Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2006. Том 47, № 5

УДК 517.2

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ САРДА ДЛЯ C^1–ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

М. В. Коробков

Аннотация: Основным результатом работы является

Теорема 1. *Пусть $v : \Omega \to \mathbb{R}$ — C^1-гладкая функция на области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Предположим, что $0 \notin \operatorname{Cl}\operatorname{Int} Dv(\Omega)$. Тогда мера образа множества критических точек равна нулю.*

Ключевые слова: C^1-гладкая функция, теорема Сарда, внутренняя точка.

В применении к скалярным функциям двух переменных классическая теорема Сарда [1] (см. также [2]) звучит следующим образом.

Теорема Сарда. *Пусть $v : \Omega \to \mathbb{R}$ — C^2-гладкая функция на области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Тогда справедливо равенство*

$$\operatorname{meas} v(Z_v) = 0. \tag{1}$$

Здесь и в дальнейшем символом Z_v обозначается множество критических точек функции $v = v(x,t)$, т. е. $Z_v = \{(x,t) \in \Omega \mid v_x(x,t) = v_t(x,t) = 0\}$.

Как показал Уитни [3], условие C^2-гладкости в данном результате опустить нельзя. А именно, Уитни построил C^1-гладкую функцию $v : (0,1)^2 \to \mathbb{R}$ со следующим свойством: множество критических точек Z_v содержит дугу, на которой $v \neq \mathrm{const}$.

Впоследствии примеры подобного рода строились и другими математиками; наиболее простую конструкцию, принадлежащую Гринбергу [4], мы приведем в конце нашей статьи.

Однако некоторые аналоги теоремы Сарда справедливы и для функций, не имеющих требуемой степени гладкости. Хотя равенство (1) тогда может уже и не выполняться, А. Я. Дубовицким [5] были получены некоторые результаты о строении множеств уровня для случая пониженной гладкости (см. также [6]).

Другим направлением исследований было обобщение теоремы Сарда для пространств Гёльдера, Соболева, а также для пространств функций, удовлетворяющих условию Липшица (см., например, [6]).

В настоящей статье для теоремы Сарда установлен аналог иного рода. Предварительно договоримся о некоторых обозначениях. Символом Dv обозначается градиент $Dv = (v_x, v_t)$ функции $v = v(x,t)$. *Областью* мы называем открытое связное множество. Всюду в дальнейшем $\operatorname{Int} E$ — внутренность, $\operatorname{Cl} E$

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00482–а) и Президентским грантом для молодых кандидатов наук (грант МК-3778.2004.1).

— замыкание множества E (иногда той же цели служит значок $\overline{E}$), ∂E — граница множества E, $\mathrm{meas}(E)$ — мера Лебега множества E. Символом $a \cdot b$ мы обозначаем скалярное произведение векторов a, b, а через $B(z,r)$ обозначается открытый шар $B(z,r) = \{w \mid |w-z| < r\}$. Некоторые другие обозначения будут вводиться по ходу статьи.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Пусть $v : \Omega \to \mathbb{R}$ — C^1-гладкая функция на области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Предположим, что*[1)]

$$0 \notin \mathrm{Cl}\,\mathrm{Int}\,Dv(\Omega). \tag{2}$$

Тогда выполнено равенство (1).

Доказательство теоремы 1. Нам понадобится одно следствие из формулы коплощади (coarea formula), см., например, теорему 3.2.11 из [7].

Теорема (формула коплощади). *Пусть $v : \Omega \to \mathbb{R}$ — липшицева функция ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, и пусть $B \subset \mathbb{R}^2$ — борелевское множество. Тогда для почти всех значений $y \in \mathbb{R}$ прообраз $v^{-1}(y)$ есть 1-σ-спрямляемое множество (т. е. множество $v^{-1}(y)$ можно покрыть счетным набором липшицевых кривых), причем длина $\mathscr{H}^1(v^{-1}(y))$ конечна (т. е. одномерная мера Хаусдорфа множества $v^{-1}(y)$ конечна) и*

$$\int\limits_B |Dv(x,t)|\,dtdx = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathscr{H}^1(v^{-1}(y) \cap B)\,dy.$$

