Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2008. Том 49, № 1

УДК 512.66

О ГРУППАХ ГОМОЛОГИЙ ПОЛУКУБИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ

А. А. Хусаинов

Аннотация. Изучаются группы гомологий полукубических множеств с коэффициентами в гомологических системах абелевых групп. Основная теорема утверждает, что они изоморфны группам гомологий категории сингулярных кубиков. В результате получены критерий изоморфизма групп гомологий полукубических множеств, спектральная последовательность локально направленного покрытия и спектральная последовательность морфизма полукубических множеств.

Ключевые слова: кубические гомологии, гомологии малых категорий, полукубическое множество, спектральная последовательность Серра.

1. Введение

В работе изучаются гомологии полукубических множеств с коэффициентами в гомологических системах абелевых групп. Известно [1, приложение 2, предложение 4.2], что группы гомологий $H_n(X, F)$ симплициального множества X с коэффициентами в гомологической системе абелевых групп F изоморфны значениям $\varinjlim_n^{(\Delta/X)^{op}} F$ левых сателлитов функтора копредела по категории, двойственной к категории сингулярных симплексов симплициального множества X. Аналогичный результат верен для гомологических систем коэффициентов на полусимплициальных множествах (см., например, [2, предложение 1.4], где доказывается двойственное утверждение). В случае кубических множеств это неверно (см. замечание 4.4). Тем не менее, как показывает основной результат настоящей работы (теорема 4.3), для гомологических систем на полукубических множествах аналогичное утверждение верно. Этот результат позволяет применить теорию гомологий малых категорий. В частности, с помощью теоремы Оберста [3, теорема 2.3] мы найдем критерий, при котором гомоморфизмы групп гомологий полукубических множеств, соответствующие морфизму полукубических множеств, являются изоморфизмами. Будут построены спектральные последовательности локально направленного покрытия полукубического множества (следствие 5.3) и морфизма полукубических множеств (следствие 5.4).

Будем применять следующие обозначения: Set — категория множеств и отображений; Ab — категория абелевых групп и гомоморфизмов; L : Set $\to$ Ab — функтор, сопоставляющий каждому множеству E свободную абелеву группу $L(E)$ с базисом E и каждому отображению $f : E_1 \to E_2$ канонический продолжающий это отображение гомоморфизм $L(f) : L(E_1) \to L(E_2)$; $\mathbb{I}$ — линейно упорядоченное множество $\{0, 1\}$ с наименьшим отношением порядка, при котором $0 \leq 1$; $\mathbb{Z}$ — множество или аддитивная группа целых чисел; $\mathbb{N}$ — множество неотрицательных целых чисел; $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел.

Для произвольной категории $\mathscr{A}$ через $\mathscr{A}^{op}$ обозначается двойственная категория. Для объектов $a, b \in \mathscr{A}$ через $\mathscr{A}(a,b)$ обозначается множество морфизмов $a \to b$. Если $\mathscr{C}$ — малая категория, то $\mathscr{A}^{\mathscr{C}}$ обозначает категорию функторов $\mathscr{C} \to \mathscr{A}$ и естественных преобразований.

2. Полукубические множества

Полукубическим множеством $X = \left(X_n, \partial_i^{n,\varepsilon}\right)$ называется последовательность множеств $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и семейство отображений $\partial_i^{n,\varepsilon} : X_n \to X_{n-1}$, определенных при $1 \le i \le n$, $\varepsilon \in \{0,1\}$ и удовлетворяющих условию коммутативности диаграмм для всех $\alpha, \beta \in \{0,1\}$, $n \ge 2$ и $1 \le i < j \le n$:

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "\partial_j^{n,\beta}"] \arrow[d, "\partial_i^{n,\alpha}"'] & X_{n-1} \arrow[d, "\partial_i^{n-1,\alpha}"] \\ X_{n-1} \arrow[r, "\partial_{j-1}^{n-1,\beta}"'] & X_{n-2}. \end{tikzcd}$$

Полукубические множества как функторы. Пусть $\square_+$ — категория, состоящая из конечных частично упорядоченных множеств $\mathbb{I}^n = \{0,1\}^n$, равных декартовой степени линейно упорядоченного множества $\mathbb{I} = \{0,1\}$. Морфизмы этой категории определяются как возрастающие отображения частично упорядоченных множеств, допускающие разложение в композицию отображений вида $\delta_i^{k,\varepsilon} : \mathbb{I}^{k-1} \to \mathbb{I}^k$, где

$$\delta_i^{k,\varepsilon}(x_1, \ldots, x_{k-1}) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, \varepsilon, x_i, \ldots, x_{k-1}), \quad \varepsilon \in \mathbb{I},\ 1 \le i \le k.$$

Благодаря соотношениям $\delta_j^{n,\beta}\delta_i^{n-1,\alpha} = \delta_i^{n,\alpha}\delta_{j-1}^{n-1,\beta}$ при $1 \le i < j \le n$, $\alpha \in \{0,1\}$, $\beta \in \{0,1\}$ каждый морфизм этой категории $f : \mathbb{I}^m \to \mathbb{I}^n$ допускает каноническое разложение $f = \delta_{j_{n-m}}^{n,\varepsilon_{n-m}} \ldots \delta_{j_1}^{m+1,\varepsilon_1}$, $1 \le j_1 < \cdots < j_{n-m} \le n$. Это позволяет определить полукубическое множество как функтор $X : \square_+^{op} \to \mathrm{Set}$, принимающий значения $X(\mathbb{I}^n) = X_n$ на объектах и $X(f) = \partial_{j_1}^{m+1,\varepsilon_1} \ldots \partial_{j_{n-m}}^{n,\varepsilon_{n-m}}$ на морфизмах $f = \delta_{j_{n-m}}^{n,\varepsilon_{n-m}} \ldots \delta_{j_1}^{m+1,\varepsilon_1}$. Определяя морфизмы как естественные преобразования, приходим к категории полукубических множеств $\mathrm{Set}^{\square_+^{op}}$.

Целочисленные группы гомологий полукубических множеств. Пусть $X = \left(X_n, \partial_i^{n,\varepsilon}\right)$ — полукубическое множество, $C_*(X)$ — цепной комплекс абелевых групп $C_n(X) = L(X_n)$ при $n \ge 0$ и $C_n(X) = 0$ при $n < 0$. Гомоморфизмы $d_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ определяются по формуле

$$d_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left(L\left(\partial_i^{n,1}\right) - L\left(\partial_i^{n,0}\right)\right).$$

Группы гомологий $H_n(C_*(X))$ называются *n-ми целочисленными группами гомологий полукубического множества X*.

Кубические подмножества евклидовых пространств. Рассмотрим полукубические множества, целочисленные группы гомологий которых изучаются в [4, 5].

Для произвольного целого числа $l \in \mathbb{Z}$ замкнутые отрезки $[l, l+1] \subset \mathbb{R}$ и $\{l\} = [l,l] \subset \mathbb{R}$ называются *элементарными интервалами*. Элементарные интервалы вида $[l, l+1]$ называются *невырожденными*, а $[l,l]$ — *вырожденными*.

Элементарным кубиком называется декартово произведение элементарных интервалов $Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$. Число невырожденных интервалов среди $I_1, I_2, \ldots, I_n$ обозначается через $\dim Q$, число n — через $\operatorname{emb} Q$.

Кубическим подмножеством евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ называется произвольное объединение элементарных кубиков $Q_1, Q_2, \ldots,$ для которых $\operatorname{emb} Q_i = n$.

Для произвольных кубического подмножества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и целого $m \geq 0$ обозначим через $\mathscr{K}_m(X)$ множество таких элементарных кубиков $Q \subseteq X$, что $\dim Q = m$.

