Сибирский математический журнал
Июль—август, 2007. Том 48, № 4

УДК 517.95

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ НА КРИВУЮ ДЛЯ ТОГО, ЧТОБЫ ОНА ЯВЛЯЛАСЬ ОБРАЗОМ ГРАДИЕНТА C^1–ГЛАДКОЙ ФУНКЦИИ

М. В. Коробков, Е. Ю. Панов

Аннотация: Найдены необходимые и достаточные условия на плоскую кривую для того, чтобы она была множеством значений градиента C^1-гладкой функции двух переменных. В качестве одного из следствий указаны необходимые и достаточные условия на непрерывную функцию φ для существования нетривиальных C^1-гладких решений дифференциального уравнения $\frac{\partial v}{\partial t} = \varphi\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$.

Ключевые слова: C^1-гладкая функция, множество значений градиента, кривая.

Введение

Используя метод выпуклого интегрирования, предложенный М. Громовым [1], ряд математиков (Болл, Мюллер, Шверак, Кирхейм и др., см., например, [2]) изучали следующую проблему: каким условиям должно удовлетворять множество K, чтобы дифференциальное соотношение $\nabla v \in K$ имело нетривиальные липшицевы решения? Как указано в названии настоящей статьи, мы изучаем сходную проблему для C^1-гладких (не только липшицевых) решений дифференциальных соотношений.

Основным методом решения указанных задач в настоящей статье является теория изэнтропических решений дифференциальных уравнений, введенных в диссертации второго автора [3]. Отметим, что теоремы, полученные в настоящей статье, усиливают и обобщают некоторые теоремы из [4]. Кроме того, доказательство одного из основных утверждений статьи (теоремы 1.4.2) опирается на некоторый аналог теоремы Сарда для C^1-гладких функций двух переменных, доказанный в работе [5] (см. также теорему 2.4 настоящей статьи).

Наши результаты дают некоторую информацию об аналитических и геометрических свойствах множеств значений производных C^1-гладких функций двух переменных. Геометрические свойства множеств значений производных дифференцируемых (негладких) функций в многомерном случае изучались ранее, например, в работах [6, 7].

Всюду в дальнейшем *кривой* мы называем непрерывное отображение $\gamma : \mathbb{R} \ni u \mapsto (\gamma_1(u), \gamma_2(u)) \in \mathbb{R}^2$. Если отображение $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ непрерывно и инъективно, то мы будем называть его также *дугой*. Символом ∇v обозначается

Первый автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00482–а), грантом Фонда содействия отечественной науке для молодых кандидатов и грантом Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН 2006. Второй автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00289) и Немецким научно-исследовательским обществом (проект DFG No. 436 RUS 113/895/0-1).

градиент $\nabla v = (v_x, v_t)$ функции $v = v(x,t)$. Через $C^k(\Omega)$ обозначается множество функций из Ω в $\mathbb{R}$ класса гладкости C^k. *Областью* мы называем открытое связное множество. Всюду в дальнейшем $\operatorname{Int} E$ — внутренность множества E, $\operatorname{Cl} E$ — замыкание множества E (иногда для той же цели служит значок $\overline{E}$), ∂E — граница множества E, $\operatorname{meas}(E)$ — мера Лебега множества E (мы используем общее обозначение meas для всех размерностей), $\mathscr{H}^1(E)$ — одномерная мера Хаусдорфа множества E. Символом $a \cdot b$ мы обозначаем скалярное произведение векторов a, b. Некоторые другие обозначения будут вводиться по ходу работы.

Работа поделена на две части: в одной мы приводим формулировки, а в другой — доказательства основных результатов.

1. Основные результаты

1.1. Необходимые и достаточные условия (в аналитической форме) на кривую для того, чтобы она являлась множеством значений градиента C^1-гладкой функции.

Теорема 1.1.1. *Пусть $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ — непрерывное инъективное отображение (дуга), и пусть $v \in C^1(\Omega)$, где Ω — область в $\mathbb{R}^2$. Предположим, что выполнены следующие включения:*

$$\nabla v(\Omega) \subset \gamma(\mathbb{R}), \tag{1}$$

$$\gamma((a,b)) \subset \nabla v(\Omega), \tag{2}$$

где (a,b) — некоторый интервал из $\mathbb{R}$. Тогда γ обладает следующим свойством:

(Γ_1) для каждой точки $u_0 \in (a,b)$ существуют окрестность $V = V(u_0)$ и непрерывная слева функция $l : V \to \mathbb{R}$ ограниченной вариации такие, что после соответствующей линейной ортонормированной замены координат в плоскости $\mathbb{R}^2$ имеет место формула

$$\forall [u_1, u_2] \subset V \quad \gamma_2(u)\big|_{u_1}^{u_2} = \gamma_1(u) l(u)\big|_{u_1}^{u_2} - \int\limits_{u_1}^{u_2 - 0} \gamma_1(u)\, dl(u), \tag{3}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега — Стилтьеса по полуоткрытому промежутку $[u_1, u_2)$ и используется стандартное обозначение $f(u)\big|_{u_1}^{u_2} := f(u_2) - f(u_1)$.

Замечание 1.1.2. Если γ есть график функции $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, т. е. $\gamma(u) = (u, \varphi(u))$, где $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, то функция $l(u)$ из теоремы 1.1.1 вычисляется по формуле $l(u) \equiv \varphi'(u)$, а формула (3) превращается в обычную формулу интегрирования по частям.

Замечание 1.1.3. Свойство (Γ_1) можно переписать в эквивалентной форме:

$(\widetilde{\Gamma}_1)$ для каждой точки $u_0 \in (a,b)$ существуют окрестность $V = V(u_0)$, непрерывная слева функция $l : V \to \mathbb{R}$ ограниченной вариации и единичный вектор $\bar{e} \in \mathbb{R}^2$ такие, что справедлива следующая формула:

$$\forall [u_1, u_2] \subset V \quad \bar{e} \cdot \gamma(u)\big|_{u_1}^{u_2} = \bar{e}^{\perp} \cdot \gamma(u) l(u)\big|_{u_1}^{u_2} - \int\limits_{u_1}^{u_2 - 0} \bar{e}^{\perp} \cdot \gamma(u)\, dl(u),$$

где символом $\bar{e}^{\perp}$ обозначается единичный вектор, ортогональный к $\bar{e}$.

Теорема 1.1.1 допускает обращение.

Теорема 1.1.4. *Пусть $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение, не постоянное ни на каком интервале. Пусть, далее, на некотором интервале $(a,b) \subset \mathbb{R}$ отображение γ обладает свойством (Γ_1). Тогда найдутся область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и функция $v \in C^1(\Omega)$ такие, что выполнены включения (1), (2). Более точно, существует функция $u(\cdot) \in C(\Omega)$ такая, что справедливы равенства*

$$\nabla v(z) \equiv \gamma(u(z)) \quad \text{при } z \in \Omega, \tag{4}$$

$$u(\Omega) = (a,b). \tag{5}$$

1.2. Необходимые и достаточные условия на функцию φ для существования нетривиальных C^1-гладких решений уравнения $v_t = \varphi(v_x)$. В данном пункте мы рассмотрим случай, когда кривая γ является графиком некоторой непрерывной функции $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, т. е. $\gamma(u) \equiv (u, \varphi(u))$. В этом случае включения (1), (2) эквивалентны соотношениям

$$v_t = \varphi(v_x) \quad \text{в } \Omega, \tag{6}$$

$$(a,b) \subset v_x(\Omega). \tag{7}$$

Применяя общие теоремы 1.1.1, 1.1.4, получаем следующие утверждения.

Теорема 1.2.1. *Пусть функция $v \in C^1(\Omega)$ на области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ удовлетворяет соотношениям (6), (7), где $\varphi \in C(\mathbb{R})$. Тогда φ обладает следующим свойством.*

(Γ_2) *Существует замкнутое относительно интервала (a,b) множество F нулевой меры такое, что функция φ удовлетворяет условию Липшица локально на $U = (a,b) \setminus F$. Более того, функция φ дифференцируема на U всюду, за исключением не более чем счетного множества точек $E_{\sigma,U} \subset U$. Далее, если формально доопределить производную φ' на всем интервале (a,b) по правилу*

$$\varphi'(u) = \begin{cases} \varphi'(u), & u \in U \setminus E_{\sigma,U}, \\ \lim\limits_{\tau \to u-0} \varphi'(\tau), & u \in E_{\sigma,U}, \\ \infty, & u \in F, \end{cases}$$

то полученная функция φ' будет иметь локально ограниченную вариацию на U. Кроме того, для любой точки $u_0 \in (a,b)$ найдутся ее окрестность $V = V(u_0)$ и число $\alpha \in \mathbb{R}$ такие, что функция $\frac{1}{\varphi' - \alpha} : V \to \mathbb{R}$ будет функцией ограниченной вариации на V.

В частности, функция φ должна быть дважды дифференцируема (в обычном смысле) почти всюду на (a,b).

Замечание 1.2.2. Доопределение производной φ' в точках множества F в теореме 1.2.1 является формальным: функция φ может не иметь ни конечной, ни бесконечной производной в точках множества F.

Первая часть теоремы 1.2.1 доказана в работе [4]. Теорема 1.2.1 вытекает из теоремы 1.1.1 и следующей леммы.

Лемма 1.2.3. *Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R})$ и $(a,b) \subset \mathbb{R}$ — некоторый интервал. Тогда отображение $\gamma : \mathbb{R} \ni u \mapsto (u, \varphi(u)) \in \mathbb{R}^2$ обладает свойством (Γ_1) на (a,b) в том и только том случае, когда функция φ имеет свойство (Γ_2) на (a,b).*

Из леммы 1.2.3 и теоремы 1.1.4 следует, что справедлива обратная к теореме 1.2.1

Теорема 1.2.4. *Пусть функция $\varphi \in C(\mathbb{R})$ обладает свойством (Γ_2) на некотором интервале $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Тогда найдутся область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и функция $v(x,t) \in C^1(\Omega)$ такие, что выполнены соотношения (6), (7).*

1.3. Существование и непрерывность касательных. Обозначим через $\mathbb{R}P^1$ множество прямых линий плоскости $\mathbb{R}^2$, проходящих через точку 0, т. е. $\mathbb{R}P^1$ есть одномерное проективное пространство. Иногда мы будем естественным образом отождествлять прямую из $\mathbb{R}P^1$ с вектором из $\mathbb{R}^2$, параллельным этой прямой.

Определение 1.3.1. Пусть $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение (кривая), не постоянное ни на каком интервале. Будем говорить, что прямая $p \in \mathbb{R}P^1$ является *σ-касательной справа* к кривой γ в точке u_0 (обозначается $p = \gamma'_+(u_0)$), если для любой последовательности $u_\nu \to u_0 + 0$ такой, что

$$\sup_\nu \sup_{u \in [u_0, u_\nu]} \frac{|\gamma(u) - \gamma(u_0)|}{|\gamma(u_\nu) - \gamma(u_0)|} < \infty,$$

имеет место сходимость (понимаемая в естественном смысле)

$$\frac{\gamma(u_\nu) - \gamma(u_0)}{|\gamma(u_\nu) - \gamma(u_0)|} \to p.$$

Аналогично вводится понятие *σ-касательной* $\gamma'_-(u_0)$ *слева* в точке u_0 и просто *σ-касательной* $\gamma'(u_0)$ в точке u_0. Очевидно, что если кривая γ имеет обычную касательную в точке, то эта касательная будет также и σ-касательной. Однако обратное утверждение неверно.

