Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2006. Том 47, № 3

УДК 510.6

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПОДМОДЕЛИ ПАРАМЕТРИЗУЕМЫХ МОДЕЛЕЙ

А. С. Морозов

Аннотация: Вводится понятие F-параметризации модели. В терминах F-параметризаций получены некоторые общие результаты об элементарных подмоделях F-параметризуемых моделей. Это позволяет, в частности, единым методом описать элементарные подмодели в языке первого порядка и в языке наследственно конечных надстроек для поля вещественных чисел и группы всех перестановок на натуральных числах. В предположении аксиомы конструктивности получена более простая характеризация элементарных подмоделей и установлены некоторые свойства структуры элементарных подмоделей F-параметризуемых моделей.

Ключевые слова: параметризуемая модель, элементарная подмодель, наследственно-конечная надстройка, самопараметризуемая модель.

1. Введение

В работах [1, 2] среди других были получены результаты о том, что подгруппа всех вычислимых перестановок в группе $\mathrm{Sym}(\omega)$ всех перестановок на натуральных числах и подгруппа всех вычислимых элементов в группе $\mathrm{Aut}\langle\mathbb{Q};<\rangle$ всех автоморфизмов упорядоченного множества рациональных чисел с естественным порядком не являются элементарными подгруппами в этих группах. Естественно возник вопрос об описании элементарных подгрупп в этих группах. Кроме того, автор пытался ответить на вопрос В. Г. Пузаренко о том, какие подполя $\mathbb{R}'$ в поле всех вещественных чисел $\mathbb{R}$ обладают свойством: надстройка наследственно конечных множеств $\mathbb{HF}(\mathbb{R}')$ является элементарной подмоделью в $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$. При изучении всех этих вопросов выяснилось, что в них много общего. Это привело к понятию F-параметризации моделей и доказательству общих теорем, на базе которых единым методом были получены ответы на указанные вопросы. Этому и посвящена настоящая статья. Группа всех автоморфизмов упорядочения по типу рациональных чисел $\mathrm{Aut}_r\langle\mathbb{Q};<\rangle$ тоже может быть рассмотрена в рамках данного подхода, но ввиду необходимости доказательства ряда дополнительных технических результатов автор планирует посвятить этой группе отдельную статью.

Перейдем к определениям и обозначениям. Обычно мы будем использовать переменные $k, \ell, m, n, \dots$, возможно, с индексами, для натуральных чисел и переменные f, g, h, возможно, с индексами, — для функций. Через $\mathrm{Sym}(\omega)$

Работа выполнена при финансовой поддержке международного Российско-Германского гранта РФФИ-ННИО (код проекта 01–01–04003 ННИОа), Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ–2112.2003.1), а также Фонда содействия отечественной науке.

мы обозначаем группу всех перестановок на ω. Запись $\exists^{=1}x\ \varphi(x)$ служит сокращением для $\exists x\ (\varphi(x)\,\&\,\forall y\,(\varphi(y)\ \to\ y\ =\ x))$. Мы считаем зафиксированным некоторое вычислимое взаимно однозначное отображение $c:\omega\times\omega\to\omega$. Для функции $f\in\omega^\omega$ через $\Gamma(f)$ обозначается ее график, т. е. множество $\{c(x,y)\mid f(x)=y\}$. Через $\lambda x.f(x)$ будем обозначать функцию, вычисляемую по x как $f(x)$. Мы также будем использовать стандартную кодировку конечных множеств: $D_m=\{a_0<\dots<a_k\}$, если $m=\sum\limits_{i=0}^{k}a_i$. Запись $\mathfrak{M}_0\preccurlyeq\mathfrak{M}_1$ будет означать, что $\mathfrak{M}_0$ — элементарная подмодель в $\mathfrak{M}_1$.

В основных определениях в теории допустимых множеств мы будем следовать монографиям [3, 4]. Пусть $\mathfrak{M}$ — модель конечной предикатной сигнатуры $\langle P_0,\dots,P_k\rangle$. Через $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ мы будем обозначать надстройку из наследственно конечных множеств над моделью $\mathfrak{M}$, рассматриваемую в языке $\langle\varnothing,U,\in,P_0,\dots,P_k\rangle$, где знак $\varnothing$ обозначает, как всегда, пустое множество, U — унарный предикат, выделяющий праэлементы (т. е. элементы $\mathfrak{M}$), а $\in$ — отношение принадлежности.

При рассмотрении наследственно конечных надстроек мы будем использовать понятие термов для множеств, введенных Ю. Л. Ершовым (см., например, [4, 5]). Мы будем называть их здесь *τ-термами.* Неформально τ-термы — это все конечные выражения, которые составлены из символа пустого множества $\varnothing$, переменных $v_1,v_2,\dots$ с помощью левой скобки «{», правой скобки «}» и запятых таким образом, чтобы полученное выражение можно было интерпретировать как наследственно конечное множество, построенное из $\varnothing,v_1,v_2,\dots$. Любой элемент модели $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ является значением подходящего τ-терма от элементов из $\mathfrak{M}$ (т. е. от праэлементов). Например, $\{\varnothing,\{v_7,v_1\},v_1\}$ — τ-терм, а $\}\}v_1,\{$ — нет. Формальное определение выглядит так.

Определение 1.1. 1) $\varnothing$ есть τ-терм;

2) любая переменная v_i есть τ-терм;

3) если $t_1,\dots,t_k$, $k>0$, — τ-термы, то $\{t_1,\dots,t_k\}$ — τ-терм;

4) произвольная последовательность символов является τ-термом тогда и только тогда, когда это можно установить конечным числом применений предыдущих пунктов данного определения.

Мы предполагаем зафиксированной некоторую гёделевскую нумерацию всех τ-термов $\tau_0,\tau_1\dots$, т. е. такую нумерацию, что по любому номеру $i\in\omega$ можно эффективно выписать терм τ_i, а также по любому τ-терму можно эффективно найти его номер.

Если σ — τ-терм, то под $\sigma(a_1,a_2,\dots)$ будем подразумевать его естественным образом определенное значение при одновременном означивании переменных $v_1,v_2,\dots$ как $a_1,a_2,\dots$ соответственно.

Напомним, что предикат $P\subseteq(\omega^\omega)^k\times(\omega)^n$ называется *вычислимым* (см. [6]), если существует такой алгоритм $A^{F_1,\dots,F_k}(x_1,\dots,x_n)$, работающий с k оракулами $F_1,\dots,F_k$, что $A^{f_1,\dots,f_k}(m_1,\dots,m_n)$ при любых $f_1,\dots,f_k\in\omega^\omega$, $m_1,\dots,m_n\in\omega$ выдает 1 в случае $P(f_1,\dots,f_k,m_1,\dots,m_n)$ и 0 в противном случае. Предикат $Q\subseteq(\omega^\omega)^k\times(\omega)^n$ называется *аналитическим*, если он получается навешиванием конечного числа кванторов из некоторого вычислимого предиката, и *арифметическим*, если получается из некоторого вычислимого предиката навешиванием конечного числа кванторов по переменным только типа ω. Известно, что произвольный предикат $Q\subseteq(\omega^\omega)^k\times(\omega)^n$ является арифметическим, если и только если он выразим в арифметике второго порядка формулой без функциональных кванторов, и аналитическим в том и только в том случае, когда он выразим в арифметике второго порядка (см. [6]).

Будем говорить, что функция f *аналитическая* (или *аналитична*) в конечном наборе функций $f_1, \dots, f_n$, если найдется формула $\varphi(x, y, F_1, \dots, F_n)$ арифметики второго порядка такая, что для любых $x, y \in \omega$ выполнено

$$f(x) = y \Leftrightarrow \varphi(x, y, f_1, \dots, f_n).$$

Если P — предикатный символ, то записью P^{n_i} мы хотим подчеркнуть, что этот предикатный символ является n_i-арным.

Мы используем в наших логических языках в качестве формул также следующие логические константы: $\top$ обозначает тождественно истинную формулу, а $\perp$ — тождественно ложную формулу.

Мы предполагаем, что читатель знаком с конструктивными множествами, аксиомой конструктивности и определением упорядочения $<_L$ на конструктивных множествах, которые можно найти, например, в [7].

Нам понадобится понятие элементарной определимости одной модели в другой. Дадим определение только для односортной модели, для случая нескольких сортов определение аналогично.

Определение 1.2. Будем говорить, что модель

$$\mathfrak{M}_1 = \left\langle M_1; Q_1^{s_1}, \dots, Q_\ell^{s_\ell} \right\rangle$$

элементарно определима в модели $\mathfrak{M}_0 = \left\langle M_0; P_1^{n_1}, \dots, P_k^{n_k} \right\rangle$, если существуют $m > 0$ и формулы

$$V(y_1, \dots, y_m), \quad E(y_1, \dots, y_m, y'_1, \dots, y'_m),$$

$$\varphi_{Q_i}\big(y_1^1, \dots, y_m^1, \dots, y_1^{s_i}, \dots, y_m^{s_i}\big), \quad i = 1, \dots, \ell,$$

такие, что $E(\bar{y}, \bar{y}')$ определяет эквивалентность на множестве

$$V[\mathfrak{M}_0] = \big\{\bar{y} \in M_0^m \mid \mathfrak{M}_0 \models V(\bar{y})\big\},$$

выполнено условие согласованности

$$\forall \bar{y}_1 \bar{y}'_1 \dots \bar{y}_{s_i} \bar{y}'_{s_i} \left[\bigwedge_{j=1}^{s_i} E(\bar{y}_j, \bar{y}'_j) \& \varphi_{Q_i}(\bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{s_i}) \to \varphi_{Q_i}(\bar{x}, \bar{y}'_1, \dots, \bar{y}'_{s_i}) \right]$$

и модель

$$\langle V[\mathfrak{M}_0]/E; \overline{Q}_1, \dots, \overline{Q}_\ell \rangle,$$

в которой $\overline{Q}_i(\bar{y}^1/E, \dots, \bar{y}^{s_i}/E)$ по определению выполнено тогда и только тогда, когда $\varphi_{Q_i}(\bar{y}_1^1, \dots, \bar{y}_{s_i}^{s_i})$, изоморфна $\mathfrak{M}_1$.

