Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2004. Том 45, № 6

УДК 515.146

ВАРИАНТ ТЕОРЕМЫ БАРТЛА — ГРЕЙВСА ДЛЯ УМЕРЕННО РАСТУЩИХ ФУНКЦИЙ

Б. Аксу, Р. Нуира

Аннотация: Установлена теорема Бартла — Грейвса [1] для умеренно растущих функций в категории $\mathfrak{b}$-пространств Вальбрука [2]. Как следствие дана характеристика некоторых пространств функций со значениями в факторах, использованных Вальбруком в его голоморфном функциональном исчислении [3–5].

Ключевые слова: Теорема Бартла — Грейвса, умеренно растущая функция, категория, $\mathfrak{b}$-пространство.

1. Введение и обозначения

Напомним, что теорема Бартла — Грейвса [6] гласит, что сюръективное ограниченное линейное отображение банаховых пространств имеет непрерывное правое обратное (необязательно линейное), ограниченное на ограниченных подмножествах. В [1] доказана версия этой теоремы для непрерывных функций в категории $\mathfrak{b}$-пространств Вальбрука [2].

В настоящей статье мы установим некоторые результаты типа: если $u : E \to F$ — борнологически сюръективное ограниченное линейное отображение $\mathfrak{b}$-пространств, то ограниченное линейное отображение

$$\mathscr{F}(\mathbb{R}, u) : \mathscr{F}(\mathbb{R}, E) \to \mathscr{F}(\mathbb{R}, F), \quad f \mapsto u \circ f,$$

борнологически сюръективно, где $\mathscr{F}(\mathbb{R}, G) = \theta(\mathbb{R}, w_0, G)$, $\theta_r(\mathbb{R}, w_0, G)$ с $r \in \mathbb{N}$ и $G = E, F$. Мы покажем, что если E — $\mathfrak{b}$-пространство и F — борнологически замкнутое подпространство в E, то $\theta(\mathbb{R}, w_0, E/F) = \theta(\mathbb{R}, w_0, E)/\theta(\mathbb{R}, w_0, F)$ (соответственно $\theta_r(\mathbb{R}, w_0, E/F) = \theta_r(\mathbb{R}, w_0, E)/\theta_r(\mathbb{R}, w_0, F)$ с $r \in \mathbb{N}$). Для этого мы докажем, что если V — относительно компактное открытое подмножество в $\mathbb{R}$ и $u : E \to F$ — борнологически сюръективное ограниченное линейное отображение $\mathfrak{b}$-пространств, то ограниченное линейное отображение

$$\frac{d}{dx}\varepsilon u : \mathscr{D}'(V)\varepsilon E \to \mathscr{D}'(V)\varepsilon F$$

борнологически сюръективно. Мы докажем также, что если U — открытое подмножество в $\mathbb{R}$, то ограниченное линейное отображение

$$\frac{d}{dx}\varepsilon u : \mathscr{D}'_1(U, E) \to \mathscr{D}'_1(U, F)$$

борнологически сюръективно. Наконец, будет показано, что ограниченное линейное отображение

$$\mathscr{D}'_1(U, u) : \mathscr{D}'_1(U, E) \to \mathscr{D}'_1(U, F), \quad f \mapsto u \circ f,$$

борнологически сюръективно, откуда будет сделан вывод, что если E — b-пространство и F — борнологически замкнутое подпространство в E, то

$$\mathscr{D}_1'(U, E/F) = \mathscr{D}_1'(U, E)/\mathscr{D}_1'(U, F).$$

Фиксируем некоторые обозначения и напомним некоторые понятия, используемые в дальнейшем.

Пусть E — вещественное или комплексное векторное пространство и B — абсолютно выпуклое множество в E. Пусть E_B — векторное пространство, порожденное B, т. е. $E_B = \bigcup\limits_{\lambda>0} \lambda B$. Функционал Минковского множества B является полунормой на E_B. Он будет нормой тогда и только тогда, когда B не содержит какого-либо ненулевого подпространства в E. Множество B назовем *наполняющим*, если его функционал Минковского является банаховой нормой.

