Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2006. Том 47, № 2

УДК 510.5

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЛАХЛАНОВСКОЙ ПОЛУРЕШЕТКИ

С. Ю. Подзоров

Аннотация: Исследуются алгоритмические свойства полурешеток, введенных в 1972 г. Лахланом при изучении рекурсивно перечислимых m-степеней (так называемых лахлановских полурешеток). Показано, что в данном Лахланом определении условие на эффективность операции пересечения в задающей полурешетку последовательности можно опустить.

Ключевые слова: дистрибутивная полурешетка, m-степень, арифметическая иерархия, вычислимая нумерация.

В 1972 г. Лахлан [1] получил описание типов изоморфизма главных идеалов в полурешетке рекурсивно перечислимых m-степеней. Им было доказано, что полурешетка изоморфна главному идеалу рекурсивно перечислимых m-степеней тогда и только тогда, когда она представима в виде прямого предела последовательности конечных дистрибутивных решеток с определенными алгоритмическими свойствами. Впоследствии такие полурешетки получили название *лахлановских*.

Лахлановские полурешетки играют важную роль в теории нумераций. Легко доказать, что главные идеалы в полурешетках вычислимых нумераций конечных семейств, в полурешетках Σ^0_2-вычислимых нумераций конечных семейств, состоящих из попарно несравнимых по включению множеств (см. [2]), и во многих других полурешетках суть в точности лахлановские полурешетки. В работе [3] доказано, что полурешетка является лахлановской тогда и только тогда, когда она изоморфна главному идеалу m-степеней, порожденному гиперпростым множеством. В той же работе показывается, что каждую лахлановскую полурешетку можно вложить как начальный сегмент и как интервал в произвольную полурешетку Роджерса Σ^0_n-вычислимых нумераций. В 1978 г. С. Д. Денисов [4] ввел в рассмотрение универсальную лахлановскую полурешетку и с ее помощью доказал, что все полурешетки вычислимых нумераций конечных семейств высоты 2 с наименьшим по включению элементом изоморфны. Этот технически сложный результат стал важным этапом на пути к решению (так до сих пор и не решенной) проблемы изоморфизма полурешеток вычислимых нумераций конечных семейств (см. [5, 6]).

Вместе с тем лахлановские полурешетки сами по себе до сих пор не были объектом исследования. Громоздкое определение лахлановской полурешетки, состоящее из нескольких пунктов, полезно для построения различных эффективных конструкций, подобных лахлановской конструкции с «башнями»,

---

Работа выполнена при частичной поддержке программы «Университеты России» (код проекта УР.04.01.013), гранта КЦФЕ PD02–1.1–475 и гранта РФФИ 05–01–00819 «Нумерации в теории вычислимых моделей».

однако лишено естественности и нуждается в доработке. Так, например, легко показать, что каждая лахлановская полурешетка является дистрибутивной верхней полурешеткой с наибольшим и наименьшим элементами, имеющей Σ^0_3-представление. Вместе с тем несложно установить, что любая дистрибутивная решетка с наибольшим и наименьшим элементами, имеющая Σ^0_3-представление, является лахлановской. В связи с этим возникает естественный вопрос: верно ли, что класс лахлановских полурешеток совпадает с классом Σ^0_3-полурешеток, имеющих наибольший и наименьший элементы? Ответ на этот вопрос автору неизвестен, однако гипотеза о том, что он положителен, звучит достаточно правдоподобно. В частности, из положительного ответа на этот вопрос следует, что в определении лахлановской полурешетки условие на вычислимость семейства функций, представляющих пересечения, можно опустить.

В настоящей работе автор доказывает, что условие на эффективность пересечений действительно может быть опущено. Результат доказан в релятивизованном варианте для произвольной n-лахлановской полурешетки. В таком виде он может быть полезен при изучении полурешеток арифметических нумераций.

Перейдем непосредственно к изложению. Основные понятия, относящиеся к теории вычислимости, можно найти в [7], а к теории решеток — в [8]. Мы предполагаем, что читателю они известны.

Для предупорядоченного множества $\mathscr{A} = \langle A, \leq\rangle$ ассоциированное с ним частично упорядоченное множество будем обозначать через $\widetilde{\mathscr{A}} = \langle \widetilde{A}, \leq\rangle$ (сохраняя одно и то же обозначение для предпорядка и ассоциированного с ним порядка), а элемент $\widetilde{A}$, содержащий $x \in A$ (класс эквивалентности), — через $[x]_{\mathscr{A}}$ (либо просто через $[x]$, если ясно, о каком $\mathscr{A}$ идет речь). Предупорядоченное множество $\mathscr{A}$ будем называть *предрешеткой* (*верхней предполурешеткой*, *нижней предполурешеткой*), если $\widetilde{\mathscr{A}}$ является решеткой (верхней полурешеткой, нижней полурешеткой). Предрешетку (верхнюю предполурешетку) будем называть *дистрибутивной*, если ассоциированная с ней решетка (верхняя полурешетка) дистрибутивна. В дальнейшем верхние полурешетки (верхние предполурешетки) мы называем просто *полурешетками* (*предполурешетками*), поскольку нижние полурешетки мы рассматривать не будем. Для предрешетки (предполурешетки) $\mathscr{A}$ запись $\mathscr{A} = \langle A, \leq; u, v\rangle$ ($\mathscr{A} = \langle A, \leq; u\rangle$) будет означать, что u и v — бинарные операции на $\mathscr{A}$, представляющие на $\widetilde{\mathscr{A}}$ операции взятия точной верхней и точной нижней граней соответственно, т. е. для любых $x, y \in A$

$$[u(x,y)] = \sup\{[x],[y]\}, \quad [v(x,y)] = \inf\{[x],[y]\}.$$

Полурешетку $\mathfrak{L}$ назовем *n-лахлановской*, если для некоторой предполурешетки $\mathscr{L} = \langle \mathbb{N}, \leq_\omega\rangle$ с носителем, равным множеству натуральных чисел, $\mathfrak{L} \cong \widetilde{\mathscr{L}}$ и существует последовательность конечных дистрибутивных предрешеток $\{\mathscr{D}_i = \langle D_i, \leq_i\rangle\}_{i\in\mathbb{N}}$, для которой выполнены следующие условия:

1) D_i — конечные подмножества натурального ряда, сильно вычислимые равномерно по i;

2) для всех i $\quad 0, 1 \in D_i$, $0 <_i 1$, для всех $x \in D_i$ $\quad 0 \leq_i x \leq_i 1$;

3) Π^0_{n+2}-индексы отношений $\leq_i$ вычислимы равномерно по i;

4) для всех i $\quad D_i \subseteq D_{i+1}$, для $x, y \in D_i$ из $x \leq_i y$ следует $x \leq_{i+1} y$, определенные естественным образом отображения $\widetilde{\mathscr{D}}_i$ в $\widetilde{\mathscr{D}}_{i+1}$ сохраняют точные верхние грани;

5) $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} D_i = \mathbb{N}$, $x \leq_\omega y \Leftrightarrow \exists i(x \leq_i y)$;

6) существует последовательность функций $\{u_i : D_i^2 \to D_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, вычислимая равномерно по i, такая, что $\mathscr{D}_i = \langle D_i, \le_i; u_i\rangle$;

7) существует последовательность функций $\{v_i : D_i^2 \to D_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, вычислимая равномерно по i, такая, что $\mathscr{D}_i = \langle D_i, \le_i; u_i, v_i\rangle$.