2. Общие результаты

Определение 2.1. Назовем *F-параметризацией* модели $\mathfrak{M}$ конечной сигнатуры $P_0^{n_0}, \dots, P_\ell^{n_\ell}$ любое разнозначное отображение $\xi : \mathfrak{M} \to \omega^\omega$ (обозначаем $\xi(a) = \xi_a$) такое, что

1) образ $\mathrm{Im}(\xi)$ отображения ξ — аналитическое множество;

2) множества $\{\langle \xi_{a_1}, \dots, \xi_{a_{n_i}} \rangle \mid \mathfrak{M} \models P^{n_i}(a_1, \dots, a_{n_i})\}$, $i = 1, \dots, \ell$, являются аналитическими.

Фактически F-параметризуемость — это ослабленный вариант определимости в арифметике второго порядка. Это определение также можно рассматривать как обобщение понятия конструктивной модели (см. [8]). Разница состоит в том, что «номерами» элементов являются не натуральные числа, а функции из ω в ω. В данной работе технически было удобнее рассматривать не отображение множества кодов элементов в элементы модели, а обратное к нему отображение.

Определение 2.2. Пусть $\mathfrak{M}$ — модель и ξ — ее F-параметризация. Множество $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}$ называется *аналитически замкнутым* в $\mathfrak{M}$ относительно ξ, если для любых $q_1, \dots, q_n \in \mathfrak{M}_0$ и любого аналитического отношения

$$A(F_1, \dots, F_m, G_1, \dots, G_n) \subseteq (\omega^\omega)^{m+n}$$

выполнено

$$\exists r_1, \dots, r_m \in \mathfrak{M}\ A(\xi_{r_1}, \dots, \xi_{r_m}, \xi_{q_1}, \dots, \xi_{q_n}) \\ \Rightarrow \exists r_1, \dots, r_m \in \mathfrak{M}_0\ A(\xi_{r_1}, \dots, \xi_{r_m}, \xi_{q_1}, \dots, \xi_{q_n}).$$

Если из контекста ясно, о какой F-параметризации и о какой модели идет речь, то будем говорить о просто аналитически замкнутых подмножествах или об аналитически замкнутых множествах в модели $\mathfrak{M}$.

Следующее утверждение дает нам эквивалентное определение аналитической замкнутости и показывает, что в определении 2.2 можно обойтись только случаем $m = 1$.

Предложение 2.3. *Пусть ξ — F-параметризация модели $\mathfrak{M}$. Множество $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}$ аналитически замкнуто в $\mathfrak{M}$ относительно ξ, если и только если для любых $r_1, \dots, r_n \in \mathfrak{M}_0$ и любого аналитического отношения $A(F, G_1, \dots, G_n) \subseteq (\omega^\omega)^{n+1}$ выполнено*

$$\exists r \in \mathfrak{M}\ A(\xi_r, \xi_{r_1}, \dots, \xi_{r_n}) \Rightarrow \exists r \in \mathfrak{M}_0\ A(\xi_r, \xi_{r_1}, \dots, \xi_{r_n}). \tag{1}$$

Доказательство. Мы приведем доказательство только нетривиальной импликации. Предположим, что выполнено условие (1). Рассмотрим произвольный аналитический предикат $A(F_1, \dots, F_m, G_1, \dots, G_n)$ и $q_1, \dots, q_n \in \mathfrak{M}_0$ такие, что $\exists r_1 \dots r_m \in \mathfrak{M}\ A(\xi_{r_1}, \dots, \xi_{r_m}, \xi_{q_1}, \dots, \xi_{q_n})$. Тогда выполнено также условие

$$\exists r_m \in \mathfrak{M}\, \exists f_1 \dots \exists f_{m-1}\ [f_1, \dots, f_{m-1} \in \mathrm{Im}(\xi) \\ \&\ A(f_1, f_2, \dots, f_{m-1}, \xi_{r_m}, \xi_{q_1}, \dots, \xi_{q_n})].$$

Так как множество $\mathrm{Im}(\xi)$ аналитическое, по условию леммы для некоторого $r_m^* \in \mathfrak{M}_0$ выполнено

$$\exists f_1 \dots \exists f_{m-1}\ [f_1, \dots, f_{m-1} \in \mathrm{Im}(\xi)\ \&\ A(f_1, f_2, \dots, f_{m-1}, \xi_{r_m^*}, \xi_{q_1}, \dots, \xi_{q_n})].$$

Отсюда получим, что верно утверждение, в котором число кванторов существования на единицу меньше:

$$\exists r_1 \dots \exists r_{m-1} \in \mathfrak{M}\ A(\xi_{r_1}, \xi_{r_2}, \dots, \xi_{r_{m-1}}, \xi_{r_m^*}, \xi_{q_1}, \dots, \xi_{q_n}).$$

Итерируя это рассуждение, в итоге получим существование $r_1^*, \dots, r_m^* \in \mathfrak{M}$ таких, что $A(\xi_{r_1^*}, \dots, \xi_{r_m^*}, \xi_{q_1}, \dots, \xi_{q_n})$. $\square$

Теорема 2.4. *Пусть $\mathfrak{M}$ — модель с F-параметризацией ξ и $\mathfrak{M}_0$ — ее аналитически замкнутая подмодель относительно ξ. Тогда $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0) \preccurlyeq \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.*

Доказательство. Для доказательства нам понадобятся несколько лемм. Следующая лемма достаточно хорошо известна.

Лемма 2.5. *Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная модель. По любым $m, n \in \omega$ эффективно находятся бескванторные формулы $\delta_{m,n}(x_1, \dots)$ и $\gamma_{m,n}(x_1, \dots)$ такие, что для любых $a_1, a_2, \dots \in \mathfrak{M}$ выполняется*

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \tau_m(a_1, \dots) = \tau_n(a_1, \dots) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \delta_{m,n}(a_1, \dots),$$

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \tau_m(a_1, \dots) \in \tau_n(a_1, \dots) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \gamma_{m,n}(a_1, \dots).$$

Доказательство достаточно просто и оставляется читателю.

Введем новые обозначения. Для любой функции $f \in \omega^\omega$ обозначим $(f)_i(x) = f(c(i,x))$. Пусть ξ — какая-либо F-параметризация некоторой модели. Обозначим $S(\xi) = \{f \in \omega^\omega \mid \forall i((f)_i \in \mathrm{Im}(\xi))\}$. Легко проверяется, что отношение $S(\xi)$ аналитическое. Наконец, для произвольной $f \in S(\xi)$ и произвольного τ-терма $\sigma(v_0, \dots, v_m)$ обозначим

$$\sigma^\xi[f] = \sigma(\xi^{-1}((f)_1), \xi^{-1}((f)_2), \dots, \xi^{-1}((f)_m)).$$

Лемма 2.6. *Отношения*

$$f, g \in S(\xi) \mathbin{\&} \tau_m^\xi[f] = \tau_n^\xi[g], \quad f, g \in S(\xi) \mathbin{\&} \tau_m^\xi[f] \in \tau_n^\xi[g]$$

аналитические от m, n, f, g.

Доказательство. Докажем утверждение для первого отношения. Для второго выражения доказательство проводится аналогично.

По лемме 2.5 это выражение эквивалентно

$$f, g \in S(\xi) \mathbin{\&} \delta_{m,n}(\xi^{-1}((f)_1), \xi^{-1}((f)_2), \dots, \xi^{-1}((g)_1), \xi^{-1}((g)_2), \dots).$$

Достаточно показать аналитичность подвыражения, начинающегося на $\delta_{m,n} \dots$. Приведем его к ДНФ. Можно считать, что атомарные формулы в этой ДНФ исчерпываются равенствами вида $\xi^{-1}((h_0)_i) = \xi^{-1}((h_1)_j)$, $i, j \in \omega$, $h_0, h_1 \in \{f, g\}$. Ввиду однозначности отображения ξ эти равенства переписываются в эквивалентном виде $\forall k\,(h_0(c(i,k)) = h_1(c(j,k)))$. Подставим соответствующие выражения вместо всех атомарных формул. Пользуясь стандартным алгоритмом вынесения и сжатия кванторов Тарского — Куратовского [6], можно эффективно привести полученное выражение к виду

$$\forall k_1 \exists k_2 \ \psi_{m,n}(k_1, k_2, f, g),$$

где $\psi_{m,n}(k_1, k_2, f, g)$ — рекурсивное отношение от m, n, k_1, k_2, f, g. $\square$

Обозначим формулы языка арифметики второго порядка, выражающие отношения из последней леммы, через $\theta_=(m, n, f, g)$ и $\theta_\in(m, n, f, g)$ соответственно.

Лемма 2.7. *Отношения*

$$f \in \mathrm{Im}(\xi) \mathbin{\&} g \in S(\xi) \mathbin{\&} \xi^{-1}(f) = \tau_n^\xi[g], \quad f \in \mathrm{Im}(\xi) \mathbin{\&} g \in S(\xi) \mathbin{\&} \xi^{-1}(f) \in \tau_n^\xi[g]$$

аналитические от n, f, g.