Ограниченная структура β на векторном пространстве E определяется набором «ограниченных» подмножеств в E, обладающим следующими свойствами:

(1) каждое конечное подмножество в E ограничено;

(2) объединение любых двух ограниченных множеств ограничено;

(3) каждое подмножество ограниченного множества ограничено;

(4) гомотетичный образ ограниченного множества ограничен;

(5) каждое ограниченное множество содержится в наполняющем ограниченном множестве.

b-*Пространство* (E, β) — это векторное пространство E с ограниченностью β. Подпространство F b-пространства E *борнологически замкнуто*, если $F \cap E_B$ замкнуто в E_B для каждого наполняющего ограниченного шара B в E.

Линейное отображение $u : E \to F$ между b-пространствами (E, β_E) и (F, β_F) называют *ограниченным*, если оно отображает ограниченные подмножества в E в ограниченные подмножества в F. Отображение $u : E \to F$ *борнологически сюръективно*, если для каждого $B' \in \beta_F$ существует $B \in \beta_E$ такое, что $u(B) = B'$. b-*Подпространством* b-пространства E назовем подпространство F с ограниченностью β_F такой, что (F, β_F) является b-пространством и $\beta_F \subseteq \beta_E$.

Обозначим через **b** категорию b-пространств и ограниченных линейных отображений. Дополнительную информацию о b-пространствах можно найти в [2, 7].

ε-Произведением двух банаховых пространств E и F называют банахово пространство $E\varepsilon F$ линейных отображений $E' \to F$, ограничения которых на замкнутый единичный шар $B_{E'}$ в E' являются $\sigma(E', E)$-непрерывными. Если E_i и F_i — банаховы пространства и $u_i : E_i \to F_i$, $i = 1, 2,$ — ограниченные линейные отображения, то ε-произведение u_1 и u_2 является ограниченным линейным отображением

$$u_1 \varepsilon u_2 : E_1 \varepsilon E_2 \to F_1 \varepsilon F_2, \quad f \mapsto u_2 \circ f \circ u_1',$$

где u_1' — отображение, двойственное к u_1. Если G — банахово пространство и F — замкнутое подпространство банахова пространства E, то $G\varepsilon F$ — замкнутое подпространство в $G\varepsilon E$. За более подробной информацией об ε мы отсылаем читателя к [8].

Расстояние Банаха — Мазура $d(E, F)$ между изоморфными пространствами E и F определяется как $\inf\{\|T\|\,\|T^{-1}\|\}$, где инфимум берется по всем изоморфизмам T из E на F. Напомним, что банахово пространство E является *$\mathscr{L}_\infty$-пространством*, если существует $\lambda \geq 1$ такое, что каждое конечномерное подпространство в E содержится в другом конечномерном подпространстве F_1 в E таком, что $d\big(F_1, l_n^\infty\big) \le \lambda$, где $n = \dim F_1$, и l_n^∞ есть $\mathbf{K}^n$ ($\mathbf{K}$ — это $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) с нормой $\sup\limits_{1\le i\le n} |x_i|$. Более подробно об $\mathscr{L}_\infty$-пространствах можно прочесть в [9].

2. Предварительные сведения

Пусть V — относительно компактное открытое подмножество в $\mathbb{R}$. Согласно [10] линейное отображение $\frac{d}{dx} : \mathscr{D}'(V) \to \mathscr{D}'(V)$ ограничено и сюръективно, если мы снабдим $\mathscr{D}'(V)$ эквинепрерывной борнологией (т. е. подмножество B в $\mathscr{D}'(V)$ ограничено, если B эквинепрерывно на $\mathscr{D}(V)$, иными словами, поляра B является окрестностью нуля в $\mathscr{D}(V)$).

