Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2008. Том 49, № 2

УДК 512.542

СВОЙСТВО D_π В ЛИНЕЙНЫХ И УНИТАРНЫХ ГРУППАХ

Д. О. Ревин

Аннотация. Для любого множества π простых чисел завершено описание конечных линейных и унитарных групп со свойством D_π.

Ключевые слова: холлова π-подгруппа, группа со свойством D_π, проективная специальная линейная группа, проективная специальная унитарная группа, радикальная r-подгруппа, r-суперлокал.

Введение

Пусть G — конечная группа, π — некоторое множество простых чисел. Через π' обозначим множество всех простых чисел, не лежащих в π, через $\pi(n)$ — множество простых делителей натурального числа n, а через $\pi(G)$ — множество $\pi(|G|)$. Группа G с условием $\pi(G) \subseteq \pi$ называется *π-группой*. Подгруппа H группы G называется *холловой π-подгруппой*, если $\pi(H) \subseteq \pi$ и $\pi(|G : H|) \subseteq \pi'$. В соответствии с [1] будем говорить, что группа G *обладает свойством E_π*, если в G имеется холлова π-подгруппа. Если при этом любые две холловы π-подгруппы сопряжены, то будем говорить, что группа G *обладает свойством C_π*. Если к тому же любая π-подгруппа группы G содержится в некоторой холловой π-подгруппе, то будем говорить, что G *обладает свойством D_π*. Группу со свойством E_π (C_π, D_π) будем называть также E_π- (соответственно C_π-, D_π-) *группой*.

Хорошо известно, что для любого множества π простых чисел класс конечных групп со свойством D_π замкнут относительно гомоморфных образов. С помощью классификации конечных простых групп в [2] доказано также, что для любого множества π свойство D_π наследуется нормальными подгруппами и при расширениях. Следовательно, конечная группа обладает свойством D_π тогда и только тогда, когда каждый ее композиционный фактор обладает этим свойством. Таким образом, для получения исчерпывающей характеризации свойства D_π в классе всех конечных групп достаточно описать неабелевы простые группы с этим свойством.

Из [1, 3] следует, что знакопеременная группа A_n обладает свойством D_π тогда и только тогда, когда $|\pi \cap \pi(n!)| \le 1$ или $\pi(n!) \subseteq \pi$. Спорадические группы со свойством D_π описаны в [4, 5]. В этих же работах описаны простые группы лиева типа со свойством D_π в случае, когда характеристика лежит в π. В случае, когда 2 и характеристика группы не принадлежат π, свойство D_π в группах

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00797), Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ (грант МК-1730.2005.1) и СО РАН (грант №29 для молодых ученых и интеграционный проект 2006.1.2).

лиева типа описано в [6, 7]. В [2] доказано, что если характеристика не принадлежит π, а $2, 3 \in \pi$, то в группах лиева типа нет свойства D_π. Для завершения характеризации свойства D_π в конечных простых группах осталось, таким образом, изучить D_π-группы лиева типа, когда $2 \in \pi$, а 3 и характеристика не принадлежат π.

Цель настоящей статьи — описать группы $\mathrm{L}_n^+(q) = \mathrm{L}_n(q)$ и $\mathrm{L}_n^-(q) = \mathrm{U}_n(q)$ со свойством D_π в оставшемся случае, доказав следующую теорему.

Основная теорема. *Пусть $G = \mathrm{L}_n^\pm(q)$ — проективная специальная линейная или унитарная группа над полем $\mathrm{GF}(q)$ характеристики p. Пусть π — множество простых чисел такое, что $3, p \notin \pi$, а $2 \in \pi$. Пусть $\tau = \pi \cap \pi(G) \setminus \{2\} \neq \varnothing$, а φ — множество простых чисел Ферма, принадлежащих τ. Группа G обладает свойством D_π тогда и только тогда, когда для любого $s \in \tau$ выполнено $s > n$, для любого $t \in \varphi$ выполнено $t > n + 1$ и $\tau \subseteq \pi(q - \varepsilon)$, где $\varepsilon = \pm 1$ такое число, что 4 делит $q - \varepsilon$.*

Автор выражает глубокую признательность Е. П. Вдовину, многие идеи которого использованы в статье, за плодотворное обсуждение работы, а также за ряд замечаний, позволивших улучшить ее первоначальный вариант.

1. Предварительные сведения и результаты

Используемые в работе обозначения и терминология стандартны. Если G — конечная группа, H — ее подгруппа, $x \in G$, p — простое число и π — некоторое множество простых чисел, то через $Z(G)$, $F(G)$, $Sol(G)$, $N_G(H)$, $C_G(H)$, $C_G(x)$, $O^{p'}(G)$ и $O_\pi(G)$ обозначаются центр группы G, ее подгруппа Фиттинга, разрешимый радикал, нормализатор в G подгруппы H, централизатор в G подгруппы H, централизатор в G элемента x, подгруппа, порожденная всеми p-элементами группы G, и наибольшая нормальная π-подгруппа группы G соответственно.

Если A и B — группы, то через $A \times B$ и $A \circ B$ будут соответственно обозначаться их прямое и центральное произведения. Если B — группа подстановок на множестве из n элементов, то через $A \wr B$ будет обозначаться подстановочное сплетение групп A и B, т. е. естественное полупрямое произведение базы сплетения (прямого произведения n копий группы A) и группы B, переставляющей сомножители из базы. Если A и B — подпространства некоторого векторного пространства с билинейной формой, то запись $A \perp B$ будет обозначать их ортогональную сумму.

Всюду в статье через p обозначается некоторое простое число, а через q — некоторая натуральная степень числа p. Через δ, ε и η обозначены некоторые числа, равные ± 1. Тем же символом δ, ε или η мы будем обозначать также знаки этих чисел.

Необходимые сведения о линейных алгебраических группах можно найти в [8–10]. Если $\overline{G}$ — связная простая линейная алгебраическая группа, то для любого эндоморфизма σ этой группы через $\overline{G}_\sigma$ будем обозначать множество элементов $\overline{G}$, неподвижных относительно σ. Хорошо известно, что любая группа лиева типа G может быть вложена в подходящую простую линейную алгебраическую группу $\overline{G}$ как подгруппа, удовлетворяющая условию

$$O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leq G \leq \overline{G}_\sigma$$

для некоторого отображения Фробениуса σ алгебраической группы $\overline{G}$.

