*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2008. Том 49, № 2*

*УДК 512.544*

# ИНВОЛЮТИВНАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ ГРУППЫ И СКРУЧЕННЫЕ ПОДМНОЖЕСТВА С МАЛЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ИНВОЛЮЦИЙ

**Д. В. Вепринцев, А. Л. Мыльников**

**Аннотация.** Подмножество $K$ из группы $C$ называется скрученным подмножеством, если $1 \in K$ и для любых элементов $x, y \in K$ элемент $xy^{-1}x$ принадлежит $K$. Исследуется и обобщается с помощью понятия скрученного подмножества понятие инволютивной декомпозиции группы. Говорят, что группа *допускает инволютивную декомпозицию*, если в ней существует такая инволюция, что она представима в виде произведения централизатора этой инволюции и множества инвертируемых этой инволюцией элементов. Кроме того, в работе изучаются скрученные подмножества, содержащие не более одной инволюции. Доказывается, что если конечное скрученное подмножество вообще не содержит инволюций, то оно порождает подгруппу нечетного порядка.

**Ключевые слова:** инволютивная декомпозиция группы, скрученное подмножество, скрученная подгруппа.

В работе [1] введено понятие инволютивной декомпозиции группы.

Определение 1. Говорят, что *группа $G$ допускает инволютивную декомпозицию*, если существует такой инволютивный автоморфизм $\varphi$ группы $G$, что $G = I(\varphi)C_G(\varphi)$, где $I(\varphi) = \{g \in G : \varphi(g) = g^{-1}\}$, $C_G(\varphi) = \{g \in G : \varphi(g) = g\}$.

В [1] показано (теоремы 5.1, 5.2), что любая группа $G$ нечетного порядка, обладающая инволютивным автоморфизмом $\varphi$, допускает инволютивную декомпозицию, причем $I(\varphi) = \{g^{-1}\varphi(g) : g \in G\}$.

Введем обозначение $D(\varphi) := \{g^{-1}\varphi(g) : g \in G\}$. Всегда справедливо включение $D(\varphi) \subseteq I(\varphi)$ (см. ниже лемму 2(2)). Однако обратное включение может не иметь места, как показывает следующий

Пример. Пусть $G = A \times \langle w \rangle$, где $A$ — абелева подгруппа нечетного порядка, $|w| = 2$. Группа $G$ обладает инволютивным автоморфизмом $\varphi$, который действует следующим образом: $\varphi(g) = g^{-1}$ для любого элемента $g$ из $G$. Нетрудно видеть, что $D(\varphi) = A$ и $I(\varphi) = G$.

В силу примера 1 естественно провести разделение случаев, когда группа $G$ допускает разложения $G = I(\varphi)C_G(\varphi)$ и $G = D(\varphi)C_G(\varphi)$. В первом случае будем говорить, что *группа $G$ допускает слабую инволютивную декомпозицию*, а во-втором — соответственно *сильную*. Понятно, что группа, допускающая сильную инволютивную декомпозицию, допускает и слабую. Таким образом, в [1] было доказано, что *группа нечетного порядка, обладающая инволютивным автоморфизмом, допускает сильную инволютивную декомпозицию.*

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта СФУ по НМ проекту № 45.2007.

В настоящей работе найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы группа, обладающая инволютивным автоморфизмом, допускала сильную инволютивную декомпозицию. Справедлива следующая

**Теорема 1.** *Пусть $G$ — конечная группа, обладающая инволютивным автоморфизмом $\varphi$, $C_G(\varphi) = \{g \in G : \varphi(g) = g\}$ и $D(\varphi) = \{g^{-1}\varphi(g) : g \in G\}$. Следующие условия эквивалентны:*
(1) $C_G(\varphi) \cap D(\varphi) = 1$;
(2) $D(\varphi)$ *не содержит инволюций;*
(3) $G = D(\varphi)C_G(\varphi)$.