Ясно, что каждая n-лахлановская полурешетка дистрибутивна, содержит наибольший и наименьший элементы (можно заметить, что она изоморфна прямому пределу $\widetilde{\mathscr{D}}_i$-х, рассматриваемых как полурешетки); 0-лахлановскую полурешетку мы называем просто *лахлановской*.

Пусть $\mathscr{A} = \langle A, \le; u\rangle$ — произвольная предполурешетка. *Молекулой* в $\mathscr{A}$ назовем произвольное $B \subseteq A$, для которого выполнены следующие условия:

1) если $x \in B$, $y \in A$ и $x \le y$, то $y \in B$;

2) если $u(x, y) \in B$, то $x \in B$ или $y \in B$.

Множество молекул в $\mathscr{A}$ обозначим через $\mathrm{Mol}(\mathscr{A})$.

Предложение 1. *Пусть $\mathscr{A} = \langle A, \le; u\rangle$ — предполурешетка. Тогда $\widetilde{\mathscr{A}}$ изоморфна подполурешетке в $\langle \mathscr{P}(\mathrm{Mol}(\mathscr{A})), \subseteq; \cup\rangle$, причем изоморфизм задается правилом $[x] \mapsto \{B \in \mathrm{Mol}(\mathscr{A}) : x \in B\}$.*

Доказательство. Из определения молекулы очевидно, что данное отображение определено корректно и сохраняет верхние грани. Покажем, что оно инъективно. Пусть $x \not\le y$ и S — множество порядковых фильтров в $\mathscr{A}$, содержащих x и не содержащих y. По лемме Цорна в $\langle S, \subseteq\rangle$ найдется максимальный элемент M. Если M не молекула, то для некоторых $a_1, a_2 \notin M$ имеем $a = u(a_1, a_2) \in M$. Так как $a \not\le y$, то $a_i \not\le y$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$. Но тогда $M \cup \{z \in A : a_i \le z\} \in S$. $\square$

Предложение 2. *Пусть $\mathscr{A}_1 = \langle A_1, \le_1; u_1\rangle$ и $\mathscr{A}_2 = \langle A_2, \le_2; u_2\rangle$ — предполурешетки, $A_1 \subseteq A_2$, для всех $x, y, z \in A_1$*

$$u_1(x, y) \equiv_1 z \Rightarrow u_2(x, y) \equiv_2 z$$

и $B \subseteq A_2$ — молекула в $\mathscr{A}_2$. Тогда $B \cap A_1$ — молекула в $\mathscr{A}_1$.

Доказательство. Если $x \in B \cap A_1$, $y \in A_1$ и $x \le_1 y$, то $y \equiv_1 u_1(x, y)$; значит, $x \le_2 u_2(x, y) \equiv_2 y$ и $y \in B$. Аналогично если $u_1(x, y) \in B$ для $x, y \in A_1$, то $u_2(x, y) \equiv_2 u_1(x, y)$, $u_2(x, y) \in B$ и $x \in B$ или $y \in B$. $\square$

Атомом будем называть молекулу, содержащую наименьший элемент. Множество атомов конечной предполурешетки $\mathscr{A}$ обозначим через $\mathrm{Atom}(\mathscr{A})$.

Предложение 3. *В конечной дистрибутивной предполурешетке каждая молекула единственным образом представляется в виде объединения попарно несравнимых (по включению) атомов*

Доказательство. Пусть $\mathscr{A} = \langle A, \le; u\rangle$ — конечная дистрибутивная предполурешетка, M — молекула в $\mathscr{A}$. Пусть $C(M)$ — семейство всех подмножеств M вида $\{x : b \le x\}$, где $[b]$ — минимальный элемент в $\{[x] : x \in M\}$. Ясно, что различные элементы $C(M)$ попарно несравнимы и что объединение $C(M)$ равно M.

Пусть $B \in C(M)$. Покажем, что B — атом. Ясно, что в B есть наименьший элемент и что для B выполняется условие 1 из определения молекулы. Пусть b наименьший в B и $u(x, y) \in B$. По дистрибутивности найдутся $x_b \le x$ и $y_b \le y$ такие, что $u(x_b, y_b) \equiv b$. Тогда один из элементов x_b, y_b лежит в M и в силу того, что b минимальный в M, эквивалентен b. Но тогда либо $b \le x$, либо $b \le y$.

Осталось доказать единственность. Пусть C' — некоторое семейство попарно несравнимых атомов, дающих в объединении M. Пусть $B \in C'$ и b' — наименьший в B' элемент, а B — элемент $C(M)$, содержащий b'. Пусть b — наименьший в B элемент, а B'' — элемент C', содержащий b. Тогда $B' \subseteq B \subseteq B''$ и в силу несравнимости элементов C' имеем $B' = B \in C(M)$. Значит, $C' \subseteq C(M)$. Обратное включение доказывается аналогично. $\square$

Предложение 4. *Пусть $\mathscr{A} = \langle A, \leq; u, v\rangle$ — конечная дистрибутивная предрешетка. Тогда $\widetilde{\mathscr{A}}$ изоморфна подрешетке в $\langle \mathscr{P}(\mathrm{Atom}(\mathscr{A})), \subseteq; \cup, \cap\rangle$, причем изоморфизм задается правилом $[x] \mapsto \{B \in \mathrm{Atom}(\mathscr{A}) : x \in B\}$.*

Доказательство. Так как каждый атом является молекулой, то по предложению 1 отображение определено корректно и сохраняет верхние грани. Чтобы доказать инъективность, рассмотрим $x \nleq y$ и молекулу M такую, что $x \in M$ и $y \notin M$; тогда по предложению 3 существует атом, содержащий x и содержащийся в M. Остается доказать, что это отображение сохраняет пересечения. Пусть $x \in M$ и $y \in M$ для атома M. Так как M содержит наименьший элемент, то $v(x, y) \in M$. $\square$

Под *точечным n-рекурсивным оператором* мы будем понимать Σ^0_{n+1}-множество пар натуральных чисел. В этом случае для точечного n-рекурсивного оператора Ψ и $X \subseteq \mathbb{N}$ будет $\Psi(X) = \{y : (\exists x \in X)(\langle x, y\rangle \in \Psi)\}$, причем если $X \in \Sigma^0_{n+1}$, то $\Psi(X) \in \Sigma^0_{n+1}$ и Σ^0_{n+1}-индекс $\Psi(X)$ вычисляется равномерно по Σ^0_{n+1}-индексам Ψ и X. Отметим еще одно важное для нас свойство таких операторов: для $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ имеем $\Psi(X \cup Y) = \Psi(X) \cup \Psi(Y)$. Точечный n-рекурсивный оператор Ψ мы называем *конечным*, если для каждого $x \in \mathbb{N}$ множество $\Psi(\{x\})$ конечно.