Теорема 1.3.2. *Пусть $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ — непрерывное инъективное отображение (дуга), и пусть $v \in C^1(\Omega)$, где Ω — область в $\mathbb{R}^2$. Предположим, что выполнены включения* (1), (2). *Тогда помимо свойства* (Γ_1) *дуга γ обладает также следующим свойством:*

(Γ_3) *для любого $u \in (a,b)$ существуют σ-касательные справа и слева $\gamma'_+(u)$ и $\gamma'_-(u)$. Далее, для каждой точки $u_0 \in (a,b)$ существуют окрестность $V = V(u_0)$ и непрерывная слева функция $l : V \to \mathbb{R}$ ограниченной вариации такие, что после соответствующей линейной ортонормированной замены координат*[1] *в плоскости $\mathbb{R}^2$ справедливы следующие равенства:*

$$\forall u \in V \quad \gamma'_+(u) = (1, l(u+0)), \quad \gamma'_-(u) = (1, l(u)), \tag{8}$$

т. е. вышеупомянутые односторонние σ-касательные параллельны векторам $(1, l(u+0))$, $(1, l(u))$ соответственно[2]. *Таким образом, $\gamma'_+(u)$ непрерывна справа, а $\gamma'_-(u)$ непрерывна слева в каждой точке $u \in (a,b)$, причем $\gamma'_+(u) = \gamma'_-(u) = \gamma'(u)$ для всех точек $u \in (a,b) \setminus E_\sigma$, где исключительное множество E_σ не более чем счетно.*

Теорема 1.3.2 немедленно вытекает из теоремы 1.1.1 и следующей леммы.

Лемма 1.3.3. *Пусть непрерывное отображение $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ обладает свойством (Γ_1) на некотором интервале $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Предположим, что отображение γ не постоянно ни на каком интервале. Тогда γ имеет также свойство (Γ_3) на (a,b).*

1.4. Изэнтропические решения дифференциальных уравнений. Предположим, что для дуги $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ и функции $v \in C^1(\Omega)$ выполнено включение (1). Тогда мы можем определить функцию $u \in C(\Omega)$ такую, что $\gamma_1(u(x,t)) = v_x(x,t)$, $\gamma_2(u(x,t)) = v_t(x,t)$, $(x,t) \in \Omega$, и в силу равенства смешанных производных функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\gamma_1(u)_t - \gamma_2(u)_x = 0 \quad \text{в } \mathscr{D}'(\Omega). \tag{9}$$

[1] Здесь окрестность V, функция l и замена координат те же самые, что и в свойстве (Γ_1).

[2] Мы обозначаем через $l(u+0)$ соответствующий односторонний предел функции l.

Пусть $\gamma : \mathbb{R} \ni u \mapsto (\gamma_1(u), \gamma_2(u)) \in \mathbb{R}^2$ — произвольное непрерывное отображение[3)].

Определение 1.4.1 (ср. определение 2 из [4]). Функция $u(x,t) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ называется *изэнтропическим решением* уравнения (9), если
$$\forall k \in \mathbb{R} \quad \gamma_1(\max(u,k))_t - \gamma_2(\max(u,k))_x = 0 \ \text{ в } \mathscr{D}'(\Omega).$$

Теорема 1.4.2. *Пусть $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение, и пусть функция $u(x,t) \in C(\Omega)$ является непрерывным обобщенным решением уравнения* (9) *в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Предположим, что $\operatorname{Int}\gamma(\mathbb{R}) = \varnothing$. Тогда $u(x,t)$ является изэнтропическим решением уравнения* (9).

Теперь теоремы 1.1.1, 1.2.1 вытекают из теоремы 1.4.2 и следующих результатов.

Теорема 1.4.3. *Пусть $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение, не постоянное ни на каком интервале, и пусть функция $u(x,t) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ является изэнтропическим решением уравнения* (9) *в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Положим $b = \operatorname{ess\,sup} u(x,t) \le +\infty$, $-\infty \le a = \operatorname{ess\,inf} u(x,t)$ в Ω. Тогда γ обладает свойствами* (Γ_1) *и* (Γ_3) *на интервале* (a,b).

Теорема 1.4.4. *Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R})$, и пусть функция $u(x,t) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ является изэнтропическим решением уравнения $u_t - \varphi(u)_x = 0$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Положим $b = \operatorname{ess\,sup} u(x,t) \le +\infty$, $-\infty \le a = \operatorname{ess\,inf} u(x,t)$ в Ω. Тогда функция φ обладает свойством* (Γ_2) *на интервале* (a,b).

Обращаем внимание читателя на то, что в теоремах 1.4.3, 1.4.4 мы не предполагаем, что функция $u(x,t)$ непрерывна.

2. Доказательства основных результатов

Ниже мы несколько раз будем использовать следующее

Замечание 2.1. Если функция $l : V \to \mathbb{R}$ ограниченной вариации непрерывна слева, то легко проверяется, что правая часть в равенстве (3) всегда является непрерывной функцией по u_1, u_2.

Порядок, в котором проводятся доказательства в этой части статьи, существенно отличается от нумерации утверждений в предыдущей части. Мы начнем с более простых геометрических утверждений.

Доказательство леммы 1.3.3 проводится прямым вычислением и использованием элементарных оценок интеграла Лебега — Стилтьеса. Поэтому мы его опускаем. (Впрочем, мы планируем опубликовать подробное доказательство этой леммы в одной из будущих статей.) $\square$

В работе нам понадобится одно утверждение, аналог которого для обычных касательных широко известен (см., например, [8, с. 385]).

Лемма 2.2. *Предположим, что кривая $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ обладает свойством* (Γ_1) *на некотором интервале $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Возьмем произвольно прямую $p \in \mathbb{R}P^1$ и обозначим $F_p = \{\gamma(u) \mid u \in (a,b),\ \gamma'_+(u) = p$ или $\gamma'_-(u) = p\}$. Тогда проекция множества F_p на прямую, перпендикулярную прямой p, имеет линейную меру нуль.*

Доказательство леммы 2.2. По лемме 1.3.3 кривая γ обладает свойством (Γ_3) на интервале (a,b). Зафиксируем прямую $p \in \mathbb{R}P^1$ и обозначим

[3)] Далее в этом разделе мы не предполагаем, что отображение γ инъективно.

$W_p = \{u \in (a,b) \mid \gamma'_+(u) = \gamma'_-(u) = \gamma'(u) = p\}$. Так как по свойству ($\Gamma_3$) множество точек E_σ, где σ-касательные слева и справа отличаются, не более чем счетно, то лемма 2.2 сводится к следующему утверждению: *для произвольной прямой $p \in \mathbb{R}P^1$ проекция множества $\widetilde{F}_p = \{\gamma(u) \mid u \in W_p\}$ на прямую, перпендикулярную прямой p, имеет линейную меру нуль.* Достаточно доказать это утверждение локально, т. е. что для каждой точки $u_0 \in W_p$ существует ее окрестность V такая, что проекция множества $\widetilde{F}_{p,V} = \{\gamma(u) \mid u \in W_p \cap V\}$ на прямую, перпендикулярную прямой p, имеет линейную меру нуль.

Зафиксируем произвольно точку $u_0 \in W_p$. Возьмем ее окрестность V, существование которой утверждается в свойстве (Γ_1), и соответствующую непрерывную слева функцию $l : V \to \mathbb{R}$ ограниченной вариации. Без умаления общности будем считать, что V есть конечный открытый интервал. Произведем ортонормированное преобразование координат, о котором говорится в свойстве (Γ_1). В этой новой системе координат справедлива формула (3) и по свойству (Γ_3) направление σ-касательной в точке $u \in V \setminus E_\sigma$ параллельно вектору $(1, l(u))$. Обозначим $l_0 = l(u_0)$, $V_p = \{u \in V \mid l(u+0) = l(u) = l_0\}$. Тогда наша прямая p параллельна вектору $(1, l_0)$, а множество $\widetilde{F}_{p,V}$ определяется по формуле $\widetilde{F}_{p,V} = \{\gamma(u) \mid u \in V_p\}$. Из тех фактов, что функция l является функцией ограниченной вариации на V, непрерывна в каждой точке множества V_p и $l(u) \equiv l_0$ на V_p, легко доказать, что[4)]

$$\operatorname{Var}(l, V_p) = 0. \tag{10}$$

Зададим теперь функцию $g : V \to \mathbb{R}$ по формуле[5)] $g(u) = \int\limits_{u_0}^{u-0} \gamma_1(\tau)\, dl(\tau)$. Из равенства (10) и непрерывности функции γ_1 немедленно вытекает, что $\operatorname{Var}(g, V_p) = 0$. Из последнего равенства в силу теоремы 13.3 из [8, гл. III] следует, что

$$\operatorname{meas}(g(V_p)) = 0. \tag{11}$$

Делая перенос начала координат в плоскости $\mathbb{R}^2$, мы можем считать без потери общности, что $\gamma(u_0) = 0$. Тогда формулу (3) можно переписать в виде $\forall u \in V$ $\gamma_2(u) - \gamma_1(u) l(u) = -g(u)$. В частности,

$$\forall u \in V_p \quad \gamma_2(u) - \gamma_1(u) l_0 = -g(u). \tag{12}$$

Ясно, что прямая, перпендикулярная направлению $(1, l_0)$, параллельна направлению $(-l_0, 1)$. Поэтому левая часть в равенстве (12) с точностью до множителя равна координате проекции точки $\gamma(u) = (\gamma_1(u), \gamma_2(u))$ на прямую, перпендикулярную направлению $(1, l_0)$. Тогда из формул (11), (12) непосредственно следует искомое утверждение, что проекция множества $\widetilde{F}_{p,V}$ на прямую, перпендикулярную направлению $(1, l_0)$, имеет линейную меру нуль. Лемма 2.2 доказана. $\square$

Доказательство леммы 1.2.3. Для функции $\varphi \in C(\mathbb{R})$ рассмотрим дугу

$$\gamma : \mathbb{R} \ni u \mapsto (u, \varphi(u)) \in \mathbb{R}^2. \tag{13}$$

[4)] Напомним, что *вариацией* $\operatorname{Var}(f, E)$ функции $f : V \to \mathbb{R}$ на множестве $E \subset V$ называется нижняя грань сумм вида $\sum\limits_k \operatorname{Var}(f, J_k)$, где $J_k \subset V$ есть последовательность отрезков таких, что $E \subset \bigcup\limits_k \operatorname{Int} J_k$ (см., например, [8, с. 130]).

[5)] Здесь и далее мы полагаем по определению, что $\int\limits_{u_0}^{u-0} \gamma_1(\tau)\, dl(\tau) = -\int\limits_{u}^{u_0-0} \gamma_1(\tau)\, dl(\tau)$ при $u < u_0$, причем последний интеграл понимается в смысле Лебега — Стилтьеса по полуоткрытому промежутку $[u, u_0)$.

Докажем сначала, что из свойства (Γ_1) следует свойство (Γ_2). Предположим, что γ обладает свойством (Γ_1) на интервале (a,b). По лемме 1.3.3 γ обладает также свойством (Γ_3), в частности, в каждой точке $u \in (a,b)$ существуют односторонние σ-касательные. Имеет место несложное геометрическое

Предложение 2.3. *Если кривая γ вида* (13) *имеет в точке $u_0 \in (a,b)$ невертикальную* (*т. е. не параллельную вектору* $(0,1)$) *σ-касательную справа или слева, то эта σ-касательная является касательной в обычном смысле при $u \to u_0+0$ или $u \to u_0-0$ соответственно.*

Положим $U = \{u \in (a,b) \mid \sigma$-касательные и справа и слева в точке u не параллельны вектору $(0,1)\}$. В силу свойств односторонней непрерывности, изложенных в свойстве (Γ_3), множество U открыто. По предложению 2.3 в каждой точке $u \in U$ существуют обе односторонние производные $\varphi'_+(u) < \infty$, $\varphi'_-(u) < \infty$, причем в силу свойства (Γ_3) каждая из них имеет конечные пределы справа и слева во всех точках $u \in U$. Отсюда следует, что функция φ локально липшицева на U. Более того, из свойства (Γ_3) вытекает, что $\varphi'_+(u) = \varphi'_-(u) = \varphi'(u)$ для всех $u \in U$, за исключением множества $E_{\sigma,U} = E_\sigma \cap U$. Поскольку множество E_σ не более чем счетно (см. свойство (Γ_3)), то и его подмножество $E_{\sigma,U}$ не более чем счетно. Доопределим производную φ' на всем множестве U по правилу $\varphi'(u) = \varphi'_-(u)$ для $u \in E_{\sigma,U}$. Тогда функция $\varphi' : U \to \mathbb{R}$ по свойству (Γ_3) будет иметь локально ограниченную вариацию на U.