Доказательство. Первое выражение можно переписать в эквивалентном виде:

$$f \in \mathrm{Im}(\xi) \mathbin{\&} g \in S(\xi) \mathbin{\&} \exists i \ [(n \text{ кодирует терм } v_i) \mathbin{\&} \forall x (f(x) = (g)_i(x))],$$

а второе выражение эквивалентно

$$f \in \mathrm{Im}(\xi) \ \& \ g \in S(\xi) \ \& \ \exists m \ [(n \text{ кодирует терм } \{\tau_k \mid k \in D_m\}) \\ \& \ \exists \ell \in D_m \ (\exists i \ ((\ell \text{ кодирует терм } v_i t) \ \& \ \forall x \ (f(x) = (g)_i(x))))],$$

откуда и следует результат леммы. $\square$

Обозначим формулы языка арифметики второго порядка, выражающие отношения из последней леммы, через $\theta^*_=(n,f,g)$ и $\theta^*_\in(n,f,g)$ соответственно.

Лемма 2.8. *Все отношения вида*

$$f_1,\dots,f_p \in \mathrm{Im}(\xi) \ \& \ g_1,\dots,g_q \in S(\xi) \\ \& \ k_1,\dots,k_q \in \omega \ \& \ P(f_1,\dots,f_p,\tau_{k_1}[g_1],\dots,\tau_{k_q}[g_q]),$$

где $P(w_1,\dots,w_p,z_1,\dots,z_q)$ получается из сигнатурного предиката модели $\mathfrak{M}$ перестановкой переменных, являются аналитическими.

Доказательство. Достаточно понять, как это доказывается, например, для отношения

$$f \in \mathrm{Im}(\xi) \ \& \ g \in S(\xi) \ \& \ k \in \omega \ \& \ P(f,\tau_k[g]),$$

где P — сигнатурный предикат. Лемма следует из того, что указанное отношение эквивалентно

$$f \in \mathrm{Im}(\xi) \ \& \ g \in S(\xi) \ \& \ k \in \omega \ \& \ \exists i \ [(k \text{ кодирует терм } v_i) \ \& \ P(f,(g)_i)],$$

а предикат $P(f,(g)_i)$ аналитичен по определению F-параметризации. $\square$

Лемма 2.9. *Пусть ξ — F-параметризация модели $\mathfrak{M}$ и $x_1,\dots,x_m$ — фиксированный список переменных. Тогда для любой формулы*

$$\varphi(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)$$

языка модели $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, не содержащей кванторов по $x_1,\dots,x_m$, найдется формула $\varphi^\diamondsuit(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n,k_1,\dots,k_n)$ арифметики второго порядка такая, что для любых $x_1,\dots,x_m \in \mathfrak{M}$, $k_1,\dots,k_n \in \omega$, $f_1,\dots,f_n \in S(\xi)$ выполнено

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \varphi(x_1,\dots,x_m,\tau_{k_1}[f_1],\dots,\tau_{k_n}[f_n]) \\ \Leftrightarrow \varphi^\diamondsuit(\xi_{x_1},\dots,\xi_{x_m},f_1,\dots,f_n,k_1,\dots,k_n).$$

Доказательство. Определим отображение $^\diamondsuit$ индукцией:

$$(\top)^* = \top; \quad (\bot)^* = \bot;$$
$$(x_i = x_j)^\diamondsuit = (x_i = x_j); \quad (y_i \in x_j)^\diamondsuit = \bot;$$
$$(x_i \in x_j)^\diamondsuit = \bot; \quad (x_i = y_j)^\diamondsuit = \theta^*_=(k_j,x_i,f_j);$$
$$(y_j = x_i)^\diamondsuit = \theta^*_=(k_j,x_i,f_j); \quad (y_i = y_j)^\diamondsuit = \theta_=(k_i,k_j,f_i,f_j);$$
$$(y_i \in y_j)^\diamondsuit = \theta_\in(k_i,k_j,f_i,f_j); \quad (x_i \in y_j)^\diamondsuit = \theta^*_\in(k_j,x_i,f_j);$$
$$P(\dots x_i \dots y_j)^\diamondsuit = \text{ соответствующее выражение} \\ \text{для } P(\dots x_i \dots \tau_{k_j}[f_j]) \text{ из леммы 2.8;}$$
$$U(x_i)^\diamondsuit = \top; \quad U(y_i)^\diamondsuit = \text{«}k_i \text{ кодирует терм вида } v_j\text{»};$$
$$(\exists y_i \varphi)^\diamondsuit = \exists k_i \exists f_i (f_i \in S(\xi) \ \& \ \varphi^\diamondsuit); \quad (\forall y_i \varphi)^\diamondsuit = \forall k_i \forall f_i (f_i \in S(\xi) \to \varphi^\diamondsuit);$$
$$(\varphi_0 \ \& \ \varphi_1)^\diamondsuit = \big(\varphi_0^\diamondsuit \ \& \ \varphi_1^\diamondsuit\big); \quad (\varphi_0 \vee \varphi_1)^\diamondsuit = \big(\varphi_0^\diamondsuit \vee \varphi_1^\diamondsuit\big);$$
$$(\varphi_0 \to \varphi_1)^\diamondsuit = \big(\varphi_0^\diamondsuit \to \varphi_1^\diamondsuit\big); \quad (\neg\varphi)^\diamondsuit = \neg(\varphi^\diamondsuit).$$

По индукции проверяется, что это отображение обладает требуемыми свойствами. $\square$

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть $\mathfrak{M}_0$ — аналитически замкнутое подмножество $\mathfrak{M}$ относительно F-параметризации ξ. Для доказательства теоремы согласно утверждению 3.1.2 из [9] и ввиду того, что можно ограничиться только праэлементами в качестве параметров, достаточно проверить, что для любой формулы $\Phi(x, \bar{z})$ и для любого кортежа $\bar{\alpha} = \alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathfrak{M}_0$ выполнено

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \exists x\ \Phi(x, \bar{\alpha}) \Rightarrow \exists x \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)\ (\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Phi(x, \bar{\alpha})). \tag{2}$$

Пусть выполнена посылка импликации в (2), и пусть

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Phi(\tau_{i_0}(b_1, \ldots, b_n), \bar{\alpha}) \tag{3}$$

для подходящих τ-терма $\tau_{i_0}(v_1, \ldots, v_n)$ и $b_1, \ldots, b_n \in \mathfrak{M}$. Формулу

$$\Phi(\tau_{i_0}(x_1, \ldots, x_n), \bar{z})$$

можно переписать в эквивалентном виде $\Phi'(x_1, \ldots, x_n, \bar{z})$ без использования τ-термов. По лемме 2.9 условие $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Phi'(x_1, \ldots, x_n, \bar{\alpha})$ при любых $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{M}$ эквивалентно некоторому условию вида $A(\xi_{x_1}, \ldots, \xi_{x_n}, \xi_{\alpha_1}, \ldots, \xi_{\alpha_s})$, где A — аналитический предикат. Кроме того, имеем $A(\xi_{b_1}, \ldots, \xi_{b_n}, \xi_{\alpha_1}, \ldots, \xi_{\alpha_s})$. Ввиду аналитической замкнутости $\mathfrak{M}_0$ найдутся $b_1^*, \ldots, b_n^* \in \mathfrak{M}_0$ такие, что $A(\xi_{b_1^*}, \ldots, \xi_{b_n^*}, \xi_{\alpha_1}, \ldots, \xi_{\alpha_s})$. Отсюда получим

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Phi'\big(b_1^*, \ldots, b_n^*, \bar{\alpha}\big),$$

что эквивалентно

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Phi(\tau_{i_0}\big(b_1^*, \ldots, b_n^*), \bar{\alpha}\big).$$

Осталось заметить, что $\tau_{i_0}(b_1^*, \ldots, b_n^*) \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$. $\square$

Определение 2.10. Назовем модель $\mathfrak{M}$ *слабо F-самопараметризуемой*, если у нее существует F-параметризация ξ такая, что в модели $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ определимы без параметров в языке первого порядка функции $\Xi, p : \mathfrak{M} \times \omega \to \omega$ такие, что

1) $\forall x \in \mathfrak{M}\, \forall m \in \omega\ (\xi_x(m) = \Xi(x, m))$;
2) для любой функции $f \in \omega^\omega$ найдется элемент $x \in \mathfrak{M}$ такой, что

$$\forall n \in \omega\ (p(x, n) = f(n)).$$

Такую F-параметризацию ξ будем называть *слабой F-самопараметризацией модели $\mathfrak{M}$*.

Определение 2.11. Назовем модель $\mathfrak{M}$ *сильно F-самопараметризуемой*, если у нее существует некоторая F-параметризация ξ такая, что в модели $\mathfrak{M}$ элементарно определима без параметров модель $\langle \mathfrak{M}; \omega; +, \cdot, \Xi, p\rangle$ такая, что $\Xi, p : \mathfrak{M} \times \omega \to \omega$, и при этом выполнены следующие условия:

1) $\forall x \in \mathfrak{M}\, \forall m \in \omega\ (\xi_x(m) = \Xi(x, m))$;
2) для любой функции $f \in \omega^\omega$ найдется элемент $x \in \mathfrak{M}$ такой, что

$$\forall n \in \omega\ (p(x, n) = f(n)).$$

Такую F-параметризацию ξ будем называть *сильной F-самопараметризацией модели $\mathfrak{M}$*.