В частности, для множества Z_v и для почти всех значений $y \in \mathbb{R}$ справедливо следующее утверждение: *длина прообраза $v^{-1}(y)$ конечна, а длина пересечения $v^{-1}(y) \cap Z_v$ равна нулю,*[2)] *т. е.*

$$\mathscr{H}^1(v^{-1}(y)) < \infty, \quad \mathscr{H}^1(v^{-1}(y) \cap Z_v) = 0. \tag{3}$$

Пусть теперь выполнены условия теоремы 1. Не умаляя общности, можно считать, что область Ω является квадратом, скажем $\Omega = (0,1)^2$ и $v \in C^1(\overline{\Omega})$, $\overline{\Omega} = \mathrm{Cl}\,\Omega = [0,1]^2$. Будем считать также, что $v \neq \mathrm{const}$.

Как следует из классической теоремы Морса — Сарда (см., например, теорему 1.3 в [2]), почти все $y \in \mathbb{R}$ являются регулярными (в классическом смысле) значениями $v(x,t)$ на границе $\partial\Omega$, т. е.

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{s}}(x,t) \neq 0 \quad \forall (x,t) \in v^{-1}(y) \cap \partial\Omega, \tag{4}$$

где $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{s}}$ — производная по касательной к границе $\partial\Omega$ (при этом мы считаем, что прообраз $v^{-1}(y)$ не содержит вершин квадрата Ω для регулярных значений y). С этого момента мы будем называть *регулярными* те значения y, для которых выполнены условия (3), (4). Множество регулярных значений y таких, что $v^{-1}(y) \neq \varnothing$, обозначим через Y. Из сформулированной теоремы о коплощади следует, что

$$\mathrm{meas}(v(\Omega) \setminus Y) = 0.$$

Доказательство теоремы 1 разбивается на ряд лемм, впрочем, довольно простых. Из определения множества Y сразу получаем следующий факт.

[1)]Здесь и в дальнейшем значение градиента $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ мы обозначаем упрощенным символом 0.

[2)]Последнее утверждение прямо следует также и из теоремы Дубовицкого [5]. Однако в данном простом двумерном случае мы предпочли сослаться на более известную формулу коплощади.

Лемма 1. *Для любого регулярного значения $y \in Y$ пересечение $v^{-1}(y) \cap \partial\Omega$ есть конечное множество.*

Лемма 2. *Пусть $D \subset \Omega$ — область. Тогда*

$$\sup_{(x,t)\in D} v(x,t) = \sup_{(x,t)\in\partial D} v(x,t), \qquad \inf_{(x,t)\in D} v(x,t) = \inf_{(x,t)\in\partial D} v(x,t).$$

Доказательство леммы 2. Предположим противное. Пусть для определенности $v(x_0,t_0) = \sup\limits_{(x,t)\in D} v(x,t) > \sup\limits_{(x,t)\in\partial D} v(x,t)$, где $(x_0,t_0) \in D$. Выбирая по условию (2) точку $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus Dv(\overline{\Omega})$ достаточно близко к 0, получаем

$$\sup_{(x,t)\in D} (v(x,t) - (ax+bt)) > \sup_{(x,t)\in\partial D} (v(x,t) - (ax+bt)).$$

Пусть $v(x_1,t_1) - (ax_1 + bt_1) = \sup\limits_{(x,t)\in D} \big(v(x,t) - (ax+bt)\big)$, $(x_1,t_1) \in D$. Но тогда по теореме Ферма имеем $(v_x(x_1,t_1), v_t(x_1,t_1)) = (a,b)$, что противоречит выбору (a,b). Доказательство леммы 2 окончено. $\square$

Из леммы 2 сразу вытекает

Лемма 3. *Пусть $D \subset \Omega$ — область. Тогда ни для какого $y \in Y$ не может выполняться включение $\partial D \subset v^{-1}(y)$.*

Это означает, грубо говоря, что каждая компонента связности прообраза $v^{-1}(y)$ не содержит циклов, т. е. является «деревом». Лемма 3 помогает получить следующие три леммы.