Необходимые сведения о классических группах можно найти в [11]. Группы $\mathrm{GU}_n(q)$, $\mathrm{SU}_n(q)$ и $\mathrm{U}_n(q)$ будем обозначать символами $\mathrm{GL}^-(q)$, $\mathrm{SL}^-(q)$ и $\mathrm{L}^-(q)$

соответственно и называть их *унитарными*, а группы $\mathrm{GL}(q)$, $\mathrm{SL}(q)$ и $\mathrm{L}(q)$ — символами $\mathrm{GL}^+(q)$, $\mathrm{SL}^+(q)$ и $\mathrm{L}^+(q)$ соответственно и называть их *линейными*. Если группа G действует на векторном пространстве V линейными преобразованиями, то для любого $g \in G$ обозначим через $[V, g]$ множество векторов вида $vg - v$, $v \in V$, а через $[V, G]$ — подпространство $\sum\limits_{g \in G} [V, g]$.

В следующей лемме собраны известные утверждения о свойствах E_π, C_π и D_π, доказательство которых не требует использования классификации конечных простых групп.

Лемма 1. *Пусть G — конечная группа, A — ее нормальная подгруппа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если H — холлова π-подгруппа группы G, то $H \cap A$ является холловой π-подгруппой в A, а фактор-группа HA/A является холловой π-подгруппой в G/A.*

(2) *Если G — E_π- или D_π-группа, то фактор-группа G/A обладает свойством E_π или D_π соответственно.*

(3) *Если A и G/A обладают свойством C_π, то группа G обладает свойством C_π.*

(4) *Если группа A разрешима, то фактор-группа G/A обладает свойством D_π тогда и только тогда, когда группа G обладает свойством D_π.*

(5) *Если группа G является центральным произведением групп G_i, $i = 1, 2, \dots, n$, то группа G обладает свойством E_π, C_π или D_π тогда и только тогда, когда каждая из групп G_i, $i = 1, 2, \dots, n$, обладает этим свойством.*

(6) *Если G — E_π-группа и ее холлова π-подгруппа нильпотентна, то G обладает свойством D_π* [12].

(7) *Если A — E_π-группа и ее холлова π-подгруппа нильпотентна, а G/A обладает свойством D_π, то G обладает свойством D_π* [1, теорема D5; 13, теорема 1].

Лемма 2. *Пусть G — конечная группа, A — ее нормальная подгруппа, все композиционные факторы которой являются известными простыми группами, т. е. упоминаются в утверждении классификационной теоремы* [14]. *Тогда если A и G/A обладают свойством D_π для некоторого множества π простых чисел, то G обладает свойством D_π* [2, теорема 7.7].

Следующая лемма является частью утверждения [2, лемма 6.1].

Лемма 3. *Пусть $G \in \{\mathrm{L}^\eta(q), \mathrm{SL}^\eta(q), \mathrm{GL}^\eta(q)\}$ — группа над полем $\mathrm{GF}(q)$ простой характеристики p. Пусть π — некоторое множество простых чисел такое, что $2 \in \pi$, а $3, p \notin \pi$. Пусть $\tau = (\pi \cap \pi(G)) \setminus \{2\}$. Группа G обладает свойством C_π тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) *4 делит $q - \eta$, $\tau \subseteq \pi(q - \eta)$ и для любого $t \in \tau$ выполнено $t > n$;*

(2) *4 делит $q + \eta$, $\tau \subseteq \pi(q + \eta)$ и для любого $t \in \tau$ выполнено $t > (n + 1)/2$. При этом холлова π-подгруппа группы G обладает нормальной холловой τ-подгруппой, лежащей в некотором максимальном торе группы G.*

2. Радикальные 2-подгруппы и 2-суперлокалы полных линейных и унитарных групп

Пусть r — простое число и G — конечная группа. Подгруппу R (возможно, тривиальную) такую, что $R = O_r(N_G(R))$, будем называть *радикальной r-подгруппой* группы G, а нормализатор такой подгруппы — r-суперлокалом.

Опишем строение нормализаторов 2-радикальных подгрупп в полных линейных и унитарных группах согласно [15, 16]. Зафиксируем натуральное число n, нетривиальную степень q простого числа p, отличного от 2, и число $\eta \in \{\pm 1\}$. Пусть $G = \mathrm{GL}_n^\eta(q)$. Пусть ε такое число, что $q-\varepsilon$ делится на 4. Число a определим равенством $(q-\varepsilon)_2 = 2^a$.

Пусть γ — неотрицательное целое число, $\delta = \pm 1$ и E_γ — экстраспециальная группа $2_\delta^{2\gamma+1}$. Другими словами, E_γ — группа с циклическим центром $Z(E_\gamma) = \langle z\rangle$. Она порождена некоторыми элементами $x_1, x_2, \dots, x_{2\gamma-1}, x_{2\gamma}$ такими, что $[x_{2i-1}, x_{2i}] = z$, $[x_{2i}, x_{2i+1}] = 1$ при $i = 1, \dots, \gamma$, $[x_i, x_j] = 1$ при $|i-j| \geq 2$, $|x_i| = 2$ при $i > 2$ и элементы x_1, x_2 имеют порядок, равный 2 или 4, если $\delta = +$ или $\delta = -$ соответственно, причем в последнем случае $x_1^2 = x_2^2 = z$. Если $\gamma = 0$, то считается, что E_γ — циклическая группа порядка 2.