Рассмотрим остаточное множество $F = (a,b) \setminus U = \{u \in (a,b) \mid$ одна из σ-касательных справа или слева в точке u параллельна вектору $(0,1)\}$. Ввиду открытости U множество F замкнуто относительно (a,b). По лемме 2.2 $\operatorname{meas}(F) = 0$. В силу односторонней непрерывности σ-касательных, о которой говорится в свойстве (Γ_3), имеет место утверждение

$$\forall u \in F \quad \lim_{\tau \to u+0} |\varphi'(\tau)| = \infty \ \text{ или } \ \lim_{\tau \to u-0} |\varphi'(\tau)| = \infty. \tag{14}$$

Зафиксируем теперь произвольную точку $u_0 \in (a,b)$. Возьмем ее окрестность V, существование которой утверждается в свойстве (Γ_1), и соответствующую функцию ограниченной вариации $l : V \to \mathbb{R}$. Не умаляя общности, будем считать, что V есть открытый интервал. Рассмотрим два возможных случая.

(i) Пусть $V \cap F = \varnothing$. Возьмем любой замкнутый отрезок $V_1 \subset V$, внутренность которого содержит точку u_0. Согласно сказанному выше функция φ' имеет ограниченную вариацию на V_1. Тогда функция $\frac{1}{\varphi'(u)-\alpha}$ имеет ограниченную вариацию на V_1 для любого $\alpha > \sup\limits_{u \in V_1} |\varphi'(u)|$, т. е. справедливо искомое утверждение из свойства (Γ_2).

(ii) Пусть $V \cap F \neq \varnothing$. Совершим преобразование координат, о котором говорится в свойстве (Γ_1). Пусть новые координаты $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ плоскости $\mathbb{R}^2$ выражаются через старые координаты (y_1, y_2) по формулам $\tilde{y}_1 = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2$, $\tilde{y}_2 = \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2$. Обозначим через $\gamma_1(u)$, $\gamma_2(u)$ координатные функции кривой γ в новой системе координат. Тогда имеют место формулы $\gamma_1(u) = \alpha_{11}u + \alpha_{12}\varphi(u)$, $\gamma_2(u) = \alpha_{21}u + \alpha_{22}\varphi(u)$. В точках множества $u \in V \cap U \setminus E_{\sigma,U}$ σ-касательная совпадает с обычной касательной, которая в новых координатах будет параллельна вектору $(\alpha_{11} + \alpha_{12}\varphi'(u), \alpha_{21} + \alpha_{22}\varphi'(u))$. С другой стороны, эта же касательная по свойству (Γ_3) будет параллельна вектору $(1, l(u))$. Получаем, что $l(u) = \frac{\alpha_{21}+\alpha_{22}\varphi'(u)}{\alpha_{11}+\alpha_{12}\varphi'(u)}$ для $u \in V \cap U \setminus E_{\sigma,U}$. Из формулы (14) вытекает, что $\alpha_{12} \neq 0$, поэтому $l(u) = \frac{C_1}{\alpha_{11}/\alpha_{12}+\varphi'(u)} + C_2$ для $u \in V \cap U \setminus E_{\sigma,U}$, где C_1, C_2 — некоторые константы. Отсюда, учитывая еще раз формулу (14), нетрудно вывести требуемое в свойстве (Γ_2) утверждение.

Итак, в одну сторону (Γ_1) $\Rightarrow$ (Γ_2) утверждение леммы 1.2.3 доказано.

Приступим к доказательству обратной импликации. Пусть функция φ обладает свойством (Γ_2) на интервале (a,b). Доопределим формально функцию φ' на всем интервале (a,b) по правилу, указанному в свойстве (Γ_2). Зафиксируем произвольно точку $u_0 \in (a,b)$ и возьмем ее окрестность V, о которой говорится в свойстве (Γ_2). Не умаляя общности, будем считать, что V есть открытый конечный интервал из $\mathbb{R}$. Предположим для простоты, что соответствующий параметр α из свойства (Γ_2) равен 0 (общий случай сводится к данному пересчетом координат).

Разобьем «плохое» множество F на две непересекающиеся части $F \cap V = F_1 \cup F_2$, где $F_1 = \{u \in V \cap F \mid \frac{1}{\varphi'} \text{ непрерывна в } u\}$, $F_2 = \{u \in V \cap F \mid \frac{1}{\varphi'} \text{ разрывна в } u\}$. В силу того, что функция $\frac{1}{\varphi'}$ имеет ограниченную вариацию на V, множество F_2 не более чем счетно. Немного подправим определение функции $\frac{1}{\varphi'}$ в точках множества F_2, полагая $\frac{1}{\varphi'(u)} = \lim\limits_{\tau\to u-0} \frac{1}{\varphi'(\tau)}$ для $u \in F_2$. Очевидно, что при этом значения функции $\frac{1}{\varphi'}$ поменяются лишь в не более чем счетном множестве точек и исправленная функция $\frac{1}{\varphi'}$ будет функцией ограниченной вариации на V, непрерывной слева в каждой точке $u \in V$. Из тех фактов, что функция $\frac{1}{\varphi'}$ имеет ограниченную вариацию на V, непрерывна в каждой точке множества F_1 и $\frac{1}{\varphi'(u)} \equiv 0$ на F_1, нетрудно доказать, что

$$\operatorname{Var}(1/\varphi', F_1) = 0 \tag{15}$$

(определение вариации $\operatorname{Var}(h,E)$ функции h на множестве E и соответствующие комментарии см., например, в доказательстве леммы 2.2). Определим функцию $g : V \to \mathbb{R}$ по формуле $g(u) = \int\limits_{u_0}^{u-0} \varphi(\tau)\, d\frac{1}{\varphi'(\tau)}$. Из формулы (15) и непрерывности функции φ немедленно вытекает равенство

$$\operatorname{Var}(g, F_1) = 0. \tag{16}$$

Для окончания доказательства леммы 1.2.3 достаточно установить, что

$$\forall [u_1,u_2] \subset V \quad u\big|_{u_1}^{u_2} = \frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)}\bigg|_{u_1}^{u_2} - g(u)\big|_{u_1}^{u_2}. \tag{17}$$

В самом деле, если формула (17) справедлива, то в качестве искомой функции $l : V \to \mathbb{R}$, существование которой утверждается в свойстве (Γ_1), можно взять функцию $\frac{1}{\varphi'}$. При этом преобразованием координат, о котором говорится в свойстве (Γ_1), будет являться простая перестановка координат (см. (13)).

Из замечания 2.1 вытекает, что правая часть в формуле (17) непрерывна по переменным u_1, u_2. Теперь доказательство искомой формулы (17) с учетом уже установленных равенств (15), (16) и равенства $\operatorname{meas}(F) = 0$ является простым упражнением по вещественному анализу, поэтому мы его опускаем. На этом доказательство леммы 1.2.3 завершено. $\square$

Доказательство теоремы 1.1.4. Пусть выполнены условия теоремы 1.1.4. Тогда по лемме 1.3.3 кривая γ обладает свойствами (Γ_1) и (Γ_3) на интервале (a,b). Зафиксируем произвольно точку $u_0 \in (a,b)$ и возьмем ее окрестность $V \subset (a,b)$, о существовании которой говорится в свойстве (Γ_1). Возьмем замкнутый промежуток $[a_0,b_0] \subset V$ такой, что $u_0 \in (a_0,b_0)$, $a_0 \notin E_\sigma$, $b_0 \notin E_\sigma$ (напомним, что множество E_σ, определенное в свойстве (Γ_3), не более чем счетно). В силу свойства (Γ_3) существуют σ-касательные

$$\gamma'(a_0) = \gamma'_+(a_0) = \gamma'_-(a_0), \quad \gamma'(b_0) = \gamma'_+(b_0) = \gamma'_-(b_0). \tag{18}$$

Докажем, что существуют трапеция $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$ и функции $v(x,t) \in C^1(\overline{\Omega}_0)$, $u(x,t) \in C(\overline{\Omega}_0)$, обладающие следующим набором свойств:

$$\nabla v(x,t) \equiv \gamma(u(x,t)) \quad \text{при } (x,t) \in \overline{\Omega}_0, \tag{19}$$

$$u(\overline{\Omega}_0) = [a_0, b_0], \tag{20}$$

$$u(x,t) \equiv a_0 \text{ при } (x,t) \in I_1, \quad u(x,t) \equiv b_0 \text{ при } (x,t) \in I_2, \tag{21}$$

где I_1, I_2 — две боковые стороны трапеции $\overline{\Omega}_0$, причем

$$I_1 \text{ перпендикулярна } \gamma'(a_0), \quad I_2 \text{ перпендикулярна } \gamma'(b_0). \tag{22}$$

Совершив ортонормированную замену координат, о которой говорится в свойстве (Γ_1), можно считать далее, что на интервале $V \supset [a_0, b_0]$ задана непрерывная слева функция ограниченной вариации $l : V \to \mathbb{R}$, для которой справедливы формула (3) и соотношения (8). При этом считаем также, что при совершении указанного линейного ортонормированного преобразования в пространстве, где лежит кривая γ (т. е. в пространстве градиентов-ковекторов), соответствующее линейное ортонормированное преобразование совершается и в пространстве переменных (x,t), так что свойство (22) не зависит от системы координат.

В силу выбора значений a_0, b_0 (см. (18)) и соотношений (8) имеем

$$\gamma'(a_0) = (1, l(a_0)), \quad \gamma'(b_0) = (1, l(b_0)) \tag{23}$$

и функция $l(u)$ непрерывна в точках $u \in V \setminus E_\sigma$, в частности, в точках a_0, b_0.

Из того, что функция l имеет ограниченную вариацию на $[a_0, b_0]$, следует, что существует строго возрастающая функция $L : [a_0, b_0] \to \mathbb{R}$ такая, что разность $L - l$ также является строго возрастающей функцией на $[a_0, b_0]$ и функция L непрерывна в каждой точке $u \in [a_0, b_0] \setminus E_\sigma$. Без потери общности можно считать, что $L(a_0) = 0$. Обозначим $\delta = L(b_0)$. Определим обратную к функции L функцию $u^0 : [0, \delta] \to \mathbb{R}$ таким образом, что точкам разрыва функции L соответствуют участки постоянства функции u^0. После такого соглашения функция $u^0(\cdot)$ будет непрерывной и неубывающей на всем промежутке $[0, \delta]$, причем $L(u_0(y)) = y$, если $y \in [0, \delta]$ и $u^0(y) \notin E_\sigma$. Используя последнее утверждение и тот факт, что разность функций $L - l$ является строго возрастающей функцией на промежутке $[a_0, b_0]$, нетрудно показать, что существует непрерывная строго возрастающая функция $A : [0, \delta] \to \mathbb{R}$ такая, что

$$\forall y \in [0, \delta] \quad (u^0(y) \notin E_\sigma \Rightarrow A(y) = y - l(u^0(y))). \tag{24}$$

Из построения ясно, что $u^0(0) = a_0$, $u^0(\delta) = b_0$. Отсюда, из формулы (24) и сделанных выше предположений $a_0 \notin E_\sigma$, $b_0 \notin E_\sigma$ получаем, что

$$A(0) = -l(u^0(0)) = -l(a_0), \tag{25}$$

$$A(\delta) = \delta - l(u^0(\delta)) = \delta - l(b_0). \tag{26}$$

Из формулы (24) и того, что функция $A(\cdot)$ непрерывна, функция $l(\cdot)$ непрерывна слева, а функция $u^0(\cdot)$ непрерывная и неубывающая, легко вывести, что

$$\forall y \in [0, \delta] \quad ([\forall \xi \in (0, y) \ u^0(\xi) < u^0(y)] \Rightarrow A(y) = y - l(u^0(y))). \tag{27}$$

Для каждого $y \in [0, \delta]$ определим характеристику $\mathscr{X}(y) = \{(x,t) \mid t \in [0,1],\ x = y + (A(y) - y)t = (1-t)y + tA(y)\}$. Поскольку при каждом $t \in [0,1]$ функция $[0, \delta] \ni y \mapsto (1-t)y + tA(y)$ является строго возрастающей, характеристики не пересекаются при различных y. Простыми вычислениями проверяется, что для каждой пары чисел $t \in [0,1]$, $x \in [tA(0), (1-t)\delta + tA(\delta)]$ существует единственное число $y \in [0, \delta]$ такое, что $(x,t) \in \mathscr{X}(y)$. По этому правилу можно определить непрерывную функцию $y : \overline{\Omega}_0 \ni (x,t) \mapsto y(x,t) \in [0,\delta]$, где через Ω_0 мы обозначили трапецию с вершинами $(0,0)$, $(\delta,0)$, $(A(\delta),1)$, $(A(0),1)$, а основания трапеции Ω_0 параллельны горизонтальному вектору $(1,0)$. Из того, что две боковые стороны трапеции Ω_0 параллельны направлениям $(A(0),1)$, $(A(\delta)-\delta,1)$, и из формул (25), (26), (23) вытекает справедливость условия (22).