Теорема 2.12. *Пусть модель $\mathfrak{M}$ слабо F-самопараметризуема и ξ — ее некоторая слабая F-самопараметризация. Пусть $\mathfrak{M}_0$ — подмодель в $\mathfrak{M}$, и пусть $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0) \preccurlyeq \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Тогда $\mathfrak{M}_0$ аналитически замкнута в $\mathfrak{M}$ относительно ξ.*

Доказательство. Пусть $A(f, f_1, \dots, f_\ell)$ — некоторый аналитический предикат, $r_1, \dots, r_\ell \in \mathfrak{M}_0$ и $\exists r \in \mathfrak{M}\ A(\xi_r, \xi_{r_1}, \dots, \xi_{r_\ell})$. Нам надо проверить, что $\exists r \in \mathfrak{M}_0\ A(\xi_r, \xi_{r_1}, \dots, \xi_{r_\ell})$.

Пусть язык $L^{F,F_1,\dots,F_\ell}$ состоит из обычных формул арифметики второго порядка с выделенными функциональными переменными $F, F_1, \dots, F_\ell$, навешивание кванторов по которым в $L^{F,F_1,\dots,F_\ell}$ запрещено, и это единственное отличие $L^{F,F_1,\dots,F_\ell}$ обычного языка арифметики второго порядка. Определим преобразование * из $L^{F,F_1,\dots,F_\ell}$ в язык модели $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ по индукции следующим образом (без ограничения общности считаем, что наши формулы содержат только те атомарные подформулы, которые встречаются в левой части):

$$(\top)^* = \top; \quad (\bot)^* = \bot;$$
$$(f(x) = y)^* = (\Xi(f, x) = y), \text{ если } f \in \{F, F_1, \dots, F_\ell\};$$
$$(f(x) = y)^* = (p(f, x) = y), \text{ если } f \notin \{F, F_1, \dots, F_\ell\};$$
$$(x + y = z)^* = x, y, z \in \omega \ \&\ x + y = z; \quad (x \cdot y = z)^* = x, y, z \in \omega \ \&\ x \cdot y = z;$$
$$(\neg\varphi)^* = \neg\varphi^*; \quad (\varphi_0 \ \&\ \varphi_1)^* = \varphi_0^* \ \&\ \varphi_1^*; \quad (\varphi_0 \vee \varphi_1)^* = \varphi_0^* \vee \varphi_1^*;$$
$$(\varphi_0 \to \varphi_1)^* = \varphi_0^* \to \varphi_1^*; \quad (\exists x\varphi)^* = \exists x\,(x \in \omega \ \&\ \varphi^*); \quad (\forall x\varphi)^* = \forall x\,(x \in \omega \to \varphi^*);$$
$$(\exists f\varphi)^* = \exists f\,((f \text{ — праэлемент }) \ \&\ \varphi^*); \quad (\forall f\varphi)^* = \forall f\,((f \text{ — праэлемент }) \to \varphi^*).$$

Непосредственно по индукции проверяется, что для любой формулы

$$\varphi(f_1, \dots, f_n, n_1, \dots, n_k, F, F_1, \dots, F_\ell) \in L^{F,F_1,\dots,F_\ell}$$

и любых $f_1, \dots, f_n, r, r_1, \dots, r_\ell \in \mathfrak{M}$, $n_1, \dots, n_k \in \omega$ справедлива эквивалентность

$$\varphi(\lambda t.p(f_1, t), \dots, \lambda t.p(f_n, t), n_1, \dots, n_k, \xi_r, \xi_{r_1}, \dots, \xi_{r_\ell})$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \varphi^*(f_1, \dots, f_n, n_1, \dots, n_k, r, r_1, \dots, r_\ell).$$

В частности, для любого $r \in \mathfrak{M}$ аналитическое условие $A(\xi_r, \xi_{r_1}, \dots, \xi_{r_\ell})$ равносильно $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models A^*(r, r_1, \dots, r_\ell)$. По предположению

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \exists r (A^*(r, r_1, \dots, r_\ell) \ \&\ U(r)).$$

Из свойства $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0) \preccurlyeq \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ вытекает существование $r^* \in \mathfrak{M}_0$ такого, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models A^*(r^*, r_1, \dots, r_\ell)$, откуда, наконец, получим $A(\xi_{r^*}, \xi_{r_1}, \dots, \xi_{r_\ell})$, что и требовалось. □

Теорема 2.13. *Пусть модель $\mathfrak{M}$ сильно F-самопараметризуема и ξ — ее некоторая сильная F-самопараметризация. Пусть $\mathfrak{M}_0 \preccurlyeq \mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{M}_0$ аналитически замкнута в $\mathfrak{M}$ относительно ξ.*

Доказательство. Доказательство идейно повторяет предыдущее. Имеются некоторые различия в технических деталях.

Опять пусть $A(f, f_1, \dots, f_\ell)$ — некоторый аналитический предикат, пусть $r_1, \dots, r_\ell \in \mathfrak{M}_0$ и $\exists r \in \mathfrak{M}\ A(\xi_r, \xi_{r_1}, \dots, \xi_{r_\ell})$. Проверим, что

$$\exists r \in \mathfrak{M}_0\ A(\xi_r, \xi_{r_1}, \dots, \xi_{r_\ell}).$$

Снова рассмотрим язык $L^{F,F_1,\dots,F_\ell}$ и определим преобразование * из $L^{F,F_1,\dots,F_\ell}$ в язык модели $\mathfrak{N} = \langle \mathfrak{M}; \omega; +, \cdot, \Xi, p \rangle$ по индукции следующим образом (так же, как и ранее, без ограничения общности считаем, что в наших формулах содержатся только те атомарные подформулы, которые встречаются в левой части):

$$(\top)^* = \top; \quad (\bot)^* = \bot;$$
$$(f(x) = y)^* = (\Xi(f,x) = y), \text{ если } f \in \{F, F_1, \ldots, F_\ell\};$$
$$(f(x) = y)^* = (p(f,x) = y), \text{ если } f \notin \{F, F_1, \ldots, F_\ell\};$$
$$(x + y = z)^* = x + y = z; \quad (x \cdot y = z)^* = x \cdot y = z; \quad (\neg\varphi)^* = \neg\varphi^*;$$
$$(\varphi_0 \mathbin{\&} \varphi_1)^* = \varphi_0^* \mathbin{\&} \varphi_1^*; \quad (\varphi_0 \vee \varphi_1)^* = \varphi_0^* \vee \varphi_1^*; \quad (\varphi_0 \to \varphi_1)^* = \varphi_0^* \to \varphi_1^*;$$
$$(Qx\varphi)^* = Qx\varphi^*, \ Q \in \{\exists, \forall\}, \ x \text{ — переменная любого типа.}$$

Непосредственно по индукции проверяется, что для любой формулы

$$\varphi(f_1, \ldots, f_n, n_1, \ldots, n_k, F, F_1, \ldots, F_\ell) \in L^{F, F_1, \ldots, F_\ell}$$

и любых $r, \bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n \in \mathfrak{M}$, $n_1, \ldots, n_k \in \omega$ справедлива эквивалентность

$$\varphi(\lambda x.p(\bar{f}_1, x), \ldots, \lambda x.p(\bar{f}_n, x), n_1, \ldots, n_k, \xi_r, \xi_{r_1}, \ldots, \xi_{r_\ell}) \\ \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi^*(f_1, \ldots, f_n, n_1, \ldots, n_k, r, r_1, \ldots, r_\ell).$$

В частности, для любого $r \in \mathfrak{M}$ условие $A(\xi_r, \xi_{r_1}, \ldots, \xi_{r_\ell})$ равносильно $\mathfrak{N} \models A^*(r, r_1, \ldots, r_\ell)$. Из определимости без параметров модели $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{M}$ следует, что последнее условие при всех r эквивалентно условию вида $\mathfrak{M} \models A'(r, r_1, \ldots, r_\ell)$ для некоторой фиксированной формулы A' языка первого порядка модели $\mathfrak{M}$.

По предположению $\mathfrak{M} \models \exists r A'(r, r_1, \ldots, r_\ell)$. Из свойства $\mathfrak{M}_0 \preccurlyeq \mathfrak{M}$ получаем существование $r^* \in \mathfrak{M}_0$ такого, что $\mathfrak{M} \models A'(r^*, r_1, \ldots, r_\ell)$, откуда $\mathfrak{N} \models A(r^*, r_1, \ldots, r_\ell)$ и, наконец, получим $A(\xi_{r^*}, \xi_{r_1}, \ldots, \xi_{r_\ell})$, что и требовалось. □

Следствие 2.14. *Пусть модель $\mathfrak{M}$ слабо самопараметризуема и ξ — ее слабая F-самопараметризация. Пусть $\mathfrak{M}_0$ — подмодель $\mathfrak{M}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathfrak{M}_0$ *аналитически замкнута в* $\mathfrak{M}$ *относительно* ξ;
2) $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0) \preccurlyeq \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

Доказательство следует из 2.4 и 2.12. □

Следствие 2.15. *Пусть модель $\mathfrak{M}$ сильно F-самопараметризуема и ξ — ее сильная F-самопараметризация. Пусть $\mathfrak{M}_0$ — подмодель $\mathfrak{M}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathfrak{M}_0$ *аналитически замкнута в* $\mathfrak{M}$ *относительно* ξ;
2) $\mathfrak{M}_0 \preccurlyeq \mathfrak{M}$;
3) $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0) \preccurlyeq \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

Доказательство. Импликация (1⇒3) следует из 2.4. Импликация (3⇒2) очевидна. Импликация (2⇒1) вытекает из теоремы 2.13. □

3. Общие следствия для случая V=L

В предположении аксиомы конструктивности (V=L) условие аналитической замкнутости оказывается эквивалентным сформулированному ниже условию слабой аналитической замкнутости, которое по своему духу более близко к условиям типа порождаемости подмоделей. В результате семейство элементарных подмоделей F-параметризуемых моделей становится существенно более обозримым. Это обуславливает важность отдельного рассмотрения данных результатов в условиях аксиомы конструктивности.