Теорема 1. *В определении n-лахлановской полурешетки условие 7 можно опустить.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{L} = \langle \mathbb{N}, \leq_\omega\rangle$ — предполурешетка, для которой выполняются условия 1–6 из определения лахлановской полурешетки. Зафиксируем последовательность $\mathscr{D}_i = \langle D_i, \leq_i; u_i\rangle$ из определения. Зафиксируем также функции v_i, представляющие пересечения на $\widetilde{\mathscr{D}}_i$ (последовательность $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ не обязана быть вычислимой). Для $B \subseteq D_i$ определим $v_i(B) \in D_i$: $v_i(\varnothing) = 1$, $v_i(\{x\}) = x$, $v_i(\{x < y\}) = v_i(x, y)$, $v_i(\{x_1 < \dots < x_k < y\}) = v_i(v_i(\{x_1, \dots, x_k\}), y)$.

Построим последовательности Σ^0_{n+1}-множеств $\left\{V^i_x\right\}_{i\in\mathbb{N}, x\in D_i}$ и конечных точечных n-рекурсивных операторов $\{\Psi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ такие, что Σ^0_{n+1}-индекс V^i_x вычисляется равномерно по i и x, Σ^0_{n+1}-индекс Ψ_i вычисляется равномерно по i и выполняются следующие свойства:

1) $x \leq_i y \Rightarrow V^i_x \subseteq V^i_y$;
2) $V^i_{u_i(x,y)} = V^i_x \cup V^i_y$;
3) для $x, y \in D_i$ если $x \nleq_i y$, то $V^i_x \setminus V^i_y$ бесконечно;
4) $\left(V^i_x \cap V^i_y\right) \setminus V^i_{v_i(x,y)}$ конечно;
5) $\Psi_i\left(V^i_x\right) = V^{i+1}_x$.

Пусть v — некоторая функция из $\mathscr{P}(D_i)$ в D_i. Π^0_{n+2}-индекс условия $(\forall B \subseteq D_i)(\forall x \in B)(v(B) \leq_i x)$ вычисляется равномерно по v и i. Значит, существует $\varnothing^{(n)}$-вычислимая неубывающая по t функция $r(i, v, t)$, которая неограниченно растет с ростом t тогда и только тогда, когда это условие выполнено. Пусть $r(i, v) = \lim\limits_{t\to\infty} r(i, v, t)$.

Через $\mathfrak{T}$ обозначим множество всех конечных последовательностей вида $(v^k, \ldots, v^0)$, где v^i для $i \leq k$ — функция из $\mathscr{P}(D_i)$ в D_i. Для $\tau = (v^k, \ldots, v^0) \in \mathfrak{T}$ число k назовем *длиной* τ (обозначается через $|\tau|$), а $\min\{r(i, v^i) : i \leq k\}$ — *рангом* τ. Зафиксируем $\varnothing^{(n)}$-вычислимую последовательность $\tau_0, \tau_1, \ldots$ элементов из $\mathfrak{T}$ такую, что для каждого $m \in \mathbb{N}$ почти все элементы этой последовательности имеют ранг $> m$, а каждый элемент $\mathfrak{T}$ бесконечного ранга встречается бесконечно часто. Существование такой последовательности легко доказать методом конечного приоритета, перемежая в эффективной с оракулом $\varnothing^{(n)}$ конструкции требования вида «включить $\tau \in \mathfrak{T}$ в последовательность не менее m раз» с требованиями вида «не включать в последовательность элементы $\mathfrak{T}$ ранга $\leq m$». Будем также считать, что последовательность τ_i-х обладает еще одним дополнительным свойством: если $\tau_i = (v^{k+1}, \ldots, v^0)$ для $i \in \mathbb{N}$, то $\tau_j = (v^k, \ldots, v^0)$ для некоторого $j > i$ (легко понять, как это можно сделать).

Для $B \subseteq D_i$ Σ^0_{n+2}-индекс условия «B — молекула в $\mathscr{D}_i$» вычисляется эффективно по B и i. Зафиксируем $\varnothing^{(n)}$-вычислимую неубывающую по t функцию $\mathrm{Mod}(i, B, t)$ такую, что $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{Mod}(i, B, t) < \infty$ тогда и только тогда, когда это условие выполнено.

Каркасом будем называть пару $\mathscr{F} = (\mathscr{A}_k, \ldots, \mathscr{A}_0; c_k, \ldots, c_1)$, состоящую из двух конечных последовательностей, такую, что

F1) для $i \leq k$ элементами $\mathscr{A}_i$ являются непустые подмножества D_i;

F2) для $i < k$ $c_{i+1} : \mathscr{A}_{i+1} \to \mathscr{P}(\mathscr{A}_i)$ — отображение $\mathscr{A}_{i+1}$ в множество непустых подмножеств $\mathscr{A}_i$, $\mathscr{A}_i = \bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}_{i+1}} c_{i+1}(A)$;

F3) для $i < k$ и $A \in \mathscr{A}_{i+1}$ элементы $c_{i+1}(A)$ попарно несравнимы и $A \cap D_i = \bigcup c_{i+1}(A)$;

F4) множество $\mathscr{A}_k$ одноэлементно.

Число k в этом определении называется *длиной* каркаса $\mathscr{F}$. *Модулем* каркаса $\mathscr{F}$ (на шаге t) назовем число

$$\mathrm{Mod}(\mathscr{F}, t) = \sum_{i \leq k, B \in \mathscr{A}_i} \mathrm{Mod}(i, B, t).$$

Для $\tau = (v^k, \ldots, v^0) \in \mathfrak{T}$ будем говорить, что $\mathscr{F}$ *согласован* с τ, если $(\forall i \leq k)(\forall B \in \mathscr{A}_i)(v^i(B) \in B)$. Для $\tau \in \mathfrak{T}$ множество всех каркасов длины $|\tau|$, согласованных с τ, обозначим через $\mathrm{Cons}(\tau)$.