Пусть α — неотрицательное целое число. Положим $\varepsilon_\alpha = \eta^{2^\alpha}$, и пусть Z_α — циклическая группа порядка 2, если $\alpha = 0$ и $\varepsilon = -\eta$, и порядка $2^{a+\alpha}$ в противном случае. Пусть $R_{\alpha,\gamma}$ — центральное произведение групп E_γ и Z_α такое, что $Z(E_\gamma) = \Omega_1(Z_\alpha)$. Отметим, что $Z(R_{\alpha,\gamma}) = Z_\alpha$. Кроме того, строение группы $R_{\alpha,\gamma}$ зависит от δ, только если $\alpha = 0$ и $\gamma > 0$. Известно [11, 15, 16], что группа $R_{\alpha,\gamma}$ вкладывается в $\mathrm{GL}_{2^\gamma}^{\varepsilon_\alpha}(q^{2^\alpha})$ таким образом, что Z_α совпадает с $O_2\big(Z\big(\mathrm{GL}_{2^\gamma}^{\varepsilon_\alpha}(q^{2^\alpha})\big)\big)$. Пусть $H_{\alpha,\gamma}$ — нормализатор в $\mathrm{GL}_{2^\gamma}^{\varepsilon_\alpha}(q^{2^\alpha})$ подгруппы $R_{\alpha,\gamma}$. При этом если $\alpha \neq 0$ или $\gamma = 0$, то подгруппы $R_{\alpha,\gamma}$ и $H_{\alpha,\gamma}$ в $\mathrm{GL}_{2^\gamma}^{\varepsilon_\alpha}(q^{2^\alpha})$ определены однозначно с точностью до сопряженности, а в остальных случаях имеется ровно по два класса сопряженных подгрупп $R_{\alpha,\gamma}$ и $H_{\alpha,\gamma}$, соответствующих различным значениям δ. Кроме того,

$$H_{\alpha,\gamma}/Z(H_{\alpha,\gamma})R_{\alpha,\gamma} \simeq \begin{cases} \mathrm{O}_{2\gamma}^\delta(2), & \text{если } \alpha = 0 \text{ и } \varepsilon = -\eta,\\ \mathrm{Sp}_{2\gamma}(2) & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Пусть m — натуральное число. Имеет место следующая цепочка вложений:

$$\mathrm{GL}_{2^\gamma}^{\varepsilon_\alpha}(q^{2^\alpha}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_{2^{\gamma+\alpha}}^\eta(q) \hookrightarrow \mathrm{GL}_{m2^{\gamma+\alpha}}^\eta(q),$$

где первое вложение — вложение Галуа или его композиция с вложением

$$\mathrm{GL}_{2^{\gamma+\alpha-1}}(q^2) \hookrightarrow \mathrm{GL}_{2^{\gamma+\alpha}}^-(q)$$

[11, § 4.2, 4.3], а второе задается правилом

$$g \mapsto \begin{pmatrix} g & & \\ & \ddots & \\ & & g \end{pmatrix}, \quad g \in \mathrm{GL}_{2^{\gamma+\alpha}}^\eta(q).$$

Обозначим через $R_{m,\alpha,\gamma}$ и $H_{m,\alpha,\gamma}$ образы групп $R_{\alpha,\gamma}$ и $H_{\alpha,\gamma}$ в $\mathrm{GL}_{m2^{\gamma+\alpha}}^\eta(q)$ относительно композиции этих вложений. Они определены однозначно с точностью до сопряженности.

Лемма 4. *Во введенных обозначениях пусть* $X = \mathrm{GL}_{m2^{\gamma+\alpha}}^\eta(q)$, $R = R_{m,\alpha,\gamma}$, $H = H_{m,\alpha,\gamma}$, $Z = Z(R_{m,\alpha,\gamma})$. *Положим* $C = C_X(R)$, $N = N_X(R)$ *и* $N^0 = C_N(Z)$. *Тогда*

(1) *имеет место изоморфизм*

$$C \simeq \mathrm{GL}_m^{\varepsilon_\alpha}(q^{2^\alpha}) \otimes I_\gamma,$$

где I_γ *— единичная матрица размера* 2^γ, *а через* $\otimes$ *обозначено кронекерово произведение матриц;*

(2) *справедливы соотношения*

$$N^0 = HC, \quad [H, C] = 1, \quad H \cap C = Z(H) \le Z(C);$$

(3) *фактор-группа N/N^0 является циклической порядка 2^α.*

Доказательство. См. [15, (1H)] и [16, (1L)]. $\square$

Предположим, что $\varepsilon = -\eta$. Пусть через $S_{1,\gamma}$ обозначено полупрямое произведение экстраспециальной группы $E_\gamma = 2_\delta^{2\gamma+1}$ и полудиэдральной группы P порядка 2^{a+2}. Тогда $S_{1,\gamma}$ абсолютно неприводимо вкладывается в $\mathrm{GL}^\eta_{2^{\gamma+1}}(q)$ и такое вложение однозначно с точностью до сопряженности. Отождествим также группы E_γ и P с их образами относительно этого вложения. Пусть $S^0_{1,\gamma} = C_{S_{1,\gamma}}([S_{1,\gamma}, S_{1,\gamma}])$. Обозначим через $L_{1,\gamma}$ подгруппу, состоящую из тех элементов нормализатора в $\mathrm{GL}^\eta_{2^{\gamma+1}}(q)$ подгруппы $S_{1,\gamma}$, которые тривиально действуют на $[S_{1,\gamma}, S_{1,\gamma}]$. Допустим, что $P = \langle \tau, \sigma \rangle$, причем $|\sigma| = 2^{a+1}$, $|\tau| = 2$ и $\tau\sigma\tau = -\sigma^{-1}$. Тогда $[S_{1,\gamma}, S_{1,\gamma}] = \langle \sigma^2 \rangle$, $S^0_{1,\gamma} = \langle \sigma \rangle E_\gamma$, $Z(S^0_{1,\gamma}) = \langle \sigma \rangle$ и $S_{1,\gamma} = \langle \tau, S^0_{1,\gamma} \rangle$. Кроме того,

$$\big[L_{1,\gamma}, Z\big(S^0_{1,\gamma}\big)\big] = 1, \quad Z(L_{1,\gamma}) = Z\big(\mathrm{GL}^\eta_{2^{\gamma+1}}(q)\big) Z\big(S^0_{1,\gamma}\big),$$

$$C_{\mathrm{GL}^\eta_{2^{\gamma+1}}(q)}(L_{1,\gamma} S_{1,\gamma}) = C_{\mathrm{GL}^\eta_{2^{\gamma+1}}(q)}(S_{1,\gamma}) = Z\big(\mathrm{GL}^\eta_{2^{\gamma+1}}(q)\big),$$

$$L_{1,\gamma}/S^0_{1,\gamma} Z(L_{1,\gamma}) \simeq \mathrm{Sp}_{2\gamma}(2).$$

Пусть m — натуральное число. Обозначим через $L_{m,1,\gamma}$, $S_{m,1,\gamma}$ и $S^0_{m,1,\gamma}$ образы в $\mathrm{GL}^\eta_{m2^{\gamma+1}}(q)$ подгрупп $L_{1,\gamma}$, $S_{1,\gamma}$ и $S^0_{1,\gamma}$ относительно вложения

$$\mathrm{GL}^\eta_{2^{\gamma+1}}(q) \hookrightarrow \mathrm{GL}^\eta_{m2^{\gamma+1}}(q),$$