Теперь определим непрерывную функцию $u(x,t) \in C(\overline{\Omega}_0)$ по правилу $u(x,t) = u^0(y(x,t))$. Ясно, что функция $u(x,t)$ постоянна на определенных выше характеристиках и справедливо равенство $u(y,0) = u^0(y)$ при $y \in [0,\delta]$. В частности,

$$\forall t \in [0,1] \quad u(tA(0),t) = u(0,0) = u^0(0). \tag{28}$$

Очевидно также, что

$$\forall t \in [0,1] \ \text{ функция } u(\cdot,t) \text{ является неубывающей.} \tag{29}$$

Из построения следует, что определенная нами функция $u(x,t)$ удовлетворяет требованиям (20), (21). Осталось доказать существование функции $v \in C^1(\overline{\Omega}_0)$, удовлетворяющей равенству (19). Для доказательства существования искомой функции v достаточно проверить, что

$$\forall (x,t) \in \overline{\Omega}_0 \qquad \oint\limits_{\partial T_{x,t}} \gamma(u(\xi,\tau)) \cdot \vec{\mathrm{l}}\, ds = 0, \tag{30}$$

где $T_{x,t}$ — трапеция с вершинами в точках $(0,0)$, $(y(x,t),0)$, (x,t), $(tA(0),t)$, а $\vec{\mathrm{l}}$ есть единичный вектор, касательный к границе трапеции $T_{x,t}$, причем направление вектора $\vec{\mathrm{l}}$ совпадает с положительным направлением при выборе стандартной ориентации на $\partial T_{x,t}$, наконец, ds обозначает элемент длины на $\partial T_{x,t}$. Отметим, что основания трапеции $T_{x,t}$ параллельны вектору $(1,0)$, а две ее боковые стороны лежат на характеристиках, проходящих через точки (x,t) и $(0,0)$ соответственно. Ниже в проводимом доказательстве теоремы 1.1.4 через y мы будем обозначать величину $y(x,t)$. Тогда по определению числа $y(x,t)$ и функции $u(x,t)$ имеют место равенства $x = (1-t)y + tA(y)$,

$$u^0(y) = u(y,0) = u(x,t). \tag{31}$$

Если мы докажем формулу (30), то можно будет указать явную формулу для искомой функции v. В самом деле, прямым вычислением можно убедиться, что равенство (30) эквивалентно равенству

$$\begin{gathered}
\forall (x,t) \in \overline{\Omega}_0 \quad \int\limits_0^t \gamma(u(A(0)\tau,\tau)) \cdot (A(0),1)\, d\tau + \int\limits_{tA(0)}^{x} \gamma(u(\xi,t)) \cdot (1,0)\, d\xi \\
= \int\limits_0^y \gamma(u(\xi,0)) \cdot (1,0)\, d\xi + \int\limits_0^t \gamma(u(y+\tau(A(y)-y),\tau)) \cdot (A(y)-y,1)\, d\tau.
\end{gathered} \tag{32}$$

Тогда опять-таки прямым вычислением проверяется, что в качестве функции v можно взять функцию, определяемую равенствами

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= \int\limits_0^t \gamma(u(A(0)\tau,\tau)) \cdot (A(0),1)\, d\tau + \int\limits_{tA(0)}^{x} \gamma(u(\xi,t)) \cdot (1,0)\, d\xi \\
&= \int\limits_0^y \gamma(u(\xi,0)) \cdot (1,0)\, d\xi + \int\limits_0^t \gamma(u(y+\tau(A(y)-y),\tau)) \cdot (A(y)-y,1)\, d\tau.
\end{aligned}$$

Итак, для завершения построения искомой функции v, удовлетворяющей соотношению (19), остается доказать формулу (32) или эквивалентную ей формулу (30). Зафиксируем точку $(x,t) \in \overline{\Omega}_0$. Так как по построению функция $u(\xi,\tau)$ постоянна на характеристиках, можно сразу вычислить те два интеграла в формуле (32), где интегрирование происходит вдоль характеристик. Тогда формула (32) будет эквивалентна формуле

$$t\gamma(u(0,0)) \cdot (A(0),1) + \int_{tA(0)}^{x} \gamma(u(\xi,t)) \cdot (1,0)\,d\xi$$

$$= t\gamma(u(y,0)) \cdot (A(y)-y,1) + \int_{0}^{y} \gamma(u(\xi,0)) \cdot (1,0)\,d\xi. \quad (33)$$

Напомним, что по построению $u(\xi,0) \equiv u^0(\xi)$. Кроме того, произведя соответствующее скалярное умножение в формуле (33), и перенеся члены с интегралами в правую часть, получим, что формула (33) эквивалентна формуле

$$-t\bigl[\gamma_2(u^0(\xi))|_0^y + \gamma_1(u^0(\xi))(A(\xi)-\xi)|_0^y\bigr] = \int_0^y \gamma_1(u^0(\xi))\,d\xi - \int_{tA(0)}^{x} \gamma_1(u(\xi,t))\,d\xi = J_1 - J_2, \quad (34)$$

где через J_1, J_2 мы обозначили соответствующие интегралы.

Рассмотрим теперь два возможных варианта.

(I) Предположим сначала, что

$$\forall \xi \in (0,y) \quad u^0(\xi) < u^0(y). \quad (35)$$

Поскольку точки $(y,0)$ и (x,t) лежат на одной характеристике, а функция $u(\xi,\tau)$ постоянна на характеристиках, справедливы соотношения $u(x,t) = u^0(y)$ и $\forall \xi \in (tA(0),x)$ $u(\xi,t) < u^0(y)$. Отсюда, принимая во внимание равенство (28) и монотонность (29), по классической формуле вещественного анализа имеем

$$J_1 - J_2 = \int_{\alpha=u^0(0)}^{\alpha=u^0(y)-0} \gamma_1(\alpha)\,dm_0(\alpha) - \int_{\alpha=u(tA(0),t)}^{\alpha=u(x,t)-0} \gamma_1(\alpha)\,dm_t(\alpha) = \int_{\alpha=u^0(0)}^{\alpha=u^0(y)-0} \gamma_1(\alpha)\,d[m_0(\alpha)-m_t(\alpha)], \quad (36)$$

где $m_0(\alpha) = \operatorname{meas}\{\xi \in (0,y) \mid u^0(\xi) < \alpha\}$, $m_t(\alpha) = \operatorname{meas}\{\xi \in (tA(0),x) \mid u(\xi,t) < \alpha\}$. Вычислим разность $m_0(\alpha) - m_t(\alpha)$ для числа $\alpha \in (u^0(0), u^0(y))$. Для этого заметим, что вследствие (28), (29) и (31) имеют место соотношения

$$u^0(m_0(\alpha)) = \alpha, \quad u^0(\xi) < \alpha \text{ при } \xi \in (0, m_0(\alpha)); \quad (37)$$

$$u(tA(0)+m_t(\alpha),t) = \alpha, \quad u(\xi,t) < \alpha \text{ при } \xi \in (tA(0), tA(0)+m_t(\alpha)).$$

Отсюда, принимая во внимание, что функция $u(\xi,\tau)$ постоянна на характеристиках, получаем, что точки $(m_0(\alpha),0)$ и $(tA(0)+m_t(\alpha),t)$ лежат на одной характеристике, т. е. $tA(0)+m_t(\alpha) = (1-t)m_0(\alpha) + tA(m_0(\alpha))$. Таким образом, $m_0(\alpha) - m_t(\alpha) = t[m_0(\alpha) - A(m_0(\alpha)) + A(0)]$. Из формул (37), (27) следует, что $A(m_0(\alpha)) = m_0(\alpha) - l(u^0(m_0(\alpha))) = m_0(\alpha) - l(\alpha)$. Значит, $m_0(\alpha) - m_t(\alpha) = t(l(\alpha) + A(0))$. Тем самым в силу (36) имеем $J_1 - J_2 = t \int_{\alpha=u^0(0)}^{\alpha=u^0(y)-0} \gamma_1(\alpha)\,dl(\alpha)$.

Из последней формулы, включений $[u^0(0), u^0(y)] \subset [a_0, b_0] \subset V$ и сделанного в начале предположения, что на интервале V справедлива формула (3), получаем

$$J_1 - J_2 = -t\bigl[\gamma_2(u^0(\xi))|_0^y - \gamma_1(u^0(\xi))l(u^0(\xi))|_0^y\bigr]. \quad (38)$$

Теперь вычислим левую часть в формуле (34). Из предположения (35) и формулы (27) получаем, что $A(y) = y - l(u^0(y))$. Последнее равенство вместе с соотношениями (25) и (38) дает нам справедливость формулы (34). Тем самым ввиду сделанных раннее выкладок установлена справедливость формулы (30) для тех точек $(x,t) \in \overline{\Omega}_0$, которые удовлетворяют предположению (35) с $y = y(x,t)$.

(II) Рассмотрим вариант, когда условие (35) не выполнено. Тогда в силу монотонности (29) существует точка $y^* \in [0, y)$ такая, что

$$\forall \xi \in [y^*, y] \quad u^0(\xi) \equiv u^0(y), \tag{39}$$

$$\forall \xi \in (0, y^*) \quad u^0(\xi) < u^0(y) = u^0(y^*). \tag{40}$$

Представим трапецию $T_{x,t}$ в виде объединения двух трапеций $T_{x,t} = T_* \cup T_{x^*,t}$, где $x^* = (1-t)y^* + tA(y^*)$, трапеция $T_{x^*,t}$ определяется по аналогии с трапецией $T_{x,t}$ (только вместо x надо брать x^*), а T_* есть трапеция с вершинами $(y^*, 0)$, $(y, 0)$, (x, t), (x^*, t). Имеем очевидное равенство

$$\oint\limits_{\partial T_{x,t}} \gamma(u(\xi,\tau)) \cdot \vec{\mathbf{l}}\, ds = \oint\limits_{\partial T_{x^*,t}} \gamma(u(\xi,\tau)) \cdot \vec{\mathbf{l}}\, ds + \oint\limits_{\partial T_*} \gamma(u(\xi,\tau)) \cdot \vec{\mathbf{l}}\, ds. \tag{41}$$

По построению точки $(y^*, 0)$ и (x^*, t) лежат на одной характеристике $\mathscr{X}(y^*)$, а точки $(y, 0)$ и (x, t) лежат на одной характеристике $\mathscr{X}(y)$. Отсюда, используя постоянство функции $u(\xi, \tau)$ на характеристиках и формулу (39), легко показать, что $\forall (\xi, \tau) \in T_*$ $u(\xi, \tau) \equiv u^0(y)$. Поэтому

$$\oint\limits_{\partial T_*} \gamma(u(\xi,\tau)) \cdot \vec{\mathbf{l}}\, ds = 0. \tag{42}$$

Вследствие справедливости формулы (40) условие (35) будет выполнено, если в нем заменить y на y^*. Тем самым при вычислении интеграла $\oint\limits_{\partial T_{x^*,t}} \gamma(u(\xi,\tau)) \cdot \vec{\mathbf{l}}\, ds$ мы попадаем в уже исследованную ситуацию (I), надо только во всех соответствующих рассуждениях заменить y на y^* и x на x^*. Тогда в силу доказанного ранее при исследовании ситуации (I) утверждения имеем равенство $\oint\limits_{\partial T_{x^*,t}} \gamma(u(\xi,\tau)) \cdot \vec{\mathbf{l}}\, ds = 0$. Отсюда, принимая во внимание (41), (42), получаем, что $\oint\limits_{\partial T_{x,t}} \gamma(u(\xi,\tau)) \cdot \vec{\mathbf{l}}\, ds = 0$.

