Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2008. Том 49, № 2

УДК 512.54

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С $\mathscr{F}$–СУБНОРМАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Ш. Ли, Н. Ду

Аннотация. Пусть $\mathscr{F}$ — замкнутая относительно подгрупп насыщенная формация. Конечная группа G называется $\mathscr{F}_{pc}$-группой, если каждая подгруппа X в G $\mathscr{F}$-субабнормальна в $\mathscr{F}$-субнормальном замыкании X в G. Пусть $\mathscr{F}_{pc}$ — класс всех $\mathscr{F}_{pc}$-групп. Изучаются свойства $\mathscr{F}_{pc}$-групп и описывается структура $\mathscr{F}_{pc}$-групп в случае, когда $\mathscr{F}$ — класс всех разрешимых π-замкнутых групп, где π — заданное непустое множество простых чисел.

Ключевые слова: $\mathscr{F}$-субнормальная подгруппа, $\mathscr{F}$-проектор, $\mathscr{F}$-накрывающая подгруппа, $\mathscr{F}_{pc}$-группа.

1. Введение. Пусть $\mathscr{F}$ — насыщенная формация и G — конечная группа. Через $\mathscr{N}$ будем обозначать формацию нильпотентных групп. В этой работе изучим некоторые интересные свойства $\mathscr{F}_{pc}$-групп. Нам потребуются следующие определения.

Определение 1 [1]. Максимальная подгруппа M в G называется *$\mathscr{F}$-нормальной* в G, если $G/\operatorname{core}_G(M) \in \mathscr{F}$, где $\operatorname{core}_G(M)$ — ядро M в G, в противном случае M называется *$\mathscr{F}$-абнормальной* в G.

Определение 2 [1]. Подгруппа X в G называется *$\mathscr{F}$-субнормальной* в G, если либо $X = G$, либо существует максимальная цепь

$$X = U_0 < U_1 < \cdots < U_l = G$$

такая, что U_{i-1} $\mathscr{F}$-нормальна в U_i для всех $i = 1, 2, \dots, l$, и *$\mathscr{F}$-субабнормальной* в G, если H $\mathscr{F}$-абнормальна в K, когда $X \le H < \cdot K \le G$, где H максимальна в K.

По определению G одновременно $\mathscr{F}$-субнормальна и $\mathscr{F}$-субабнормальна в G.

Определение 3 [1]. Пусть F — $\mathscr{F}$-подгруппа в G.

(1) F называется *$\mathscr{F}$-проектором*, если FH/H — максимальная $\mathscr{F}$-подгруппа в G/H для всех нормальных подгрупп H в G.

(2) F называется *$\mathscr{F}$-накрывающей подгруппой*, если $F \le H$ влечет $H = H^{\mathscr{F}}F$.

Обозначим через $\operatorname{Proj}_{\mathscr{F}}(G)$ множество всех $\mathscr{F}$-проекторов в G и через $\operatorname{Cov}_{\mathscr{F}}(G)$ — множество всех $\mathscr{F}$-накрывающих подгрупп в G.

(3) Пересечение всех нормальных подгрупп N в G таких, что $G/N \in \mathscr{F}$, называется *$\mathscr{F}$-вычетом* в G и обозначается через $G^{\mathscr{F}}$.

The paper is supported by the NSF of Guangxi Autonomous Region (N 0249001) and the NSF of Fujian Province of China (N S0650036).

Определение 4. Пусть $\Sigma(G)$ — множество всех минимальных дополнений L к $G^{\mathscr{F}}$ в G, т. е. $G = G^{\mathscr{F}}L$, но $G > G^{\mathscr{F}}B$ для любой собственной подгруппы B в L.

В [2] определены $\mathscr{F}_{an}$-группы как конечные группы, в которых каждая подгруппа либо $\mathscr{F}$-субнормальна, либо $\mathscr{F}$-субабнормальна. Группы в $\mathscr{F}_{an}$ изучались в [2–4] для специальной $\mathscr{F}$. В [5] дано обобщение класса $\mathscr{F}_{an}$-групп путем определения $\mathscr{F}_{pc}$-групп.

Определение 5 [5]. Пусть X — подгруппа в G. Через $S_G(X)$ обозначим $\mathscr{F}$-субнормальное замыкание X в G, т. е. пересечение $\mathscr{F}$-субнормальных подгрупп в G, содержащих X.