Далее, следуя [2], приведем определение скрученного подмножества.

Определение 2. Подмножество $K$ группы $G$ называется *скрученным подмножеством*, если $1 \in K$ и $xy^{-1}x \in K$ для любых элементов $x, y$ из $K$.

Примерами скрученных подмножеств являются ранее рассмотренные множества $I(\varphi)$ и $D(\varphi)$ (см. ниже лемму 1.2(1)).

В настоящей работе с помощью понятия скрученного подмножества вводится понятие $Tw$-декомпозиции группы, которое обобщает понятия слабой и сильной инволютивных декомпозиций группы.

Определение 3. Будем говорить, что *группа $G$ допускает $Tw$-декомпозицию*, если существует такое скрученное подмножество $K$ из $G$, что $G = KC_G(w)$ для некоторой инволюции $w$ из $G$.

Заметим, что если группа $G$ допускает слабую (сильную) инволютивную декомпозицию при помощи некоторого инволютивного автоморфизма $\varphi$, то группа $G^* := G\langle\varphi\rangle$ также допускает слабую (сильную) инволютивную декомпозицию при помощи автоморфизма $\varphi$. Таким образом, вместо группы $G$ всегда можно рассматривать группу $G^*$. Поскольку $D(\varphi), I(\varphi)$ — скрученные подмножества группы $G$, то слабая (сильная) инволютивная декомпозиция группы $G^*$ при помощи $\varphi$ является $Tw$-декомпозицией, где в качестве $w$ выступает $\varphi$. Таким образом, понятие $Tw$-декомпозиции действительно обобщает понятие инволютивной декомпозиции.

В этой работе помимо групп, допускающих слабую, сильную декомпозиции и $Tw$-декомпозицию, исследуются группы, порожденные скрученными подмножествами с малым количеством инволюций. Прилагательное «малое» в данном случае означает либо полное отсутствие инволюций в порождающем группу скрученном подмножестве, либо наличие в нем лишь одной инволюции.

Получен следующий результат о группах, порожденных скрученными подмножествами без инволюций.

**Теорема 2.** *Пусть $G$ — конечная группа и $K$ — скрученное подмножество из $G$ такое, что $G = \langle K\rangle$. Допустим, что $K$ не содержит инволюций. Тогда группа $G$ имеет нечетный порядок.*

Отметим, что общая идея доказательства данного утверждения принадлежит В. В. Беляеву, а его детальное изложение — авторам.

Далее, при наличии в порождающем группу скрученном подмножестве только одной инволюции и еще при некоторых дополнительных условиях удалось показать, что такая группа допускает $Tw$-декомпозицию. А если такая группа еще и проста, то показано, что она содержит подгруппу определенного вида. Но до сих пор неясно, могут ли вообще существовать такие простые группы.

Итак, приведем точную формулировку результата.

**Теорема 3.** *Пусть $G$ — периодическая группа и $K$ — скрученное подмножество из $G$, содержащее ровно одну инволюцию $w$, причем $G = \langle K \rangle$ и $G \neq K$. Допустим, что $\operatorname{Ker} K = \{x \in K : xK = K\} = 1$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$G = KC_G(w)$;*

(2) *если $G$ — конечная простая группа, то подмножество $K$ содержит такой элемент $x$ нечетного порядка, что $w^x \neq w$, $w^x w = ww^x$, $w^{x^2} w = ww^{x^2}$ и $x^3 \in C_G(w)$.*

В заключение оба автора выражают глубокую благодарность профессору В. В. Беляеву, под руководством которого была выполнена эта работа.

**1. Известные результаты.** В данном пункте для удобства читателя приведены некоторые известные утверждения, используемые при доказательстве основных результатов.

**Лемма 1** [лемма 2.1]. *Пусть $G$ — группа и $K$ — скрученное подмножество из $G$. Тогда для любого $x$ из $K$ подгруппа $\langle x \rangle$ содержится в $K$.*

Следующее утверждение непосредственно вытекает из соответствующих определений.