Пусть $\mathscr{F} = (\mathscr{A}_k, \ldots, \mathscr{A}_0; c_k, \ldots, c_1)$ — каркас, $m \leq k$ и $A \in \mathscr{A}_m$. Существует единственный каркас $(\mathscr{B}_m, \ldots, \mathscr{B}_0; d_m, \ldots, d_1)$ длины m, определяемый следующими соотношениями:

1) $\mathscr{B}_m = \{A\}$;

2) $\mathscr{B}_i = \bigcup\limits_{B \in \mathscr{B}_{i+1}} c_{i+1}(B)$ для $i < m$;

3) $d_{i+1} = c_{i+1} \restriction \mathscr{B}_{i+1}$ для $i < m$.

Построенный таким образом каркас обозначим через $\mathscr{F}^m_A$. Для $m \leq k$ каркас $\mathscr{G}$ длины m назовем *подкаркасом* каркаса $\mathscr{F}$ (обозначается $\mathscr{G} \preccurlyeq \mathscr{F}$), если $\mathscr{G} = \mathscr{F}^m_A$ для некоторого $A \in \mathscr{A}_m$. Заметим, что если $\mathscr{G} \preccurlyeq \mathscr{F}$ и на некотором шаге модуль $\mathscr{G}$ растет, то модуль $\mathscr{F}$ на этом шаге также увеличивается.

Перейдем к описанию пошаговой конструкции. Предлагаемая конструкция эффективна с оракулом $\varnothing^{(n)}$. На каждом шаге мы будем выполнять следующие действия: ассоциировать пару $(i, \mathscr{F})$, где $i \in \mathbb{N}$ и $\mathscr{F} \in \mathrm{Cons}(\tau_i)$, с не использованным ранее натуральным числом (после чего оно будет считаться использованным); отбраковывать ранее использованные натуральные числа; перечислять множества V_x^i; перечислять операторы Ψ_i. Если пара $(i, \mathscr{F})$ ассоциирована на шаге t с некоторым числом, то мы называем такую пару *использованной*. Натуральное число i мы называем *исчерпанным* на шаге t, если на этом шаге для всех $\mathscr{F} \in \mathrm{Cons}(\tau_i)$ пары $(i, \mathscr{F})$ уже использованы.

Шаг t разбивается на четыре этапа.

Этап 1. Для каждой использованной пары $(i, \mathscr{F})$ такой, что модуль $\mathscr{F}$ увеличился по сравнению с предыдущим шагом, отбраковываем число, с которым ассоциирована эта пара.

Этап 2. Ищем наименьшее неисчерпанное i. Выбираем $\mathscr{F} \in \mathrm{Cons}(\tau_i)$ такой, что пара $(i, \mathscr{F})$ еще не использована, берем наименьшее неиспользованное натуральное число и ассоциируем с ним пару $(i, \mathscr{F})$.

Этап 3. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ и $x \in D_i$ перечисляем в V_x^i числа z такие, что с z ассоциирована пара $(j, \mathscr{F})$, $|\tau_j| = i$ и либо z отбраковано, либо $\mathscr{F} = (\mathscr{A}_i, \ldots, \mathscr{A}_0; c_i, \ldots, c_1)$, $A \in \mathscr{A}_i$ и $x \in A$ для некоторого $A \subseteq D_i$.

Этап 4. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ перечислим в Ψ_k все такие пары $\langle x, y\rangle$, что перед выполнением этого этапа с x ассоциирована пара $(j, \mathscr{G})$ для $\mathscr{G} = (\mathscr{B}_k, \ldots, \mathscr{B}_0; d_k, \ldots, d_1)$, с y ассоциирована пара $(i, \mathscr{F})$ для $\mathscr{F} = (\mathscr{A}_{k+1}, \ldots, \mathscr{A}_0; c_{k+1}, \ldots, c_1)$, $i < j$, и либо y отбраковано, либо x не отбраковано, причем в последнем случае должно выполняться $\mathscr{G} \preccurlyeq \mathscr{F}$.

Покажем, что множества V_x^i удовлетворяют требуемым пяти свойствам.

1. Пусть $x \leq_i y$, z включается в V_x^i на шаге t, $\mathscr{F}$ и A такие, как в описании этапа 3 шага t. Если z когда-либо будет отбраковано, то $z \in V_y^i$. Если же это не так, то модуль $\mathscr{F}$ после шага t не растет, A — молекула в D_i, $y \in A$ и опять $z \in V_y^i$.

2. То, что $V_x^i \cup V_y^i \subseteq V_{u_i(x,y)}^i$, следует из предыдущего. Пусть z включается в $V_{u_i(x,y)}^i$ на шаге t и опять $\mathscr{F}$ и A такие, как в описании этапа 3 шага t. Если z когда-либо будет отбраковано, то $z \in V_x^i$. Если нет, то A — молекула в D_i, $x \in A$ или $y \in A$ и $z \in V_x^i \cup V_y^i$.

3. Пусть $x \not\leq_k y$ для $x, y \in D_k$. По предложению 4 найдется атом A в D_k такой, что $x \in A$ и $y \notin A$. Пусть $\tau = (v_k, \ldots, v_0)$ таково, что τ имеет бесконечный ранг и встречается в последовательности τ_i-х бесконечно часто. По предложениям 2 и 3 существует каркас $\mathscr{F} = (\mathscr{A}_k, \ldots, \mathscr{A}_0; c_k, \ldots, c_1)$ с ограниченным модулем такой, что для $i \leq k$ все элементы $\mathscr{A}_i$ — атомы и $A \in \mathscr{A}_k$. Ясно, что $\mathscr{F} \in \mathrm{Cons}(\tau)$. Пусть после шага t модуль $\mathscr{F}$ не растет. Существует бесконечно много чисел, с которыми после шага t будет ассоциирована пара $(i, \mathscr{F})$ для $\tau_i = \tau$. Все они попадут в $V_x^k \setminus V_y^k$.

4. Пусть $z \in V_x^k \cap V_y^k$ для $x, y \in D_k$. Пусть с z по ходу конструкции ассоциируется пара $(i, \mathscr{F})$, $\mathscr{F} = (\mathscr{A}_k, \ldots, \mathscr{A}_0; c_k, \ldots, c_1)$ и $A \in \mathscr{A}_k$. Если z когда-либо отбраковывается, то $z \in V_{v_k(x,y)}^k$. Предположим, что z не отбраковывается, тогда $x \in A$ и $y \in A$. Поскольку модуль $\mathscr{F}$ ограничен, то A — молекула. Так как существует лишь конечное число элементов $\mathfrak{T}$ длины k, то с точностью до конечного множества чисел z можно считать, что τ_i имеет бесконечный ранг. Но тогда, поскольку $\mathscr{F}$ согласован с τ_i, A содержит наименьший элемент и является атомом. Значит, по предложению 4 $v_k(x, y) \in A$ и $z \in V_{v_k(x,y)}^k$ (почти для всех z).