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — кубическое подмножество. Для любого элементарного кубика $Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \in \mathscr{K}_m(X)$, где $I_{k_j} = [a_j, b_j]$ — j-й невырожденный элементарный интервал, положим

$$\partial_j^{m,0} Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_{k_j-1} \times \{a_j\} \times I_{k_j+1} \times \cdots \times I_n,$$

$$\partial_j^{m,1} Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_{k_j-1} \times \{b_j\} \times I_{k_j+1} \times \cdots \times I_n,$$

где $1 \leq j \leq \dim Q = m$. Получим полукубическое множество

$$\mathscr{K}(X) = \big(\mathscr{K}_m(X), \partial_j^{m,\varepsilon}\big).$$

Следовательно, кубические подмножества евклидовых пространств можно рассматривать как полукубические множества. Из [5, следствие 2.3] следует, что определенные нами группы гомологий полукубических множеств, соответствующих кубическим подмножествам евклидовых пространств, будут изоморфны кубическим группам гомологий в смысле работы [5]. В частности, верна следующая

Лемма 2.1. *Пусть $C_*(\mathscr{K}([0,1]^n))$ — комплекс свободных абелевых групп $C_m(\mathscr{K}([0,1]^n)) = L(\mathscr{K}_m([0,1]^n))$, порожденных кубиками $Q \subseteq [0,1]^n$ размерности $\dim Q = m$. На каждом элементарном кубике $Q = I_1 \times \cdots \times I_n$, равном произведению интервалов, из которых в точности m невырожденных, гомоморфизмы d_m комплекса $C_*(\mathscr{K}([0,1]^n))$ определены по формулам*

$$d_m Q = \sum_{j=1}^{m} (-1)^j \big(L\big(\partial_j^{m,1}\big)Q - L\big(\partial_j^{m,0}\big)Q\big).$$

Тогда

$$H_q(C_*(\mathscr{K}([0,1]^n))) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } q = 0, \\ 0 & \text{при } q > 0. \end{cases}$$

Это утверждение доказано в [4] для более общего случая, когда вместо $[0,1]^n$ берется произвольный элементарный кубик евклидова пространства.

3. Группы гомологий малых категорий

В данном разделе рассматриваются группы гомологий малых категорий $\mathscr{C}$ с коэффициентами в функторах $F : \mathscr{C} \to \mathrm{Ab}$.

Гомологии категорий и производные функтора копредела.

Определение 3.1. *Группами гомологий малой категории $\mathscr{C}$ с коэффициентами в функторе $F : \mathscr{C} \to \mathrm{Ab}$* называются группы гомологий цепного комплекса абелевых групп $C_*(\mathscr{C}, F)$, состоящего из абелевых групп

$$C_n(\mathscr{C}, F) = \bigoplus_{c_0 \to \cdots \to c_n} F(c_0), \quad n \geq 0,$$

и гомоморфизмов

$$d_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i^n : C_n(\mathscr{C}, F) \to C_{n-1}(\mathscr{C}, F), \quad n > 0,$$

где d_i^n определяются на элементах слагаемых

$$(c_0 \xrightarrow{\alpha_1} c_1 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_n} c_n, a) \in \bigoplus_{c_0 \to \dots \to c_n} F(c_0), \quad a \in F(c_0),$$

по формулам

$$d_i^n(c_0 \to \dots \to c_n, a) = \begin{cases} (c_0 \to \dots \to \widehat{c_i} \to \dots \to c_n, a) & \text{при } 1 \le i \le n, \\ (c_1 \to \dots \to c_n, F(c_0 \xrightarrow{\alpha_1} c_1)(a)) & \text{при } i = 0. \end{cases}$$

Хорошо известно [1, приложение 2, предложение 3.3], что левые сателлиты функтора копредела $\varinjlim^{\mathscr{C}} : \mathrm{Ab}^{\mathscr{C}} \to \mathrm{Ab}$ совпадают с ∂-функтором $H_n(C_*(\mathscr{C}, -)) : \mathrm{Ab}^{\mathscr{C}} \to \mathrm{Ab}$. Поскольку в категории $\mathrm{Ab}^{\mathscr{C}}$ достаточно проективных объектов, то эти сателлиты естественно изоморфны левым производным функтора копредела $\varinjlim^{\mathscr{C}} : \mathrm{Ab}^{\mathscr{C}} \to \mathrm{Ab}$. Значения $H_n(C_*(\mathscr{C}, F))$ сателлитов функтора копредела на $F \in \mathrm{Ab}^{\mathscr{C}}$ будем обозначать через $\varinjlim_n^{\mathscr{C}} F$.

Для произвольной малой категории $\mathscr{C}$ обозначим через $\Delta_{\mathscr{C}}\mathbb{Z} : \mathscr{C} \to \mathrm{Ab}$ функтор, принимающий постоянные значения, равные $\mathbb{Z}$ на объектах и $1_{\mathbb{Z}}$ на морфизмах категории $\mathscr{C}$. Если ясно, о какой категории $\mathscr{C}$ идет речь, то этот функтор будем сокращенно обозначать через $\Delta\mathbb{Z}$. *Группами целочисленных гомологий* малой категории $\mathscr{C}$ называются группы $\varinjlim_n^{\mathscr{C}} \Delta_{\mathscr{C}}\mathbb{Z}$.

Пример 3.2. Пусть $pt = [0]$ — категория, состоящая из единственного объекта 0 и единственного морфизма 1_0. Тогда для каждого $n \ge 0$ абелева группа $C_n(pt, \Delta_{pt}\mathbb{Z})$ будет порождена единственным элементом e_n, который равен последовательности n тождественных морфизмов $0 \xrightarrow{1_0} 0 \xrightarrow{1_0} \dots \xrightarrow{1_0} 0$. Поскольку $d_i^n(e_n) = e_{n-1}$, то $C_*(\mathscr{C}, \Delta\mathbb{Z})$ будет изоморфен комплексу

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{1} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{1} \dots,$$

n-е группы гомологий которого равны 0 при $n > 0$, и $H_0(C_*(pt, \Delta\mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}$. Отсюда вытекает, что

$$\varinjlim_n^{pt} \Delta\mathbb{Z} = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } n = 0, \\ 0, & \text{если } n > 0. \end{cases}$$

Лемма 3.1. *Для произвольной малой категории $\mathscr{C}$ и для всех $n \ge 0$ имеют место изоморфизмы $\varinjlim_n^{\mathscr{C}^{op}} \Delta_{\mathscr{C}^{op}}\mathbb{Z} \cong \varinjlim_n^{\mathscr{C}} \Delta_{\mathscr{C}}\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Гомоморфизмы $C_n(\mathscr{C}^{op}, \Delta\mathbb{Z}) \to C_n(\mathscr{C}, \Delta\mathbb{Z})$, сопоставляющие каждому элементу $(c_0 \xrightarrow{\alpha_1^{op}} c_1 \to \dots \xrightarrow{\alpha_n^{op}} c_n)$ базиса абелевой группы $C_n(\mathscr{C}^{op}, \Delta\mathbb{Z})$ последовательность $(c_0 \xleftarrow{\alpha_1} c_1 \leftarrow \dots \xleftarrow{\alpha_n} c_n)$ при четном n и ту же последовательность, взятую с отрицательным знаком, при нечетном n, осуществляют изоморфизм комплексов $C_*(\mathscr{C}^{op}, \Delta\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} C_*(\mathscr{C}, \Delta\mathbb{Z})$. Отсюда группы гомологий комплексов изоморфны. $\square$

Тензорное произведение функторов. Пусть $Lh^c : \mathrm{Ab}^{\mathscr{C}} \to \mathrm{Ab}$ — композиция функторов $L : \mathrm{Set} \to \mathrm{Ab}$ и $h^c(-) = \mathscr{C}(c, -) : \mathscr{C} \to \mathrm{Set}$. Для функтора $F : \mathscr{C}^{op} \to \mathscr{A}$ и объекта $A \in \mathscr{A}$ обозначим через $\mathrm{Hom}(F, A)$ функтор $\mathscr{C} \to \mathrm{Ab}$, принимающий на объектах $c \in \mathscr{C}$ значения $\mathscr{A}(F(c), A)$ и сопоставляющий каждому морфизму $\alpha \in \mathscr{C}(c_1, c_2)$ отображение $\mathrm{Hom}(F, A)(\alpha) : \mathscr{A}(F(c_2), A) \to \mathscr{A}(F(c_1), A)$, действующее как $\mathrm{Hom}(F, A)(\alpha)(f) = f \circ F(\alpha)$.