Итак, мы доказали справедливость последнего равенства в каждом из возможных вариантов: и в случае (I), и в случае (II). Таким образом, формула (30) полностью доказана.

В силу сделанных ранее замечаний для каждой точки $u_0 \in (a, b)$ мы доказали существование окрестности $[a_0, b_0] \subset (a, b)$, $u_0 \in (a_0, b_0)$, трапеции $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$ и функций $v(x,t) \in C^1(\overline{\Omega}_0)$, $u(x,t) \in C(\overline{\Omega}_0)$, удовлетворяющих условиям (19)–(22). При этом, как следует из предыдущего доказательства, в качестве (a_0, b_0) можно взять любой достаточно малый интервал, содержащий точку u_0 и удовлетворяющий условию $a_0 \notin E_\sigma$, $b_0 \notin E_\sigma$. Осталось совершить переход от локального утверждения к построению глобальной области Ω и функций $v(x,t) \in C^1(\Omega)$, $u(x,t) \in C(\Omega)$ таких, что выполнены формулы (4), (5). Для этого нужно представить интервал (a, b) в виде счетного объединения отрезков $[a_\nu, b_\nu]$, $a_{\nu+1} = b_\nu$, со свойствами, аналогичными свойствам рассмотренного выше отрезка $[a_0, b_0]$. Для каждого из $[a_\nu, b_\nu]$ возьмем соответствующую трапецию Ω_ν со свойствами, аналогичными свойствам трапеции Ω_0 по отношению к $[a_0, b_0]$. Теперь искомую трапецию Ω можно построить, склеивая трапеции Ω_ν с соседними номерами по соответствующим боковым сторонам. Условия (22) обеспечивают корректность такой склейки, а (21) гарантирует сохранение непрерывности соответствующих отображений $u(x,t)$. Технические подробности мы опускаем ввиду их несущественности. $\square$

Доказательство теоремы 1.4.2. По определению изэнтропичности требуется доказать, что для любого $k \in \mathbb{R}$ в $\mathscr{D}'(\Omega)$

$$\gamma_1(\max(u,k))_t - \gamma_2(\max(u,k))_x = 0. \tag{43}$$

Очевидно, что достаточно проверить выполнение соотношения (43) для всюду плотного множества значений k. Рассмотрим два удобных для работы множества, объединение которых всюду плотно: K_1 состоит из точек k, в окрестности которых функция $\gamma(u)$ постоянна, т. е. $\exists \delta > 0$ $\gamma(u) \equiv \gamma(k)$ при $|u-k| < \delta$; K_2 состоит из точек k со следующим свойством: $\exists \delta > 0$ такое, что $\gamma(u) \neq \gamma(k)$ при $u \in (k, k+\delta)$. Легко проверяется, что объединение $K_1 \cup K_2$ всюду плотно в $\mathbb{R}$.

Зафиксируем k, принадлежащее одному из указанных множеств. Добавляя к функциям u и γ соответствующие константы, можем без потери общности считать, что $k = 0$ и $\gamma(0) = 0$.

Достаточно проверить выполнение условия (43) локально, т. е. показать, что для любой точки $w = (x_0, t_0) \in \Omega$ существует окрестность $U(w)$ такая, что равенство (43) выполнено в $\mathscr{D}'(U(w))$. Если $u(w) \neq 0$, то по непрерывности это свойство сохраняется и в достаточно малой окрестности $U = U(w)$ точки w. Тогда либо $\max(u,0) = u$, либо $\max(u,0) = 0$ на U и в любом из этих случаев $\gamma_1(\max(u,k))_t - \gamma_2(\max(u,k))_x = 0$, т. е. условие (43) выполнено в окрестности U. Остается исследовать случай $u(w) = 0$, $w = (x_0, t_0) \in \Omega$. Ввиду локальности нашей задачи мы можем заменить область Ω достаточно малой окрестностью точки w и считать, что $|u(x,t)| < \delta$ для всех $(x,t) \in \Omega$, где δ — параметр из определения множеств K_1 и K_2. Будем отныне также считать, что область Ω является квадратом, скажем, $\Omega = (0,1)^2$ и $u(x,t) \in C(\overline{\Omega})$, $\overline{\Omega} = \operatorname{Cl}\Omega = [0,1]^2$.

Случай, соответствующий множеству K_1, совершенно тривиален, так как тогда $\gamma(u(x,t)) \equiv \mathrm{const}$ на Ω. Рассмотрим случай $k \in K_2$. Из определения множества K_2 для нашей ситуации получаем, что

$$\gamma(u(x,t)) \neq 0, \quad \text{если } u(x,t) > 0,\ (x,t) \in \Omega. \tag{44}$$

Вследствие равенства (9) существует непрерывно дифференцируемая функция $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ (потенциал), $v \in C^1(\overline{\Omega})$, такая, что

$$v_x(x,t) = \gamma_1(u(x,t)), \quad v_t(x,t) = \gamma_2(u(x,t)) \text{ при } (x,t) \in \overline{\Omega}.$$

Обозначим $\Omega_+ = \{(x,t) \in \Omega \mid u(x,t) > 0\}$. В силу (44) и равенства $\gamma(0) = 0$ имеем

$$\nabla v(x,t) \neq 0 \text{ при } (x,t) \in \Omega_+, \quad \nabla v(x,t) = 0 \text{ при } (x,t) \in \Omega \cap \partial\Omega_+.$$

Для функции v будем обозначать через Z_v множество критических точек: $Z_v = \{(x,t) \in \Omega \mid \nabla v(x,t) = 0\}$. Основным инструментом в оставшейся части доказательства теоремы 1.4.2 будет следующий результат, являющийся аналогом теоремы Сарда.

Теорема 2.4 [5]. *Пусть $v \in C^1(\Omega)$, где Ω — область в $\mathbb{R}^2$. Предположим, что $0 \notin \operatorname{Cl}\operatorname{Int}\nabla v(\Omega)$. Тогда $\operatorname{meas} v(Z_v) = 0$.*

Итак, нам требуется доказать, что для любой $f \in C_0^\infty(\Omega)$
$$\int\limits_\Omega [\gamma_1(\max(u,0))f_t - \gamma_2(\max(u,0))f_x]\,dtdx = 0. \tag{45}$$

Для доказательства формулы (45) можно почти буквально повторить доказательство формулы (26) из [4], только вместо формулы (P) статьи [4] в нашем случае нужно использовать теорему 2.4 (при этом ход рассуждений даже упрощается, так как теорема 2.4 в нашем случае содержит более сильное утверждение, чем формула (P) статьи [4]). Теорема 1.4.2 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 1.4.3 будет проходить в два этапа. Сначала мы установим справедливость следующего более слабого утверждения.

Теорема 2.5. *Пусть $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение (кривая), не постоянное ни на каком интервале. Пусть, далее, $u(x,t) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ — изэнтропическое решение уравнения (9) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$; $b = \operatorname{ess\,sup} u(x,t) \le +\infty$, $-\infty \le a = \operatorname{ess\,inf} u(x,t)$ в Ω. Тогда кривая γ обладает следующим набором свойств.*

(Γ_4) *Для любого $u \in (a,b)$ существуют σ-касательные справа и слева в точке u. Обе эти σ-касательные имеют пределы справа и слева в каждой точке $u \in (a,b)$. При этом левая σ-касательная непрерывна слева, а правая σ-касательная непрерывна справа в каждой точке $u \in (a,b)$. Далее, всюду на (a,b), за исключением не более чем счетного множества точек $E_\sigma \subset (a,b)$, σ-касательные справа и слева совпадают и, таким образом, для любого $u \in (a,b) \setminus E_\sigma$ существует σ-касательная $\gamma'(u)$.*

Доказательство теоремы 2.5. Пусть выполнены условия доказываемой теоремы 2.5. Зафиксируем точку $u_0 \in (a,b)$. Будем доказывать существование σ-касательной справа (для σ-касательной слева все аналогично). Возьмем произвольно последовательности
$$a_\nu, b_\nu \to u_0 + 0, \quad u_0 \le a_\nu < b_\nu, \tag{46}$$
причем
$$\sup_\nu \sup_{u \in [a_\nu, b_\nu]} \frac{|\gamma(u) - \gamma(a_\nu)|}{|\gamma(b_\nu) - \gamma(a_\nu)|} < \infty \tag{47}$$
(так как по условию теоремы 2.5 функция γ не постоянна ни на каком интервале, такие последовательности существуют). Выбирая частичную подпоследовательность, можем считать, что
$$\frac{\gamma(b_\nu) - \gamma(a_\nu)}{|\gamma(b_\nu) - \gamma(a_\nu)|} \to \bar e = (e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{48}$$

Нам потребуются следующие простые факты.

Предложение 2.6. *Пусть $u(x,t) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ — изэнтропическое решение уравнения (9) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Тогда*
$\forall k \in \mathbb{R} \quad \gamma_1(\min(u,k))_t - \gamma_2(\min(u,k))_x = 0$ *в* $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Доказательство предложения 2.6 очень простое и ничем не отличается от доказательства предложения 1 из [4]. Из предложения 2.6, в свою очередь, вытекает

Предложение 2.7. *Пусть $u(x,t) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ — изэнтропическое решение уравнения (9) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Тогда для любого $k \in \mathbb{R}$ функции $\max(u,k)$, $\min(u,k)$ также являются изэнтропическими решениями этого уравнения в Ω.*

Вернемся теперь к доказательству теоремы 2.5. Зададим вспомогательные функции $u_\nu \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\tilde\gamma^\nu = (\tilde\gamma_1^\nu, \tilde\gamma_2^\nu) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \in C(\mathbb{R})$ по формулам

$$u_\nu(x,t) = \begin{cases} b_\nu, & u(x,t) > b_\nu, \\ u(x,t), & u(x,t) \in (a_\nu, b_\nu], \\ a_\nu, & u(x,t) \le a_\nu, \end{cases}$$

$$\tilde\gamma^\nu(u) = \begin{cases} \frac{\gamma(b_\nu)-\gamma(a_\nu)}{|\gamma(b_\nu)-\gamma(a_\nu)|}, & u > b_\nu, \\ \frac{\gamma(u)-\gamma(a_\nu)}{|\gamma(b_\nu)-\gamma(a_\nu)|}, & u \in (a_\nu, b_\nu], \\ 0, & u \le a_\nu. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\tilde\gamma^\nu(u(x,t)) = \frac{\gamma(u_\nu(x,t)) - \gamma(a_\nu)}{|\gamma(b_\nu) - \gamma(a_\nu)|}. \tag{49}$$

Из того факта, что функция $u(x,t)$ — изэнтропическое решение уравнения (9), и из предложений 2.6, 2.7 следует равенство $\gamma_1(u_\nu(x,t))_t - \gamma_2(u_\nu(x,t))_x = 0$ в $\mathscr{D}'(\Omega)$. Из последней формулы и соотношения (49) немедленно получаем равенство

$$\tilde\gamma_1^\nu(u(x,t))_t - \tilde\gamma_2^\nu(u(x,t))_x = 0 \quad \text{в } \mathscr{D}'(\Omega). \tag{50}$$

Из определения вспомогательных функций $\tilde\gamma^\nu$ и сходимости (48) вытекает поточечная сходимость

$$\forall (x,t) \in \Omega \quad \tilde\gamma^\nu(u(x,t)) \to H(u(x,t))\bar e, \tag{51}$$

где $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — сдвинутая функция Хевисайда: $H(u) = \begin{cases} 1, & u > u_0, \\ 0, & u \le u_0. \end{cases}$ Из оценки (47) следует равномерная ограниченность $\sup\limits_\nu \sup\limits_{(x,t)\in\Omega} |\tilde\gamma^\nu(u(x,t))| < \infty$. Тогда из поточечной сходимости (51) получаем сходимость в смысле обобщенных функций $\tilde\gamma^\nu(u(x,t)) \to H(u(x,t))\bar e$ в $\mathscr{D}'(\Omega)$. Отсюда в силу (50) имеем

$$e_1 H(u(x,t))_t - e_2 H(u(x,t))_x = \frac{\partial H(u(x,t))}{\partial \bar e^\perp} = 0 \quad \text{в } \mathscr{D}'(\Omega), \tag{52}$$

где символом $\frac{\partial}{\partial \bar e^\perp}$ мы обозначаем дифференцирование по направлению, перпендикулярному вектору $\bar e$: $\frac{\partial}{\partial \bar e^\perp} = e_1 \frac{\partial}{\partial t} - e_2 \frac{\partial}{\partial x}$. Равенство (52) означает, что $H(u(x,t)) = \mathrm{const}$ п. в. на почти всех отрезках $I \subset \Omega$, перпендикулярных вектору $\bar e$. Вспоминая определение функции $H(u)$, получаем, что (P_+) *на почти всех отрезках* $I \subset \Omega$, *перпендикулярных вектору* $\bar e$, *либо* $u(x,t) \le u_0$ *для* $\mathscr{H}^1$*-п. в.* $(x,t) \in I$, *либо* $u(x,t) > u_0$ *для* $\mathscr{H}^1$*-п. в.* $(x,t) \in I$.