5. Покажем, что $\Psi_k(V_x^k) \subseteq V_x^{k+1}$ для $x \in D_k$. Пусть $p \in V_x^k$ и $\langle p, q\rangle \in \Psi_k$. Если q когда-либо становится отбракованным, то $q \in V_x^{k+1}$. Пусть это не так.

Тогда на шаге, на котором пара $\langle p,q\rangle$ перечисляется в Ψ_k, с p ассоциирована пара $(j,\mathscr{G})$ для $\mathscr{G}=(\mathscr{B}_k,\dots,\mathscr{B}_0;d_k,\dots,d_1)$, а с q ассоциирована пара $(i,\mathscr{F})$ для $\mathscr{F}=(\mathscr{A}_{k+1},\dots,\mathscr{A}_0;c_{k+1},\dots,c_1)$ и $\mathscr{G}\preccurlyeq\mathscr{F}$. Если после этого шага модуль $\mathscr{G}$ вырастет, то модуль $\mathscr{F}$ также вырастет и q станет отбракованным. Значит, модули $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ ограничены. Но тогда для $B\in\mathscr{B}_k$ и $A\in\mathscr{A}_{k+1}$ получим, что B и A — молекулы, причем $B\subseteq A$. Число p никогда не становится отбракованным, и, значит, $x\in B$. Следовательно, $x\in A$ и $q\in V_x^{k+1}$.

Покажем обратное включение. Пусть $q\in V_x^{k+1}$. Тогда с q на некотором шаге ассоциируется пара $(i,\mathscr{F})$ для $\mathscr{F}=(\mathscr{A}_{k+1},\dots,\mathscr{A}_0;c_{k+1},\dots,c_1)$ и $\tau_i=(v^{k+1},\dots,v^0)$. Если q когда-либо отбраковывается, то рассмотрим произвольное достаточно большое $p\in V_x^k$ такое, что пара $\langle p,q\rangle$ будет перечислена в Ψ_k. Пусть q никогда не становится отбракованным. Тогда для $A\in\mathscr{A}_{k+1}$ получаем, что A — молекула в D_{k+1} и $x\in A$. Из определения каркаса видно, что найдется $B\in\mathscr{A}_k$ такое, что $x\in B$. Пусть $\mathscr{G}=\mathscr{F}_B^k$ и $\tau_j=(v^k,\dots,v^0)$ для $j>i$. Так как $\mathscr{F}\in\mathrm{Cons}(\tau_i)$, то $\mathscr{G}\in\mathrm{Cons}(\tau_j)$ и пара $(j,\mathscr{G})$ будет использована, но после пары $(i,\mathscr{F})$. Значит, число p, с которым будет ассоциироваться пара $(j,\mathscr{G})$, никогда не станет отбракованным (иначе бы q тоже стало отбракованным). Но тогда $p\in V_x^k$ и $\langle p,q\rangle\in\Psi_k$.

Переходим к следующему этапу доказательства теоремы. Для произвольного множества D через $T(D)$ обозначим свободную дистрибутивную решетку с множеством образующих D. Элементы $T(D)$ мы интерпретируем как термы сигнатуры $\{\vee,\wedge\}$ от переменных из множества D, находящиеся в дизъюнктивной нормальной форме. Операции объединения и пересечения (которые мы обозначим также через $\vee$ и $\wedge$) задаются на $T(D)$ стандартным образом. Если множество D конечно, то $T(D)$ также конечна.

Пусть ϕ — произвольное отображение из D в $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, α — естественное вложение D в $T(D)$, сопоставляющее каждому элементу D соответствующий односимвольный терм. Через ϕ^* обозначим отображение $T(D)$ в $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, однозначно определяемое правилами:

$$\phi^*(\alpha(x))=\phi(x),\quad \phi^*(t_1\vee t_2)=\phi^*(t_1)\cup\phi^*(t_2),\quad \phi^*(t_1\wedge t_2)=\phi^*(t_1)\cap\phi^*(t_2).$$

Пусть $\le_\phi$ — предпорядок на $T(D)$ такой, что

$$t_1\le_\phi t_2\Leftrightarrow \phi^*(t_1)\subseteq\phi^*(t_2);$$

тогда $\langle T(D),\le_\phi\rangle$ является дистрибутивной предрешеткой (ассоциированная с ней решетка изоморфна $\langle\phi^*(T(D)),\subseteq;\cup,\cap\rangle$), причем $\vee$ и $\wedge$ представляют в этой предрешетке операции объединения и пересечения соответственно.

Через $\sqcup$ обозначим операцию дизъюнктного объединения множеств. Определим по индукции последовательности конечных дистрибутивных решеток $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$:

$$T_0=T(D_0),\quad T_{j+1}=T(T_j\sqcup D_{j+1}).$$

Через α_j и β_j обозначим естественные вложения $T_j\subseteq T_j\sqcup D_{j+1}\subseteq T_{j+1}$ множества T_j в T_{j+1} и $D_j\subseteq T_{j-1}\sqcup D_j\subseteq T_j$ ($D_0\subseteq T_0$ для $j=0$) множества D_j в T_j соответственно, сопоставляющие элементам T_j и D_j соответствующие им односимвольные термы.

Определим по индукции последовательности множеств $\{X_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ и отображений

$$\{\psi_{i,0}:D_0\to\mathscr{P}(\mathbb{N})\}_{i\in\mathbb{N}},\quad \{\psi_{i,j+1}:T_j\sqcup D_{j+1}\to\mathscr{P}(\mathbb{N})\}_{i,j\in\mathbb{N}},$$
$$\{\phi_{i,j}:T_j\to\mathscr{P}(\mathbb{N})\}_{i,j\in\mathbb{N}},$$

полагая

$$X_{i,0} = \{a : a \le i\}, \quad X_{i,j+1} = \Psi_j(X_{i,j}) \cup \{a : a \le i\};$$
$$\psi_{i,0}(x) = V_x^0 \cup X_{i,0}, \phi_{i,0} = \psi^*_{i,0},$$
$$\psi_{i,j+1}(x) = \begin{cases} V_x^{j+1} \cup X_{i,j+1}, & x \in D_{j+1}, \\ \Psi_j(\phi_{i,j}(x)) \cup X_{i,j+1}, & x \in T_j, \end{cases}$$
$$\phi_{i,j+1} = \psi^*_{i,j+1}.$$

Множества $X_{i,j}$ конечны и образуют $\varnothing^{(n)}$-вычислимую (но не обязательно сильно $\varnothing^{(n)}$-вычислимую) последовательность, причем $[0,\dots,i] \subseteq X_{i,j} \subseteq X_{i+1,j}$ для любых $i,j \in \mathbb{N}$ (второе включение легко доказать индукцией по j). Введем в рассмотрение дистрибутивные предрешетки $\mathscr{T}_{i,j} = \langle T_j, \le^{i,j}; \vee_j, \wedge_j \rangle$, где для $t_1, t_2 \in T_j$

$$t_1 \le^{i,j} t_2 \Leftrightarrow \phi_{i,j}(t_1) \subseteq \phi_{i,j}(t_2),$$

а $\vee_j$ и $\wedge_j$ — операции объединения и пересечения на T_j как на свободной дистрибутивной решетке. Докажем еще несколько свойств введенных обозначений.