Лемма 4. *Для произвольного $y \in v(\Omega)$ никакая компонента связности*[3] *прообраза $v^{-1}(y)$ не содержится строго внутри Ω. В частности, никакая компонента связности прообраза $v^{-1}(y)$ не состоит из одной точки, содержащейся в Ω.*

Обращаем внимание на то, что некоторые из формулируемых лемм верны для произвольных значений $y \in v(\Omega)$, а некоторые — только для регулярных значений $y \in Y$.

Лемма 5. *Для $y \in Y$ любые две точки компоненты связности прообраза $v^{-1}(y)$ можно соединить спрямляемой дугой*[4]*, лежащей в $v^{-1}(y)$. Причем такая дуга единственна, и вся она, кроме, возможно, своих концевых точек, лежит в области Ω (т. е. эта дуга может пересекаться с $\partial\Omega$ только в своих концевых точках).*

Доказательство леммы 5. Пусть K — компонента связности прообраза $v^{-1}(y)$, где $y \in Y$. Тогда в силу определения множества Y множество K является континуумом конечной $\mathscr{H}^1$-меры Хаусдорфа, а значит, конечной длины. Из этого следует, как доказал Т. Важевский (см., например, [8, с. 190]), что множество K является непрерывным образом отрезка. Отсюда в силу известных теорем общей топологии (см. [9, гл. 6, § 50, разд. II, теоремы 1, 2]) получаем, что каждые две точки из K можно соединить дугой, содержащейся в K. Единственность такой дуги следует из леммы 3 настоящей статьи. Наконец, утверждение о том, что эта дуга может пересекаться с $\partial\Omega$ только в своих концевых точках, следует из определения дуги и определения множества Y. $\square$

Следующая простая лемма будет использоваться нами неоднократно.

---

[3] Под *связностью* мы понимаем связность в смысле понятий общей топологии.

[4] *Дугой* мы называем множество, гомеоморфное отрезку $[0,1]$.

Лемма 6. *Пусть $y_0 \in Y$ и K — компонента связности прообраза $v^{-1}(y_0)$. Тогда множество $K \cap \partial\Omega$ содержит не менее двух точек.*

Доказательство леммы 6. Из леммы 4 вытекает, что $\exists A \in K \cap \partial\Omega$. Предположим, что лемма 6 неверна, тогда

$$K \cap \partial\Omega = \{A\}. \tag{5}$$

По определению регулярных значений возьмем окрестность $U(A)$ такую, что $I = U(A) \cap \partial\Omega$ есть отрезок, лежащий на границе квадрата Ω. Вследствие формулы (4) можно считать, что точка A разбивает отрезок I на два интервала I_1 и I_2 таких, что

$$\forall z \in I_1 \quad v(z) < y_0, \tag{6}$$

$$\forall z \in I_2 \quad v(z) > y_0. \tag{7}$$

Возьмем произвольно точки $B \in I_1$, $C \in I_2$. Из формулы (5) обычными топологическими рассуждениями легко вывести, что точки B, C можно соединить ломаной $L \subset \overline{\Omega}$ такой, что $L \cap \partial\Omega = \{B, C\}$ и $L \cap v^{-1}(y_0) = \varnothing$. Из последнего равенства следует, что либо $v(z) > y_0$ для всех $z \in L$, либо $v(z) < y_0$ для всех $z \in L$. Но это противоречит формулам (6), (7). Полученное противоречие завершает доказательство леммы 6. □

Лемма 7. *Пусть $y_0 \in Y$ и K — компонента связности прообраза $v^{-1}(y_0)$, L — компонента связности множества $\partial\Omega \setminus K$ (ясно, что L является дугой). Пусть, далее, $K_1 \subset K$ — дуга, соединяющая концы L (ее существование утверждается в лемме 5), Ω_1 — компонента связности открытого множества $\Omega \setminus K_1$ такая, что $\partial\Omega_1 = L \cup K_1$. Тогда для всех точек $z \in \overline{\Omega}_1 \setminus K_1$, достаточно близких к дуге K_1, значения $(v(z) - y_0)$ имеют один и тот же знак (положительный либо отрицательный).*