**Лемма 2.** *Пусть $G$ — группа, $\varphi$ — инволютивный автоморфизм группы $G$, $I(\varphi) = \{x \in G : \varphi(x) = x^{-1}\}$ и $D(\varphi) = \{g^{-1}\varphi(g) : g \in G\}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$I(\varphi)$, $D(\varphi)$ — скрученные подмножества группы $G$, причем $D(\varphi) \subseteq I(\varphi)$;*

(2) *$\langle D(\varphi) \rangle$ — нормальная подгруппа в $G$;*

(3) *если $G$ — конечная группа, то $|D(\varphi)| = \frac{|G|}{|C_G(\varphi)|}$.*

Положим $\operatorname{Ker}(K) := \{x \in K : xK = K\}$. Леммы 3, 4 следуют из результатов, полученных в работах [3, 4].

**Лемма 3.** *Пусть $G$ — группа и $K$ — скрученное подмножество из $G$ такое, что $G = \langle K \rangle$. Тогда подмножество $\operatorname{Ker}(K)$ является нормальной подгруппой в $G$.*

**Лемма 4.** *Пусть $G$ — группа и $K$ — скрученное подмножество из $G$, причем $G = \langle K \rangle$ и $\operatorname{Ker}(K) = 1$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *для произвольного элемента $x \in G$ существует единственный элемент $y \in G$ такой, что $xK = Ky$;*

(2) *если подмножество $K$ содержит элемент порядка $> 2$, то отображение $\varphi : x \mapsto y$ является инволютивным автоморфизмом группы $G$, причем $D(\varphi) \subseteq K \subseteq I(\varphi)$.*

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится $Z^*$-теорема Глаубермана. Приведем одну из эквивалентных формулировок этой теоремы.

**Лемма 5.** *Пусть $G$ — конечная группа и $w$ — некоторая инволюция из $G$ такая, что для любого элемента $g$ из $G$ элемент $g^{-1}wgw$ имеет нечетный порядок. Тогда $\langle g^{-1}wgw : g \in G \rangle \leq O(G)$.*

**2. Сильная инволютивная декомпозиция группы.** В данном пункте приводится доказательство теоремы 1.

Покажем, что из (1) следует (2). Допустим противное, что подмножество $D(\varphi)$ содержит инволюцию $w$. Тогда $w = x^{-1}\varphi(x)$ для некоторого элемента $x$

из $G$, откуда $\varphi(w) = \varphi(x^{-1}\varphi(x)) = (\varphi(x))^{-1}x = w^{-1} = w$. Значит, $w \in C_G(\varphi)$, т. е. $C_G(\varphi) \cap D(\varphi) \neq 1$, что противоречит условию.

Покажем, что из (2) следует (3). Так как согласно лемме 2(1) $D(\varphi)$ — скрученное подмножество, из леммы 1 вытекает, что любой элемент из $D(\varphi)$ имеет нечетный порядок.

Пусть $G^* = G\langle\varphi\rangle$ и $g$ — произвольный элемент группы $G$. Тогда $|\varphi\varphi^g| = 2n+1$ для некоторого целого числа $n$. Значит, согласно свойствам групп диэдра, существует такой элемент $h$ из $\langle\varphi\varphi^g\rangle$, что $\varphi^g = \varphi^{\varphi^h}$. Следовательно, $\varphi^h g^{-1} \in C_{G^*}(\varphi)$, т. е. $g^{-1} = \varphi^h c$ для некоторого элемента $c$ из $C_{G^*}(\varphi)$.

Понятно, что $C_{G^*}(\varphi) = C_G(\varphi) \times \langle\varphi\rangle$. Так как $g^{-1} \in G$, то $c = \varphi c_1$, где $c_1$ — некоторый элемент из $C_G(\varphi)$. Следовательно, $g^{-1} = (\varphi^h\varphi)c_1$, значит, ввиду произвольности элемента $g$ справедливо $G = D(\varphi)C_G(\varphi)$.