Определение 6 [5]. Группа G называется *$\mathscr{F}_{pc}$-группой*, если каждая подгруппа X в G $\mathscr{F}$-субабнормальна в $S_G(X)$. Обозначим через $\mathscr{F}_{pc}$ класс всех $\mathscr{F}_{pc}$-групп.

Замечания. (1) $\mathscr{F}_{an} \subseteq \mathscr{F}_{pc}$.

(2) Для двух насыщенных формаций $\mathscr{F}$ и $\mathscr{H}$ таких, что $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{H}$, вообще говоря, имеем $\mathscr{F}_{pc} \nsubseteq \mathscr{H}_{pc}$.

(3) Понятие $\mathscr{F}_{pc}$-групп охватывает много интересных классов групп. Например, класс $\mathscr{N}_{pc}$ состоит из групп G, у которых каждая подгруппа X абнормальна в субнормальном замыкании X в G (см. п. 3). С другой стороны, в [6] введено следующее понятие: подгруппа X в G называется NE-*подгруппой*, если $N_G(X) \cap X^G = X$, где X^G — нормальное замыкание X в G. Группы, у которых подгруппы суть NE-подгруппы, принадлежат $\mathscr{N}_{pc}$, и в [7] показано, что такие подгруппы совпадают с разрешимыми T-группами (группами, в которых нормальность транзитивна). Поэтому $\mathscr{N}_{pc}$-группы являются обобщением разрешимых T-групп. Другой пример, когда $\mathscr{F}$ — класс p-нильпотентных групп, изучен в [5].

2. Основные результаты.

Лемма 1 [2]. *Пусть $\mathscr{F}$ — замкнутая относительно подгрупп насыщенная формация. Тогда*

(1) *если H — $\mathscr{F}$-субнормальная подгруппа в G и $H \leq K \leq G$, то H также $\mathscr{F}$-субнормальна в K;*

(2) *если H $\mathscr{F}$-субнормальна в G и $N \lhd G$, то HN/N $\mathscr{F}$-субнормальна в HN/N.*

Лемма 2 [8]. *Пусть $\mathscr{F}$ — насыщенная формация и $F \in \Sigma(G)$. Тогда*

(1) *F — $\mathscr{F}$-подгруппа в G;*

(2) *$F \in \mathrm{Cov}_{\mathscr{F}}(G)$ тогда и только тогда, когда F $\mathscr{F}$-субабнормальна в G.*

Лемма 3. *Пусть $\mathscr{F}$ — насыщенная формация. Если $\Sigma(G) \subseteq \mathrm{Proj}_{\mathscr{F}}(G)$, то $\mathrm{Proj}_{\mathscr{F}}(G) = \Sigma(G) = \mathrm{Cov}_{\mathscr{F}}(G)$.*

Доказательство. Известно, что $G = FG^{\mathscr{F}}$ для любой $F \in \mathrm{Proj}_{\mathscr{F}}(G)$, так что F содержит минимальное дополнение к $G^{\mathscr{F}}$ в G, пусть F_1. Согласно предположениям $F_1 \in \mathrm{Proj}_{\mathscr{F}}(G)$. В частности, $F = F_1$, откуда $\mathrm{Proj}_{\mathscr{F}}(G) = \Sigma(G)$. Поскольку $\mathrm{Cov}_{\mathscr{F}}(G) \subseteq \mathrm{Proj}_{\mathscr{F}}(G)$, для завершения доказательства леммы достаточно показать, что $\mathrm{Proj}_{\mathscr{F}}(G) \subseteq \mathrm{Cov}_{\mathscr{F}}(G)$.

Пусть F — элемент из $\mathrm{Proj}_{\mathscr{F}}(G)$. Надо доказать, что $H = H^{\mathscr{F}}F$ при $F \leq H \leq G$. Прежде всего отметим, что $G = G^{\mathscr{F}}F = G^{\mathscr{F}}H$. Отсюда $H/H \cap G^{\mathscr{F}} \cong G/G^{\mathscr{F}} \in \mathscr{F}$, поэтому $H^{\mathscr{F}} \leq G^{\mathscr{F}} \cap H$. Пусть K — минимальное дополнение к $H^{\mathscr{F}}$ в H. Тогда $K \in \mathscr{F}$ по лемме 2(1) и $G = HG^{\mathscr{F}} = (KH^{\mathscr{F}})G^{\mathscr{F}} = KG^{\mathscr{F}}$.