Доказательство леммы 7. Концы дуги K_1 обозначим буквами A, B, т. е. $\{A, B\} = K_1 \cap \partial\Omega$. Из условия (4), входящего в определение множества Y, и определения множества L следует, что существуют окрестности $U(A)$, $U(B)$ точек A, B соответственно такие, что

$$\forall z_1, z_2 \in U(A) \cap L \quad (v(z_1) - y_0)(v(z_2) - y_0) > 0 \text{ и } (z_1 \neq z_2 \Leftrightarrow v(z_1) \neq v(z_2)), \tag{8}$$

$$\forall z_1, z_2 \in U(B) \cap L \quad (v(z_1) - y_0)(v(z_2) - y_0) > 0 \text{ и } (z_1 \neq z_2 \Leftrightarrow v(z_1) \neq v(z_2)), \tag{9}$$

$$\begin{gathered} v^{-1}(y_0) \cap U(A) = K_1 \cap U(A), \ \ v^{-1}(y_0) \cap U(B) = K_1 \cap U(B), \text{ причем} \\ \text{множества } \ v^{-1}(y_0) \cap U(A), \ v^{-1}(y_0) \cap U(B) \text{ являются } C^1\text{-дугами,} \\ \text{входящими в границу } \partial\Omega \text{ в точках } A, B \text{ трансверсально.} \end{gathered} \tag{10}$$

Докажем сначала, что разность $(v(z) - y_0)$ не может принимать значения разных знаков, когда точка $z \in \overline{\Omega}_1 \setminus K_1$ близка к дуге K_1. Пусть это не так, тогда с учетом (10) найдутся последовательности точек $z'_\nu \in \Omega_1$, $z''_\nu \in \Omega_1$ такие, что

$$v(z'_\nu) = y'_\nu \in Y, \quad v(z''_\nu) = y''_\nu \in Y, \quad z'_\nu \to z'_0 \in K_1 \cap \Omega, \quad z''_\nu \to z''_0 \in K_1 \cap \Omega, \tag{11}$$

$$y'_\nu - y_0 > 0, \quad y''_\nu - y_0 < 0. \tag{12}$$

Обозначим через K'_ν компоненту связности прообраза $v^{-1}(y'_\nu)$, содержащую точку z'_ν, через K''_ν — компоненту связности прообраза $v^{-1}(y''_\nu)$, содержащую точку z''_ν. Легко проверить, что $K'_\nu \cap \partial\Omega \subset L$, откуда, в свою очередь, нетрудно вывести включение

$$K'_\nu \cap \partial\Omega \subset U(A) \cup U(B) \quad \text{при достаточно больших номерах } \nu. \tag{13}$$

С одной стороны, по лемме 6 множество $K'_\nu \cap \partial\Omega$ содержит не менее двух точек. С другой стороны, в силу (8), (9) при достаточно больших номерах ν каждое из множеств $U(A) \cap K'_\nu \cap \partial\Omega$, $U(B) \cap K'_\nu \cap \partial\Omega$ содержит не более одной точки. Суммируя два последних предложения и формулу (13), получаем, что при достаточно больших ν каждое из указанных в последнем предложении множеств содержит ровно одну точку, т. е.

$$U(A) \cap K'_\nu \cap \partial\Omega = \{A'_\nu\}, \quad U(B) \cap K'_\nu \cap \partial\Omega = \{B'_\nu\}. \tag{14}$$

Аналогично рассуждая для множества K''_ν, получаем

$$U(A) \cap K''_\nu \cap \partial\Omega = \{A''_\nu\}, \quad U(B) \cap K''_\nu \cap \partial\Omega = \{B''_\nu\}. \tag{15}$$

Но формулы (12), (14), (15) противоречат (8), (9). Придя к противоречию, мы доказали таким образом, что либо $(v(z) - y_0) \geq 0$, либо $(v(z) - y_0) \leq 0$ для всех точек $z \in \overline{\Omega}_1 \setminus K_1$, достаточно близких к K_1.