Лемма 3.2. *Пусть $\mathscr{C}$ — малая категория, $\mathscr{A}$ — аддитивная категория с бесконечными копроизведениями. Тогда существует аддитивный по каждому аргументу бифунктор $\otimes : \mathrm{Ab}^{\mathscr{C}} \times \mathscr{A}^{\mathscr{C}^{op}} \to \mathscr{A}$, обладающий следующими свойствами:*

существуют естественные по $G \in \mathrm{Ab}^{\mathscr{C}}$, $F \in \mathscr{A}^{\mathscr{C}^{op}}$ и $A \in \mathscr{A}$ изоморфизмы $\mathscr{A}(G \otimes F, A) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ab}^{\mathscr{C}}(G, \mathrm{Hom}(F, A))$,

имеют место естественные по $c \in \mathscr{C}$ и $F \in \mathscr{A}^{\mathscr{C}^{op}}$ изоморфизмы $Lh^c \otimes F \xrightarrow{\cong} F(c)$,

для каждого $F \in \mathscr{A}^{\mathscr{C}^{op}}$ функтор $(-) \otimes F : \mathrm{Ab}^{\mathscr{C}} \to \mathscr{A}$ перестановочен с копределами,

для каждого $G \in \mathrm{Ab}^{\mathscr{C}}$ функтор $G \otimes (-) : \mathscr{A}^{\mathscr{C}^{op}} \to \mathscr{A}$ перестановочен с копределами.

Доказательство. Для произвольных аддитивных категорий $\mathscr{B}$ и $\mathscr{A}$ обозначим через $\mathrm{Add}(\mathscr{B}, \mathscr{A})$ категорию аддитивных функторов $\mathscr{B} \to \mathscr{A}$. Как известно [6, с. 11], для каждой малой категории $\mathscr{C}$ существует такая содержащая ее аддитивная категория $Mat\mathbb{Z}\mathscr{C}$, что для любой аддитивной категории $\mathscr{A}$ имеют место изоморфизмы $\mathscr{A}^{\mathscr{C}} \cong \mathrm{Add}(Mat\mathbb{Z}\mathscr{C}, \mathscr{A})$. Согласно [7, теорема 17.7.2] определен бифунктор

$$\otimes_{\mathscr{C}^{op}} : \mathrm{Add}(Mat\mathbb{Z}\mathscr{C}, \mathrm{Ab}) \times \mathrm{Add}(Mat\mathbb{Z}\mathscr{C}^{op}, \mathscr{A}) \to \mathscr{A},$$

для которого, во-первых, существуют естественные изоморфизмы $h^c \otimes F \cong F(c)$, и, во-вторых, функторы $(-) \otimes F$ и $G \otimes (-)$ перестановочны с копределами. С помощью этого бифунктора и изоморфизма категорий $\mathrm{Add}(Mat\mathbb{Z}\mathscr{C}, \mathrm{Ab}) \cong \mathrm{Ab}^{\mathscr{C}}$, $\mathrm{Add}(Mat\mathbb{Z}\mathscr{C}^{op}, \mathscr{A}) \cong \mathscr{A}^{\mathscr{C}^{op}}$ получаем бифунктор $\otimes : \mathrm{Ab}^{\mathscr{C}} \times \mathscr{A}^{\mathscr{C}^{op}} \to \mathscr{A}$, обладающий перечисленными свойствами. □

С помощью этой леммы доказывается следующее утверждение.

Лемма 3.3 [8]. *Для любой проективной резольвенты*

$$0 \leftarrow \Delta_{\mathscr{C}}\mathbb{Z} \xleftarrow{\varepsilon} P_0 \xleftarrow{d_1} P_1 \leftarrow \ldots \xleftarrow{d_n} P_n \leftarrow \ldots$$

существуют естественные по $F \in \mathrm{Ab}^{\mathscr{C}^{op}}$ изоморфизмы (∂-функторов) $H_n(P_* \otimes F) \cong \varinjlim_n^{\mathscr{C}^{op}} F$.

Коинициальные функторы. Пусть $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ — функтор из малой категории в произвольную. Для произвольного объекта $d \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ *слоем* S/d называется категория, объектами которой являются пары (c, α), состоящие из объектов $c \in \mathscr{C}$ и морфизмов $\alpha \in \mathscr{D}(S(c), d)$. Морфизмами категории S/d служат тройки (f, α_1, α_2), состоящие из морфизмов $f \in \mathscr{C}(c_1, c_2)$, $\alpha_1 \in \mathscr{D}(S(c_1), d)$, $\alpha_2 \in \mathscr{D}(S(c_2), d)$, для которых $\alpha_2 \circ S(f) = \alpha_1$. *Забывающим функтором* $Q_d : S/d \to \mathscr{C}$ *слоя* называется функтор, действующий как $Q_d(c, \alpha) = c$ на объектах и как $Q_d(f, \alpha_1, \alpha_2) = f$ на морфизмах. Если S — полное вложение подкатегории $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$, то S/d обозначается через $\mathscr{C}/d$.

Определение 3.3. Функтор $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ между малыми категориями называется *строго коинициальным*, если для каждого объекта $d \in \mathscr{D}$ группы целочисленных гомологий $\varinjlim_n^{S/d} \Delta\mathbb{Z}$ категории S/d изоморфны группам гомологий точки $\varinjlim_n^{pt} \Delta\mathbb{Z}$.

Кослоем d/S объекта $d \in \mathscr{D}$ над функтором $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ называется категория, объектами которой служат пары (c, α), где $c \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $\alpha \in \mathscr{D}(d, S(c))$.

Морфизмы $(c_1, \alpha_1) \to (c_2, \alpha_2)$ задаются тройками (f, α_1, α_2), состоящими из морфизмов $f \in \mathscr{C}(c_1, c_2)$, $\alpha_1 \in \mathscr{D}(d, S(c_1))$, $\alpha_2 \in \mathscr{D}(d, S(c_2))$, удовлетворяющих соотношению $S(f) \circ \alpha_1 = \alpha_2$.

Предложение 3.4. *Для произвольного функтора $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ существуют канонические естественные по F гомоморфизмы $\varinjlim_n^{\mathscr{C}^{op}}(F \circ S^{op}) \to \varinjlim_n^{\mathscr{D}^{op}} F$. Они будут изоморфизмами для всех $F \in \mathrm{Ab}^{\mathscr{D}^{op}}$ и $n \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда функтор S строго коинициален.*

Доказательство вытекает из аналогичного утверждения, сформулированного в [3, теорема 2.3] для гомоморфизмов $\varinjlim_n^{\mathscr{C}}(F \circ S) \to \varinjlim_n^{\mathscr{D}} F$. Эти гомоморфизмы являются изоморфизмами для всех F и $n \in \mathbb{N}$, если и только если $\varinjlim_n^{d/S} \Delta\mathbb{Z} \cong \varinjlim_n^{pt} \Delta\mathbb{Z}$. Подставляя вместо S функтор S^{op}, получаем, что этим условием будет $\varinjlim_n^{(S/d)^{op}} \Delta\mathbb{Z} \cong \varinjlim_n^{pt} \Delta\mathbb{Z}$. Но по лемме 3.1 группы гомологий $\varinjlim_n^{(S/d)^{op}} \Delta\mathbb{Z}$ и $\varinjlim_n^{S/d} \Delta\mathbb{Z}$ изоморфны. $\square$