1. $t \in T_j \Rightarrow \phi_{i+1,j}(t) = \phi_{i,j}(t) \cup X_{i+1,j}$.

Доказательство. Для $j = 0$ равенство следует из определений. Пусть оно справедливо для некоторого j; докажем его для $j+1$. Достаточно доказать это равенство в предположении $t \in \alpha_j(T_j) \cup \beta_{j+1}(D_{j+1})$.

В случае $x \in D_{j+1}$

$$\phi_{i+1,j+1}(\beta_{j+1}(x)) = V_x^{j+1} \cup X_{i+1,j+1} = (V_x^{j+1} \cup X_{i,j+1}) \cup X_{i+1,j+1}$$
$$= \phi_{i,j+1}(\beta_{j+1}(x)) \cup X_{i+1,j+1}.$$

Для $t \in T_j$ имеем

$$\phi_{i+1,j+1}(\alpha_j(t)) = \Psi_j(\phi_{i+1,j}(t)) \cup X_{i+1,j+1} = \Psi_j(\phi_{i,j}(t) \cup X_{i+1,j}) \cup X_{i+1,j+1}$$
$$= \Psi_j(\phi_{i,j}(t)) \cup \Psi_j(X_{i+1,j}) \cup X_{i+1,j+1} = \Psi_j(\phi_{i,j}(t)) \cup X_{i+1,j+1}$$
$$= (\Psi_j(\phi_{i,j}(t)) \cup X_{i,j+1}) \cup X_{i+1,j+1} = \phi_{i,j+1}(\alpha_j(t)) \cup X_{i+1,j+1}. \quad \square$$

2. *Для $t_1, t_2 \in T_j$ будет $t_1 \le^{i,j} t_2 \Rightarrow t_1 \le^{i+1,j} t_2$. Отображение $\widetilde{\mathscr{T}_{i,j}}$ в $\widetilde{\mathscr{T}_{i+1,j}}$, индуцированное тождественным отображением T_j на себя, сохраняет операцию объединения.*

Доказательство. Это прямое следствие предыдущего утверждения. $\square$

Пусть $t_1 \le^j t_2 \Leftrightarrow \exists i (t_1 \le^{i,j} t_2)$ для $t_1, t_2 \in T_j$. В связи с доказанным выше утверждением $\mathscr{T}_j = \langle T_j, \le^j; \vee_j, \wedge_j \rangle$ — дистрибутивная предрешетка, которая совпадает с $\mathscr{T}_{i,j}$ для всех достаточно больших i.

3. *Для всех $i, j \in \mathbb{N}$ и $t_1, t_2 \in T_j$*

$$t_1 \le^j t_2 \Leftrightarrow \text{ множество } \phi_{i,j}(t_1) \setminus \phi_{i,j}(t_2) \text{ конечно.}$$

Доказательство. Это опять следствие утверждения 1. Действительно, если $\phi_{i,j}(t_1) \setminus \phi_{i,j}(t_2)$ конечно, то для $k > i$

$$\phi_{k,j}(t_1) \setminus \phi_{k,j}(t_2) = (\phi_{i,j}(t_1) \cup X_{k,j}) \setminus (\phi_{i,j}(t_2) \cup X_{k,j});$$

последнее равно $\varnothing$ при всех достаточно больших k. Обратно, если $\phi_{i,j}(t_1) \setminus \phi_{i,j}(t_2) = \varnothing$ для некоторого i, то $(\phi_{0,j}(t_1) \cup X_{i,j}) \setminus (\phi_{0,j}(t_2) \cup X_{i,j}) = \varnothing$ и $(\phi_{0,j}(t_1) \cup X_{k,j}) \setminus (\phi_{k,j}(t_2) \cup X_{k,j})$ конечно для всех $k \ge 0$. $\square$

4. *Для любого $j \in \mathbb{N}$ существует отображение $\gamma_j : T_j \to D_j$, обладающее следующим свойством: для любых $i \in \mathbb{N}$ и $t \in T_j$ множества $\phi_{i,j}(t)$, $\phi_{i,j}(\beta_j(\gamma_j(t)))$ и $V^j_{\gamma_j(t)}$ совпадают по модулю конечных множеств.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по j.

Для $j = 0$ рассмотрим $\gamma_0 : T_0 \to D_0$, обладающее следующими свойствами: для $x \in D_0$

$$\gamma_0(\beta_0(x)) \equiv_0 x, \quad \gamma_0(t_1 \vee_0 t_2) \equiv_0 u_0(\gamma_0(t_1), \gamma_0(t_2)), \quad \gamma_0(t_1 \wedge_0 t_2) \equiv_0 v_0(\gamma_0(t_1), \gamma_0(t_2))$$

(в силу дистрибутивности $\widetilde{\mathscr{D}}_0$ такое γ_0 существует). В силу свойств 1, 2 и 4 множеств V^0_x имеем $\phi_{i,0}(t) =^* \phi_{i,0}(\beta_0(\gamma_0(t))) =^* V^0_{\gamma_0(t)}$ для всех i.

Пусть для j утверждение справедливо; покажем, что оно справедливо для $j+1$. Сначала докажем это утверждение для элементов T_{j+1} вида $\alpha_j(t)$, где $t \in T_j$. В силу свойства конечных точечных операторов сохранять равенство по модулю конечных множеств имеем

$$\begin{aligned}\phi_{i,j+1}(\alpha_j(t)) = \Psi_j(\phi_{i,j}(t)) \cup X_{i,j+1} =^* \Psi_j(\phi_{i,j}(t))&\\ =^* \Psi_j(V^j_{\gamma_j(t)}) = V^{j+1}_{\gamma_j(t)} =^* \phi_{i,j+1}(\beta_j(\gamma_j(t)))&\end{aligned}$$

и можно положить $\gamma_{j+1}(\alpha_j(t)) = \gamma_j(t)$. Далее действуем по тому же принципу, что и при доказательстве базы индукции; доопределяем γ_{j+1} на остальных элементах T_{j+1} так, чтобы выполнялись свойства: для $x \in D_{j+1}$

$$\gamma_{j+1}(\beta_{j+1}(x)) \equiv_{j+1} x, \quad \gamma_{j+1}(t_1 \vee_{j+1} t_2) \equiv_{j+1} u_{j+1}(\gamma_{j+1}(t_1), \gamma_{j+1}(t_2)),$$
$$\gamma_{j+1}(t_1 \wedge_{j+1} t_2) \equiv_{j+1} v_{j+1}(\gamma_{j+1}(t_1), \gamma_{j+1}(t_2)).$$

Требуемые равенства опять следуют из свойств 1, 2 и 4 множеств V^{j+1}_x, а существование доопределения — из дистрибутивности $\widetilde{\mathscr{D}}_{j+1}$. $\square$

Зафиксируем отображения γ_j, о которых говорится в предыдущем утверждении. Будем считать (из доказательства утверждения видно, что это можно сделать), что $\gamma_j(\beta_j(x)) = x$ для $x \in D_j$ и $\gamma_{j+1}(\alpha_j(t)) = \gamma_j(t)$ для $t \in T_j$.