Теперь осталось доказать, что $(v(z) - y_0) \neq 0$ для всех точек $z \in \overline{\Omega}_1 \setminus K_1$, достаточно близких к K_1. Предположим противное, тогда найдется последовательность $z_\nu \in \Omega_1$ такая, что $v(z_\nu) \equiv y_0$, $z_\nu \to z_0 \in K_1 \cap \Omega$. Обозначим через $K(z_\nu)$ компоненту связности прообраза $v^{-1}(y_0)$, содержащую точку z_ν. В силу леммы 4 $K(z_\nu)$ является континуумом, содержащим более одной точки. Так как по условию доказываемой леммы 7 $y_0 \in Y$, в силу (3) в любой окрестности точки z_ν существуют точки из $K(z_\nu)$, в которых градиент Dv не равен нулю. Значит, найдутся последовательности точек $z'_\nu \in \Omega_1$, $z''_\nu \in \Omega_1$ со свойствами (11), (12). Но этого не может быть, как доказано выше. Доказательство леммы 7 завершено. $\square$

Из лемм 6, 7 немедленно вытекает

Лемма 8. *Пусть $y \in Y$ и K — компонента связности прообраза $v^{-1}(y)$. Предположим, что пересечение $K \cap \partial\Omega$ содержит не более двух точек. Тогда K является дугой с концами на $\partial\Omega$.*

С помощью леммы 8, повторяя соответствующие рассуждения из доказательства леммы 7, легко вывести следующее утверждение.

Лемма 9. *Пусть $y_0 \in Y$ и K_0 — компонента связности прообраза $v^{-1}(y_0)$. Тогда существует число $\delta = \delta(K_0) > 0$ такое, что для любого $z \in \Omega$ если $0 < \operatorname{dist}(z, K_0) < \delta$ и $y = v(z) \in Y$, то компонента связности $K(z)$ прообраза $v^{-1}(y)$, содержащая точку z, является дугой с концами на $\partial\Omega$.*

Из лемм 1, 6, 9, в свою очередь, непосредственно вытекает

Лемма 10. *Существует множество $\widetilde{Y} \subset Y$, открытое относительно Y и обладающее свойствами: $\operatorname{meas}(Y \setminus \widetilde{Y}) = 0$ и для любого $y \in \widetilde{Y}$ прообраз $v^{-1}(y)$ является конечным объединением непересекающихся дуг с концами на $\partial\Omega$.*

Из леммы 10, в частности, следует, что

$$\operatorname{meas}\bigl(v(\Omega) \setminus \widetilde{Y}\bigr) = 0. \tag{16}$$

Теперь все готово для того, чтобы перейти к ключевому шагу доказательства теоремы 1. А именно, теорема 1 вытекает из формулы (16) и следующей леммы.

Лемма 11. *Справедливо равенство*

$$v(Z_v)\cap\widetilde{Y}=\varnothing.$$

Доказательство леммы 11. Предположим противное, тогда существуют число $y_0\in\widetilde{Y}$ и точка $z_0\in\Omega$ такие, что $v(z_0)=y_0$ и

$$Dv(z_0)=0.$$

Пусть K_0 — компонента связности прообраза $v^{-1}(y_0)$, содержащая точку z_0. По определению множества $\widetilde{Y}$ пересечение $K_0\cap\partial\Omega$ состоит из двух точек A_1, A_2, причем

$$\frac{\partial v}{\partial\mathbf{s}}(A_1)\neq 0\neq\frac{\partial v}{\partial\mathbf{s}}(A_2),$$

где $\frac{\partial v}{\partial\mathbf{s}}$ — производная по касательной к границе $\partial\Omega$.

Из леммы 10 и определения множеств Y, $\widetilde{Y}$ вытекает, что для достаточно маленького интервала $(c_-,c_+)\ni y_0$ с концами $c_-,c_+\in\widetilde{Y}$ выполняется следующий набор условий.

(i) Компонента связности Ω_0 прообраза $v^{-1}((c_-,c_+))\cap\Omega$, содержащая точку z_0, является односвязной областью, причем $\partial\Omega_0=K_+\cup K_-\cup I_1\cup I_2$, где K_+, K_- суть дуги с концами на $\partial\Omega$,

$$v(z)\equiv c_+ \text{ на } K_+,\quad v(z)\equiv c_- \text{ на } K_-, \tag{17}$$

а $I_1\ni A_1$, $I_2\ni A_2$ суть отрезки, лежащие в $\partial\Omega$.