Здесь будут сформулированы общие следствия. В дальнейшем при рассмотрении конкретных моделей на свойства элементарных подмоделей при условии V=L будет также обращено особое внимание.

Определение 3.1. Пусть $\mathfrak{M}$ — модель и ξ — ее F-параметризация. Множество $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}$ называется *слабо аналитически замкнутым* в $\mathfrak{M}$ относительно ξ, если для любых $q_1, \dots, q_n \in \mathfrak{M}_0$ и любого $r \in \mathfrak{M}$ такого, что ξ_r аналитична относительно $\xi_{q_1}, \dots, \xi_{q_n}$, выполнено $r \in \mathfrak{M}_0$.

Предложение 3.2. *Пусть $\mathfrak{M}$ — модель, ξ — ее F-параметризация. Тогда*

1) *в предположении аксиомы конструктивности* (V=L) *любое слабо аналитически замкнутое подмножество $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}$ является аналитически замкнутым;*

2) *любое аналитически замкнутое подмножество $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}$ слабо аналитически замкнуто.*

Доказательство. 1. Предположим, что выполнена аксиома конструктивности и множество $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}$ слабо аналитически замкнуто. Пусть $r_1, \dots, r_n \in \mathfrak{M}_0$ и $A(f, f_1, \dots, f_n)$ — некоторое аналитическое условие. Пусть

$$\exists r \in \mathfrak{M}\ A(\xi_r, \xi_{r_1}, \dots, \xi_{r_n}).$$

Это условие эквивалентно

$$\exists f\ (f \in \mathrm{Im}(\xi)\ \&\ A(\xi_r, \xi_{r_1}, \dots, \xi_{r_n})).$$

Следующее утверждение, сообщенное автору С. Симпсоном, видимо, достаточно хорошо известно. Однако, не найдя соответствующей ссылки, автор приводит набросок его доказательства.

Лемма 3.3. *В предположении аксиомы конструктивности отношение $<_L$ на ω^ω аналитично.*

Доказательство. Зафиксируем некоторую гёделевскую нумерацию $(\varphi_n)_{n<\omega}$ предложений языка $\langle \in \rangle$. Заметим, что отношение $\langle \omega; E \rangle \models \varphi_n$ является Δ^1_1-отношением от E и n. В самом деле, стандартным алгоритмом Тарского — Куратовского [6] формулы φ_n равномерно по n преобразуются к эквивалентным условиям вида $\forall f \exists m\ \psi_n(E, f, m)$ (а также вида $\exists f \forall m\ \psi'_n(E, f, m)$), где f — функциональная переменная, а $\psi_n(E, f, m)$ ($\psi'_n(E, f, m)$) — рекурсивное условие от E, f, m. Иначе говоря, существует рекурсивное отношение $\Psi(E, f, m, n)$ такое, что для любых E, F, m, n выполняется

$$\langle \omega; E \rangle \models \varphi_n \Leftrightarrow \forall f \exists m\ \Psi(E, F, m, n).$$

Отсюда следует, что отношение $\langle \omega; E \rangle \models \varphi_n$ принадлежит Π^1_1. Аналогично доказывается, что оно имеет вид Σ^1_1, откуда получаем, что оно имеет вид Δ^1_1.

Из доказанного вытекает, что если T — гиперарифметическая теория, то класс всех E таких, что $\langle \omega; E \rangle \models T$, также будет принадлежать Δ^1_1.

Остается проверить следующую эквивалентность, из которой по сказанному выше вытекает, что отношение $X <_L Y$ имеет вид Σ^1_2 (сокращение $\ulcorner t \urcorner$ будет объяснено ниже):

$$\begin{aligned} X <_L Y \Leftrightarrow \exists E[\langle \omega; E \rangle \models \mathrm{KP}{+}(\mathrm{V{=}L})\ \&\neg \exists f \forall k (f(k+1) E f(k)) \\ \&\ \exists x, y \in \omega \forall t (\ulcorner t \urcorner E x \leftrightarrow X(t)\ \&\ \ulcorner t \urcorner E y \leftrightarrow Y(t))\ \&\ \langle \omega; E \rangle \models x <_L y)]. \end{aligned} \tag{4}$$

В этой записи использована функция $\ulcorner t \urcorner$, выдающая по любому элементу $t \in \omega$ его ординал в модели $\langle \omega; E \rangle$. Эта функция, очевидно, определима в языке арифметики первого порядка, расширенном символом для E.

Проверим эквивалентность (1). Пусть X и Y — конструктивные подмножества ω, и пусть $X <_L Y$. Тогда, поскольку в условиях аксиомы конструктивности для любого $X \subset \omega$ выполнено $X \in L(\omega_1)$ (см., например [10, лемма 13.1]), а также ввиду того, что допустимые ординалы кофинальны в множестве всех счетных ординалов, существует счетный допустимый ординал α такой, что $X, Y \in L(\alpha)$. Рассмотрим в качестве E любой бинарный предикат такой, что $\langle L(\alpha); \in \rangle \cong \langle \omega; E \rangle$. Зафиксируем $x, y \in \omega$, являющиеся изоморфными образами для элементов X и Y соответственно. Ввиду абсолютности отношения $<_L$ [3] и вышеупомянутого изоморфизма получаем $\langle \omega; E \rangle \models x <_L y$.

Предположим теперь, что выполнено условие (4). Тогда модель $\langle \omega; E \rangle$ будет изоморфна подходящему допустимому множеству вида $\langle L(\alpha), \in \rangle$, причем $X, Y \in L(\alpha)$ и $\langle L(\alpha), \in \rangle \models X <_L Y$. Далее, из абсолютности отношения $<_L$ получаем $X <_L Y$. $\square$

Итак, мы получили запись условия $X <_L Y$ в арифметике второго порядка. Поэтому функция f^*, определенная следующим образом:

$$f^*(m) = n \Leftrightarrow \exists f \ [\forall g \ ((g \in \mathrm{Im}(\xi) \ \& \ A(g, \xi_{r_1}, \ldots, \xi_{r_n})) \to g = f \vee f <_L g) \\ \& \ (f \in \mathrm{Im}(\xi) \ \& \ A(f, \xi_{r_1}, \ldots, \xi_{r_n})) \ \& \ f(m) = n],$$

однозначно определена и будет аналитической относительно $\xi_{r_1}, \ldots, \xi_{r_n}$. Поскольку $f^* \in \mathrm{Im}\, \nu(\xi)$, то f^* имеет вид ξ_{r^*} для подходящего $r^* \in \mathfrak{M}$. Ввиду слабой аналитической замкнутости $\mathfrak{M}_0$ имеем $r^* \in \mathfrak{M}_0$. Кроме того, $A(\xi_{r^*}, \xi_{r_1}, \ldots, \xi_{r_n})$, что и требовалось доказать.

2. Пусть $\mathfrak{M}_0$ — аналитически замкнутое подмножество в $\mathfrak{M}$, и пусть $r \in \mathfrak{M}$ таково, что функция ξ_r аналитична в конечном наборе $\xi_{r_1}, \ldots, \xi_{r_n}$ для некоторых $r_1, \ldots, r_n \in \mathfrak{M}_0$. Надо показать, что $r \in \mathfrak{M}_0$.

Рассмотрим аналитическое определение ξ_r через $\bar{\xi} = \xi_{r_1}, \ldots, \xi_{r_n}$, т. е. пусть для подходящего аналитического отношения $A(x, y, \bar{\xi})$ при любых $x, y \in \omega$ справедливо

$$\xi_r(x) = y \Leftrightarrow A(x, y, \bar{\xi}).$$

Имеем

$$\exists u \in \mathfrak{M} \forall x \forall y \ (\xi_u(x) = y \leftrightarrow A(x, y, \bar{\xi})).$$

Ввиду аналитической замкнутости $\mathfrak{M}_0$

$$\exists u \in \mathfrak{M}_0 \forall x \forall y \ (\xi_u(x) = y \leftrightarrow A(x, y, \bar{\xi})).$$

В силу однозначности определения функции ξ_r получаем, что u, существование которого утверждается в обоих случаях, определено однозначно и, стало быть, в обоих случаях равно r, откуда $r \in \mathfrak{M}_0$. $\square$

Теперь можно сформулировать некоторые общие свойства самопараметризуемых моделей для случая, когда выполнена аксиома конструктивности V=L.

Следствие 3.4. 1. (V=L) *Пусть ξ — слабая F-самопараметризация модели $\mathfrak{M}$, и пусть $\mathfrak{M}'$ — произвольная подмодель в $\mathfrak{M}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1.1) $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}') \preccurlyeq \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$;

1.2) $\mathfrak{M}'$ *слабо аналитически замкнута относительно* ξ.

2. (V=L) *Пусть* ξ — *сильная* F*-самопараметризация модели* $\mathfrak{M}$ *и пусть* $\mathfrak{M}'$ — *произвольная подмодель в* $\mathfrak{M}$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

2.1) $\mathfrak{M}' \preccurlyeq \mathfrak{M}$;

2.2) $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}') \preccurlyeq \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

3. $\mathfrak{M}'$ *слабо аналитически замкнута относительно* ξ.