Покажем, что из (3) следует (1).

Поскольку $G = D(\varphi)C_G(\varphi)$, то $D(\varphi)$ содержит представитель каждого левого смежного класса из $G/C_G(\varphi)$. По лемме 2(3) $|D(\varphi)| = |G : C_G(\varphi)|$. Значит, в $D(\varphi)$ содержится ровно по одному представителю от каждого левого смежного класса из $G/C_G(\varphi)$, откуда вытекает, что $C_G(\varphi) \cap D(\varphi) = 1$. Теорема 1 доказана.

**3. Скрученные подмножества без инволюций.** В данном пункте приводится доказательство теоремы 2.

Пусть $G$ — минимальный контрпример. Из леммы 1 вытекает, что любой элемент из $K$ имеет нечетный порядок.

Анализ ситуации разбивается на ряд этапов.

**(1)** $\mathrm{Ker}(K) = 1$. Допустим противное, что $\mathrm{Ker}(K) \neq 1$. По лемме 3 $\mathrm{Ker}(K)$ является нормальной подгруппой в $G$.

Рассмотрим $\overline{G} := G/\mathrm{Ker}(K)$. Пусть $\overline{K}$ — образ подмножества $K$ в группе $\overline{G}$. Понятно, что $\overline{G} = \langle\overline{K}\rangle$ и для любого элемента $\bar{x}$ из $\overline{K}$ число $|\bar{x}|$ нечетно. Тогда в силу минимальности контрпримера $G$ получаем, что $\overline{G}$ имеет нечетный порядок. Ясно, что $\mathrm{Ker}(K)$ имеет нечетный порядок. Следовательно, группа $G$ имеет нечетный порядок, что противоречит выбору $G$.

**(2)** *Группа $G$ обладает таким инволютивным автоморфизмом $\varphi$, что для любого элемента $z$ из $K$ справедливо $\varphi(z) = z^{-1}$.*

Вытекает из п. (1) и леммы 4.

**(3)** $K = \{g^{-1}\varphi(g) : g \in G\}$. Пусть $N := \{g^{-1}\varphi(g) : g \in G\}$. По лемме 4(2) $N \subseteq K$. Покажем, что $K \subseteq N$. Пусть $x \in K$. Тогда $|x| = 2t+1$ для некоторого целого числа $t$. Следовательно, ввиду того, что $\varphi(x) = x^{-1}$, имеем $x = x^{t+1}\varphi(x^{-(t+1)}) \in N$. Этап (3) доказан.

**(4)** *Группы $G$ не существует.*

Пусть $G^* := G\langle\varphi\rangle$. Ввиду (3) нетрудно видеть, что $K = \{(g^*)^{-1}(g^*)^{\varphi} : g^* \in G^*\}$. Значит, для любого элемента $g^*$ из $G^*$ элемент $(g^*)^{-1}(g^*)^{\varphi}$ имеет нечетный порядок. Применяя лемму 5, получаем, что $\langle K\rangle \leq O(G^*)$. Поскольку $G = \langle K\rangle$, группа $G$ имеет нечетный порядок; противоречие с выбором $G$. Этап (4), а вместе с ним и сама теорема 2 доказаны.

**4. Скрученные подмножества с одной инволюцией.** В данном пункте приводится доказательство теоремы 3.

Покажем справедливость (1). Анализ разбивается на ряд этапов.

**(1.i)** *Группа $G$ обладает инволютивным автоморфизмом $\varphi$ таким, что для любого элемента $x$ из $K$ справедливо $\varphi(x) = x^{-1}$.*

Заметим, что в $K$ существует элемент $z$ с $|z| > 2$. Действительно, в противном случае, поскольку в $K$ содержится ровно одна инволюция $w$, имеем $K = \langle w \rangle$; противоречие с тем, что $K \neq \langle K \rangle$.