(ii) Существует $\delta_0>0$ такое, что

$$\forall z\in I_1\cup I_2\quad \left|\frac{\partial v}{\partial\mathbf{s}}(z)\right|>\delta_0. \tag{18}$$

Для вектора $p=(p_1,p_2)\in\mathbb{R}^2$ рассмотрим отображение $v_p:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$, определяемое по формуле $v_p(x,t)=v(x,t)-p\cdot(x,t)=v(x,t)-p_1x-p_2t$. Из формулы (18) очевидно, что

$$\forall z\in I_1\cup I_2\quad \left|\frac{\partial v_p}{\partial\mathbf{s}}(z)\right|>\frac{\delta_0}{2}\ \text{ при } |p|\leq\frac{\delta_0}{2}.$$

Следовательно,

$$\text{при } |p|\leq\frac{\delta_0}{2} \text{ функция } v_p \text{ строго монотонна на каждом из интервалов } I_1, I_2. \tag{19}$$

Поскольку $Dv_p(x,t)\equiv Dv(x,t)-p$, вследствие формулы (2) существует $\delta_1>0$ такое, что

$$0\notin \operatorname{Cl}\operatorname{Int} Dv_p(\Omega)\ \text{ при } |p|<\delta_1. \tag{20}$$

Ниже мы всегда будем считать выполненной оценку $|p|<\delta_1$, требуемую в формуле (20). Поэтому все предыдущие леммы будут выполняться и для рассматриваемых отображений v_p. Обозначим через Y_p множество регулярных значений отображения v_p. Из того, что $c_-<v(z_0)<c_+$, и из свойства (17) вытекает, что существует $\delta_2>0$ такое, что для любых $p\in B(0,\delta_2)$, $z\in B(z_0,\delta_2)$ имеют место соотношения $z\in\Omega_0$ и $v_p^{-1}(y)\cap(K_1\cup K_2)=\varnothing$, где $y=v_p(z)$. Ниже мы будем всегда считать выполненной оценку

$$|p|<\min(\delta_0/2,\delta_1,\delta_2). \tag{21}$$

Тогда для каждого $z \in B(z_0, \delta_2)$ при $y = v_p(z)$ справедливо включение $v_p^{-1}(y) \cap \partial\Omega_0 \subset I_1 \cup I_2$. Отсюда и из (19) вытекает, что для каждого $z \in B(z_0, \delta_2)$ при $y = v_p(z)$ прообраз $v_p^{-1}(y) \cap \overline{\Omega}_0$ пересекает границу области Ω_0 не более чем в двух точках, лежащих на отрезках $I_1 \cup I_2 \subset \partial\Omega$. Из последнего утверждения и из лемм 6, 8 получаем, что для каждого $z \in B(z_0, \delta_2)$ при $y = v_p(z) \in Y_p$ прообраз $v_p^{-1}(y) \cap \overline{\Omega}_0$ является дугой, содержащей z и имеющей концы на интервалах I_1, I_2. Из последних двух предложений вытекает нужное нам для дальнейших выкладок свойство:

(iii) для любого p, удовлетворяющего оценке (21), и для всех $z \in B(z_0, \delta_2)$ каждое из множеств $\{(x,t) \in \Omega_0 \mid v_p(x,t) > v_p(z)\}$ и $\{(x,t) \in \Omega_0 \mid v_p(x,t) < v_p(z)\}$ связно.

Точку $z \in B(z_0, \delta_2)$ будем называть *экстремальной*, если найдутся прямая $L \ni z$ и окрестность $U(z)$ такие, что либо

$$v(x,t) > v(z) \quad \text{при } (x,t) \in U(z) \cap L \setminus \{z\}, \tag{22}$$