Доказательство. Утверждение 1 непосредственно вытекает из следствия 2.14 и предложения 3.2, утверждение 2 — из следствия 2.15 и предложения 3.2. □

Теорема 3.5. 1. (V=L) *Пусть модель* $\mathfrak{M}$ *слабо* F*-самопараметризуема. Тогда множество ее подмоделей* $\mathfrak{M}'$, *обладающих свойством* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}') \preccurlyeq \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, *образует по включению полную решетку. Более того, любое непустое пересечение* $\mathfrak{M}^* = \bigcap\limits_{i\in I} \mathfrak{M}_i$ *любого семейства* $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ *подмоделей таких, что для всех* $i \in I$ *выполнено* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_i) \preccurlyeq \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, *снова обладает свойством* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}^*) \preccurlyeq \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

2. (V=L) *Пусть модель* $\mathfrak{M}$ *сильно* F*-самопараметризуема. Тогда множество ее подмоделей* $\mathfrak{M}'$, *обладающих свойством* $\mathfrak{M}' \preccurlyeq \mathfrak{M}$, *образует по включению полную решетку. Более того, любое непустое пересечение* $\mathfrak{M}^* = \bigcap\limits_{i\in I} \mathfrak{M}_i$ *любого семейства* $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ *подмоделей таких, что для всех* $i \in I$ *выполнено* $\mathfrak{M}_i \preccurlyeq \mathfrak{M}$, *снова обладает свойством* $\mathfrak{M}^* \preccurlyeq \mathfrak{M}$.

Доказательство. Докажем п. 1. Доказательство п. 2 проводится аналогично. Пусть $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ — произвольное семейство подмоделей модели $\mathfrak{M}$ такое, что для любого $i \in I$ справедливо $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_i) \preccurlyeq \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Рассмотрим множество M_0, являющееся объединением всех носителей моделей $\mathfrak{M}_i$, $i \in I$. Пусть множество M^* состоит из всех элементов r модели $\mathfrak{M}$ таких, что функция ξ_r аналитична в некотором конечном семействе функций $\xi_{q_1}, \dots, \xi_{q_i}$, $q_1, \dots, q_i \in M_0$. Пусть $\mathfrak{M}'$ — произвольная элементарная подмодель в $\mathfrak{M}$, содержащая все модели $\mathfrak{M}_i$, $i \in I$. С одной стороны, в ней, очевидно, содержится множество M^*, поскольку для любых элементов $q_1, \dots, q_i \in M_s$ и любого аналитического определения для некоторой функции ξ_r, $r \in \mathfrak{M}$, через $\xi_{q_1}, \dots, \xi_{q_i}$ можно, используя свойство слабой F-самопараметризации, записать формулой в языке модели $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ свойство, однозначно определяющее r через $q_1, \dots, q_i$ и утверждающее его существование. Ввиду этого все такие r попадут в $\mathfrak{M}'$. Значит, M^* является подмножеством основного множества модели $\mathfrak{M}'$. С другой стороны, как легко убедиться, множество M^* уже определяет слабо аналитически замкнутую подмодель в $\mathfrak{M}$. Эта модель и будет точной верхней гранью семейства $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ по включению.

Доказательство для пересечения достаточно очевидно. □

Теорема 3.6. 1. (V=L) *Пусть* ξ — *слабая* F*-самопараметризация модели* $\mathfrak{M}$. *Тогда в множестве ее подмоделей* $\mathfrak{M}'$, *обладающих свойством* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}') \preccurlyeq \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, *имеется наименьший элемент, состоящий из всех* $x \in \mathfrak{M}$ *таких, что* ξ_x — *аналитическая функция.*

2. (V=L) *Пусть* ξ — *сильная* F*-самопараметризация модели* $\mathfrak{M}$. *Тогда в множестве ее подмоделей* $\mathfrak{M}'$, *обладающих свойством* $\mathfrak{M}' \preccurlyeq \mathfrak{M}$, *имеется наименьший элемент, состоящий из всех* $x \in \mathfrak{M}$ *таких, что* ξ_x — *аналитическая функция.*

Доказательство. Непосредственно вытекает из следствия 3.4. □

4. Применения общих результатов

4.1. Следствия для $\mathbb{R}$.

Предложение 4.1. *Поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ допускает слабую F-самопараметризацию.*

Доказательство. Нам понадобится простая техническая

Лемма 4.2. *Следующие функции определимы (и даже Σ-определимы) в $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ без параметров (здесь мы подразумеваем под ω ординал допустимого множества, т. е. $\omega \cap \mathbb{R} = \varnothing$):*

1) *функция $n \cdot x : \omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определяемая как $n \cdot x = \underbrace{x + \dots + x}_{n}$;*

2) *функция, вычисляющая по $m, n \in \omega$ и $x \in \mathbb{R}$ число $\frac{m}{n} \cdot x \in \mathbb{R}$ при $n \neq 0$;*

3) *$|x|$ — модуль $x \in \mathbb{R}$;*

4) *$[x]$ — целая часть числа x из ω для $x \geqslant 0$;*

5) *$d_n(x)$ — n-я цифра (из ω) после запятой в десятичном разложении числа $x \in \mathbb{R}$.*

Доказательство оставляется читателю.

Следствие 4.3. 1. *Любое подполе $\mathbb{R}' \subseteq \mathbb{R}$ аналитически замкнуто тогда и только тогда, когда $\mathbb{HF}(\mathbb{R}') \preccurlyeq \mathbb{HF}(\mathbb{R})$.*

2. (V=L) *Подполе $\mathbb{R}' \subseteq \mathbb{R}$ обладает свойством*

$$\mathbb{HF}(\mathbb{R}') \preccurlyeq \mathbb{HF}(\mathbb{R})$$

тогда и только тогда, когда оно слабо аналитически замкнуто.

3. (V=L) *Для подполя $\mathbb{R}_a$, состоящего из всех вещественных чисел, естественные коды которых аналитичны, справедливо*

$$\mathbb{HF}(\mathbb{R}_a) \preccurlyeq \mathbb{HF}(\mathbb{R}).$$

Кроме того, это подполе является наименьшим подполем в $\mathbb{R}$ с таким свойством.

4. (V=L) *Все подполя $\mathbb{R}' \subseteq \mathbb{R}$, обладающие свойством $\mathbb{HF}(\mathbb{R}') \preccurlyeq \mathbb{HF}(\mathbb{R})$, образуют полную решетку по включению.*

Доказательство. П. 1 непосредственно вытекает из следствия 2.14 и предложения 4.1, п. 2 — из следствия 3.4(1) и предложения 4.1, п. 3 — из теоремы 3.6(1) и предложения 4.1, п. 4 — из теоремы 3.5(1) и предложения 4.1. □

Заметим, что поле $\mathbb{R}$ не сильно самопараметризуемо, иначе ввиду разрешимости теории поля $\mathbb{R}$ теория стандартной модели арифметики была бы разрешимой.

4.2. Следствия для группы $\mathrm{Sym}(\omega)$. Здесь мы применим полученные общие результаты к группе всех перестановок на ω. При этом окажется, что с некоторыми простыми параметрами, определимыми с точностью до внутреннего автоморфизма, данная группа сильно F-самопараметризуема.

4.2.1. Случай с параметрами.

Предложение 4.4. *Пусть $g_0 = \prod\limits_{i\in\omega}(2i, 2i+1)$, $g_1 = \prod\limits_{i\in\omega}(2i+1, 2i+2)$. Тогда модель $\langle \mathrm{Sym}(\omega), g_0, g_1\rangle$ сильно F-самопараметризуема.*

Доказательство. В [11] показано, что модель

$$\langle \mathrm{Sym}(\omega); \omega; +, \cdot, \mathrm{ap}, g_0, g_1\rangle,$$

где $\mathrm{ap}(g,n) = g(n)$, элементарно определима в $\langle \mathrm{Sym}(\omega), g_0, g_1\rangle$ без параметров. Тождественное вложение $\xi : \mathrm{Sym}(\omega) \to \omega^\omega$, очевидно, годится в качестве параметризации. При этом операция «ap» может быть взята в качестве Ξ. Покажем, как можно определить функцию p. Идея состоит в том, чтобы моделировать функции $h \in \omega^\omega$ их графами $\Gamma(f) = \{c(x,y) \mid h(x) = y\}$, выделяемыми, в свою очередь, множествами $\mathrm{supp}(f) = \{n \in \omega \mid f(n) = n\}$. Поскольку всякий граф функции содержит бесконечно много точек в своем дополнении, для любой функции $h \in \omega^\omega$ найдется перестановка $f \in \mathrm{Sym}(\omega)$ такая, что $\mathrm{supp}(f) = \Gamma(h)$. Однако не всякое подмножество ω выделяет граф некоторой функции. Поэтому функцию $p(f,n)$ можно определить, например, так:

$$p(f,n) = m \Leftrightarrow [(c(n,m) \in \mathrm{supp}(f)) \ \&\ \forall x \exists^{=1} y\ (c(x,y) \in \mathrm{supp}(f))] \\ \vee\ [(m = 0)\ \&\ \neg\forall x \exists^{=1} y\ (c(x,y) \in \mathrm{supp}(f))],$$

что, очевидно, записывается формулой. □

Теперь мы можем сформулировать следствия.