Следствие 3.5. *Композиция строго коинициальных функторов между малыми категориями является строго коинициальным функтором.*

Гомологии $\mathscr{D}$-множеств. Пусть $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ — функтор между малыми категориями, $\mathscr{A}$ — категория с копределами. Тогда функтор $(-) \circ S : \mathscr{A}^{\mathscr{D}} \to \mathscr{A}^{\mathscr{C}}$ обладает (см. [9]) левым сопряженным Lan^S, значение которого на $F \in \mathscr{A}^{\mathscr{C}}$ называется *левым расширением Кана* $\mathrm{Lan}^S F$ *функтора* $F \in \mathscr{A}^{\mathscr{C}}$ *вдоль* S. Пусть $\mathscr{C}$ — малая категория, каждая компонента связности которой содержит инициальный объект. Для каждого объекта $c \in \mathscr{C}$ выберем из содержащей этот объект компоненты связности один инициальный объект $i(c)$. Обозначим через $i_c : i(c) \to c$ единственный морфизм из $i(c)$ в c. Пусть $\mathrm{init}(\mathscr{C})$ — множество, состоящее из выбранных инициальных объектов.

Лемма 3.6. *Пусть $\mathscr{A}$ — категория с копределами. Предположим, что задан такой функтор $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ между малыми категориями, что для всякого объекта $d \in \mathscr{D}$ каждая компонента связности категории d/S имеет инициальный объект. Тогда для любого функтора $F : \mathscr{C}^{op} \to \mathscr{A}$ левое расширение Кана $\mathrm{Lan}^{S^{op}} F : \mathscr{D}^{op} \to \mathscr{A}$ изоморфно функтору, принимающему на объектах $d \in \mathscr{D}$ значения $\coprod\limits_{\beta \in \mathrm{init}(d/S)} FQ_d^{op}(\beta)$ и сопоставляющему каждому морфизму $\alpha : d \to e$ категории $\mathscr{D}$ морфизм $\bar{\alpha}$ категории $\mathscr{A}$, определенный условием коммутативности при любом $\gamma \in \mathrm{init}(e/S)$ диаграмм*

$$\begin{array}{ccc}
\coprod\limits_{\gamma \in \mathrm{init}(e/S)} FQ_e^{op}(\gamma) & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & \coprod\limits_{\beta \in \mathrm{init}(d/S)} FQ_d^{op}(\beta) \\
{\scriptstyle in_\gamma}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle in_{i(\gamma\circ\alpha)}} \\
FQ_e^{op}(\gamma) = FQ_d^{op}(\gamma \circ \alpha) & \xrightarrow[FQ_d^{op}(i_{\gamma\circ\alpha})]{} & FQ_d^{op}(i(\gamma \circ \alpha)).
\end{array}$$

Доказательство. В формулировке леммы [2, лемма 1.1] подставим вместо категории $\mathscr{A}$ категорию $\mathscr{A}^{op}$. Поскольку произведения в двойственной категории являются копроизведениями, а стрелки имеют противоположные направления, то доказываемая лемма вытекает из [2, лемма 1.1]. $\square$

Для произвольной малой категории $\mathscr{D}$ и функтора $X \in \mathrm{Set}^{\mathscr{D}^{op}}$ обозначим через $\mathscr{D}/X$ малую категорию, объектами которой являются элементы $x \in$

$\coprod\limits_{d\in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}} X(d)$. Морфизмами в ней являются тройки (α, x, x'), где $\alpha \in \mathscr{D}(d, d')$, $x \in X(d)$, $x' \in X(d')$, удовлетворяющие соотношению $X(\alpha)(x') = x$.

С $\mathscr{D}$ и X связана также категория h_*/X — слой вложения Ионеды $h_* : \mathscr{D} \to \mathrm{Set}^{\mathscr{D}^{op}}$. Поскольку h_* — полное вложение, то каждый объект $(d, \eta : h_d \to X)$ определен вторым элементом пары — морфизмом $\eta : h_d \to X$. Поэтому можно считать, что объектами категории h_*/X являются морфизмы $\eta : h_d \to X$, а морфизмами — коммутативные треугольники

$$\begin{tikzcd} h_d \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "h_\alpha"'] & & X \\ & h_{d'} \arrow[ur, "\eta'"'] & \end{tikzcd}$$

Хорошо известно [9], что существует изоморфизм $\mathscr{D}/X \xrightarrow{\cong} h_*/X$. На объектах этот изоморфизм строится как обратный к отображению $(\eta : h_d \to X) \mapsto \eta_d(1_d)$. Образ объекта x записывается как $\tilde{x} : h_d \to X$.

Пусть $\mathscr{D}$ — малая категория, $X \in \mathrm{Set}^{\mathscr{D}^{op}}$ и $F : (\mathscr{D}/X)^{op} \to \mathrm{Ab}$ — функторы.

Предложение 3.7. *$\varinjlim_n^{(\mathscr{D}/X)^{op}} F \cong \varinjlim_n^{\mathscr{D}^{op}} \breve{F}$, где $\breve{F}(d) = \bigoplus\limits_{x\in X(d)} F(x)$ и $\breve{F}(\alpha) : \breve{F}(a) \to \breve{F}(b)$ на $\alpha \in \mathscr{D}(a, b)$ определены условием коммутативности диаграмм*

$$\begin{tikzcd} \bigoplus\limits_{x\in X(a)} F(x) \arrow[r, "\breve{F}(\alpha)"] & \bigoplus\limits_{x\in X(b)} F(x) \\ F(x) \arrow[u, "in_x"] \arrow[r, "F(X(\alpha)(x)\xrightarrow{\alpha} x)"'] & F(X(\alpha)(x)). \arrow[u, "in_{X(\alpha)(x)}"'] \end{tikzcd} \qquad (1)$$

Доказательство. Положим $\breve{F} = \mathrm{Lan}^{Q^{op}} F$, где $Q : h_*/X \to \mathscr{D}$ — функтор, сопоставляющий каждому объекту $\tilde{x} : h_d \to X$ объект $d \in \mathscr{D}$ и каждому морфизму (α, x, y) морфизм α категории $\mathscr{D}$. Для каждого объекта $a \in \mathscr{D}$ любая компонента связности категории a/Q имеет инициальный объект, причем значения отображения $i : \mathrm{Ob}(a/Q) \to \mathrm{init}(a/Q)$ на $(\tilde{x}, \alpha)$ при $\tilde{x} : h_c \to X$ и $\alpha : a \to c$ равны $i(\tilde{x}, \alpha) = (\tilde{x} \circ h_\alpha, 1_a)$, а $i_{(\tilde{x},\alpha)} = (\alpha, \tilde{x} \circ h_\alpha, \tilde{x})$. Поскольку $\tilde{x} \circ h_\alpha = \widetilde{X(\alpha)(x)}$, то, отождествляя категории $\mathscr{D}/X$ и h_*/X, из доказанной выше леммы 3.6 получаем определение гомоморфизмов $\breve{F}(\alpha) = \bar{\alpha}$ как делающих коммутативными квадраты (1). Так как в категории абелевых групп суммы точны, функтор $\mathrm{Lan}^{Q^{op}}$ точен. Рассмотрим произвольную проективную резольвенту P_* объекта $F \in \mathrm{Ab}^{(\mathscr{D}/X)^{op}}$. Функтор $\mathrm{Lan}^{Q^{op}}$ сопряжен слева к точному функтору $(-) \circ Q^{op} : \mathrm{Ab}^{\mathscr{D}^{op}} \to \mathrm{Ab}^{(\mathscr{D}/X)^{op}}$, поэтому он согласно двойственному к [10, предложение 6.3] утверждению о том, что сопряженный слева к точному функтору переводит проективные объекты в проективные, переведет эту проективную резольвенту в проективную резольвенту объекта $\mathrm{Lan}^{Q^{op}} F$. Применяя к полученной резольвенте $\varinjlim^{\mathscr{D}^{op}}$, получаем комплекс $\varinjlim^{(\mathscr{D}/X)^{op}} \mathrm{Lan}^{Q^{op}} P_*$, группы гомологий которого изоморфны $\varinjlim_n^{(\mathscr{D}/X)^{op}} \mathrm{Lan}^{Q^{op}} F$. Но в силу изоморфизма $\varinjlim^{(\mathscr{D}/X)^{op}} \mathrm{Lan}^{Q^{op}} \cong \varinjlim^{\mathscr{D}^{op}}$ группы гомологий этого комплекса изоморфны $\varinjlim_n^{\mathscr{D}^{op}} F$. $\square$

4. Группы гомологий полукубических множеств

В данном разделе доказывается основная теорема.