задаваемого правилом

$$g \mapsto \begin{pmatrix} g & & \\ & \ddots & \\ & & g \end{pmatrix}, \quad g \in \mathrm{GL}^\eta_{2^{\gamma+1}}(q).$$

Подгруппы $L_{m,1,\gamma}$, $S_{m,1,\gamma}$ и $S^0_{m,1,\gamma}$ в группе $\mathrm{GL}^\eta_{m2^{\gamma+1}}(q)$ определяются однозначно с точностью до сопряженности.

Лемма 5. *Пусть во введенных обозначениях $X = \mathrm{GL}^\eta_{m2^{\gamma+1}}(q)$, $S = S_{m,1,\gamma}$, $L = L_{m,1,\gamma}$, $S^0 = S^0_{m,1,\gamma}$. Положим $C = C_X(R)$, $N = N_X(R)$ и $N^0 = C_N(Z(S^0))$. Тогда*

(1) *имеет место изоморфизм*

$$C \simeq \mathrm{GL}^\eta_m(q) \otimes I_{\gamma+1},$$

где $I_{\gamma+1}$ — единичная матрица размера $2^{\gamma+1}$;

(2) *справедливы соотношения*

$$Z(C) = Z(X), \quad N^0 = LC, \quad [L, C] = 1, \quad L \cap CS^0 = S^0 Z(L),$$

$$L \cap S = S^0 \quad \text{и} \quad Z(N^0) = Z(L) = Z(X) Z(S^0);$$

(3) $|N/N^0| = 2$.

Доказательство. См. [15, (1I)] и [16, (1M)]. $\square$

Для целых чисел $\gamma \ge 0$, $m \ge 1$ и $k = 1, 2$ положим

$$R^k_{m,0,\gamma} = \begin{cases} S_{m,1,\gamma-1}, & \text{если } k = 2,\ \gamma \ge 1 \text{ и } \varepsilon = -\eta, \\ R_{m,0,\gamma} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Положим также $R^1_{m,\alpha,\gamma} = R_{m,\alpha,\gamma}$[1]. Обозначим через $C^k_{m,\alpha,\gamma}$ и $N^k_{m,\alpha,\gamma}$ соответственно централизатор и нормализатор в группе $\mathrm{GL}^{\eta}_{m2^{\gamma+\alpha}}(q)$ подгруппы $R^k_{m,\alpha,\gamma}$. Строение этих групп описано выше. Пусть $\mathfrak{c} = (c_1, c_2, \dots, c_l)$, где $c_1, c_2, \dots, c_l$ — натуральные числа, или $\mathfrak{c} = (0)$. Пусть для любого $i = 1, \dots, l$ через A_{c_i} обозначена элементарная абелева группа порядка 2^{c_i}, отождествляемая посредством регулярного представления с подгруппой симметрической группы $S_{2^{c_i}}$, и $A_{\mathfrak{c}} = A_{c_1} \wr A_{c_2} \wr \dots \wr A_{c_l}$ — подгруппа группы S_u, где $u = 2^{c_1+c_2+\dots+c_l}$. В случае, когда $\mathfrak{c} = (0)$, положим $A_{\mathfrak{c}} = 1$. Пусть также $d = 2^{\alpha+\gamma}mu$. Группу $A_{\mathfrak{c}}$ можно естественным образом отождествить с подгруппой из S_u. Кроме того, положим $G^k_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}} = \mathrm{GL}^{\eta}_d(q)$. Группа $R^k_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}} = R^k_{m,\alpha,\gamma} \wr A_{\mathfrak{c}}$ естественным образом вкладывается в группу $G^k_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}}$ и определяется в ней однозначно с точностью до сопряжения. За исключением случая, когда $\alpha = \gamma = 0$, $c_1 = 1$ и $\varepsilon = -\eta$, подгруппа $R^k_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}}$ называется *базисной подгруппой* группы $G^k_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}}$.

Лемма 6. *Пусть числа q, n и η, определяющие группу G, те же, что и ранее. Пусть во введенных обозначениях $H = G^k_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}}$ и $R = R^k_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}}$. Из определения группы R следует, что R является полупрямым произведением групп $R_1 \times \dots \times R_u$ и $A_{\mathfrak{c}}$, где $u = 2^{c_1+\dots+c_l}$ и каждая из групп R_i является группой $R^k_{m,\alpha,\gamma}$. Пусть V — естественный модуль группы H и $V_i = [V, R_i]$ — подпространство, которое можно отождествить с естественным модулем группы R_i. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *$C_H(R) \simeq C^k_{m,\alpha,\gamma} \otimes I_{\mathfrak{c}}$, где $I_{\mathfrak{c}}$ — единичная матрица размера u.*

(2) *Если $\alpha = \gamma = 0$, $c_1 = 1$ и $\varepsilon = -\eta$, то $R = R^1_{m,0,1,\mathfrak{c}'}$, где $\mathfrak{c}' = (c_2, \dots, c_l)$ и справедливы соотношения*

$$N_H(R) = \left(N^1_{m,0,1}/R^1_{m,0,1}\right) \otimes N_{S_{u-2}}(A'_{\mathfrak{c}}),$$

$$N_H(R)/R^1_{m,0,1} \simeq \left(N^1_{m,0,1}/R^1_{m,0,1}\right) \times \mathrm{GL}_{c_2}(2) \times \dots \times \mathrm{GL}_{c_l}(2).$$

Если же R — базисная подгруппа группы H, то

$$N_H(R) = \left(N^k_{m,\alpha,\gamma}/R^k_{m,\alpha,\gamma}\right) \otimes N_{S_u}(A_{\mathfrak{c}}),$$

$$N_H(R)/R \simeq (N_{m,\alpha,\gamma}/R_{m,\alpha,\gamma}) \times \mathrm{GL}_{c_1}(2) \times \dots \times \mathrm{GL}_{c_l}(2).$$