Следствие 4.5. 1. *Любая подгруппа* $G \leqslant \mathrm{Sym}(\omega)$, *содержащая* g_0 *и* g_1, *является элементарной в* $\mathrm{Sym}(\omega)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathbb{HF}(G) \preccurlyeq \mathbb{HF}(\mathrm{Sym}(\omega)),$$

и тогда и только тогда, когда G *аналитически замкнута.*

2. (V=L) *Любая подгруппа* $G \leqslant \mathrm{Sym}(\omega)$, *содержащая* g_0 *и* g_1, *является элементарной в* $\mathrm{Sym}(\omega)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathbb{HF}(G) \preccurlyeq \mathbb{HF}(\mathrm{Sym}(\omega)),$$

и тогда и только тогда, когда G *слабо аналитически замкнута.*

3. (V=L) *Множество элементарных подгрупп в* $\mathrm{Sym}(\omega)$, *содержащих* g_0 *и* g_1, *замкнуто относительно произвольных пересечений и образует полную решетку по включению.*

4. (V=L) *Группа всех аналитических перестановок является наименьшей элементарной подгруппой в* $\mathrm{Sym}(\omega)$ *среди элементарных подгрупп, содержащих* g_0 *и* g_1.

Доказательство. П. 1 вытекает из следствия 2.15 и предложения 4.4, п. 2 — из следствия 3.4(2) и предложения 4.4, пп. 3, 4 — из теоремы 3.5. □

Из следствия 4.5 получается утверждение, отвечающее на ряд вопросов об элементарности конкретных групп перестановок.

Следствие 4.6. *Группы всех вычислимых перестановок, всех арифметических перестановок, всех гиперарифметических перестановок, всех перестановок, принадлежащих одному из классов* Π^1_m, Σ^1_m, $m \in \omega$, *аналитической иерархии, не являются элементарными подгруппами группы всех перестановок.*

Семейство функций назовем *слабо аналитически замкнутым*, если оно вместе с любым конечным набором функций содержит все функции, аналитические в этом наборе. Очевидно, что все слабо аналитически замкнутые семейства функций образуют полную решетку.

Теорема 4.7. (V=L) *Элементарные подгруппы в* $\mathrm{Sym}(\omega)$, *содержащие* g_0 *и* g_1, *образуют полную решетку, изоморфную решетке всех слабо аналитически замкнутых подсемейств* ω^ω *по включению.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{L}$ — решетка всех элементарных подмоделей в $\mathrm{Sym}(\omega)$, содержащих g_0 и g_1, и пусть $\mathscr{L}$ — решетка всех слабо аналитически замкнутых подмножеств ω^ω. Определим отображение $\psi : \mathbb{L} \to \mathscr{L}$ следующим образом: пусть $\psi(G)$ будет множеством всех функций из ω^ω, аналитических в конечных наборах элементов из G. Нетрудно убедиться, что $\psi(G) \in \mathscr{L}$ для любой такой подгруппы G. Проверим теперь разнозначность отображения ψ, т. е. что из $\psi(G_0) = \psi(G_1)$ следует $G_0 = G_1$. Возьмем произвольное $g \in G_0$. Тогда $g \in \psi(G_1)$. Это означает, что g аналитическая в некотором конечном наборе $h_1, \dots, h_k \in G_1$. Отсюда ввиду слабой аналитической замкнутости G_1 получаем, что $g \in G_1$. Таким образом, $G_0 \subseteq G_1$. Доказательство обратного включения симметрично.

Теперь проверим, что ψ — отображение «на». Пусть I — произвольное слабо аналитически замкнутое подмножество в ω^ω. Рассмотрим множество G всех перестановок из I, т. е. $G = I \cap \mathrm{Sym}(\omega)$. Легко проверяется, что оно является слабой аналитически замкнутой группой относительно композиции. Группа G также содержит g_0 и g_1, поскольку они вычислимы. Это означает, что G — элементарная подгруппа в $\mathrm{Sym}(\omega)$. Покажем, что $\psi(G) = I$. Включение $\psi(G) \subseteq I$ следует из определения. Докажем обратное включение. Пусть $f \in I$. Тогда и перестановка f^*, определенная как

$$f^*(m) = \begin{cases} m, & \text{если } m \in \Gamma(f), \\ 2k+2\text{-й элемент из } \omega \setminus \Gamma(f), & \text{если } m - 2k+1\text{-й элемент из } \omega \setminus \Gamma(f), \\ 2k+1\text{-й элемент из } \omega \setminus \Gamma(f), & \text{если } m - 2k+2\text{-й элемент из } \omega \setminus \Gamma(f), \end{cases}$$

будет вычислимой в f и тем самым аналитической в f. Поэтому $f^* \in I$. Значит, по определению имеем $f^* \in G$. Очевидно, $\mathrm{supp}(f^*) = \Gamma(f)$. С другой стороны, f вычислима относительно $f^* \in G$. Следовательно, $f \in \psi(G)$. Равенство $\psi(G) = I$ показано.

Проверим теперь, что для рассматриваемых подгрупп условие $G_0 \subseteq G_1$ эквивалентно $\psi(G_0) \subseteq \psi(G_1)$. Импликация слева направо очевидна в силу определения отображения ψ. Обратная импликация следует из того, что G_i можно определить по $\psi(G_i)$ как множество всех перестановок, содержащихся в $\psi(G_i)$. $\square$

4.2.2. Случай без параметров. Поскольку параметры g_0 и g_1 определимы формулой первого порядка с точностью до внутреннего автоморфизма, можно сформулировать ряд утверждений о произвольных элементарных подгруппах в $\mathrm{Sym}(\omega)$. Более точно, известно [11], что существует формула $\vartheta(x_0, x_1)$ такая, что $\mathrm{Sym}(\omega) \models \vartheta(g_0, g_1)$, и для любой пары перестановок g_0^*, g_1^* такой, что $\mathrm{Sym}(\omega) \models \vartheta(g_0^*, g_1^*)$, существует перестановка f такая, что $g_0^* = g_0^f$, $g_1^* = g_1^f$.

Теорема 4.8. *Для любой подгруппы* G *в* $\mathrm{Sym}(\omega)$ *следующие условия эквивалентны:*

(1) $G \preccurlyeq \mathrm{Sym}(\omega)$;

(2) *G сопряжена с некоторой аналитически замкнутой подгруппой в* $\mathrm{Sym}(\omega)$.

Доказательство. Импликация (2)⇒(1) тривиальна. Докажем (1)⇒(2). Предположим, что $G \preccurlyeq \mathrm{Sym}(\omega)$. Тогда $G \models \exists x_1 \exists x_2\ \vartheta(x_1, x_2)$. Зафиксируем g_0^* и g_1^*, удовлетворяющие условию $G \models \vartheta(g_0^*, g_1^*)$. Тогда и $\mathrm{Sym}(\omega) \models \vartheta(g_0^*, g_1^*)$.

Возьмем $f \in \mathrm{Sym}(\omega)$ так, чтобы были выполнены условия $\left(g_0^*\right)^f = g_0$ и $\left(g_1^*\right)^f = g_1$. Тогда группа G^f сопряжена с G, содержит g_0 и g_1 и поэтому является аналитически замкнутой. $\square$

Теорема 4.9. (V=L) *Для любой подгруппы G в $\mathrm{Sym}(\omega)$ следующие условия эквивалентны:*

(1) $G \preccurlyeq \mathrm{Sym}(\omega)$*;*

(2) G *сопряжена с некоторой слабо аналитически замкнутой подгруппой в* $\mathrm{Sym}(\omega)$.

В случае без параметров семейство всех элементарных подгрупп уже не обязано быть замкнутым относительно пересечения, как показывает следующее

Предложение 4.10. (V=L) *Существуют подгруппы $G, H \preccurlyeq \mathrm{Sym}(\omega)$ такие, что $G \cap H \not\preccurlyeq \mathrm{Sym}(\omega)$.*

Доказательство. Пусть G будет группой всех аналитических перестановок, и пусть f — произвольная перестановка. Так как сопряжение является автоморфизмом группы, имеем $G^f \preccurlyeq \mathrm{Sym}(\omega)$. Рассмотрим упомянутую выше формулу $\vartheta(x_0, x_1)$ без параметров, выделяющую в группе $\mathrm{Sym}(\omega)$ пары перестановок, сопряженных с g_0, g_1. Предположим, что $G \cap G^f \preccurlyeq \mathrm{Sym}(\omega)$. Из этого следует, что группа $G \cap G^h$ содержит хотя бы одну пару перестановок g_0^*, g_1^*, удовлетворяющих формуле $\vartheta(x_1, x_1)$. А поскольку

$$\mathrm{Sym}(\omega) \models \forall x_0 \forall x_1 \forall x_0' \forall x_1' \big(\vartheta(x_0, x_1) \ \&\ \vartheta(x_0', x_1') \to \exists h \big(x_0^h = x_0' \ \&\ x_1^h = x_1'\big)\big),$$

существует перестановка $h \in G$ такая, что $g_0 = \left(g_0^*\right)^h$ и $g_1 = \left(g_1^*\right)^h$. Имеем $g_0^*, g_1^* \in G \cap G^f$, откуда

$$g_0 = \left(g_0^*\right)^h,\ g_1 = \left(g_1^*\right)^h \in G^h \cap (G^f)^h = G \cap (G^f)^h \preccurlyeq \mathrm{Sym}(\omega).$$

В силу минимальности группы G среди всех подгрупп, содержащих g_0 и g_1, имеем $G \subseteq G \cap (G^f)^h$. Отсюда получаем $G \leqslant (G^f)^h$, что с учетом $h \in G$ дает $G \leqslant G^f$. Но G^f тоже минимальная элементарная подгруппа в $\mathrm{Sym}(\omega)$. Из этого следует, что $G = G^f$.