Следовательно, есть минимальное дополнение $Y \leq K$ к $G^{\mathscr{F}}$ в G. Согласно предположениям Y принадлежит $\mathrm{Proj}_{\mathscr{F}}(G)$. Тем самым $K = Y$ и, значит, K — минимальное дополнение к $G^{\mathscr{F}}$ в G, так что $K \cap G^{\mathscr{F}} \leq \Phi(K)$.

Покажем, что $\Phi(K)H^{\mathscr{F}}/H^{\mathscr{F}} \subseteq \Phi(H/H^{\mathscr{F}})$. Действительно, если $H = H^{\mathscr{F}}$, то $K = 1$ и утверждение тривиально. Предположим, что $H^{\mathscr{F}} < H$. Пусть M — максимальная подгруппа в H такая, что M содержит $H^{\mathscr{F}}$. Положим $K_0 = K \cap M$. Тогда $M = M \cap H^{\mathscr{F}}K = H^{\mathscr{F}}(M \cap K) = H^{\mathscr{F}}K_0$. Если $K_0 < K_1 < K$ для некоторой подгруппы K_1 в H, то $M = K_1H^{\mathscr{F}}$ и тем самым $K_1 = K_1 \cap K_0H^{\mathscr{F}} = K_0(K_1 \cap H^{\mathscr{F}}) \leq K \cap M = K_0$; противоречие. Отсюда K_0 максимальна в K. Итак, $\Phi(K) \leq K_0 \leq M$, следовательно, $\Phi(K)H^{\mathscr{F}}/H^{\mathscr{F}}$ содержится в каждой максимальной подгруппе $H/H^{\mathscr{F}}$. Утверждение доказано.

Имеем

$$
\begin{aligned}
H \cap G^{\mathscr{F}}/H^{\mathscr{F}} &= (KH^{\mathscr{F}}) \cap G^{\mathscr{F}}/H^{\mathscr{F}} \\
&= H^{\mathscr{F}}(K \cap G^{\mathscr{F}})/H^{\mathscr{F}} \leq \Phi(K)H^{\mathscr{F}}/H^{\mathscr{F}} \leq \Phi(H/H^{\mathscr{F}}),
\end{aligned}
$$

поэтому

$$
\begin{aligned}
H/H^{\mathscr{F}} &= (FG^{\mathscr{F}}) \cap H/H^{\mathscr{F}} = F(G^{\mathscr{F}} \cap H)/H^{\mathscr{F}} \\
&= FH^{\mathscr{F}}/H^{\mathscr{F}} \cdot G^{\mathscr{F}} \cap H/H^{\mathscr{F}} \leq FH^{\mathscr{F}}/H^{\mathscr{F}} \cdot \Phi(H/H^{\mathscr{F}}) \leq H/H^{\mathscr{F}},
\end{aligned}
$$

откуда $H = FH^{\mathscr{F}}$, что и требовалось. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $\mathscr{F}$ — замкнутая относительно подгрупп насыщенная формация. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $G \in \mathscr{F}_{pc}$;

(2) *любая подгруппа $X \leq G$ $\mathscr{F}$-субабнормальна в $S_G(X)$;*

(3) *любая $\mathscr{F}$-подгруппа $F \leq G$ является $\mathscr{F}$-субабнормальной в $S_G(F)$.*

Доказательство. (1)⇒(2). Если $G \in \mathscr{F}_{pc}$, то (2) выполнено по определению.

(2)⇒(3). Тривиально.

(3)⇒(1). Надо показать, что каждая подгруппа X в G $\mathscr{F}$-субабнормальна в $S_G(X)$. Поскольку $\mathscr{F}$ замкнута относительно подгрупп, то $S_G(X)^{\mathscr{F}}X$ $\mathscr{F}$-субнормальна в $S_G(X)$, а значит, и в G. Следовательно, $S_G(X)^{\mathscr{F}}X = S_G(X)$. Пусть $F \leq X$ — минимальное дополнение к $S_G(X)^{\mathscr{F}}$ в $S_G(X)$. Тогда $F \in \mathscr{F}$ и $S_G(F) \leq S_G(X)$. Докажем теперь, что $S_G(F) = S_G(X)$.