Поскольку $\mathrm{Ker}(K) = 1$, из леммы 4 получаем, что группа $G$ обладает таким инволютивным автоморфизмом $\varphi$, что $\varphi(x) = x^{-1}$ для любого элемента $x$ из $K$.

**(1.ii)** $C_G(\varphi) \leq C_G(w)$.

В силу определения автоморфизма $\varphi$ имеем $C_G(\varphi) = \{g \in G : gK = Kg\} = \{g \in G : g^{-1}Kg = K\}$. Так как инволюция в $K$ единственна, получаем, что для любого элемента $g$ из $C_G(\varphi)$ выполняется $g^{-1}wg = w$, значит, $C_G(\varphi) \leq C_G(w)$.

**(1.iii)** $G = KC_G(w)$.

Пусть $G^* = G\langle \varphi \rangle$ и $g$ — произвольный элемент группы $G$. Тогда возможен один из следующих случаев:

(a) $|\varphi\varphi^g| = 2n$ для некоторого целого числа $n$;

(b) $|\varphi\varphi^g| = 2n + 1$ для некоторого целого числа $n$.

Рассмотрим каждый из этих случаев по отдельности.

(a) Пусть $|\varphi\varphi^g| = 2n$. В силу леммы 4(2) $\varphi\varphi^g \in K$. Тогда по лемме 1 $\langle \varphi\varphi^g \rangle \subseteq K$. Ввиду единственности инволюции $w$ в $K$ получаем, что $w \in \langle \varphi\varphi^g \rangle$.

Понятно, что $|\varphi^{g^{-1}}\varphi| = 2n$. Тогда для элемента $\varphi^{g^{-1}}\varphi$ аналогично элементу $\varphi\varphi^g$ показывается, что $\langle \varphi^{g^{-1}}\varphi \rangle \subseteq K$, откуда следует, что $w \in \langle \varphi^{g^{-1}}\varphi \rangle$. Таким образом, поскольку $\langle \varphi\varphi^g \rangle^{g^{-1}} = \langle \varphi^{g^{-1}}\varphi \rangle$, получаем, что $w^{g^{-1}} = w$, следовательно, $g \in C_G(w)$.

(b) Пусть $|\varphi\varphi^g| = 2n + 1$ для некоторого целого числа $n$. Значит, согласно свойствам групп диэдра существует такой элемент $h$ из $\langle \varphi\varphi^g \rangle$, что $\varphi^g = \varphi^{\varphi^h}$. Следовательно, $\varphi^h g^{-1} \in C_{G^*}(\varphi)$, т. е. $g^{-1} = \varphi^h c$ для некоторого элемента $c$ из $C_{G^*}(\varphi)$.

Понятно, что $C_{G^*}(\varphi) = C_G(\varphi) \times \langle \varphi \rangle$. Так как $g^{-1} \in G$, то $c = \varphi c_1$, где $c_1$ — некоторый элемент из $C_G(\varphi)$. Следовательно, $g = (\varphi\varphi^h)^{c_1} c_1^{-1}$. В силу леммы 4(2) $\varphi\varphi^h \in K$, а ввиду п. (1.ii) $c_1^{-1}$ — некоторый элемент из $C_G(w)$. Нетрудно видеть, что для любого элемента $t \in C_G(\varphi)$ выполняется равенство $(D(\varphi))^t = D(\varphi)$. Следовательно, $g = ds$, где $d$ — некоторый элемент из $K$, а $s$ — некоторый элемент из $C_G(w)$.

Таким образом, из (a) и (b) получаем, что $G = KC_G(w)$. Итак, п. (1.iii), а вместе с ним п. (1) доказаны.

Докажем справедливость (2). Анализ разбивается на ряд этапов.