Гомологии полукубических абелевых групп.

Лемма 4.1. *Пусть C_* — комплекс*

$$0 \leftarrow L\square_+(\mathbb{I}^0, \mathbb{I}^n) \xleftarrow{d_1} L\square_+(\mathbb{I}^1, \mathbb{I}^n) \xleftarrow{d_2} \dots \xleftarrow{d_n} L\square_+(\mathbb{I}^n, \mathbb{I}^n) \leftarrow 0,$$

состоящий из свободных абелевых групп C_k, порожденных морфизмами $\mathbb{I}^k \to \mathbb{I}^n$, и гомоморфизмов

$$d_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \big(L\big(\partial_i^{k,1}\big) - L\big(\partial_i^{k,0}\big)\big),$$

где $\partial_i^{k,\varepsilon}(\sigma) = \square_+\big(\delta_i^{k,\varepsilon}, \mathbb{I}^n\big)(\sigma) = \sigma \circ \delta_i^{k,\varepsilon}$. Группы гомологий этого комплекса $H_q(C_*)$ равны 0 при $q > 0$, и $H_0(C_*) = \mathbb{Z}$.

Доказательство. При $1 \le i \le j \le k-1$ имеют место соотношения $\delta_{j+1}^{k,\beta}\delta_i^{k-1,\alpha} = \delta_i^{k,\alpha}\delta_j^{k-1,\beta}$. Поэтому любой морфизм $\sigma : \mathbb{I}^k \to \mathbb{I}^n$ допускает единственное разложение

$$\mathbb{I}^k \xrightarrow{\delta_1^{k+1,\varepsilon_1}} \mathbb{I}^{k+1} \xrightarrow{\delta_2^{k+2,\varepsilon_2}} \mathbb{I}^{k+2} \longrightarrow \dots \xrightarrow{\delta_{j_1-1}^{k+j_1-1,\varepsilon_{j_1-1}}} \mathbb{I}^{k+j_1-1} \xrightarrow{\delta_{j_1+1}^{k+j_1,\varepsilon_{j_1+1}}} \dots \xrightarrow{\delta_{n-k}^{n,\varepsilon_{n-k}}} \mathbb{I}^n,$$

которое можно записать как

$$\sigma = \delta_{n-k}^{n,\varepsilon_{n-k}} \dots \delta_{j_1+1}^{k+j_1,\varepsilon_{j_1+1}} \delta_{j_1-1}^{k+j_1-1,\varepsilon_{j_1-1}} \dots \delta_2^{k+2,\varepsilon_2} \delta_1^{k+1,\varepsilon_1}.$$

Для того чтобы исследовать действие $\partial_i^{k,\varepsilon}$ на σ, $\partial_i^{k,\varepsilon}(\sigma) = \sigma \circ \delta_i^{k,\varepsilon}$, морфизмы $\delta_i^{k,\varepsilon}$ сокращенно обозначим через δ_i^ε и рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{llllllllllll}
\mathbb{I}^k & \xrightarrow{\delta_1^{\varepsilon_1}} \mathbb{I}^{k+1} & \xrightarrow{\delta_2^{\varepsilon_2}} & \dots & \xrightarrow{\delta_{j_1-1}^{\varepsilon_{j_1-1}}} & \mathbb{I}^{k+j_1-1} & \xrightarrow{\delta_{j_1+1}^{\varepsilon_{j_1+1}}} & \dots & \xrightarrow{\delta_{j_i-1}^{\varepsilon_{j_i-1}}} & \mathbb{I}^{k+j_i} & \xrightarrow{\delta_{j_i+1}^{\varepsilon_{j_i+1}}} \dots & \xrightarrow{\delta_{n-k}^{\varepsilon_{n-k}}} \mathbb{I}^n \\
\uparrow \delta_i^\varepsilon & \uparrow \delta_{i+1}^\varepsilon & & & & \uparrow \delta_{i+j_1-1}^\varepsilon & & & & \uparrow \delta_{i+j_i-i}^\varepsilon & & \\
\mathbb{I}^{k-1} & \xrightarrow{\delta_1^{\varepsilon_1}} \mathbb{I}^{k} & \xrightarrow{\delta_2^{\varepsilon_2}} & \dots & \xrightarrow{\delta_{j_1-1}^{\varepsilon_{j_1-1}}} & \mathbb{I}^{k+j_1-2} & \xrightarrow{\delta_{j_1+1}^{\varepsilon_{j_1+1}}} & \dots & \xrightarrow{\delta_{j_i-1}^{\varepsilon_{j_i-1}}} & \mathbb{I}^{k+j_i-1}. & &
\end{array}$$

На горизонтальных стрелках этой диаграммы нижний индекс морфизма δ увеличивается на 1, кроме мест j_1, j_2, …, где он увеличивается на 2, на вертикальных — на 1. Отсюда i коммутативных квадратов этой диаграммы приведут к каноническому разложению морфизма $\sigma \circ \delta_i^\varepsilon$:

$$\begin{array}{l}
\mathbb{I}^{k-1} \xrightarrow{\delta_1^{\varepsilon_1}} \mathbb{I}^k \xrightarrow{\delta_2^{\varepsilon_2}} \dots \xrightarrow{\delta_{j_1-1}^{\varepsilon_{j_1-1}}} \mathbb{I}^{k+j_1-2} \xrightarrow{\delta_{j_1+1}^{\varepsilon_{j_1+1}}} \\
\qquad \dots \xrightarrow{\delta_{j_i-1}^{\varepsilon_{j_i-1}}} \mathbb{I}^{k+j_i-1} \xrightarrow{\delta_{j_i}^{\varepsilon}} \mathbb{I}^{k+j_i} \xrightarrow{\delta_{j_i+1}^{\varepsilon_{j_i+1}}} \mathbb{I}^{k+j_i+1} \longrightarrow \dots .
\end{array}$$

Отображение σ на переменных $(x_1, \dots, x_k)$ как композиция отображений $\delta_1^{\varepsilon_1}$, $\delta_2^{\varepsilon_2}$, …, $\delta_{n-k}^{\varepsilon_{n-k}}$ принимает значения

$$\sigma(x_1, \dots, x_k) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j_1-1}, x_1, \varepsilon_{j_1+1}, \dots, \varepsilon_{j_k-1}, x_k, \varepsilon_{j_k+1}, \dots, \varepsilon_{n-k}).$$

Его образ будет равен $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$, где I_{j_1}, I_{j_2}, …, I_{j_k} — невырожденные интервалы. Образ отображения $\sigma \circ \delta_i^\varepsilon$ будет равен

$$I_1 \times \dots \times I_{j_i-1} \times \{\varepsilon\} \times I_{j_i+1} \times \dots \times I_n.$$

Отображение σ определено своим образом $I_1 \times \dots \times I_n$. Отсюда получаем, что действию дифференциалов комплекса C_* будет соответствовать действие дифференциалов комплекса $C_*(\mathscr{K}([0,1]^m))$. Применяя лемму 2.1, приходим к искомому утверждению. $\square$

Прообразом следующего предложения является лемма 4.2 из [1, приложение 2], доказанная там для симплициальных объектов абелевой категории. Мы доказываем ее для полукубических абелевых групп.