(3) *Допустим, R — базисная подгруппа группы H. Пусть K — подгруппа Томпсона группы R, т. е. подгруппа, порожденная всеми нормальными абелевыми подгруппами, и пусть $A(R) = Z(C_K([K,K]))$. Пусть также $\mathscr{E} = \{[V,g] | g \in A(R)^{\#}\}$. Тогда всякий минимальный по включению элемент $\mathscr{E}$ совпадает с одним из подпространств V_i и имеет размерность $m2^{\alpha+\gamma}$. Кроме того, группа $A(R)$ является элементарной абелевой 2-группой тогда и только тогда, когда $\varepsilon = -\eta$, $k = 1$ и $\alpha = 0$.*

(4) *Допустим, R — базисная подгруппа группы H. Тогда группа R действует естественным образом на множестве $\{V_1, \dots, V_u\}$. При этом подгруппа $R_1 \times \dots \times R_u$ совпадает с ядром этого действия, а подгруппа $A_{\mathfrak{c}}$ действует как подгруппа из S_u.*

Доказательство. См. [15, (2.1), (2.2), (2A) с доказательством и последующим замечанием и доказательство (2C)] и [16, (2.1), (2.2) (2A) с доказательством и последующим замечанием и доказательство (2C)]. □

[1] Таким образом, подгруппа $R^2_{m,\alpha,\gamma}$ определена, только если $\alpha = 0$, $\gamma \geq 1$ и $\varepsilon = -\eta$.

Лемма 7. *Пусть числа q, n, η, определяющие группу G, зафиксированы те же, что и ранее, и для подходящих k, m, α, γ, $\mathfrak{c}$, k', m', α', γ' и $\mathfrak{c}'$ подгруппа $R = R^k_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}} = R^{k'}_{m',\alpha',\gamma',\mathfrak{c}'}$ является базисной в некоторой группе $H = G_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}} = G_{m',\alpha',\gamma',\mathfrak{c}'}$. Тогда $k = k'$, $m = m'$, $\alpha = \alpha'$, $\gamma = \gamma'$ и $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}'$.*

Доказательство. Из утверждения (1) леммы 6 и леммы 4 следует изоморфизм $C_H(R) \simeq \mathrm{GL}^{\varepsilon_\alpha}_m(q^{2^\alpha})$. Поэтому числа m и α находятся однозначно. Далее, из утверждения (3) леммы 6 вытекает, что γ определяется однозначно. Если либо $\alpha \neq 0$, либо $\gamma \neq 0$, либо $\varepsilon = \eta$, то $k = 1$. В противном случае в силу утверждения (3) леммы 6 подгруппа $A(R)$ является элементарной абелевой тогда и только тогда, когда $k = 1$. Соответственно если $A(R)$ содержит элемент порядка 4, то $k = 2$. Таким образом, k определено однозначно. Наконец, из утверждения (4) леммы 6 и [17, лемма 12 (3)] получим, что $\mathfrak{c}$ определяется однозначно. $\square$

Лемма 8. *Пусть, как и ранее, $G = \mathrm{GL}^\eta_n(q)$ и V — естественный модуль для V, снабженный соответствующей формой (тривиальной при $\eta = 1$ и унитарной при $\eta = -1$). Отождествим G с $\mathrm{GL}^\eta(V)$. Пусть R — радикальная 2-подгруппа группы G. Тогда существуют соответствующие друг другу разложения*

$$V = V_1 \perp \dots \perp V_s \perp V_{s+1} \perp \dots \perp V_t, \quad R = R_1 \times \dots \times R_s \times R_{s+1} \times \dots \times R_t$$

такие, что $R_i = \{\pm 1_{V_i}\}$ при $i = 1, \dots, s$ и R_i — базисная подгруппа группы $\mathrm{GL}^\eta(V_i)$ при $i = s+1, \dots, t$. Кроме того, если $\varepsilon = \eta$, то $s = 0$.

Доказательство. См. [15, (2B)] и [16, (2B)]. $\square$

Замечание. Отметим, что $\{\pm 1_{V_i}\} = R^1_{m_i,0,0,(0)}$, где $m_i = \dim V_i$. Поэтому подгруппа $\{\pm 1_{V_i}\}$ при $\varepsilon = -\eta$ является базисной подгруппой группы $\mathrm{GL}^\eta(V_i)$.

Пусть теперь в прежних обозначениях R — радикальная r-подгруппа группы G, V — естественный модуль для G и

$$V = V_1 \perp \dots \perp V_s \perp V_{s+1} \perp \dots \perp V_t, \; R = R_1 \times \dots \times R_s \times R_{s+1} \times \dots \times R_t$$

— разложения, о которых идет речь в лемме 8. Пусть $R(k,m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})$ — произведение тех из подгрупп R_i, для которых $R_i = R^k_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}}$, $V(k,m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})$ — сумма соответствующих этим R_i подпространств V_i, а $u(k,m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})$ — число таких R_i. Пусть также $G(k,m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}) = \mathrm{GL}^\eta(V(k,m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}))$ — группа, отождествляемая с соответствующей подгруппой в G.

Следующе утверждение описывает строение суперлокалов в группе G.