Предположим, что это не так. Тогда $S_G(F) < S_G(X)$. По лемме 1 $S_G(F)$ $\mathscr{F}$-субнормальна в $S_G(X)$. Тем самым существует цепочка подгрупп

$$
S_G(F) = S_G(X)_r < S_G(X)_{r-1} < \dots < S_G(X)_1 < S_G(X)_0 = S_G(X)
$$

такая, что $S_G(X)_i$ $\mathscr{F}$-нормальна в $S_G(X)_{i-1}$ для $i = 1, \dots, r$. В частности, $S_G(X)/\operatorname{core}_{S_G(X)}(S_G(X)_1) \in \mathscr{F}$, откуда $S_G(X)^{\mathscr{F}} \leq S_G(X)_1$. Следовательно, $S_G(X) = S_G(X)^{\mathscr{F}}F \leq S_G(X)_1 < S_G(X)$; противоречие. Тем самым $S_G(F) = S_G(X)$, что и требовалось.

По условию F $\mathscr{F}$-субабнормальна в $S_G(F)$. Значит, F $\mathscr{F}$-субабнормальна в $S_G(X)$. Более того, ввиду легко проверяемого по определению $\mathscr{F}$-субабнормальной подгруппы соотношения $F \leq X \leq S_G(X)$ находим, что X также $\mathscr{F}$-субанормальна в $S_G(X)$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{F}$ — замкнутая относительно подгрупп насыщенная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $G \in \mathscr{F}_{pc}$;

(2) *каждая $\mathscr{F}$-подгруппа F в G является $\mathscr{F}$-накрывающей подгруппой в $S_G(F)$;*

(3) *каждая $\mathscr{F}$-подгруппа F в G является $\mathscr{F}$-проектором в $S_G(F)$.*

Доказательство. (1)⇒(2). Так как $G \in \mathscr{F}_{pc}$, каждая $\mathscr{F}$-подгруппа F в G $\mathscr{F}$-субабнормальна в $S_G(F)$. По лемме 2(2) F является $\mathscr{F}$-накрывающей подгруппой в $S_G(F)$. Так что (2) верно.

(2)⇒(3). Поскольку $\mathscr{F}$-накрывающая подгруппа должна быть $\mathscr{F}$-проектором, (3) выполнено.

(3)⇒ (1). Пусть F — $\mathscr{F}$-подгруппа в G. По условию F является $\mathscr{F}$-проектором в $S_G(F)$. Поэтому $S_G(F) = S_G(F)^{\mathscr{F}}F$. Для любого минимального дополнения F_1 к $S_G(F)^{\mathscr{F}}$ в $S_G(F)$ имеем $F_1 \in \mathscr{F}$ ввиду леммы 2(1) и $S_G(F) = S_G(F)^{\mathscr{F}}F_1$. Рассуждая, как в доказательстве леммы 4, находим, что $S_G(F)$ — $\mathscr{F}$-субнормальное замыкание F_1 в G.

Вновь обращаясь к условию, получаем, что F_1 является $\mathscr{F}$-проектором в $S_G(F)$. Поэтому $\Sigma(S_G(F)) \subseteq \mathrm{Proj}_{\mathscr{F}}(S_G(F))$. По лемме 3 получаем, что

$$\mathrm{Proj}_{\mathscr{F}}(S_G(F)) = \Sigma(S_G(F)) = \mathrm{Cov}_{\mathscr{F}}(S_G(F)).$$

В частности, F — $\mathscr{F}$-накрывающая подгруппа в $S_G(F)$. Значит, F $\mathscr{F}$-субанормальна в $S_G(F)$ по лемме 2. Применение леммы 4 приводит к тому, что $G \in \mathscr{F}_{pc}$.

В доказательстве леммы 4 мы проверили утверждение: если H — $\mathscr{F}$-субнормальная подгруппа в G и F — минимальное дополнение к $H^{\mathscr{F}}$ в H, то H — $\mathscr{F}$-субнормальное замыкание F в G. Этот факт мы использовали также в доказательстве теоремы 1. Используя его, теорему 1 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 2 [5, теорема 3.2]. *Пусть $\mathscr{F}$ — замкнутая относительно подгрупп насыщенная формация. Тогда равносильны следующие утверждения:*

(1) *G является $\mathscr{F}_{pc}$-группой;*

(2) $\mathrm{Proj}_{\mathscr{F}}(H) = \Sigma(H)$ *для любой $\mathscr{F}$-субнормальной подгруппы H в G;*

(3) $\mathrm{Cov}_{\mathscr{F}}(H) = \Sigma(H)$ *для любой $\mathscr{F}$-субнормальной подгруппы H в G.*

Следствие 1. *Пусть $\mathscr{F}$ — замкнутая относительно подгрупп насыщенная формация. Если $G \in \mathscr{F}_{pc}$ и $N \triangleleft G$, то $G/N \in \mathscr{F}_{pc}$.*

Доказательство. Утверждение является прямым следствием определения 6, так как для любой подгруппы X/N в G/N имеем $S_{G/N}(X/N) = S_G(X)/N$.