Предложение 4.2. *Пусть $F : \square_+^{op} \to \mathrm{Ab}$ — полукубическая абелева группа, F_* — комплекс абелевых групп $F_n = F(\mathbb{I}^n)$ и гомоморфизмов*

$$d_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \big(F\big(\delta_i^{n,1}\big) - F\big(\delta_i^{n,0}\big)\big).$$

Тогда для всех $n \geq 0$ имеют место естественные по $F \in \mathrm{Ab}^{\square_+^{op}}$ изоморфизмы $\varinjlim_n^{\square_+^{op}} F \cong H_n(F_*)$.

Доказательство. Из доказанной выше леммы 4.1 вытекает, что

$$0 \leftarrow \Delta_{\square_+}\mathbb{Z} \xleftarrow{d_0} Lh^{\mathbb{I}^0} \xleftarrow{d_1} Lh^{\mathbb{I}^1} \leftarrow \dots \xleftarrow{d_k} Lh^{\mathbb{I}^k} \xleftarrow{d_{k+1}} \dots$$

— проективная резольвента функтора $\Delta_{\square_+}\mathbb{Z} : \square_+ \to \mathrm{Ab}$. По лемме 3.3 $\varinjlim_n F \cong H_n(P_* \otimes F)$. По лемме 3.2 существуют естественные изоморфизмы $Lh^{\mathbb{I}^n} \otimes F \xrightarrow{\cong} F(\mathbb{I}^n)$. Дифференциалы комплекса $Lh^{\mathbb{I}^*} \otimes F$ равны

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \big(Lh^{\delta_i^{n,1}} - Lh^{\delta_i^{n,0}}\big) \otimes F,$$

и изоморфизм $Lh^{(-)} \otimes F \xrightarrow{\cong} F(-)$ сопоставляет им дифференциалы

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \big(F\big(\delta_i^{n,1}\big) - F\big(\delta_i^{n,0}\big)\big).$$

Отсюда получаем естественные по F изоморфизмы $\varinjlim_n^{\square_+^{op}} F \cong H_n(F_*)$. $\square$

Гомологии с коэффициентами в гомологических системах.

Определение 4.1. *Гомологической системой абелевых групп на полукубическом множестве $X \in \mathrm{Set}^{\square_+^{op}}$* называется произвольный функтор $F : (\square_+/X)^{op} \to \mathrm{Ab}$.

Рассмотрим абелевы группы $C_n(X,F) = \bigoplus_{\sigma \in X_n} F(\sigma)$. Определим дифференциалы $d_i^{n,\varepsilon} : C_n(X,F) \to C_{n-1}(X,F)$ как гомоморфизмы, делающие коммутативными диаграммы

$$\begin{tikzcd} \bigoplus\limits_{\sigma \in X_n} F(\sigma) \arrow[r, "d_i^{n,\varepsilon}"] & \bigoplus\limits_{\sigma \in X_{n-1}} F(\sigma) \\ F(\sigma) \arrow[u, "in_\sigma"] \arrow[r, "F(\delta_i^{n,\varepsilon} : \sigma\delta_i^{n,\varepsilon} \to \sigma)"] & F\big(\sigma\delta_i^{n,\varepsilon}\big). \arrow[u, "in_{\sigma\delta_i^{n,\varepsilon}}"'] \end{tikzcd}$$

Определение 4.2. Пусть X — полукубическое множество, $F : (\square_+/X)^{op} \to \mathrm{Ab}$ — гомологическая система абелевых групп. *Группами гомологий $H_n(X,F)$*

полукубического множества X с коэффициентами в F называются n-е группы гомологий комплекса $C_*(X,F)$, состоящего из групп

$$C_n(X,F) = \bigoplus_{\sigma\in X_n} F(\sigma)$$

и дифференциалов

$$d_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\big(d_i^{n,1} - d_i^{n,0}\big).$$

В частности, если $d_i^{n,1} = 0$ для всех $1 \le i \le n$, то дифференциал равен $-\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^i d_i^{n,0}$. В случае $d_i^{n,0} = 0$ дифференциал будет равен $\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^i d_i^{n,1}$. Приведем примеры гомологических систем, для которых это будет иметь место.

Пример 4.3 (группы гомологий Губо). Рассмотрим функтор $\mathbb{Z}^0 : \square_+^{op} \to \mathrm{Ab}$, принимающий на объектах постоянные значения, равные $\mathbb{Z}$, а на морфизмах определенный гомоморфизмами $\mathbb{Z}^0\big(\delta_i^{n,0}\big) = 1_{\mathbb{Z}}$ и $\mathbb{Z}^0\big(\delta_i^{n,1}\big) = 0$. Для произвольного полукубического множества $X = \big(X_n, \partial_i^{n,\varepsilon}\big)$ определена гомологическая система $\mathbb{Z}^0 \circ Q_X^{op} : (\square_+/X)^{op} \to \mathrm{Ab}$, где $Q_X : \square_+/X \to \square_+$ — забывающий функтор слоя. Легко видеть, что комплекс $C_*\big(X, \mathbb{Z}^0 \circ Q_X^{op}\big)$ будет изоморфен комплексу, состоящему из абелевых групп $L(X_n)$ и дифференциалов

$$d_n^0 = -\sum_{i=1}^{n}(-1)^i L(\partial_i^{n,0}).$$

Аналогично можно построить функтор $\mathbb{Z}^1 : \square_+^{op} \to \mathrm{Ab}$, принимающий значения $\mathbb{Z}^1(\mathbb{I}^n) = \mathbb{Z}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}^1\big(\delta_i^{n,0}\big) = 0$, $\mathbb{Z}^1\big(\delta_i^{n,1}\big) = 1_{\mathbb{Z}}$ при $1 \le i \le n$. Получим комплекс $C_*(X, \mathbb{Z}^1 \circ Q_X^{op})$, изоморфный комплексу, состоящему из абелевых групп $L(X_n)$ и дифференциалов

$$d_n^1 = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i L\big(\partial_i^{n,1}\big).$$

В результате получаем два комплекса при $\alpha \in \{0,1\}$

$$0 \leftarrow L(X_0) \xleftarrow{d_1^\alpha} L(X_1) \xleftarrow{d_2^\alpha} L(X_2) \leftarrow \dots$$

с дифференциалами

$$d_n^0 = -\sum_{i=1}^{n}(-1)^i L\big(\partial_i^{n,0}\big), \quad d_n^1 = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i L\big(\partial_i^{n,1}\big).$$

Поскольку они изоморфны комплексам $C_*\big(X, \mathbb{Z}^\alpha \circ Q_X^{op}\big)$, группы гомологий этих комплексов будут изоморфны $H_n\big(X, \mathbb{Z}^\alpha \circ Q_X^{op}\big)$. В работе Губо [11] группы гомологий этих двух комплексов были взяты за определение двух видов гомологий полукубического множества. Следовательно, группы гомологий, которые рассматривал Губо [11], являются частными случаями групп гомологий с коэффициентами в гомологической системе.