5. *Решетки $\widetilde{\mathscr{T}_j}$ и $\widetilde{\mathscr{D}}_j$ изоморфны. Изоморфизм определяется отображением γ_j.*

Доказательство. Действительно, из утверждений 3 и 4, а также свойств 1 и 3 множеств V^j_x следует, что $t_1 \leq^j t_2 \Leftrightarrow \gamma_j(t_1) \leq_j \gamma_j(t_2)$ для $t_1, t_2 \in T_j$. Значит, γ_j как отображение из $\widetilde{\mathscr{T}_j}$ в $\widetilde{\mathscr{D}}_j$ определено корректно, сохраняет порядок и переводит несравнимые элементы в несравнимые. Так как $\gamma_j \circ \beta_j$ тождественно на $\mathscr{D}_j$, то γ_j как отображение из $\widetilde{\mathscr{T}_j}$ в $\widetilde{\mathscr{D}}_j$ сюръективно. $\square$

6. *Для $i, j \in \mathbb{N}$ и $t_1, t_2 \in T_j$*

$$t_1 \leq^{i,j} t_2 \Rightarrow \alpha_j(t_1) \leq^{i,j+1} \alpha_j(t_2) \quad \text{и} \quad \alpha_j(t_1 \vee_j t_2) \equiv^{i,j+1} \alpha_j(t_1) \vee_{j+1} \alpha_j(t_2).$$

Доказательство. Первое следует из очевидной импликации:

$$\phi_{i,j}(t_1) \subseteq \phi_{i,j}(t_2) \Rightarrow \Psi_j(\phi_{i,j}(t_1)) \cup X_{i,j+1} \subseteq \Psi_j(\phi_{i,j}(t_2)) \cup X_{i,j+1}.$$

Второе вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned}\phi_{i,j+1}(\alpha_j(t_1 \vee_j t_2)) &= \Psi_j(\phi_{i,j}(t_1 \vee_j t_2)) \cup X_{i,j+1} = \Psi_j(\phi_{i,j}(t_1) \cup \phi_{i,j}(t_2)) \cup X_{i,j+1}\\ &= (\Psi_j(\phi_{i,j}(t_1)) \cup X_{i,j+1}) \cup (\Psi_j(\phi_{i,j}(t_2)) \cup X_{i,j+1})\\ &= \phi_{i,j+1}(\alpha_j(t_1)) \cup \phi_{i,j+1}(\alpha_j(t_2)) = \phi_{i,j+1}(\alpha_j(t_1) \vee_{j+1} \alpha_j(t_2)).\end{aligned}$$ $\square$

7. *$\beta_0(0)$ — наименьший, а $\beta_0(1)$ — наибольший элементы в $\mathscr{T}_{0,0}$ соответственно. Если $t_0, t_1 \in T_j$ — наименьший и наибольший элементы в $\mathscr{T}_{i,j}$ соответственно, то t_0 — наименьший в $\mathscr{T}_{i+1,j}$, t_1 — наибольший в $\mathscr{T}_{i+1,j}$, $\alpha_j(t_0)$ — наименьший в $\mathscr{T}_{i,j+1}$ и $\alpha_j(t_1)$ — наибольший в $\mathscr{T}_{i,j+1}$ элементы.*

Доказательство. Первое утверждение следует из определения $\phi_{0,0}$ и свойства 1 множеств V_x^0. Второе утверждение в той части, которая касается $\mathscr{T}_{i+1,j}$, является прямым следствием утверждения 2.

Для остального докажем индукцией по j, что $\phi_{i,j}(t_0) = V_0^j \cup X_{i,j}$ и $\phi_{i,j}(t_1) = V_1^j \cup X_{i,j}$. Для $j = 0$ справедливость этого утверждения уже отмечена выше. Пусть для j это верно. Тогда в силу монотонности Ψ_j наименьшим по включению множеством в $\phi_{i,j+1}(\alpha_j(T_j))$ будет $\Psi_j\big(V_0^j \cup X_{i,j}\big) \cup X_{i,j+1} = \Psi_j\big(V_0^j\big) \cup \Psi_j(X_{i,j}) \cup X_{i,j+1} = V_0^{j+1} \cup X_{i,j+1}$, а наибольшим — $\Psi_j\big(V_1^j \cup X_{i,j}\big) \cup X_{i,j+1} = \Psi_j\big(V_1^j\big) \cup \Psi_j(X_{i,j}) \cup X_{i,j+1} = V_1^{j+1} \cup X_{i,j+1}$. Однако эти же множества будут соответственно наибольшим и наименьшим по включению в $\phi_{i,j+1}(\beta_{j+1}(D_{j+1}))$ и, следовательно, останутся таковыми в $\phi_{i,j+1}(T_{j+1})$. Остается лишь, опираясь на это утверждение, заметить, что $\phi_{i,j+1}(\alpha_j(t_0)) = V_0^{j+1} \cup X_{i,j+1}$ и $\phi_{i,j+1}(\alpha_j(t_1)) = V_1^{j+1} \cup X_{i,j+1}$. $\square$

Для $i \le j$ через $\alpha_{i,j}$ обозначим вложение T_i в T_j, равное $\alpha_{j-1} \circ \dots \circ \alpha_i$ ($\alpha_{i,i}$ — тождественное отображение T_i на себя при $j = i$). Отметим, что $\gamma_j \circ \alpha_{i,j} = \gamma_i$. Как следует из утверждений 2 и 6, для $t_1, t_2 \in T_i$

$$t_1 \le^{i,i} t_2 \Rightarrow \alpha_{i,j}(t_1) \le^{j,j} \alpha_{i,j}(t_2) \quad \text{и} \quad \alpha_{i,j}(t_1 \vee_i t_2) \equiv^{j,j} \alpha_{i,j}(t_1) \vee_j \alpha_{i,j}(t_2),$$

т. е. $\alpha_{i,j}$ индуцирует гомоморфизм полурешетки $\widetilde{\mathscr{T}_{i,i}}$ в полурешетку $\widetilde{\mathscr{T}_{j,j}}$. Пусть $T = \bigsqcup\limits_{i \in \mathbb{N}} T_i$, а для $t_1 \in T_i$ и $t_2 \in T_j$

$$t_1 \le_T t_2 \Leftrightarrow (\exists k \ge i, j)(\alpha_{i,k}(t_1) \le^{k,k} \alpha_{j,k}(t_2)).$$

Тогда $\mathscr{T} = \langle T, \le_T \rangle$ — дистрибутивная предполурешетка, обладающая тем свойством, что ассоциированная с ней полурешетка $\widetilde{\mathscr{T}}$ изоморфна прямому пределу системы $\{\widetilde{\mathscr{T}_{i,i}}, \alpha_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}}$.

