»} \vee (\varphi_k \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4) \vee i \models \forall \bar{x} \varphi_k(\bar{x}) \vee \text{«}\varphi_k \text{ получается правилами вывода из предыдущих»}) \& (\varphi_{\max(D_q)} = (\varphi_0 \& \neg\varphi_0)) \& A'),$$

где A' — вспомогательная подформула с требованиями согласованности переменных, D_q — стандартная вычислимая нумерация конечных множеств натуральных чисел, max — вычислимая функция максимума по конечному множеству натуральных чисел.

Таким образом, формула, утверждающая ω_1-категоричность теории $\mathrm{Th}(\mathscr{M}_i)$ записывается как

$$\Phi(i) := (\exists \bar{a})(\exists j)(SM(i,j,\bar{a}) \& OC(i,j,\bar{a})).$$

Нетрудно убедиться, что с точки зрения вычислительной сложности формула представляет собой следующий набор: $\exists(\forall \varnothing^{(\omega)} \& \varnothing^{(\omega)}) \sim \exists\forall\varnothing^{(\omega)}$. Таким образом, формула $\Phi(i)$ $\Sigma^0_{\omega+1}$-вычислима.

Справедливость нижней оценки получается из маркеровости* свойства ω_1-категоричности теории. $\square$

Из доказательства теоремы вытекает более сильный результат относительно верхней оценки множества $\mathbf{UCat}_\sigma$.

Следствие. *Множество* $\mathbf{UCat}_\sigma$ *является* $\Sigma^0_{\omega+1}$*-множеством для произвольной вычислимой сигнатуры без функциональных символов.*

Автор выражает благодарность рецензенту. Его замечания существенно улучшили качество работы.

Автор также выражает признательность своему научному руководителю Сергею Савостьяновичу Гончарову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гончаров С. С., Найт Дж.* Вычислимые структурные и антиструктурные теоремы // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 6. С. 639–681.

2. *Нуртазин А. Т.* Вычислимые классы и алгебраические критерии автоустойчивости: Дис. … канд. физ.-мат. наук. АН Казахской ССР. Ин-т математики и механики. Лаб. алгебры и логики. Алма-Ата, 1974.

3. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999.

4. *Goncharov S. S.* Computability and computable models, mathematical problems from applied logic. II // Logics for the XXIst Century. Edited by D. M. Gabbay, S. S. Goncharov, and M. Zakharyaschev. New York: Springer-Verl, 2006, P. 99–216. (International Mathematical Series, New York).

5. *Calvert W.* The isomorphism problem for classes of computable fields // Archive Math. Logic. 2004. V. 34, N 3. P. 327–336.

6. *Calvert W.* The isomorphism problem for computable abelian p-groups of bounded length // J. Symbol. Logic. 2005. V. 70, N 1. P. 331–345.

7. *Калверт У., Каммингс Д., Найт Дж. Ф., Миллер С.* Сравнение классов конечных структур // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 6. С. 666–701.

8. *Калверт У., Харизанова В., Найт Дж. Ф., Миллер С.* Индексные множества вычислимых моделей // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 5. С. 538–574.

9. *Csima B. F., Montalbán A., Shore R. A.* Boolean algebras, Tarski invariants, and index sets // Notre Dame J. Formal Logic. 2006. V. 47, N 1. P. 1–23.

10. *Добрица В. П.* Сложность индексного множества конструктивной модели // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 4. С. 372–381.

11. *White W.* On the complexity of categoricity in computable structures // Math. Logic Quarterly. 2003. V. 49. P. 603–614.

12. *White W.* Characterizations for Computable Structures: Thes. … doct. mathematics. Cornell University, 2000.

13. *Фокина Е. Б.* Индексные множества разрешимых моделей // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1167–1179.

14. *Marker D.* Non-Σ_n-axiomatizable almost strongly minimal theories // J. Symbol. Logic. 1989. V. 54. P. 921–927.

15. *Гончаров С. С., Хусаинов Б. Х.* Сложность теорий вычислимых категоричных моделей // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 6. С. 650–665.

16. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.

17. *Кейслер Г., Чен Ч. Ч.* Теория моделей. М.: Мир, 1977.

18. *Еримбетов М. М.* О полных теориях с 1-кардинальными формулами // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 3. С. 245–257.

19. *Marker D.* Model theory: an introduction. New York: Springer-Verl., 2002. (Graduate texts in math.; 217).

Статья поступила 14 июня 2007, окончательный вариант — 4 апреля 2008 г.

Павловский Евгений Николаевич
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`euxsun@gmail.com`