Установленное выше свойство (P_+) было ключевым шагом в доказательстве теоремы 2.5, а дальше пойдут элементарные выкладки. Рассмотрим множества

$$\Omega_+ = \operatorname{ess\,Cl}\{(x,t) \in \Omega \mid u(x,t) > u_0\}, \quad \Omega_- = \operatorname{ess\,Cl}\{(x,t) \in \Omega \mid u(x,t) \le u_0\}, \tag{53}$$

где существенное замыкание $\operatorname{ess\,Cl}(A)$ множества A состоит из точек, любая окрестность которых пересекает A по множеству положительной меры. (Очевидно, что $\operatorname{ess\,Cl}(A)$ является замкнутым множеством.) Ясно, что $\Omega \subset \Omega_+ \cup \Omega_-$. Из включения $u_0 \in (a,b)$ и определения a, b вытекает, что $\Omega \cap \Omega_+ \ne \varnothing \ne \Omega \cap \Omega_-$. Тогда в силу связности области Ω найдется точка $(x_0,t_0) \in \Omega_+ \cap \Omega \cap \Omega_-$. Возьмем произвольно квадрат $\Omega_1 \subset \Omega$ с центром в точке (x_0,t_0). По построению справедливы формулы

$$\operatorname{meas}\{(x,t) \in \Omega_1 \mid u(x,t) > u_0\} \ne 0, \quad \operatorname{meas}\{(x,t) \in \Omega_1 \mid u(x,t) \le u_0\} \ne 0.$$

Из последних формул с учетом выпуклости квадрата Ω_1 вытекает, что не может существовать двух линейно независимых векторов $\bar e'$, $\bar e'' \in \mathbb{R}^2$, которые удовлетворяли бы свойству (P_+). Отсюда немедленно следует, что (P_2) *существует вектор $\bar{e} \in \mathbb{R}^2$ такой, что для всякой последовательности точек a_ν, b_ν, удовлетворяющих условиям* (46), (47), *имеет место сходимость* (48) *в смысле проективного пространства $\mathbb{R}P^1$* (*т. е. мы считаем эквивалентными противоположные векторы $\bar{e}$, $-\bar{e}$, лежащие на единичной окружности*).

Из утверждения (P_2) следует, во-первых, что σ-касательная справа $\gamma'_+(u_0)$ существует (если взять $a_\nu \equiv u_0$). Во-вторых, из произвольности $u_0 \in (a,b)$ вытекает, что для любого $u \in (a,b)$ существует σ-касательная справа $\gamma'_+(u)$. Снова применяя свойство (P_2), получаем также, что σ-касательная справа $\gamma'_+(u)$ непрерывна справа в каждой точке $u_0 \in (a,b)$, т. е. $\lim\limits_{u \to u_0+0} \gamma'_+(u) = \gamma'_+(u_0)$. Таким образом, утверждения теоремы 2.5 по поводу σ-касательных справа доказаны.

Доказательство утверждений теоремы 2.5 по поводу существования и непрерывности σ-касательных слева $\gamma'_-(u)$ проводится точно так же симметричными рассуждениями. Отметим лишь, что вместо свойства (P_+) для σ-касательных слева имеет место свойство (P_-) *на почти всех отрезках $I \subset \Omega$, перпендикулярных направлению $\gamma'_-(u_0)$, либо $u(x,t) \ge u_0$ для $\mathscr{H}^1$-п. в. $(x,t) \in I$, либо $u(x,t) < u_0$ для $\mathscr{H}^1$-п. в. $(x,t) \in I$.*

Докажем теперь утверждение о совпадении σ-касательных справа и слева. Из уже имеющихся фактов нетрудно вывести, что $\lim\limits_{u \to u_0-0} \gamma'_+(u) = \lim\limits_{u \to u_0-0} \gamma'_-(u) = \gamma'_-(u_0)$. Как известно из анализа (см., например, [9]), если функция имеет в каждой точке $u_0 \in (a,b)$ пределы справа и слева, то она непрерывна на (a,b) всюду, за исключением не более чем счетного множества точек. Поэтому для каждой точки $u_0 \in (a,b) \setminus E_\sigma$, где множество E_σ не более чем счетно, σ-касательные слева и справа в точке u_0 равны и, следовательно, существует σ-касательная $\gamma'(u_0) = \gamma'_+(u_0) = \gamma'_-(u_0)$.

На этом доказательство теоремы 2.5 окончено. Отметим в заключение, что теперь мы можем объединить свойства (P_+) и (P_-) в следующей форме, которая пригодится нам в дальнейшем.

$(P_\pm)$ *Для любой $c \in (a,b)$ на почти всех отрезках $I \subset \Omega$, перпендикулярных направлению $\gamma'_+(c)$, либо $u(x,t) \le c$ для $\mathscr{H}^1$-п. в. $(x,t) \in I$, либо $u(x,t) > c$ для $\mathscr{H}^1$-п. в. $(x,t) \in I$. Далее, на почти всех отрезках $I \subset \Omega$, перпендикулярных направлению $\gamma'_-(c)$, либо $u(x,t) \ge c$ для $\mathscr{H}^1$-п. в. $(x,t) \in I$, либо $u(x,t) < c$ для $\mathscr{H}^1$-п. в. $(x,t) \in I$. Если же c не принадлежит E_σ, где множество E_σ не более чем счетно, то на почти всех отрезках $I \subset \Omega$, перпендикулярных направлению $\gamma'(c)$, выполняется одна и только одна из трех возможностей: либо $u(x,t) > c$ для $\mathscr{H}^1$-п. в. $(x,t) \in I$, либо $u(x,t) < c$ для $\mathscr{H}^1$-п. в. $(x,t) \in I$, либо $u(x,t) = c$ для $\mathscr{H}^1$-п. в. $(x,t) \in I$.* $\square$

Символом $S(0,1)$ будем обозначать единичную окружность на плоскости $\mathbb{R}^2$ с центром в нуле. Если $\bar{e} \in S(0,1)$, то через $\bar{e}^\perp$ мы обозначаем вектор из $S(0,1)$, перпендикулярный вектору $\bar{e}$. Для вектора $\bar{e} \in \mathbb{R}^2$, $\bar{e} \ne 0$, будем писать $\gamma'(u_0) = \bar{e}$, если прямая $\gamma'(u_0) \in \mathbb{R}P^1$ параллельна вектору $\bar{e}$.

Теперь теорема 1.4.3 следует из теоремы 2.5 и следующего утверждения.

Теорема 2.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.5. *Для $\bar{e} \in S(0,1)$ обозначим $U_{\bar{e}} = \{u \in (a,b) \mid \sigma$-касательные справа и слева $\gamma'_+(u)$, $\gamma'_-(u)$ не параллельны вектору $\bar{e}\}$. Тогда для любого $\bar{e} \in S(0,1)$ множество $U_{\bar{e}}$ открыто и*

$$(a,b) = \bigcup_{\bar{e} \in S(0,1)} U_{\bar{e}}. \tag{54}$$

Далее, для каждого $\bar{e} \in S(0,1)$ при $u \in U_{\bar{e}}$ можно естественным образом отождествить σ-касательную слева $\gamma'_-(u) \in \mathbb{R}P^1$ с направлением вектора $l(u)\bar{e} + \bar{e}^\perp$, где $l(u) \in \mathbb{R}$. Определенная таким образом функция $l(u)$ является функцией локально ограниченной вариации на открытом множестве $U_{\bar{e}}$, причем функция $l(\cdot)$ непрерывна слева в каждой точке $u \in U_{\bar{e}}$. Более того, для функции $l(u)$ справедлива формула

$$\forall [u_1, u_2] \subset U_{\bar{e}} \quad \bar{e} \cdot \gamma(u)|_{u_1}^{u_2} = \bar{e}^\perp \cdot \gamma(u) l(u)|_{u_1}^{u_2} - \int\limits_{u_1}^{u_2 - 0} \bar{e}^\perp \cdot \gamma(u)\, dl(u), \tag{55}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега — Стилтьеса по полуоткрытому промежутку $[u_1, u_2)$.

Замечание 2.9. Пусть выполнены условия теоремы 2.8. Линейной ортонормированной заменой координат всегда можно добиться того, чтобы вектор $\bar{e}$ совпадал с вектором $(0,1)$. Тогда формула (55) принимает простую форму (3).

Доказательство теоремы 2.8. Открытость множества $U_{\bar{e}}$ для каждого $\bar{e} \in S(0,1)$ и формула (54) непосредственно следуют из теоремы 2.5. Зафиксируем произвольно вектор $\bar{e} \in S(0,1)$. Зафиксируем также один из двух перпендикулярных ему векторов из $S(0,1)$ и обозначим его через $\bar{e}^\perp$. Зададим функцию $l : U_{\bar{e}} \to \mathbb{R}$ так, как указано в формулировке теоремы 2.8. Нам осталось доказать, что определенная таким образом функция $l(u)$ является функцией локально ограниченной вариации на открытом множестве $U_{\bar{e}}$ и справедлива формула (55). По теореме 2.5 функция $l(u)$ непрерывна слева всюду на $U_{\bar{e}}$, далее, функция $l(u)$ непрерывна всюду, за исключением не более чем счетного множества точек E_σ, и, кроме того, в каждой точке из $U_{\bar{e}}$ функция $l(u)$ имеет пределы справа и слева. Поэтому если предположить дополнительно, что ограниченность вариации функции $l(u)$ уже установлена, то выражения в правой и левой частях равенства (55) непрерывны по u_1, u_2 (см. замечание 2.1). В силу аддитивности интеграла формулу (55) достаточно проверить локально. Согласно двум последним предложениям для доказательства теоремы 2.8 достаточно установить, что для каждой точки $u_0 \in U_{\bar{e}}$ существует число $\delta > 0$, для которого выполнено включение $[u_0 - \delta, u_0 + \delta] \subset U_{\bar{e}}$ и справедливы следующие два утверждения:

1) функция $l(u)$ имеет ограниченную вариацию на $[u_0, u_0 + \delta]$, и формула (55) справедлива для всех $u_1, u_2 \in (u_0, u_0 + \delta) \setminus E_\sigma$;

2) функция $l(u)$ имеет ограниченную вариацию на $[u_0 - \delta, u_0]$, и формула (55) справедлива для всех $u_1, u_2 \in (u_0 - \delta, u_0) \setminus E_\sigma$.

Ясно, что достаточно доказать только первое утверждение, а второе доказывается по аналогии.