Лемма 9. *Во введенных обозначениях*

$$N_G(R) = \prod_{k,m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}} N_{G(k,m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})}(R(k,m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})),$$

$$N_G(R)/R = \prod_{k,m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}} N_{G(k,m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})}(R(k,m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}))/R(k,m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}),$$

$$N_{G(k,m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})}(R(k,m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})) = N_{G^k_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}}}\big(R^k_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}}\big) \wr S_{u(k,m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})},$$

$$N_{G(k,m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})}(R(k,m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}))/R(k,m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}) \\ = \big(N_{G^k_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}}}\big(R^k_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}}\big)/R^k_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}}\big) \wr S_{u(k,m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c})}.$$

Доказательство. Эта лемма доказана в [15, (2C)] и [16, (2C)] в предположении, что существует неприводимый комплексный характер θ группы $N_G(R)$

такой, что $R \leq \ker\theta$, и θ, рассматриваемый как характер группы $N_G(R)/R$, принадлежит 2-блоку дефекта 0. Существование такого характера используется только для того, чтобы показать, что если некоторый сомножитель $R_i = R^k_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}}$ в разложении группы R сопряжен с сомножителем $R_{i'} = R^{k'}_{m',\alpha',\gamma',\mathfrak{c}'}$, то $k = k'$, $m = m'$, $\alpha = \alpha'$, $\gamma = \gamma'$ и $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}'$. Однако в силу леммы 7 эти равенства имеют место и без предположения о существовании такого характера θ. $\square$

В предыдущих обозначениях для любого $i = 1, \dots, t$ положим $G_i = \mathrm{GL}^\eta(V_i)$, причем G_i отождествляется с соответствующей подгруппой из G, если считать, что G_i тождественно действует на всех V_j при $i \neq j$. Пусть $C_i = C_{G_i}(R_i)$. Таким образом, в силу лемм 4–6 если $R_i = R^k_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}}$, то $C_i \simeq \mathrm{GL}^{\varepsilon_\alpha}_m(q^{2^\alpha})$.

Лемма 10. *Пусть во введенных обозначениях R — нецентральная радикальная подгруппа группы G. Тогда $C_G(R) = C_1 \times \dots \times C_t$.*

Доказательство следует из леммы 9. $\square$

3. Доказательство основной теоремы

Будем говорить, что группа имеет *правильное строение*, если она имеет нормальную холлову $2'$-подгруппу. Заметим, что класс групп с правильным строением замкнут относительно взятия подгрупп и гомоморфных образов.

Лемма 11. *Пусть π — множество простых чисел, не содержащее 3. Тогда всякая π-группа неправильного строения содержит разрешимую подгруппу неправильного строения.*

Доказательство. Пусть G — π-группа неправильного строения. Можно считать, что G неразрешима. Достаточно показать, что группа $G^* = G/Sol(G)$ имеет разрешимую подгруппу неправильного строения. Пусть S^* — минимальная субнормальная подгруппа группы G^*. Тогда S^* — простая неабелева группа, являющаяся в силу теоремы Томпсона — Глаубермана [18, гл. II, следствие 7.3] группой Судзуки. Ее подгруппа Бореля разрешима и имеет неправильное строение. $\square$

Пусть $\mathrm{SL}^\eta_n(q) \leq L \leq \mathrm{GL}^\eta_n(q)$, где q — степень простого числа p и π — некоторое множество простых чисел, содержащее 2, но не содержащее 3 и p. Пусть $\tau = \pi \cap \pi(G) \setminus \{2\}$ и φ — множество простых чисел Ферма, лежащих в τ. Пусть число $\varepsilon = \pm 1$ выбрано так, что $q \equiv \varepsilon \pmod 4$. Определим для пары (L, π) условия $(*)$ и $(**)$.

Будем говорить, что пара (L, π) *удовлетворяет условию* $(*)$, если $\tau \subseteq \pi(q - \varepsilon)$, причем если $\varepsilon = \eta$, то для любого $t \in \tau$ выполнено $t > n$, а если $\varepsilon = -\eta$, то для любого $t \in \tau$ выполнено $t > (n+1)/2$.

Будем говорить, что пара (L, π) *удовлетворяет условию* $(**)$, если $\tau \subseteq \pi(q - \varepsilon)$, причем для любого $t \in \tau$ выполнено $t > n$, а для любого $t \in \varphi$ выполнено $t > n + 1$.

Заметим, что пара (L, π), удовлетворяющая условию $(**)$, удовлетворяет также и условию $(*)$.

Заметим также, что лемму 3 можно сформулировать в следующем виде.

Лемма 12. *Пусть $\mathrm{SL}^\eta_n(q) \leq L \leq \mathrm{GL}^\eta_n(q)$, где q — степень простого числа p и π — некоторое множество простых чисел, содержащее 2, но не содержащее 3 и p. Во введенных обозначениях следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *группа L обладает свойством E_π;*

(2) *группа L обладает свойством C_π;*

(3) *пара (L,π) удовлетворяет условию $(*)$.*

При этом холлова π-подгруппа H группы L содержит нормальную холлову τ-подгруппу, лежащую в некотором максимальном торе группы L. В частности, H имеет правильное строение и L обладает свойством D_τ.

Для доказательства основной теоремы достаточно установить справедливость следующей леммы.

Лемма 13. *Пусть $\mathrm{SL}_n^\eta(q) \le L \le \mathrm{GL}_n^\eta(q)$, где q — степень простого числа p, и π — некоторое множество простых чисел, содержащее 2, но не содержащее 3 и p. Во введенных обозначениях следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *группа L обладает свойством D_π;*

(2) *пара (L,π) удовлетворяет условию $(*)$ и всякая π-подгруппа группы L имеет правильное строение;*

(3) *пара (L,π) удовлетворяет условию $(**)$.*

Доказательство. Эквивалентность утверждений (1) и (2) установлена в [2, теорема 7.4].

Докажем импликацию (2) $\Rightarrow$ (3). Пусть утверждение (2) верно и предположим, что для пары (L,π) условие $(**)$ не выполнено. Пусть множества τ и φ зафиксированы так же, как и выше. Тогда $\tau \subseteq \pi(q+\eta)$ и либо

(а) для некоторого $t\in\tau$ имеет место неравенство $(n+1)/2 < t \le n$,
либо

(б) $n+1\in\varphi$.

Пусть $G=\mathrm{GL}_n^\eta(q)$. Поскольку группа G, как и группа L, обладает свойством D_π, всякая π-подгруппа группы G также имеет правильное строение. Случай (а) невозможен. Действительно, в этом случае G содержит подгруппу вида $2\wr S_n$. Элемент x порядка t группы S_n нетривиальным образом действует на базисной подгруппе B этого сплетения, следовательно, G содержит π-подгруппу $\langle B,x\rangle$ неправильного строения. Допустим, имеет место случай (б). Тогда $n=2^k$ для некоторого k. Согласно [11, предложения 4.6.5–4.6.7] естественное полупрямое произведение группы E, равной 2_-^{2k+1} или $4\circ 2^{2k+1}$, и соответственно группы $\mathrm{O}_{2k}^-(2)$ или $\mathrm{Sp}_{2k}(2)$ содержится в G в качестве подгруппы. В группах $\mathrm{O}_{2k}^-(2)$ и $\mathrm{Sp}_{2k}(2)$ имеется элемент x порядка $2^k+1=n+1$, нетривиальным образом действующий на E. Следовательно, G обладает π-подгруппой $\langle E,x\rangle$ неправильного строения; противоречие.