Докажем утверждение, неверное для не-$\mathscr{F}_{pc}$-групп.

Следствие 2. *Пусть $\mathscr{F}$ — замкнутая относительно подгрупп насыщенная формация, содержащая $\mathscr{N}$, и пусть $G \in \mathscr{F}_{pc}$. Тогда каждая субнормальная подгруппа в G $\mathscr{F}$-субнормальна.*

Доказательство. Пусть $M \leq G$ субнормальна. Так как согласно определению все $\mathscr{F}$-субнормальные подгруппы G принадлежат также $\mathscr{F}_{pc}$, достаточно рассмотреть случай, когда M нормальна в G. По следствию 1 $G/M \in \mathscr{F}_{pc}$. Покажем, что тривиальная подгруппа M/M $\mathscr{F}$-субнормальна в G/M. Действительно, если $\mathscr{F}$-субнормальное замыкание $S_{G/M}(M/M)$ является собственной подгруппой в G/M, то по индукции M/M $\mathscr{F}$-субнормальна в $S_{G/M}(M/M)$, а значит, и в G/M. Допустим тем самым, что $S_{G/M}(M/M) = G/M$. По определению $\mathscr{F}_{pc}$-группы M/M является $\mathscr{F}$-субабнормальной в G/M. С другой стороны, найдется подгруппа P/M простого порядка в G/M. Тогда P/M принадлежит $\mathscr{F}$, ибо $\mathscr{F}$ по предположению содержит все нильпотентные группы, откуда M/M $\mathscr{F}$-нормальна в P/M, но M/M не может быть $\mathscr{F}$-субабнормальной в G/M; противоречие. Значит, M/M $\mathscr{F}$-субнормальна в G/M, откуда немедленно вытекает, что M $\mathscr{F}$-субнормальна в G. Следствие доказано.

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{F}$ — замкнутая относительно подгрупп насыщенная формация, содержащая $\mathscr{N}$. Тогда $\mathscr{F}_{pc}$ разрешима в том и только в том случае, если $\mathscr{F}$ разрешима.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{F}_{pc}$ разрешима. Для любой $G \in \mathscr{F}$ каждая подгруппа H в G $\mathscr{F}$-субнормальна в G. В частности, G принадлежит $\mathscr{F}_{pc}$, так что G разрешима.

Обратно, допустим, что $\mathscr{F}$ разрешима. Предположим, что $G \in \mathscr{F}_{pc}$. Пусть $X = 1$. Так как по предположению $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{N}$, то X не $\mathscr{F}$-субабнормальна в G и поэтому $S_G(X) \leq M$ для некоторой $\mathscr{F}$-субнормальной максимальной подгруппы M в G. По лемме 4 $M \in \mathscr{F}_{pc}$, тем самым по индукции M разрешима. Поскольку $\mathscr{F}$ разрешима и $G/\operatorname{core}_G(M) \in \mathscr{F}$, то G разрешима. Полученное противоречие завершает доказательство.

Далее π — заданное множество простых чисел и $\mathscr{F}$ — класс разрешимых групп, содержащих нормальную холлову π-подгруппу. Такая группа называется *π-замкнутой.* Особый случай, когда $\pi' = \{p\}$ (класс p-нильпотентных групп), изучен в [5]. Здесь он будет рассмотрен как следствие.

Лемма 5. *Пусть $G \in \mathscr{F}_{pc}$ и $G \notin \mathscr{F}$. Тогда $O_{\pi'}(G) > 1$.*

Доказательство. Допустим противное, и пусть G — контрпример минимального порядка. Завершим доказательство проверкой следующих утверждений.

(i) Каждая собственная нормальная подгруппа H в G π-замкнута.