8. *Полурешетки $\widetilde{\mathscr{T}}$ и $\widetilde{\mathscr{L}}$ изоморфны.*

Доказательство. Пусть γ — отображение из T в $\mathbb{N}$, действующее по следующему правилу: $\gamma(t) = \gamma_i(t)$ для $t \in T_i$. Покажем, что γ определяет требуемый изоморфизм.

Покажем сначала, что $t_1 \le_T t_2 \Leftrightarrow \gamma(t_1) \le_\omega \gamma(t_2)$. Пусть $t_1 \in T_i$ и $t_2 \in T_j$. Если $t_1 \le_T t_2$, то пусть $k \ge i, j$ таково, что $\alpha_{i,k}(t_1) \le^{k,k} \alpha_{j,k}(t_2)$. Поскольку $\alpha_{i,k}(t_1) \le^{k,k} \alpha_{j,k}(t_2)$, из утверждения 5 получаем

$$\gamma(t_1) = \gamma_i(t_1) = \gamma_k(\alpha_{i,k}(t_1)) \le_k \gamma_k(\alpha_{j,k}(t_1)) = \gamma_j(t_1) = \gamma(t_1).$$

Пусть, наоборот, $\gamma(t_1) \le_\omega \gamma(t_2)$. Пусть $k \ge i, j$ таково, что $\gamma_i(t_1) \le_k \gamma_j(t_2)$. Пусть $m \ge k$ настолько велико, что $\mathscr{T}_{m,k} = \mathscr{T}_k$. Тогда

$$\gamma_i(t_1) = \gamma_k(\alpha_{i,k}(t_1)) \le_k \gamma_k(\alpha_{j,k}(t_2)) = \gamma_j(t_2),$$

по утверждению 5

$$\alpha_{i,k}(t_1) \le^{m,k} \alpha_{j,k}(t_2)$$

и по утверждению 6

$$\alpha_{i,m}(t_1) = \alpha_{k,m}(\alpha_{i,k}(t_1)) \leq^{m,m} \alpha_{k,m}(\alpha_{j,k}(t_2)) = \alpha_{j,m}(t_2).$$

Мы доказали, что γ как отображение из $\widetilde{\mathscr{T}}$ в $\widetilde{\mathscr{L}}$ определено корректно, сохраняет порядок и переводит несравнимые элементы в несравнимые. Осталось заметить, что $\gamma(T) = \mathbb{N}$ и, следовательно, γ как отображение из $\widetilde{\mathscr{T}}$ в $\widetilde{\mathscr{L}}$ сюръективно. $\square$

Для завершения доказательства теоремы осталось интерпретировать последовательность предрешеток $\{\mathscr{T}_{i,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ как последовательность со свойствами 1–7 из определения лахлановской полурешетки. Множества T_i заданы эффективно; в связи с этим имеют смысл (и справедливы) следующие утверждения: множества T_i и отображения α_i вычислимы равномерно по i, функции $t_1 \vee_i t_2$, $t_1 \wedge_i t_2$ вычислимы как функции от t_1, t_2 и i, Π^0_{n+2}-индекс отношения $t_1 \leq^{i,i} t_2$ вычислим равномерно по t_1, t_2 и i (это следует из того, что Σ^0_{n+1}-индексы множеств $\phi_{i,i}(t)$ вычислимы равномерно по i и t). Пусть ε — вычислимая функция из T на $\mathbb{N}$ такая, что $\varepsilon \restriction T_i$ для каждого $i \in \mathbb{N}$ инъективна и $\varepsilon(\alpha_i(t)) = \varepsilon(t)$ для любого $t \in T_i$, $\varepsilon(\beta_0(0)) = 0$, $\varepsilon(\beta_0(1)) = 1$. Пусть $D'_i = \varepsilon(T_i)$ и для всех $t_1, t_2 \in D'_i$

$\varepsilon(t_1) \leq'_i \varepsilon(t_2) \Leftrightarrow t_1 \leq^{i,i} t_2,\ u'_i(\varepsilon(t_1), \varepsilon(t_2)) = \varepsilon(t_1 \vee_i t_2),\ v'_i(\varepsilon(t_1), \varepsilon(t_2)) = \varepsilon(t_1 \wedge_i t_2)$.

Тогда последовательность $\{\langle D'_i, \leq'_i; u'_i, v'_i\rangle\}_{i\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям 1–7 определения лахлановской полурешетки и полурешетка, задаваемая этой последовательностью, изоморфна $\widetilde{\mathscr{T}}$. Доказательство этого факта, равно как и технические детали определения функции ε, не представляют принципиальной трудности и могут быть опущены. $\square$

Замечание 1. Можно еще ослабить условия из определения n-лахлановской полурешетки, полагая в п. 6 функции u_i $\varnothing^{(n+1)}$-вычислимыми равномерно по i.

Доказательство. Действительно, единственное место, где мы в доказательстве теоремы используем вычислимость u_i-х, — это вычислимость Σ^0_{n+2}-индекса условия «B — молекула в $\mathscr{D}_i$» равномерно по B и i. Однако это остается верным и при $\varnothing^{(n+1)}$-вычислимости u_i-х. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lachlan A. H.* Recursively enumerable many-one degrees // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 3. С. 326–356.
2. *Гончаров С. С., Сорби А.* Обобщенно вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 6. С. 621–641.
3. *Подзоров С. Ю.* О локальном строении полурешеток Роджерса Σ^0_n-вычислимых нумераций // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 2. С. 148–172.
4. *Денисов С. Д.* Строение верхней полурешетки рекурсивно перечислимых m-степеней и смежные вопросы. 1 // Алгебра и логика. 1978. Т. 17, № 6. С. 643–683.
5. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
6. *Ершов Ю. Л.* Необходимые условия изоморфизма полурешеток Роджерса конечных частично упорядоченных множеств // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 4. С. 413–421.
7. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
8. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.

Статья поступила 26 апреля 2004 г.

Подзоров Сергей Юрьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
podz@math.nsc.ru