Перейдем к доказательству импликации (3) $\Rightarrow$ (2). Допустим, она неверна, и пусть $L=\mathrm{SL}_n^\eta(q)$ — контрпример минимального порядка. Пусть τ и φ зафиксированы для группы L так же, как и выше. Пусть $G=\mathrm{GL}_n^\eta(q)$. Тогда G, как и L, содержит π-подгруппу неправильного строения. Согласно лемме 11 в G имеется максимальная разрешимая π-подгруппа M неправильного строения. Вместе с тем предположение о существовании такой подгруппы ведет к противоречию, как показано в приведенных ниже леммах.

Лемма 14. *$O_\tau(M)\le Z(G)$.*

Доказательство. Пусть K — алгебраическое замыкание поля $\mathrm{GF}(q)$ и $\overline{G}=\mathrm{GL}_n(K)$. Пусть $\iota:\overline{G}\mapsto\overline{G}$ — отображение, сопоставляющее матрице матрицу, обратную к транспонированной. Определим отображение Фробениуса $\sigma:\overline{G}\mapsto\overline{G}$, полагая

$$(a_{ij})^\sigma=\begin{cases}(a_{ij}^q), & \text{если } \eta=+,\\ (a_{ij}^q)^\iota, & \text{если } \eta=-.\end{cases}$$

Это отображение является эндоморфизмом линейной алгебраической группы $\overline{G}_\sigma$. Хорошо известно, что группу G можно отождествить с $\overline{G}_\sigma$. Пусть $T = O_\tau(M)$. Поскольку G обладает свойством D_τ и холлова τ-подгруппа группы группы G содержится в некотором максимальном торе группы G, подгруппа T содержится в некотором максимальном торе группы $\overline{G}$. Таким образом, как вытекает из [8, предложение 3.5.2], $\overline{C} = C_{\overline{G}}(T)^0$ — связная σ-инвариантная редуктивная подгруппа максимального ранга группы $\overline{G}$. Из [8, предложение 3.5.3] и алгоритма нахождения подсистем в корневых системах [19, 20] заключаем, что $\overline{C} = \overline{S}(\overline{L}_1 \circ \cdots \circ \overline{L}_k)$, где $\overline{S}$ — максимальный σ-инвариантный тор группы $\overline{C}$, $\overline{L}_j = \mathrm{SL}_{n_j}(K)$, $j = 1, \ldots, k$, — простые алгебраические нормальные подгруппы группы $\overline{C}$ и $\langle\sigma\rangle$ действует на множестве $\{\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_k\}$. Отметим, что группа $\overline{C}$ является M-инвариантной и содержит любую холлову τ-подгруппу группы G, содержащую T, поскольку $\overline{C}$ содержит любой максимальный тор, содержащий T. Пусть $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ — орбиты действия группы $\langle\sigma\rangle$ на множестве $\{\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_k\}$, и пусть $\overline{L}_{j_i}$ — некоторый представитель Δ_i, $i = 1, \ldots, m$. Пусть $C = \overline{C}_\sigma$. Тогда C — M-инвариантная подгруппа группы G и всякая холлова τ-подгруппа группы G, содержащая T, лежит в C. Кроме того, $C = S(G_1 \circ \cdots \circ G_m)$, где $S = \overline{S}_\sigma$ — максимальный тор группы G и $G_i = \mathrm{SL}^{\eta_i}_{n_{j_i}}(q^{\alpha_i})\langle\Delta_i\rangle_\sigma$, причем каждая из G_i — нормальная подгруппа группы C. Ясно, что для каждого $i = 1, \ldots, m$ пара (G_i, π) удовлетворяет условию $(**)$.

Предположим, что $T \not\leq Z(G)$. Тогда каждая из групп G_i собственным образом содержится в $\mathrm{SL}_n(q)$ и в силу минимальности контрпримера L и эквивалентности утверждений (1) и (2) леммы 13 обладает свойством D_π. Следовательно, группы C и MC также обладают свойством D_π. Так как холлова π-подгруппа группы $G_1 \circ \cdots \circ G_m$ имеет нормальную τ-подгруппу, лежащую в некотором максимальном торе этой группы, то же самое верно и в отношении группы C. Действительно, существует максимальный тор S, содержащий холлову τ-подгруппу T группы C. Тогда для любого i группа $S \cap G_i$ является максимальным тором подгруппы G_i, содержащим холлову τ-подгруппу группы G_i. Поскольку в силу минимальности L каждая группа G_i является D_π-группой, холлова π-подгруппа группы G_i с точностью до сопряжения содержится в алгебраическом нормализаторе $N(G_i, S \cap G_i)$ (определение алгебраического нормализатора см. в работе [2]). Так как $C = S(G_1 \circ \ldots \circ G_m)$, группа $N(C, S) = S(N(G_1, S \cap G_1) \circ \ldots \circ N(G_m, S \cap G_m)$ содержит холлову π-подгруппу группы C с нормальной холловой τ-подгруппой. Таким образом, холлова π-подгруппа группы C имеет правильное строение. В силу своей максимальности M — холлова π-подгруппа группы MC. Поскольку $C \trianglelefteq MC$, подгруппа $M \cap C$ является холловой π-подгруппой группы C. Значит, $T = O_\tau(M \cap C)$ — холлова τ подгруппа группы C и, следовательно, группы G. Это означает, что M имеет правильное строение; противоречие. □

Пусть $R = O_2(M)$.