Действительно, по следствию 2 H является $\mathscr{F}$-субнормальной подгруппой в G, поэтому $H \in \mathscr{F}_{pc}$. Если $H \notin \mathscr{F}$, то H удовлетворяет условию. Ввиду выбора G утверждение леммы выполнено для H. Тем самым $O_{\pi'}(H) \geq 1$, откуда $O_{\pi'}(G) \geq O_{\pi'}(H) > 1$; противоречие. Следовательно, $H \in \mathscr{F}$, так что H π-замкнута.

(ii) $G^{\mathscr{F}}$ π-замкнута.

По теореме 3 G разрешима, а значит, имеет максимальную нормальную подгруппу M. По следствию 2 M является $\mathscr{F}$-нормальной в G. Следовательно, $G^{\mathscr{F}}$ содержится в M. Применяя утверждение (i), заключаем, что $G^{\mathscr{F}}$ π-замкнута.

(iii) $G/G^{\mathscr{F}}$ — π-группа.

Если это не так, то $G/G^{\mathscr{F}}$ π-замкнута. Тогда G содержит собственную нормальную подгруппу K, содержащую $G^{\mathscr{F}}$, так что порядок G/K является π'-числом. Согласно (i) K π-замкнута. Отсюда G также π-замкнута, тем самым $G \in \mathscr{F}$; противоречие.

(iv) Противоречие.

Пусть теперь $G/G^{\mathscr{F}}$ — π-группа. Тогда $G^{\mathscr{F}}$ не будет π-группой, ибо в ином случае G должна быть π-группой, откуда $G \in \mathscr{F}$; противоречие с условием. Из предыдущего вытекает, что $G^{\mathscr{F}}$ π-замкнута, следовательно, в ней есть нормальная холлова π-подгруппа U. По теореме Шура — Цассенхауза $G^{\mathscr{F}}$ содержит холлову π'-подгруппу $C \neq 1$ и все такие холловы π'-подгруппы сопряженны в

$G^{\mathscr{F}}$. Ввиду аргумента Фраттини имеем $G = G^{\mathscr{F}} N_G(C)$. Поэтому C — холлова π'-подгруппа в G. Разумеется, C также холлова π'-подгруппа в $N_G(C)$. Применяя к $N_G(C)$ теорему Шура — Цассенхауза, получим, что $N_G(C)$ допускает холлову π-подгруппу P. Тогда $G = G^{\mathscr{F}} N_G(C) = G^{\mathscr{F}}(CP) = G^{\mathscr{F}} P$. Но в таком случае мы находим минимальное дополнение F к $G^{\mathscr{F}}$ такое, что $F \leq P$. По теореме 1 F является $\mathscr{F}$-проектором в G. В частности, F — максимальная $\mathscr{F}$-подгруппа в G, а именно максимальная π-замкнутая подгруппа в G. Но $F \leq P$ и P — π-подгруппа, так что $F = P$. Следовательно, P должна быть холловой π-подгруппой в G. Отсюда так как $G^{\mathscr{F}}$ π-замкнута, нормальная холлова π-подгруппа U в $G^{\mathscr{F}}$ содержится в P. Поэтому $G = G^{\mathscr{F}} P = (CU)P = CP = N_G(C)$. Тем самым получаем $O_{\pi'}(G) = C > 1$; противоречие.

Теорема 4. *Если $G \in \mathscr{F}_{pc}$, то G разрешима и G — полупрямое произведение $G = [G^{\mathscr{F}}]F$, где $G^{\mathscr{F}}$ — π'-группа и F — $\mathscr{F}$-проектор в G.*

Доказательство. Согласно следствию 1 $G/O_{\pi'}(G) \in \mathscr{F}_{pc}$. Из леммы 5 вытекает, что $G/O_{\pi'}(G)$ принадлежит $\mathscr{F}$. Поэтому $G^{\mathscr{F}} \leq O_{\pi'}(G)$. Так как $\mathscr{F}$ разрешима, G разрешима по теореме 3, в частности, $G^{\mathscr{F}}$ — разрешимая группа, порядок которой является π'-числом.