либо

$$v(x,t) < v(z) \quad \text{при } (x,t) \in U(z) \cap L \setminus \{z\}.$$

Очевидно, что если бы какой-нибудь шар $B(z_0, r)$ не содержал экстремальных точек, то все линии уровня функции v, находящиеся в этом шаре, являлись бы прямолинейными отрезками. Но такого «идеального» строения линий уровня не может быть ни для какого шара $B(z_0, r)$, это легко выводится из равенства $Dv(z_0) = 0$ и того факта, что вдоль линии уровня, проходящей через точку z_0, градиент Dv не равен тождественно 0 (последнее следует из включения $v(z_0) \in Y$). Значит, для всякого $r \in (0, \delta_2)$ существует экстремальная точка $z_r \in B(z_0, r)$. Выберем и зафиксируем достаточно малый радиус $r \in (0, \delta_2)$, чтобы для соответствующей экстремальной точки $z_r \in B(z_0, r)$ выполнялось неравенство $|Dv(z_r)| < \min\left(\frac{\delta_0}{2}, \delta_1, \delta_2\right)$. Пусть L — соответствующая прямая, и пусть $\vec{L}$ — вектор, параллельный L. Положим $p_r = Dv(z_r)$. Из определения экстремальной точки следует, что $p_r \cdot \vec{L} = 0$, откуда, в свою очередь, вытекает, что точка z_r является экстремальной и для отображения v_{p_r}. Далее мы будем считать, не умаляя общности, что точке z_r соответствует формула (22), т. е. найдется окрестность $U(z_r)$ такая, что справедливо неравенство

$$v_{p_r}(x,t) > v_{p_r}(z_r) \quad \text{при } (x,t) \in U(z_r) \cap L \setminus \{z_r\}. \tag{23}$$

Также будем считать, что окрестность $U(z_r)$ является кругом, лежащим в Ω_0. Возьмем точки $A_r, C_r \in U(z_r) \cap L \setminus \{z_r\}$, лежащие по разные стороны от точки z_r. По свойству (iii) эти точки можно соединить между собой некоторой ломаной $Q \subset \{(x,t) \in \Omega_0 \mid v_{p_r}(x,t) > v_{p_r}(z_r)\}$. Учитывая, что z_r не может принадлежать ломаной Q, и заменяя, если нужно, точки A_r, C_r ближайшими к z_r точками пересечения ломаной Q с прямой L, мы можем считать без потери общности, что Q пересекается с отрезком $[A_r, C_r]$ только на концах A_r, C_r этого отрезка. Тогда объединение $Q \cup [A_r, C_r]$ ограничивает некоторую область, которую мы обозначим через Ω_r. Ясно, что $\Omega_r \subset \Omega$.

Обозначим через H_+, H_- полуплоскости[5)], на которые прямая L разбивает плоскость $\mathbb{R}^2$. Поскольку при достаточно малых $\rho > 0$ справедливы равенства

[5)] Мы считаем, что полуплоскости H_+, H_- суть открытые множества, т. е. что они не содержат точек прямой L.

$B(z_r,\rho)\cap\partial\Omega_r = B(z_r,\rho)\cap[A_r,C_r] = B(z_r,\rho)\cap L$, существует $\delta_3>0$, для которого имеет место одна из двух возможностей: либо

$$\forall\rho\in(0,\delta_3)\quad B(z_r,\rho)\cap\Omega_r = B(z_r,\rho)\cap H_+, \tag{24}$$

либо

$$\forall\rho\in(0,\delta_3)\quad B(z_r,\rho)\cap\Omega_r = B(z_r,\rho)\cap H_-. \tag{25}$$

Ниже мы будем предполагать, что справедлива формула (24). Случай, соответствующий формуле (25), рассматривается совершенно аналогично.

Теперь произведем «малое возмущение». А именно, для ненулевого вектора $\eta\in\mathbb{R}^2$, перпендикулярного прямой L и направленного в полуплоскость H_+, рассмотрим отображение $v_{p_r+\eta}$. При этом вектор η выберем настолько малым, чтобы выполнялись формулы

$$|p_r+\eta|<\delta_1, \tag{26}$$

$$v_{p_r+\eta}(x,t) > v_{p_r+\eta}(z_r) \quad \text{при } (x,t)\in Q. \tag{27}$$

Из формулы (23) и выбора направления η вытекает формула

$$v_{p_r+\eta}(x,t) > v_{p_r+\eta}(z_r) \quad \text{при } (x,t)\in U(z_r)\cap L\setminus\{z_r\}. \tag{28}$$

В частности,

$$v_{p_r+\eta}(x,t) > v_{p_r+\eta}(z_r) \quad \text{при } (x,t)\in [A_r,C_r]\setminus\{z_r\}. \tag{29}$$