Зафиксируем произвольно $u_0 \in U_{\bar{e}}$. Линейной ортонормированной заменой координат всегда можно добиться того, чтобы $\bar{e} = (0,1)$. Тогда функция $l : U_{(0,1)} \to \mathbb{R}$ определяется из условия: для каждого $u \in U_{(0,1)}$ σ-касательная слева $\gamma'_-(u)$ параллельна вектору $(1, l(u))$. Отметим здесь же, что в силу теоремы 2.5 на множестве $U_{(0,1)}$ σ-касательная справа $\gamma'_+(u)$ параллельна вектору $(1, l(u + 0))$, где символом $l(u+0)$ обозначен предел справа $l(u+0) = \lim\limits_{\tau \to u+0} l(\tau)$. Так как множество $U_{(0,1)}$ открыто, существует число $\delta_1 > 0$ такое, что $[u_0 - \delta_1, u_0 + \delta_1] \subset U_{(0,1)}$. Поскольку функция $l(u)$ имеет пределы справа и слева в каждой точке множества $U_{(0,1)}$, найдется число $l_0 > 0$ такое, что

$$\sup_{u \in [u_0 - \delta_1, u_0 + \delta_1]} |l(u)| \le l_0, \qquad \sup_{u \in [u_0 - \delta_1, u_0 + \delta_1]} |l(u+0)| \le l_0. \tag{56}$$

С учетом определения функции $l(u)$ для нашей ситуации свойство $(P_{\pm})$ (см. выше в доказательстве теоремы 2.5) можно переписать следующим образом.

$(P_{\pm})$ *Для любого $c \in [u_0, u_0 + \delta_1]$ на почти всех отрезках $I \subset \Omega$, перпендикулярных направлению $(1, l(c+0))$, либо $u(x,t) \le c$ для $\mathscr{H}^1$-п. в. $(x,t) \in I$, либо $u(x,t) > c$ для $\mathscr{H}^1$-п. в. $(x,t) \in I$. Далее, на почти всех отрезках $I \subset \Omega$, перпендикулярных направлению $(1, l(c))$, либо $u(x,t) \ge c$ для $\mathscr{H}^1$-п. в. $(x,t) \in I$, либо $u(x,t) < c$ для $\mathscr{H}^1$-п. в. $(x,t) \in I$. Если же $l(c+0) = l(c)$ (т. е. если $c \notin E_\sigma$), то на почти всех отрезках $I \subset \Omega$, перпендикулярных направлению $(1, l(c+0)) = (1, l(c))$, выполняется одна, и только одна, из трех возможностей: либо $u(x,t) > c$ для $\mathscr{H}^1$-п. в. $(x,t) \in I$, либо $u(x,t) < c$ для $\mathscr{H}^1$-п. в. $(x,t) \in I$, либо $u(x,t) = c$ для $\mathscr{H}^1$-п. в. $(x,t) \in I$.*

Обозначим через E множество точек Лебега функции $u(x,t)$. Рассмотрим множества Ω_+, Ω_-, определенные равенством (53). Как установлено при доказательстве теоремы 2.5 (см. комментарий к формуле (53)), $\Omega_+ \cap \Omega \cap \Omega_- \neq \varnothing$. Из только что сформулированного свойства $(P_{\pm})$ (беря $c = u_0$) и теоремы Фубини нетрудно вывести, что проекция множества $\Omega_+ \cap \Omega \cap \Omega_-$ на вертикальную ось O_t не может иметь линейную меру 0. Значит, не умаляя общности, мы можем выбрать точку $(x_0, t_0) \in \Omega_+ \cap \Omega \cap \Omega_-$ таким образом, что для п. в. $x \in \mathbb{R}$ если $(x, t_0) \in \Omega$, то $(x, t_0) \in E$. Делая параллельный перенос, будем без потери общности считать далее, что $(x_0, t_0) = (0, 0)$.

Для $\delta_2 > 0$ рассмотрим трапецию $T_{+\delta_2}$ с вершинами в точках $(-\delta_2, 0)$, $(\delta_2, 0)$, $\delta_2(1+l_0, 1)$, $\delta_2(-1-l_0, 1)$, причем параметр $\delta_2 > 0$ возьмем таким образом, чтобы $\operatorname{Cl} T_{+\delta_2} \subset \Omega$ и для п. в. $x \in (\delta_2(-1-l_0), \delta_2(1+l_0))$ выполнялось включение $(x, \delta_2) \in E$. Таким образом, почти все точки обоих оснований трапеции $T_{+\delta_2}$ являются точками Лебега функции $u(x,t)$.

Нам понадобится также открытое множество $T_O = \{(x,t) \mid t \in (-\delta_2, \delta_2), -\delta_2 + l_0|t| < x < \delta_2 - l_0|t|\}$. Легко проверяется, что множество T_O есть окрестность точки $(0,0)$. Будем предполагать далее, что параметр δ_2 выбран столь малым, что помимо упомянутых ранее условий выполнено также включение

$$T_O \subset \Omega. \tag{57}$$

Положим $\delta = \min(\delta_1, -u_0 + \operatorname*{ess\,sup}_{T_O} u(x,t))$. Из способа выбора точки $(x_0, t_0) = (0,0)$ следует, что $\delta > 0$. Докажем, что для любого $u_1 \in (u_0, u_0 + \delta) \setminus E_\sigma$ найдется число $x_1 \in (-\delta_2, \delta_2)$ такое, что отрезок I_1, являющийся пересечением трапеции $T_{+\delta_2}$ с прямой, проходящей через точку $(x_1, 0)$ перпендикулярно вектору $(1, l(u_1))$, обладает следующими свойствами:

$$(x,t) \in E \quad \text{для } \mathscr{H}^1\text{-п. в. } (x,t) \in I_1, \tag{58}$$

$$u(x,t) < u_1 \quad \text{для } \mathscr{H}^1\text{-п. в. } (x,t) \in I_1. \tag{59}$$

Предполагая противное и используя теорему Фубини, получаем существование $u_1 \in (u_0, u_0 + \delta) \setminus E_\sigma$ такого, что для почти всех $x_1 \in (-\delta_2, \delta_2)$ отрезок I_1, являющийся пересечением трапеции $T_{+\delta_2}$ с прямой, проходящей через точку $(x_1, 0)$ перпендикулярно вектору $(1, l(u_1))$, обладает свойством (58), но не обладает свойством (59). Тогда из $(P_{\pm})$ немедленно следует, что для почти всех $x_1 \in (-\delta_2, \delta_2)$ любой отрезок I_1, содержащий точку $(x_1, 0)$, лежащий в области Ω и перпендикулярный вектору $(1, l(u_1))$, обладает противоположным свойством:

$$u(x,t) \ge u_1 \quad \text{для } \mathscr{H}^1\text{-п. в. } (x,t) \in I_1.$$

Однако с помощью теоремы Фубини, включения (57) и оценок (56) элементарно проверяется, что объединение всех таких отрезков образует множество, содержащее почти все точки множества T_O. Значит, для почти всех точек $(x,t) \in T_O$

$u(x,t) \geq u_1 > u_0$, что противоречит выбору точки $(x_0,t_0) \in \Omega_+ \cap \Omega \cap \Omega_-$. Нужное нам утверждение доказано.

Аналогично для любого $u_2 \in (u_0, u_0+\delta) \setminus E_\sigma$ найдется число $x_2 \in (-\delta_2, \delta_2)$ такое, что отрезок I_2, являющийся пересечением трапеции $T_{+\delta_2}$ с прямой, проходящей через точку $(x_2, 0)$ перпендикулярно вектору $(1, l(u_2))$, обладает следующими свойствами:

$$(x,t) \in E \text{ для } \mathscr{H}^1\text{-п. в. } (x,t) \in I_2; \quad u(x,t) > u_2 \text{ для } \mathscr{H}^1\text{-п. в. } (x,t) \in I_2.$$

Легко вычисляется, что концами отрезка I_2 являются точки $A_2 = (x_2, 0)$ и $B_2 = (x_2 - \delta_2 l(u_2), \delta_2)$, которые лежат соответственно на нижнем и верхнем основаниях трапеции $T_{+\delta_2}$. Аналогично концами отрезка I_1 являются точки $A_1 = (x_1, 0)$ и $B_1 = (x_1 - \delta_2 l(u_1), \delta_2)$, которые лежат соответственно на нижнем и верхнем основаниях трапеции $T_{+\delta_2}$.

Возьмем теперь произвольно пару чисел $u_1, u_2 \in (u_0, u_0+\delta) \setminus E_\sigma$, $u_1 < u_2$, и для них зафиксируем точки $x_1, x_2 \in (-\delta_2, \delta_2)$ и отрезки I_1, I_2 с описанными выше свойствами. Поскольку функция l непрерывна в точках $U_{(0,1)} \setminus E_\sigma$, имеем, в частности, равенство

$$l(u_2 + 0) = l(u_2). \tag{60}$$

Для определенности при проведении дальнейших выкладок будем считать без потери общности, что

$$x_1 < x_2. \tag{61}$$

С помощью свойства $(P_\pm)$ нетрудно проверить, что *отрезки I_1, I_2 не могут пересекаться.* Отсюда и из формулы (61) следует, что $x_1 - \delta_2 l(u_1) < x_2 - \delta_2 l(u_2)$.

Рассмотрим функцию-срезку $\tilde{u}(x,t) = \min(\max(u_1, u(x,t)), u_2)$. Очевидно, функция $\tilde{u}(x,t)$ также удовлетворяет свойству $(P_\pm)$. Далее, из самого задания функции $\tilde{u}$ вытекает, что все точки множества E являются точками Лебега функции $\tilde{u}$, а на отрезках I_1, I_2 справедливы утверждения

$$\tilde{u}(x,t) = u_1 \text{ и } (x,t) \in E \quad \text{для } \mathscr{H}^1\text{-п. в. } (x,t) \in I_1, \tag{62}$$

$$\tilde{u}(x,t) = u_2 \text{ и } (x,t) \in E \quad \text{для } \mathscr{H}^1\text{-п. в. } (x,t) \in I_2. \tag{63}$$

Вследствие определения изэнтропичности функция $\tilde{u}$ принадлежит пространству $L^\infty(\Omega)$ и удовлетворяет уравнению

$$\gamma_1(\tilde{u})_t - \gamma_2(\tilde{u})_x = 0 \quad \text{в } \mathscr{D}'(\Omega). \tag{64}$$

Далее мы будем изучать поведение функции $\tilde{u}$ на трапеции T с вершинами A_1, A_2, B_2, B_1. Ясно, что $T \subset T_{+\delta_2}$, поэтому $\operatorname{Cl} T \subset \Omega$. Отсюда и из уравнения (64) следует существование липшицевой функции $v : U(T) \subset \Omega \to \mathbb{R}$, определенной в некоторой окрестности $U(T)$ трапеции T, такой, что

$$\forall (x,t) \in U(T) \cap E \ \exists \nabla v(x,t) = (v_x(x,t), v_t(x,t)) = (\gamma_1(\tilde{u}(x,t)), \gamma_2(\tilde{u}(x,t))). \tag{65}$$

Отсюда, из равенств (62), (63) и определения точек A_1, B_1, A_2, B_2 немедленно вытекают равенства $v(B_1) - v(A_1) = \delta_2(-l(u_1)\gamma_1(u_1) + \gamma_2(u_1))$, $v(B_2) - v(A_2) = \delta_2(-l(u_2)\gamma_1(u_2) + \gamma_2(u_2))$. Значит,

$$\begin{aligned}\frac{v(B_2) - v(A_2) - (v(B_1) - v(A_1))}{\delta_2} &= \gamma_2(u_2) - l(u_2)\gamma_1(u_2) \\ &- (\gamma_2(u_1) - l(u_1)\gamma_1(u_1)) = (\gamma_2(u) - \gamma_1(u) l(u))|_{u_1}^{u_2}.\end{aligned}$$

Для окончания доказательства теоремы 2.8 ввиду замечаний, сделанных в начале доказательства, достаточно установить, что функция $l(u)$ имеет ограниченную вариацию на $[u_0, u_0+\delta]$ и справедлива формула

$$\frac{v(B_2)-v(A_2)-v(B_1)+v(A_1)}{\delta_2} = -\int\limits_{u_1}^{u_2-0} \gamma_1(u)\,dl(u). \tag{66}$$

Обозначим $Z = \frac{v(B_2)-v(A_2)-v(B_1)+v(A_1)}{\delta_2}$. В силу равенства (60) верхний предел в интеграле можно заменить на u_2, т. е. вместо (66) доказывать формулу

$$Z = -\int\limits_{u_1}^{u_2} \gamma_1(u)\,dl(u). \tag{67}$$

Вследствие выбора параметра δ_2 и точки (x_0,t_0) имеет место утверждение:

почти все точки горизонтальных отрезков A_1A_2 и B_1B_2 принадлежат E. (68)

Отсюда и из формулы (65) следует, что

$$Z = \frac{1}{\delta_2}\left(\int\limits_{B_1}^{B_2} \gamma_1(\tilde u(x,\delta_2))\,dx - \int\limits_{A_1}^{A_2} \gamma_1(\tilde u(x,0))\,dx\right).$$

Применив известные формулы анализа, перепишем последнее равенство в виде

$$Z = -\int\limits_{u_1}^{u_2} \gamma_1(u)\,d\mu(u), \tag{69}$$

где задающая меру функция $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ порождается разностью двух возрастающих функций: $\mu(u) = \frac{1}{\delta_2}(\mu_1(u) - \mu_2(u))$, $\mu_1(u) = \mathscr{H}^1\text{-}\operatorname{meas}\{(x,0) \in A_1A_2 \mid \tilde u(x,0) < u\}$, $\mu_2(u) = \mathscr{H}^1\text{-}\operatorname{meas}\{(x,\delta_2) \in B_1B_2 \mid \tilde u(x,\delta_2) < u\}$.