Пусть $\mathscr{H}\mathscr{S}$ — категория, объектами которой являются пары (X,F), состоящие из полукубических множеств X и гомологических систем абелевых групп $F : (\square_+/X)^{op} \to \mathrm{Ab}$. Морфизмы $(X,F) \to (Y,G)$ задаются с помощью морфизмов полукубических множеств $f : X \to Y$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
(\Box_+/X)^{op} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "(\Box_+/f)^{op}"'] & & \mathrm{Ab} \\
& (\Box_+/Y)^{op} \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}$$

Здесь $(\Box_+/f)^{op}$ обозначает функтор, двойственный к функтору $(\Box_+/f)(\sigma) = f \circ \sigma$. Поскольку соответствие $(X, F) \mapsto \breve{F}$ определяет функтор $\breve{(-)} : \mathscr{HS} \to \mathrm{Ab}^{\Box_+^{op}}$, получаем функторы $(X, F) \mapsto H_n(X, F)$ и $(X, F) \mapsto \varinjlim_n^{(\Box_+/X)^{op}} F$.

Теорема 4.3. *Существуют естественные по $(X, F) \in \mathscr{HS}$ изоморфизмы $H_n(X, F) \cong \varinjlim_n^{(\Box_+/X)^{op}} F$ для всех $n \geq 0$.*

Доказательство. По предложению 3.7 $\varinjlim_n^{(\Box_+/X)^{op}} F \cong \varinjlim_n^{\Box_+^{op}} \breve{F}$. Из свойства расширений Кана $\mathrm{Lan}^S \circ \mathrm{Lan}^T \cong \mathrm{Lan}^{S \circ T}$ вытекает естественность этого изоморфизма по $(X, F) \in \mathscr{HS}$. Комплекс $\breve{F}_*$ естественно изоморфен комплексу $C_*(X, F)$. Из предложения 4.2 следует, что $\varinjlim_n^{\Box_+^{op}} \breve{F} \cong H_n(\breve{F}_*)$. Из естественности изоморфизма $\varinjlim_n^{\Box_+^{op}} G \xrightarrow{\cong} H_n(G_*)$ по $G \in \mathrm{Ab}^{\Box_+^{op}}$ имеем естественность изоморфизма $\varinjlim_n^{\Box_+^{op}} \breve{F} \xrightarrow{\cong} H_n(\breve{F}_*)$. Следовательно, существует естественный изоморфизм $H_n(C_*(X, F)) \cong \varinjlim_n^{(\Box_+/X)^{op}} F$. $\Box$

Замечание 4.4. Пусть Δ — категория непустых конечных линейно упорядоченных множеств $[n] = \{0, 1, \ldots, n\}$, $n \geq 0$, и неубывающих отображений. Категория Δ_+ имеет те же объекты, но ее морфизмы — возрастающие отображения. Лемма 4.1 остается верной, если вместо категории $\Box_+$ подставить категорию Δ, а вместо объектов $\mathbb{I}^k$ — объекты $[k]$. Она верна также для категории Δ_+ [2, лемма 1.2]. Предложение 4.2 и теорема 4.3 также справедливы в случае категорий Δ, Δ_+ и $\Box_+$.

Но если вместо категории $\Box_+$ взять содержащую ее категорию $\Box$ с объектами $\mathrm{Ob}(\Box) = \mathrm{Ob}(\Box_+)$ и морфизмами, порожденными отображениями $\delta_i^{n,\varepsilon}$ и неубывающими сюръекциями

$$\sigma_i^n : \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}^{n-1}, \quad \sigma_i^n(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

то лемма 4.1 перестает быть верной. Например, при $n = 0$ получаем комплекс

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \ldots,$$

все группы гомологий которого изоморфны $\mathbb{Z}$.

Категория $\Box$ имеет терминальный объект $\mathbb{I}^0$. Стало быть, функтор $\varinjlim^{\Box}$ точен, откуда с помощью леммы 3.1 получаем $\varinjlim_n^{\Box^{op}} \Delta\mathbb{Z} \cong \varinjlim_n^{\Box} \Delta\mathbb{Z} = 0$ при $n > 0$. Мы видели, что в этом случае все группы $H_n(\Delta\mathbb{Z}_*)$ изоморфны $\mathbb{Z}$. Следовательно, в случае $\Box$ предложение 4.2 неверно.

Пусть $\Box^0 = h_{\mathbb{I}^0} \in \mathrm{Set}^{\Box^{op}}$ — кубическая точка. Категория $\Box/\Box^0$ изоморфна $\Box$. Отсюда $\varinjlim_n^{(\Box/\Box^0)^{op}} \Delta\mathbb{Z} \cong \varinjlim_n^{pt} \Delta\mathbb{Z}$, тогда как $H_n(\Box^0, \Delta\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ для всех $n \geq 0$. Значит, для кубических множеств теорема 4.3 неверна.

5. Приложения

Критерий изоморфизма групп гомологий. Пусть $f : X \to Y$ — морфизм полукубических множеств. Мы будем отождествлять кубики $\sigma \in X_m$ с соответствующими сингулярными кубиками $\tilde{\sigma} : h_{\mathbb{I}^m} \to X$. Функтор $\square_+/f : \square_+/X \to \square_+/Y$ сопоставляет каждому кубику $\sigma : h_{\mathbb{I}^m} \to X$ композицию $f\circ\sigma$. Он переводит морфизмы (δ, σ, τ) категории $\square_+/X$ в морфизмы $(\delta, f\circ\sigma, f\circ\tau)$. Обозначим через $f^* : \mathrm{Ab}^{(\square_+/Y)^{op}} \to \mathrm{Ab}^{(\square_+/X)^{op}}$ функтор, сопоставляющий каждой гомологической системе абелевых групп F на Y композицию $F\circ(\square_+/f)^{op}$. Согласно предложению 3.4 существуют канонические естественные по F гомоморфизмы $\varinjlim_n^{(\square_+/X)^{op}} f^*(F) \to \varinjlim_n^{(\square_+/Y)^{op}} F$. Получаем канонические гомоморфизмы $H_n(X, f^*(F)) \to H_n(Y, F)$.

Пусть $\overleftarrow{f}(\sigma)$ — полукубическое множество, которое определяется декартовым квадратом

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle f_\sigma}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\sigma} \\ \overleftarrow{f}(\sigma) & \longrightarrow & h_{\mathbb{I}^n}. \end{array} \qquad (2)$$

Полукубическое множество $\overleftarrow{f}(\sigma)$ называется *обратным образом сингулярного кубика* σ. Поскольку

$$(\square_+/f)/\sigma \cong \square_+/\overleftarrow{f}(\sigma)$$

и

$$\varinjlim_n^{(\square_+/\overleftarrow{f}(\sigma))^{op}} \Delta\mathbb{Z} \cong H_n(\overleftarrow{f}(\sigma), \Delta\mathbb{Z}),$$

из леммы 3.1 и предложения 3.4 вытекает

Следствие 5.1. *Гомоморфизмы $H_n(X, f^*(F)) \to H_n(Y, F)$ суть изоморфизмы для всех $F \in \mathrm{Ab}^{(\square_+/Y)^{op}}$ и $n \geq 0$ тогда и только тогда, когда для каждого сингулярного кубика $\sigma \in \square_+/Y$ целочисленные группы гомологий обратного образа этого кубика изоморфны группам гомологий точки.*

Гомологии копредела полукубических множеств. Функторы, определенные на малых категориях и принимающие значения в категории $\mathscr{A}$, называются *диаграммами объектов категории* $\mathscr{A}$. Если областью определения диаграммы служит малая категория J, то диаграмма обозначается через $\{X^i\}_{i\in J}$ или, коротко, $\{X^i\}$, где X^i — ее значения на $i \in \mathrm{Ob}(J)$.

Напомним [12], что спектральная последовательность $\{E^r_{p,q}\}$ первой четверти называется *сходящейся к градуированной абелевой группе* $\{H_n\}$, если для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такая последовательность подгрупп

$$0 = F_{-1}H_n \subseteq F_0H_n \subseteq F_1H_n \subseteq \cdots \subseteq F_nH_n = H_n,$$

что $F_pH_n/F_{p-1}H_n \cong E^\infty_{p,n-p}$ для всех $0 \leq p \leq n$. Ниже запись $E^2_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}$ будет означать, что спектральная последовательность $\{E^r_{p,q}\}$ начинается с $E^2_{p,q}$ и сходится к $\{H_n\}$.