Поскольку $G/G^{\mathscr{F}}$ π-замкнута и было доказано, что $G^{\mathscr{F}}$ — π'-группа, $G/G^{\mathscr{F}}$ допускает нормальную холлову π-подгруппу $H/G^{\mathscr{F}}$ такую, что $H = PG^{\mathscr{F}}$, где P — холлова π-подгруппа в H. Легко увидеть, что P также холлова π-подгруппа в G. Положим $F = N_G(P)$. Тогда $G = G^{\mathscr{F}} F$ по аргументу Фраттини. Запишем $T = G^{\mathscr{F}} \cap F$. Тогда T — π'-подгруппа и подгруппа $PT = P \times T$. Отсюда $T = 1$. Предположим, что $T > 1$. Вначале рассмотрим случай, когда P $\mathscr{F}$-субнормальна в PT. Затем заметим, что $H \lhd G$, тем самым H $\mathscr{F}$-субнормальна в G по следствию 2, следовательно, $H \in \mathscr{F}_{pc}$. Итак, $T \not\subseteq S_G(P)$, поэтому $S_G(P) < H$. Отсюда вытекает, что можно найти $\mathscr{F}$-нормальную максимальную подгруппу M в H, содержащую $S_G(P)$, в частности, $H^{\mathscr{F}} \leq M$. Кроме того, так как $\mathscr{F}$ замкнута относительно подгрупп, имеем $H^{\mathscr{F}} \leq G^{\mathscr{F}}$. Из этого следует, что $PH^{\mathscr{F}} \leq S_G(P)H^{\mathscr{F}} \leq M < H = PG^{\mathscr{F}}$, откуда $H^{\mathscr{F}} < G^{\mathscr{F}}$. С другой стороны, $H^{\mathscr{F}}$ — характеристическая подгруппа в H и $H \lhd G$, поэтому $H^{\mathscr{F}}$ нормальна в G. Заметим теперь, что $H/H^{\mathscr{F}}$ π-замкнута и G/H — π'-группа по определению H. Следовательно, $G/H^{\mathscr{F}}$ π-замкнута. Тогда $G/H^{\mathscr{F}} \in \mathscr{F}$. Значит, $G^{\mathscr{F}} \leq H^{\mathscr{F}}$; противоречие с тем, что $H^{\mathscr{F}} < G^{\mathscr{F}}$. Отсюда $T = 1$.

Итак, имеем $G = G^{\mathscr{F}} N_G(P)$ и $N_G(P)$ — минимальное дополнение к $G^{\mathscr{F}}$ в G, тем самым $N_G(P)$ — $\mathscr{F}$-проектор G. Теорема доказана.

3. Открытый вопрос. $\mathscr{N}_{pc}$-группа G — разрешимая группа со следующим свойством: каждая подгруппа X абнормальна в субнормальном замыкании X в G. Очевидно, что этот класс содержит все разрешимые T-группы (группы, в которых нормальность транзитивна). Поставим следующий

Вопрос. *Описать структуру $\mathscr{N}_{pc}$-групп.*

Группы G, где каждая подгруппа X в G абнормальна в нормальном замыкании в G, изучались в [7].

4. Благодарности. Авторы признательны рецензенту за его/ее содержательную рецензию.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluable groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.

2. *Forster P.* Finite groups all of whose subgroups are $\mathscr{F}$-subnormal or $\mathscr{F}$-subabnormal // J. Algebra. 1986. V. 103. P. 285–293.
3. *Bauman S., Ebter G.* A note on subnormal and abnormal chains // J. Algebra. 1975. V. 36. P. 287–293.
4. *Семенчук В. Н.* Строение конечных групп с $\mathscr{F}$-абнормальными или $\mathscr{F}$-субнормальными подгруппами // Вопросы алгебры. Минск: Изд-во «Университетское», 1985. Вып. 2. С. 50–55.
5. *Li S.* $\mathscr{F}$-subnormal and $\mathscr{F}$-subabnormal chains in finite groups // Science In China. 1998. V. 41, N 11. P. 1121–1127.
6. *Li S.* On minimal non-PE-groups // J. Pure Appl. Algebra. 1998. V. 132. P. 149–158.
7. *Li Y.* Finite groups with NE-subgroups // J. Group Theory. 2006. V. 9, N 1. P. 49–58.
8. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

Статья поступила 21 июня 2006 г., окончательный вариант — 20 октября 2006 г.

Shirong Li (Ли Шижун)
Department of mathematics, Guangxi University, Nanning, Guangxi, China

Ni Du (Ду Ни) is the corresponding author
College of mathematics, Xiamen University, Xiamen, Fujian, China
qiaodu@xmu.edu.cn