Сравнивая имеющуюся формулу (69) и искомую формулу (67), видим, что для окончания доказательства теоремы 2.8 нужно установить равенства

$$\mu(u) - l(u) = \text{const} \quad \text{на промежутке } [u_1,u_2], \tag{70}$$

$$\mu(u_2+0) = \mu(u_2). \tag{71}$$

В самом деле, очевидно, что вариация функции $\mu(u)$ равномерно ограничена константой $4\delta_2 + 2l_0$ (это есть сумма длин оснований трапеции $T_{+\delta_2}$, содержащей трапецию T), которая не зависит от выбора значений $u_1, u_2 \in (u_0, u_0+\delta) \setminus E_\sigma$. Поэтому из формулы (70) и произвольности выбора $u_1, u_2 \in (u_0, u_0+\delta) \setminus E_\sigma$ вытекает, что функция $l(u)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[u_0, u_0+\delta]$, а из формул (69)–(71) и (60) немедленно следует искомая формула (67). Итак, докажем равенства (70), (71).

Зафиксируем $c \in (u_1,u_2) \setminus E_\sigma$. Определим множества $X_1 = \{(x,0) \in A_1A_2 \mid \tilde u(x,0) < c\}$, $X_2 = \{(x,\delta_2) \in B_1B_2 \mid \tilde u(x,\delta_2) < c\}$. Обозначим через $\vec L$ вектор с координатами $\vec L = \delta_2(-l(c), 1)$. Из свойств $(P_\pm)$, (63) и неравенства $u_2 > c$ легко выводится следующее утверждение: для всех $(x,0) \in X_1 \cap E$ прямая, проходящая через точку $(x,0)$ параллельно вектору $\vec L$, не может пересекать отрезок I_2. Отсюда немедленно следует, что

для любой $(x,0) \in X_1 \cap E$ точка $(x,0) + \vec L$
лежит на горизонтальной прямой B_1B_2 левее B_2. (72)

Аналогично

для любой $(x,\delta_2) \in X_2 \cap E$ точка $(x,\delta_2) - \vec L$
лежит на горизонтальной прямой A_1A_2 левее A_2. (73)

Сначала разберем случай, когда

$$l(c) \le l(u_1). \tag{74}$$

Рассмотрим треугольник с вершинами A_1, B_1, C_1, где $C_1 = A_1 + \vec{L} = (x_1 - \delta_2 l(c), \delta_2)$. Элементарно проверяется, что треугольник $\triangle A_1 B_1 C_1$ содержится в объединении отрезков, являющихся пересечением трапеции $T_{+\delta_2}$ с прямыми, проходящими через точки отрезка $I_1 = A_1 B_1$ перпендикулярно вектору $(1, l(c))$. Отсюда, а также из свойств (62), $(P_\pm)$, неравенства $u_1 < c$, непрерывности функции $l(\cdot)$ в точке c и теоремы Фубини легко выводится, что[6)]

$$\text{для п. в. } (x,t) \in \triangle A_1 B_1 C_1 \quad \tilde{u}(x,t) < c. \tag{75}$$

$$B_1 C_1 \cap E \subset \{(x, \delta_2) \mid \tilde{u}(x, \delta_2) < c\}. \tag{76}$$

Из формул (75) и (63), в частности, следует, что отрезок I_2 не может пересекаться с внутренностью треугольника $\triangle A_1 B_1 C_1$. Значит, точка C_1 лежит на горизонтальной прямой $B_1 B_2$ не правее, чем B_2. Вместе с (74) и определением точек B_1, C_1 это дает нам, что

$$C_1 \in \overline{B_1 B_2}. \tag{77}$$

Поэтому в силу формулы (76) имеем включение

$$B_1 C_1 \cap E \subset X_2. \tag{78}$$

Рассмотрим множество $\widetilde{X}_2 = (X_1 \cap E) + \vec{L}$. Ввиду свойства (68) и элементарных свойств параллельного переноса имеет место равенство

$$\operatorname{meas} X_1 = \operatorname{meas} \widetilde{X}_2. \tag{79}$$

Из (72), (77) получаем, что

$$\widetilde{X}_2 \subset C_1 B_2 \subset B_1 B_2. \tag{80}$$

Тогда из (68) и свойства $(P_\pm)$ нетрудно вывести, что почти все точки множества $\widetilde{X}_2$ содержатся в множестве X_2, т. е.

$$\operatorname{meas}(\widetilde{X}_2 \setminus X_2) = 0. \tag{81}$$

С другой стороны, в силу (78) и (80) имеет место включение $B_1 C_1 \cap E \subset X_2 \setminus \widetilde{X}_2$. Отсюда, учитывая (79), (81) и (68), а также определение точек B_1, C_1, выводим, что

$$\operatorname{meas}(X_2) - \operatorname{meas}(X_1) \geq \operatorname{meas}(B_1 C_1 \cap E) = \operatorname{meas}(B_1 C_1) = \delta_2 (l(u_1) - l(c)). \tag{82}$$

Теперь докажем неравенство в другую сторону. Рассмотрим множество $\widetilde{X}_1 = (X_2 \cap E \cap C_1 B_2) - \vec{L}$. Ввиду свойства (68), формул (77), (78) и элементарных свойств параллельного переноса имеют место равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{meas} \widetilde{X}_1 &= \operatorname{meas}(X_2 \cap C_1 B_2) = \operatorname{meas}(X_2 \setminus B_1 C_1) \\ &= \operatorname{meas}(X_2) - \operatorname{meas}(B_1 C_1) = \operatorname{meas}(X_2) - \delta_2 (l(u_1) - l(c)). \end{aligned} \tag{83}$$

Из формулы (73) и определения точки C_1 получаем, что $\widetilde{X}_1 \subset A_1 A_2$. Тогда из (68) и свойства $(P_\pm)$ нетрудно вывести, что почти все точки множества $\widetilde{X}_1$ содержатся в множестве X_1, т. е. $\operatorname{meas}(\widetilde{X}_1 \setminus X_1) = 0$. Из последней формулы и равенств (83) получаем неравенство $\operatorname{meas}(X_1) \geq \operatorname{meas}(\widetilde{X}_1) = \operatorname{meas}(X_2) - \delta_2(l(u_1) - l(c))$, которое вместе с неравенством (82) влечет равенство $\operatorname{meas}(X_2) - \operatorname{meas}(X_1) = \delta_2(l(u_1) - l(c))$. Отсюда, вспоминая определение функции $\mu(u)$, получаем равенство

$$\mu(c) = l(c) - l(u_1). \tag{84}$$

Мы доказали равенство (84) для произвольного $c \in (u_1, u_2) \setminus E_\sigma$ при выполнении неравенства (74). Если же вместо неравенства (74) имеет место противоположное неравенство $l(c) > l(u_1)$, то для доказательства (84) надо рассматривать

6) Начиная с формулы (76) мы принимаем следующее уточнение: для точек $A, B \in \mathbb{R}^2$ символом $\overline{AB}$ обозначается замкнутый отрезок, соединяющий точки A, B, а символом AB обозначается соответствующий незамкнутый отрезок (без концов).

треугольник с вершинами A_1, B_1, C_1, где $C_1{=}B_1 - \vec{L}{=}(x_1 + \delta_2(l(c) - l(u_1)), 0)$, т. е. точка C_1 лежит на отрезке A_1A_2 (а не на отрезке B_1B_2, как в случае (74)). Выкладки для этой ситуации проводятся по той же схеме, что и для случая (74), с внесением очевидных изменений (прямые A_1A_2 и B_1B_2 меняются ролями).

Таким образом, равенство (84) имеет место для всех $c \in (u_1, u_2) \setminus E_\sigma$. Поскольку функции l и μ непрерывны слева, то равенство (84) справедливо для любого $c \in (u_1, u_2]$, в частности,

$$\mu(u_2) = l(u_2) - l(u_1). \tag{85}$$

Кроме того, из определения функции μ вытекает, что $\mu(u_1) = 0$. Значит, равенство (84) выполняется и при $c = u_1$, т. е. оно справедливо для всех $c \in [u_1, u_2]$, тем самым тождество (70) полностью доказано. Далее, снова по определению функции μ имеем, что при $c > u_2$ значение $\delta_2\mu(c)$ равно разности длин отрезков A_1A_2 и B_1B_2. Вспоминая координаты этих точек, получаем, что $\mu(c) \equiv l(u_2) - l(u_1)$ при $c > u_2$. Из последнего утверждения и равенства (85) немедленно вытекает равенство (71).

Таким образом, равенства (70), (71), а вместе с ними и теорема 2.8 полностью доказаны. $\square$

Как замечено выше, теорема 1.4.3 является следствием доказанных выше теорем 2.5, 2.8. Теорема 1.4.4 непосредственно вытекает из уже установленной теоремы 1.4.3 и леммы 1.2.3. Из теорем 1.4.2, 1.4.3 немедленно следуют теоремы 1.1.1 и 1.3.2, а из теорем 1.4.2, 1.4.4 вытекает теорема 1.2.1. Тем самым все теоремы, сформулированные в первой части, полностью доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Громов М.* Дифференциальные соотношения с частными производными. М.: Мир, 1990.

2. *Müller S.* Variational models for microstructure and phase transitions. Leipzig: Max-Plank-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, 1998. (Lecture Notes; N 2). http://www.mis.mpg.de/ jump/publications.html).

3. *Панов Е. Ю.* Обобщенные решения задачи Коши для квазилинейных законов сохранения. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1991.

4. *Коробков М. В., Панов Е. Ю.* Об изэнтропических решениях квазилинейных уравнений первого порядка // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 5. С. 99–124.

5. *Коробков М. В.* Об одном аналоге теоремы Сарда для C^1-гладких функций двух переменных // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 5. С. 1083–1091.

6. *Malý J.* The Darboux property for gradients // Real Anal. Exchange. 1996/97. V. 22, N 1. P. 167–173.

7. *Коробков М. В.* Об одном обобщении теоремы Дарбу на многомерный случай // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 118–133.

8. *Сакс С.* Теория интеграла. М.: Изд-во иностр. лит., 1949.

9. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.

Статья поступила 25 января 2006 г.

Коробков Михаил Вячеславович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Коптюга, 4, Новосибирск 630090
korob@math.nsc.ru

Панов Евгений Юрьевич
Новгородский гос. университет,
ул. Большая Санкт-Петербургская, 41, Великий Новгород, 173003
pey@novsu.ac.ru