Предложение 5.2. *Пусть $\{X^i\}_{i\in J}$ — такая диаграмма полукубических множеств $X^i \in \mathrm{Set}^{\square_+^{op}}$, что*

$$\varinjlim_q^J \{L(X^i_n)\}_{i\in J} = 0 \quad \text{для любых } n \in \mathbb{N} \text{ и } q > 0. \qquad (3)$$

Пусть $\lambda_i : X^i \to \varinjlim^J \{X^i\}_{i\in J}$ — конус морфизмов копредела. Тогда для любой гомологической системы абелевых групп F на $\varinjlim^J \{X^i\}$ существует спектральная последовательность первой четверти

$$E^2_{p,q} = \varinjlim_p^J \{H_q(X^i, \lambda_i^*(F))\}_{i\in J} \Rightarrow \{H_{p+q}(\varinjlim^J \{X^i\}_{i\in J}, F)\}.$$

Доказательство. При выполнении (3) согласно [13, следствие 2.4] для любых абелевой категории $\mathscr{A}$ с точными произведениями и функтора

$$F : \square_+/\varinjlim^J \{X^i\}_{i\in J} \to \mathscr{A}$$

существует спектральная последовательность

$$E_2^{p,q} = \varprojlim\nolimits^p_{J^{op}} \{\varprojlim\nolimits^q_{\square_+/X^i} F\circ(\square_+/\lambda_i)\}_{i\in J} \Rightarrow \varprojlim\nolimits^{p+q}_{\square_+/\varinjlim^J\{X^i\}_{i\in J}} F.$$

Подставляя $\mathscr{A} = \mathrm{Ab}^{op}$, получим спектральную последовательность абелевых групп $E^2_{p,q} = \varinjlim\nolimits^J_p \{\varinjlim\nolimits_q^{(\square_+/X^i)^{op}} \lambda_i^*(F)\}_{i\in J} \Rightarrow \{\varinjlim\nolimits_{p+q}^{(\square_+/\varinjlim^J\{X^i\})^{op}} F\}$. Применение теоремы 4.3 заканчивает доказательство. $\square$

Локально направленным покрытием полукубического множества X называется диаграмма полукубических множеств $\{X^i\}_{i\in J}$ над частично упорядоченным множеством J, удовлетворяющая условиям:

1) каждой паре элементов $i \le j$ множества J она сопоставляет вложение $X^i \subseteq X^j$;

2) для каждого $n\in\mathbb{N}$ верно $X_n = \bigcup\limits_{i\in J} X_n^i$;

3) для каждого $\sigma \in X_n^i \cap X_n^j$ существует такое $k\in J$, что $k\le i$, $k\le j$ и $\sigma\in X_n^k$.

Следствие 5.3. *Пусть $\{X^i\}_{i\in J}$ — локально направленное покрытие полукубического множества X, λ_i — вложения $X^i\subseteq X$, F — гомологическая система абелевых групп на X. Тогда существует спектральная последовательность первой четверти*

$$E^2_{p,q} = \varinjlim\nolimits^J_p \{H_q(X^i, \lambda_i^*(F))\}_{i\in J} \Rightarrow \{H_{p+q}(X,F)\}.$$

Доказательство вытекает из теоремы 4.3 и [13, следствие 2.5]. $\square$

Спектральная последовательность морфизма. Пусть $f : X\to Y$ — морфизм полукубических множеств. Для каждого $\sigma\in\square_+/Y$ декартов квадрат (2) определяет обратный образ кубика σ и морфизм $f_\sigma : \overleftarrow{f}(\sigma)\to X$. Обратные образы сингулярных кубиков составляют диаграмму полукубических множеств $\{\overleftarrow{f}(\sigma)\}_{\sigma\in\square_+/Y}$, копредел которой изоморфен X. Применяя общий результат о спектральной последовательности морфизма [14, теорема 4.1], где вместо категории $\mathscr{A}$ нужно взять категорию Ab^{op}, получаем с помощью теоремы 4.3 следующее утверждение.

Следствие 5.4. *Пусть $f : X\to Y$ — морфизм полукубических множеств, F — гомологическая система абелевых групп на X. Тогда существует спектральная последовательность первой четверти*

$$E^2_{p,q} = \varinjlim\nolimits^{\square_+/Y}_p \{H_q(\overleftarrow{f}(\sigma), f_\sigma^*(F))\}_{\sigma\in\square_+/Y} \Rightarrow H_{p+q}(X,F).$$

В частности, если диаграмма $\{H_q(\overleftarrow{f}(\sigma), f_\sigma^*(F))\}_{\sigma\in\square_+/Y}$ состоит из изоморфизмов, то, обращая их, получим диаграмму над двойственной категорией. Обозначим ее через $\{H_q(\overleftarrow{f}(\sigma), f_\sigma^*(F))\}^{-1}_{\sigma\in(\square_+/Y)^{op}}$. Вновь применяя теорему 4.3, приходим к спектральной последовательности

$$E^2_{p,q} \cong H_p(Y, \{H_q(\overleftarrow{f}(\sigma), f_\sigma^*(F))\}^{-1}_{\sigma\in(\square_+/Y)^{op}}) \Rightarrow H_{p+q}(X,F),$$

связывающей группы гомологий полукубических множеств X и Y.

6. Заключение

Целочисленные гомологии кубических подмножеств евклидовых пространств применяются в теории распознавания образов. В диссертации [11] группы гомологий полукубических множеств (см. пример 4.3) применялись для исследования математических моделей параллельных вычислительных систем. Возникла проблема, связанная с направленностью процессов. Автор надеется, что гомологии с коэффициентами в гомологических системах помогут справиться с этой проблемой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Габриель П., Цисман М.* Категории частных и теория гомотопий. М.: Мир, 1971.
2. *Хусаинов А. А.* Сравнение размерностей малой категории // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 6. С. 1413–1426.
3. *Oberst U.* Homology of categories and exactness of direct limits // Math. Z. 1968. Bd 107. S. 87–115.
4. *Kaczynski T., Mischaikov K., Mrozek M.* Computational homology. New York: Springer-Verl., 2004. (Appl. Math. Sci.; 157).
5. *Kaczynski T., Mischaikov K., Mrozek M.* Computational homology // Homology Homotopy Appl. 2003. V. 5, N 2. P. 233–256.
6. *Mitchell B.* Rings with several objects // Adv. Math. 1972. V. 8. P. 1–161.
7. *Schubert H.* Kategorien II. Berlin: Akad.-Verl., 1970.
8. *Oberst U.* Basisweiterung in der Homologie kleiner Kategorien // Math. Z. 1967. Bd 100. S. 36–58.
9. *Маклейн С.* Категории для работающего математика. М.: Физматлит, 2004.
10. *Букур И., Деляну А.* Введение в теорию категорий и функторов. М.: Мир, 1972.
11. *Goubault E.* The geometry of concurrency: Thes ... doct. phylosophy (mathematics). École Normale Supér., 1995. 349 p. http://www.dmi.ens.fr/~goubault.
12. *Маклейн С.* Гомология. М.: Мир, 1966.
13. *Хусаинов А. А.* Когомологии малых категорий с коэффициентами в абелевой категории с точными произведениями // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 4. С. 210–215.
14. *Хусаинов А. А.* Гомотопическая эквивалентность накрытия и спектральная последовательность расслоения // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 1. С. 141–147.

Статья поступила 9 октября 2006 г.

Хусаинов Ахмет Аксанович
Комсомольский-на-Амуре гос. технический университет,
пр. Ленина, 27, Комсомольск-на-Амуре 681013
husainov@knastu.ru