**(2.i)** *В подмножестве $K$ существует элемент $x$, имеющий нечетный порядок такой, что $w^x \neq w$ и $w^{x^2}w = ww^{x^2}$.*

Пусть $T := \{g^{-1}g^w : g \in G\}$. По лемме 2(1) $T$ является скрученным подмножеством. Поскольку $G$ — простая группа, из леммы 2(2) вытекает, что $G = \langle T \rangle$. Тогда в силу теоремы 2 и теоремы Фейта — Томпсона [5] получаем, что подмножество $T$ содержит элемент четного порядка. Следовательно, из леммы 1 вытекает существование элемента $g$ группы $G$ такого, что элемент $g^{-1}g^w$ является инволюцией, т. е. для элемента $g$ справедливы $w^g \neq w$ и $w^g w = ww^g$. Так как согласно п. (1) данной теоремы $G = KC_G(w)$, существует элемент $y$ из $K$ такой, что $w^y \neq w$ и $w^y w = ww^y$.

Заметим, что элемент $y$ имеет нечетный порядок.

Действительно, в противном случае ввиду леммы 1 $\langle y\rangle \subseteq K$, откуда в силу единственности инволюции $w$ имеем $w \in \langle y\rangle$. Следовательно, $y \in C_G(w)$, что противоречит выбору $y$.

Далее, в силу нечетности $|y|$ элемент $x := \sqrt{y}$ однозначно определен и удовлетворяет (2.i).

**(2.ii)** $w^x w = w w^x$.

Заметим, что $x^{-2}wx^2w \in x^{-2}K$. Так как ввиду леммы 1 $x^{-1} \in K$, то $x^{-2}K = x^{-1}(x^{-1}Kx^{-1})x = K^x$. Поскольку в $K$ содержится только одна инволюция $w$, то в $K^x$ содержится только одна инволюция $w^x$. Таким образом, $x^{-2}wx^2w = w^x$, откуда вытекает, что элемент $w^x w$ является инволюцией, а значит, $w^x w = w w^x$.

Легко видеть, что из п. $(2.i)$ вытекает соотношение $w^{x^{-1}}w^x = w^x w^{x^{-1}}$. Таким образом, элемент $w^{x^{-1}}w^x$ является инволюцией. В силу того, что $w^{x^{-1}}w^x = xwx^{-1}x^{-1}wx$, нетрудно видеть, $w^{x^{-1}}w^x \in K$, значит, с учетом единственности инволюции в $K$, имеем $w = w^{x^{-1}}w^x$, откуда $ww^x = w^{x^2}$. Таким образом, ввиду (2.ii) легко видеть, что $\langle w, x\rangle = (\langle w\rangle \times \langle w^x\rangle) \leftthreetimes \langle x\rangle$, причем $\langle x^3\rangle \leq C_G(w)$.

Итак, п. (2), а вместе с ним и сама теорема 3 доказаны.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Foguel T., Ungar A. A.* Involutory decomposition of groups into twisted subgroups and subgroups // J. Group Theory. 2000. V. 1, N 3. P. 27–46.
2. *Мыльников А. Л.* Конечные перекрученные группы // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 369–375.
3. *Мыльников А. Л.* Конечные минимальные неперекрученные группы // Вестн. Красноярск. гос. ун-та. 2005. № 1. С. 71–76.
4. *Веприннцев Д. В.* Редуцированные симметричные подмножества в группах // Математические системы. Красноярск: Краснояр. гос. аграр. ун-т, 2005. Вып. 4. С. 13–17.
5. *Feit W., Thompson J.* Solvability of groups of odd order // Pacific J. Math. 1963. V. 13, N 3. P. 775–1029.


*Статья поступила 10 марта 2006 г., окончательный вариант — 20 сентября 2007 г.*

Веприннцев Дмитрий Владимирович
Красноярский гос. аграрный университет, кафедра прикладной математики,
ул. Ленина, 117, Красноярск 660017
D_veprintsev@mail.ru

Мыльников Андрей Леонидович
Институт фундаментальной подготовки Сибирского федерального университета,
кафедра высшей математики 1,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
mylnand@yandex.ru