Теперь если мы выберем не аналитическую перестановку f, то будем иметь $g_0^f \in G$ и $g_1^f \in G$, что невозможно, так как в этом случае f вычисляется по аналитическим перестановкам g_0^f и g_1^f следующим образом: пусть $a_0 \in \omega$ таков, что $g_1(a_0) = a_0$ (существует только один такой элемент). Тогда $f(0) = a_0$, $f(2n+1) = g_0(f(2n))$, $f(2n+2) = g_1(f(2n+1))$.

Отсюда следует, что и сама f является аналитической перестановкой; противоречие. $\square$

Теорема 4.11. (V=L) *Любая элементарная подгруппа в* $\mathrm{Sym}(\omega)$ *содержит минимальную элементарную подгруппу.*

Доказательство. Это следует из того, что любая элементарная подгруппа сопряжена со слабо элементарно замкнутой элементарной подгруппой, которая, в свою очередь, содержит минимальную подгруппу, состоящую из всех аналитических перестановок. $\square$

Теорема 4.12. (V=L) *Все минимальные элементарные подгруппы группы* $\mathrm{Sym}(\omega)$ *сопряжены между собой.*

Доказательство. Пусть G — минимальная элементарная подгруппа в $\mathrm{Sym}(\omega)$, состоящая из всех аналитических перестановок, и пусть H — произвольная минимальная элементарная подгруппа в $\mathrm{Sym}(\omega)$. Группа H сопряжена с некоторой минимальной слабо аналитически замкнутой подгруппой H^f

в $\mathrm{Sym}(\omega)$, которая тоже является элементарной подгруппой в $\mathrm{Sym}(\omega)$. Пересечение $G \cap H^f$ тоже слабо аналитически замкнутая подгруппа, поэтому $G, H^f \leqslant G \cap H^f$, откуда в силу минимальности этих подгрупп получаем $G = H^f$, что и требовалось. $\square$

Теорема 4.13. (V=L) *Пусть* $G, H \preccurlyeq \mathrm{Sym}(\omega)$, *и пусть* G *и* H *содержат одни и те же элементарные минимальные подгруппы. Тогда* $G = H$.

Доказательство. Подействовав, если надо, сопряжением так, чтобы обе группы содержали минимальную подгруппу G_0, состоящую из всех аналитических перестановок, сначала сведем доказательство к рассмотрению случая, когда G и H — слабо аналитически замкнутые подгруппы.

Имеем $G_0 \leqslant G$, $G_0 \leqslant H$. Возьмем произвольную перестановку $f \in G$ и покажем, что она принадлежит H. Минимальная элементарная подгруппа G_0^f является подгруппой G и, следовательно, подгруппой H. Значит, g_0^f и g_1^f принадлежат H. Но перестановка f, как показано ранее, вычислима по g_0^f и g_1^f. Из слабой аналитической замкнутости H получаем $f \in H$. Итак, $G \subseteq H$. Обратное включение доказывается аналогично. $\square$

Теорема 4.14. (V=L) 1. *Число минимальных элементарных подгрупп в* $\mathrm{Sym}(\omega)$ *равно* 2^ω.

2. *Число элементарных подгрупп в* $\mathrm{Sym}(\omega)$ *равно* 2^{2^ω}.

Доказательство. Докажем п. 1. Как легко видеть, любая минимальная элементарная подгруппа $G \preceq \mathrm{Sym}(\omega)$ однозначно определяется любой парой вида $g_0^t, g_1^t \in G$, $t \in \mathrm{Sym}(\omega)$. Каждая такая подгруппа содержит счетное число пар такого вида. Кроме того, каждая пара вида $g_0^t, g_1^t \in G$, $t \in \mathrm{Sym}(\omega)$, содержится в некоторой минимальной элементарной подгруппе $G \preceq \mathrm{Sym}(\omega)$. Отсюда следует п. 1.

Докажем п. 2. Назовем множество $S \subseteq \{\langle g_0^t, g_1^t\rangle \mid t \in \mathrm{Sym}(\omega)\}$ независимым, если элементы произвольной пары $\langle a, b\rangle$ из S не являются одновременно аналитическими ни в каком конечном семействе перестановок, входящих в пары из $S \setminus \{\langle a, b\rangle\}$. Легко видеть, что объединение любой цепи независимых множеств снова независимое множество. По лемме Цорна существует максимальное независимое семейство. Обозначим его через S^*. Его мощность равна 2^ω. Если бы она была меньше, т. е. ω, то мощность множества пар вида $\langle g_0^t, g_1^t\rangle$ была бы равна ω. Также легко убедиться в том, что слабые аналитические замыкания подмножеств из $\{\langle g_0^t, g_1^t\rangle \mid t \in \mathrm{Sym}(\omega)\}$ порождают попарно различные элементарные подгруппы. Значит, их как минимум 2^{2^ω}. Больше их тоже не может быть, откуда и следует п. 2. $\square$

4.3. Следствия для полугруппы $\langle \omega^\omega; \circ\rangle$. Здесь мы рассмотрим полугруппу всех функций из ω в ω относительно композиции $(g \circ f)(x) = f(g(x))$. Для нее будут справедливы утверждения, аналогичные доказанным ранее для группы $\mathrm{Sym}(\omega)$, с теми же самыми параметрами g_0 и g_1, что и для группы $\mathrm{Sym}(\omega)$. Поэтому мы приведем только набросок доказательства того, что эта полугруппа сильно самопараметризуема с параметрами g_0 и g_1. Заметим, что указанные параметры как бы располагают все множество натуральных чисел в цепочку $0, 1 = g_1(0), 2 = g_0 g_1(0), 3 = g_1 g_0 g_1(0), \ldots$.

Теорема 4.15. *Полугруппа* $\langle \omega^\omega; \circ\rangle$ *сильно F-самопараметризуема с параметрами* $g_0 = \prod\limits_{i\in\omega}(2i, 2i+1)$ *и* $g_1 = \prod\limits_{i\in\omega}(2i+1, 2i+2)$.

Набросок доказательства. Элементы множества ω будут интерпретироваться как функции из ω^ω, принимающие одно и то же значение, т. е. функции, удовлетворяющие условию $\forall x \forall y\ (f(x) = f(y))$. Множество таких функций выделяется формулой $\forall g \forall h\ (g \circ f = h \circ f)$. Действие функций на такие элементы будет определено следующим образом: результат применения функции g к постоянной функции f, интерпретируемой как натуральное число, будет равен $\mathrm{ap}(g, f) = f \circ g$. Далее мы используем те же самые идеи, что и в [11], чтобы формульно определить класс пар функций $\left\{g_0^h, g_1^h \mid h \in \mathrm{Sym}(\omega)\right\}$. После этого точно так же, как и в [11], определяем на ω основные операции арифметики с параметрами g_0 и g_1. Далее, с этими же параметрами определяются функции Ξ и p, а также и F-самопараметризация ξ:

$$\Xi(f, m) = p(f, n) = n \Leftrightarrow m \circ f = n,$$

$$\xi_f(k) = \ell \Leftrightarrow f \text{ отображает } k\text{–й член последовательности}$$

$$g_1(a_0), g_0 g_1(a_0), g_1 g_0 g_1(a_0), \dots \text{ в } \ell\text{-й член этой последовательности,}$$

$$\text{где } a_0 \text{ — единственный неподвижный элемент } g_0.$$

Замечание. Аналогичные рассмотрения можно было бы провести для групп автоморфизмов, полугрупп эндоморфизмов, решеток подалгебр, решеток конгруенций и других производных структур для вычислимых алгебр (и, в более общем случае, алгебр, у которых основное множество — аналитическое подмножество в ω и все предикаты на нем являются аналитическими), поскольку все такие производные объекты допускают естественные F-параметризации.

Работа выполнена во время визитов автора в университеты Зигена и Дармштадта (Германия). Автор благодарит профессоров Клауса Кеймеля и Дитера Шпреена за приглашения и создание отличной рабочей обстановки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Morozov A. S.* On the theories of classes of recursive permutation groups // Sib. Adv. Math. 1991. V. 1, N 1. P. 138–153.
2. *Truss J., Morozov A. C.* On computable automorphisms of the rational numbers // J. Symbol. Logic. 2001. V. 66. P. 1458–1470.
3. *Barwise J.* Admissible sets and structures. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verl., 1975.
4. *Ершов Ю. Л.* Вычислимость и определимость. Новосибирск: Научная книга, 1996.
5. *Ershov Yu. L.* Σ-definability of algebraic systems // Handbook of Recursive Mathematics. Amsterdam; Lausanne; New York; Oxford; Shannon; Singapore; Tokyo: Elsevier, 1998. V. 1. Chapt. 5. P. 235–260.
6. *Rogers H.* Theory of recursive functions and effective computability. New York; St. Louis; San Francisco; Toronto; London; Sydney: McGraw-Hill Comp., 1967.
7. *Delvin K. J.* Constructibility. Perspectives in mathematical logic. Berlin; Heidelberg; New York; Tokio: Springer-Verl., 1984.
8. *Ершов Ю. Л., Гончаров С. С.* Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999.
9. *Keisler G., Chang C. C.* Model theory. Amsterdam; London; New York: North-Holland, 1973.
10. *Jech T.* Set theory. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1997.
11. *Морозов А. С.* Перестановки и неявная определимость // Алгебра и логика. 1988. Т. 27, № 1. С. 19–36.

Статья поступила 14 декабря 2004 г.

Морозов Андрей Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
morozov@math.nsc.ru