По построению $Dv_{p_r+\eta}(z_r) = -\eta$. Значит, по теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки z_r линия уровня функции $v_{p_r+\eta}$, проходящая через z_r, является C^1-гладкой кривой, имеющей касательную L в z_r. Отсюда с учетом (28) и направленности вектора η элементарно выводится существование такого $\delta_4>0$, что

$$\forall\rho\in(0,\delta_4)\quad v_{p_r+\eta}(x,t) > v_{p_r+\eta}(z_r) \quad \text{при } (x,t)\in H_-\cap \operatorname{Cl} B(z_r,\rho). \tag{30}$$

Зафиксируем теперь положительный радиус $\rho_0<\min(\delta_3,\delta_4)$ с дополнительным условием $\operatorname{Cl} B(z_r,\rho_0)\subset\Omega\setminus Q$. Рассмотрим область $\Omega_{\rho_0} = \Omega_r\cup B(z_r,\rho_0)$. Ясно, что

$$z_r\in\Omega_{\rho_0}. \tag{31}$$

Из построения вытекает, что $\Omega_{\rho_0}\subset\Omega$. Кроме того, из построения (см., в частности, формулу (24)) следует также, что граница области Ω_{ρ_0} состоит из трех частей: $\partial\Omega_{\rho_0} = Q\bigcup([A_r,C_r]\setminus B(z_r,\rho_0))\bigcup(H_-\cap\partial B(z_r,\rho_0))$. Из этого факта и из формул (27), (29), (30) немедленно получаем, что

$$v_{p_r+\eta}(x,t) > v_{p_r+\eta}(z_r) \quad \text{при } (x,t)\in\partial\Omega_{\rho_0}. \tag{32}$$

Однако формулы (31), (32) противоречат лемме 2, примененной к отображению $v_{p_r+\eta}$ (возможность такого применения вытекает из формул (20), (26)). На этом доказательство леммы 11 (а вместе с ней и теоремы 1) окончено. □

Пример. Если в формулировке теоремы 1 условие (2) заменить более слабым условием

$$0\notin\operatorname{Int} Dv(\Omega), \tag{33}$$

то утверждение теоремы 1 перестает быть верным. Это видно из следующего простого примера, принадлежащего Гринбергу [4]. Пусть $C\subset\mathbb{R}$ — классическое канторово множество (которое получается, если из отрезка $[0,1]$ удалить среднюю треть, и т. д.). Известно, что

$$C+C=[0,2]. \tag{34}$$

Известно также, что существует возрастающая C^1-гладкая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что $\{f(x) \mid x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0\} = C$. Рассмотрим теперь C^1-гладкую функцию двух переменных $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, определяемую по формуле $v(x,t) = f(x) + f(t)$. В силу монотонности функции f справедлива формула (33), в то же время из формулы (34) вытекает, что

$$v(Z_v) = [0, 2].$$

В заключение отметим, что с помощью теоремы 1 удалось, в частности, найти необходимые и достаточные условия на плоскую кривую для того, чтобы она являлась образом градиента C^1-гладкой функции двух переменных (см. [10]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sard A.* The measure of the critical values of differentiable maps // Bull. Amer. Math. Soc. 1942. V. 48. P. 883–890.
2. *Хирш М.* Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979.
3. *Whitney H.* A function not constant on a connected set of critical points // Duke Math. J. 1935. V. 1. P. 514–517.
4. *Grinberg E. L.* On the smoothness hypothesis in Sard's theorem // Amer. Math. Monthly. 1985. V. 92, N 10. P. 733–734.
5. *Дубовицкий А. Я.* О строении множеств уровня дифференцируемых отображений n-мерного куба в k-мерный куб // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1957. Т. 21. С. 371–408.
6. *Bojarski B., Hajlasz P., Strzelecki P.* Sard's theorem for mappings in Holder and Sobolev spaces // Manuscripta Math. 2005. V. 118. P. 383–397.
7. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
8. *Сакс С.* Теория интеграла. М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
9. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, 1969. Т. 2.
10. *Коробков М. В., Панов Е. Ю.* О необходимых и достаточных условиях на кривую для того, чтобы она являлась образом градиента C^1-гладкой функции // Сиб. мат. журн. (В печати).

Статья поступила 15 декабря 2005 г.

Коробков Михаил Вячеславович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
korob@math.nsc.ru