Лемма 15. *Подгруппа R не лежит в $Z(G)$ и является радикальной 2-подгруппой группы G.*

Доказательство. Если предположить, что $R \leq Z(G)$, то в силу леммы 14 $F(M) = RO_\tau(M) \leq Z(G) \cap M \leq Z(M)$ и по свойству разрешимых групп

$$M = C_M(F(M)) \leq F(M).$$

Это означало бы, что M нильпотентна и, следовательно, имеет правильное строение. Радикальность R вытекает из максимальности M. □

Пусть V — естественный модуль для группы G. Положим $C = C_G(R)$ и $N = N_G(R)$. Пусть

$$V = V_1 \perp \dots \perp V_s \perp V_{s+1} \perp \dots \perp V_t, \quad R = R_1 \times \dots \times R_s \times R_{s+1} \times \dots \times R_t$$

— разложения, о которых идет речь в лемме 8. Пусть $G_i = \mathrm{GL}^\eta(V_i)$ и $C_i = C_{G_i}(R_i)$ для каждого $i = 1, \dots, t$. Напомним, что согласно лемме 10 имеет место равенство $C = C_1 \times \dots \times C_t$, и если $R_i = R^k_{m,\alpha,\gamma,\mathfrak{c}}$, то $C_i \simeq \mathrm{GL}^{\varepsilon_\alpha}_m(q^{2^\alpha})$, причем $2^\alpha m \le n$.

Лемма 16. *Группа C обладает свойством D_π, и некоторая (любая) ее холлова τ-подгруппа является нормальной подгруппой группы M. В частности, любой τ-элемент из C лежит в $Z(G)$.*

Доказательство. Из леммы 15 вытекает, что $C_i < G$ для любого i. Каждая из пар (C_i, π) удовлетворяет условию $(**)$. Поэтому группа C обладает свойством D_π и ее холлова π подгруппа имеет правильное строение. Так как M нормализует группу C и группа MC также обладает свойством D_π, то M и $M \cap C$ — холловы π-подгруппы групп MC и C соответственно. Таким образом, $O_\tau(M \cap C)$ — холлова τ-подгруппа группы C, нормальная в M. Вследствие того, что C обладает свойством D_τ, и в силу леммы 14 лемма доказана. □

Лемма 17. *Группа N/CR является τ'-группой, и всякий τ-элемент группы N лежит в $Z(G)$.*

Доказательство. Согласно лемме 16 достаточно показать, что группа N/CR является τ'-группой. Допустим, это не так, и $x \in \tau$ — делитель числа $|N/CR|$. Тогда из лемм 4–6, 9, а также из того, что группы $\mathrm{Sp}_{2(\gamma-1)}(2)$ и $\mathrm{O}^{\pm}_{2\gamma}(2)$ вкладываются в $\mathrm{Sp}_{2\gamma}(2)$, вытекает, что x делит порядок одной из групп:

(а) $S_{n'}$ для некоторого $n' \le n$,

(б) $\mathrm{Sp}_{2\gamma}(2)$ для некоторого γ такого, что $2^\gamma \le n$,

(в) $\mathrm{GL}_c(2)$ для некоторого c такого, что $2^c \le n$.

Случай (а) невозможен, поскольку $x > n$ в силу того, что пара (L, π) удовлетворяет условию $(**)$, и, следовательно, x не делит $n'! = |S_{n'}|$. Если имеет место один из случаев (б), (в), то либо x делит $2^j \pm 1$, причем $2^j \pm 1 < n$, что невозможно, либо x делит $2^\gamma + 1 = n + 1$. В последнем случае, так как $x > n$, справедливо равенство $x = 2^\gamma + 1 = n + 1$ и, следовательно, $n + 1 \in \varphi$ вопреки условию $(**)$ для пары (L, π). □

Лемма 18. *Группа M имеет правильное строение. Противоречие.*

Доказательство. Поскольку $M \le N$, из леммы 17 следует, что холлова τ-подгруппа группы M лежит в $Z(G)$ и, следовательно, нормальна в M. □

Таким образом, лемма 17 и вместе с ней основная теорема доказаны. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hall P.* Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc. 1956. V. 6, N 3. P. 286–304.
2. *Revin D. O., Vdovin E. P.* Hall subgroups of finite groups // Ischia group theory 2004: Proc. of a Conf. in honour of Marcel Herzog. Contemp. Math. 2006. V. 402, P. 229–265.
3. *Thompson J. G.* Hall subgroups of the symmetric groups // J. Combin. Theory. Ser. A. 1966. V. 1, N 2. P. 271–279.
4. *Gross F.* On a conjecture of Philip Hall // Proc. London Math. Soc. Ser. III. 1986. V. 52, N 3. P. 464–494.
5. *Ревин Д. О.* Свойство D_π в одном классе конечных групп // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 3. С. 335–370.

6. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Холловы подгруппы нечетного порядка в конечных группах // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 1. С. 15–56.
7. *Ревин Д. О.* Свойство D_π конечных групп в случае, когда $2 \notin \pi$ // Тр. ИММ УрО РАН. 2006. Т. 13, № 1. С. 166–182.
8. *Carter R. W.* Finite groups of Lie type; conjugacy classes and complex characters. New York: Wiley, 1985.
9. *Humphreys J. E.* Linear algebraic groups. New York: Springer-Verl., 1972.
10. *Кондратьев А. С.* Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, № 1. С. 57–96.
11. *Kleidman P. B., Liebeck M.* The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.
12. *Wielandt H.* Zum Satz von Sylow // Math. Z. 1954. Bd 60, N 4. S. 407–408.
13. *Мазуров В. Д., Ревин Д. О.* О холловом D_π-свойстве для конечных групп // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 106–113.
14. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы: введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.
15. *An J.* 2-Weights for general linear groups // J. Algebra. 1992. V. 149, N 2. P. 500–527.
16. *An J.* 2-Weights for unitary groups // Trans. Am. Math. Soc. 1993. V. 339, N 1. P. 251–278.
17. *Ревин Д. О.* Суперлокалы в симметрических и знакопеременных группах // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 3. С. 338–365.
18. *Glauberman G.* Factorization in local subgroups of finite groups. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1976. (Conf. Ser. Math.; N 33).
19. *Borel A., de Siebental J.* Les-sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos // Comment. Math. Helv. 1949. V. 23, N 3. P. 200–221.
20. *Дынкин Е. Б.* Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли // Мат. сб. 1952. Т. 30, № 2. С. 349–462.

Статья поступила 20 июля 2007 г.

Ревин Данила Олегович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`revin@math.nsc.ru`