Предложение 2.1. *Пусть V — относительно компактное открытое подмножество в $\mathbb{R}$. Ограниченное линейное отображение $\frac{d}{dx} : \mathscr{D}'(V) \to \mathscr{D}'(V)$ борнологически сюръективно.*

Доказательство. Пусть $\varphi_0 \in \mathscr{D}(V)$ таково, что $\int\limits_V \varphi_0(t)\,dt = 1$. Пусть H — гиперплоскость в $\mathscr{D}(V)$, определенная равенством $\int\limits_V \varphi(t)\,dt = 0$. Для $\varphi \in \mathscr{D}(V)$ положим $\lambda_\varphi = \int\limits_V \varphi(t)\,dt$ и $\chi_\varphi = \varphi - \lambda_\varphi\varphi_0 \in H$. Отображение ψ_φ, определенное для $x \in V$ равенством

$$\psi_\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \chi_\varphi(t)\,dt,$$

является элементом $\mathscr{D}(V)$. Для $S \in \mathscr{D}'(V)$ пусть T_S — элемент, определенный на $\mathscr{D}(V)$ равенством $T_S(\varphi) = -S(\psi_\varphi)$, $\varphi \in \mathscr{D}(V)$. Имеем

$$\frac{dT_S}{dx}(\varphi) = -T_S\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = S\left(\psi\frac{d\varphi}{dx}\right).$$

Так как

$$\chi_{\frac{d\varphi}{dx}} = \frac{d\varphi}{d_x} - \lambda_{\frac{d\varphi}{dx}}\varphi_0 = \frac{d\varphi}{dx},$$

получим

$$\frac{dT_S}{dx} = S.$$

Если теперь B — ограниченное подмножество в $\mathscr{D}'(V)$, то $C = \{T_S : S \in B\}$ — ограниченное в $\mathscr{D}'(V)$ множество такое, что $\frac{d}{dx}(C) = B$.

Замечание 1. Отображение $h : S \mapsto T_S$, $\mathscr{D}'(V) \to \mathscr{D}'(V)$, ограниченное, линейное и является правым обратным к ограниченному линейному отображению $\frac{d}{dx} : \mathscr{D}'(V) \to \mathscr{D}'(V)$.

Замечание 2. Так как композиция двух борнологически сюръективных ограниченных линейных отображений борнологически сюръективно, отображение $\frac{d^n}{dx^n}$ борнологически сюръективно для всех $n \in \mathbb{N}$.

Определим ε-произведение двух b-пространств G и E. Им будет b-пространство $G\varepsilon E = \bigcup\limits_{B,C} G_B\varepsilon E_C$, где B (соответственно C) пробегает множество всех наполняющих ограниченных подмножеств в G (соответственно E). Поскольку банаховы пространства $G_B\varepsilon E_C$ и $E_C\varepsilon G_B$ изометрически изоморфны (предложение 2 из [8]), b-пространства $G\varepsilon E$ и $E\varepsilon G$ изоморфны.

Если E — b-пространство, то отображение

$$\frac{d}{dx}\varepsilon \operatorname{Id}_E : \mathscr{D}'(V)\varepsilon E \to \mathscr{D}'(V)\varepsilon E$$

линейное и ограниченное. Более общий факт отражает

Предложение 2.2. *Ограниченное линейное отображение*

$$\frac{d}{dx}\varepsilon \operatorname{Id}_E : \mathscr{D}'(V)\varepsilon E \to \mathscr{D}'(V)\varepsilon E$$

борнологически сюръективно.

Доказательство. Действительно, ограниченное линейное отображение $h\varepsilon \operatorname{Id}_E$ является правым обратным к ограниченному линейному отображению $\frac{d}{dx}\varepsilon \operatorname{Id}_E$, где $h : S \mapsto T_S$ — отображение, определенное в замечании 1.

Пусть U — открытое подмножество в $\mathbb{R}$ и E — b-пространство. Обозначим через $\mathscr{C}_U$ множество всех относительно компактных открытых подмножеств в U. Если V, $W \in \mathscr{C}_U$ таковы, что $W \subset V$, определим ограниченное линейное отображение

$$p_{W,V} : \mathscr{D}'(V) \to \mathscr{D}'(W), \quad T \mapsto p_{W,V}(T),$$

такое, что $p_{W,V}(T)(\Phi) = T(\widetilde{\Phi})$, где $\widetilde{\Phi}$ — продолжение Φ нулем на V. Система $(\mathscr{D}'(V))_{V\in\mathscr{C}_U}$ проективна в категории $\mathbf{b}$, ее образ при левом точном функторе $.\varepsilon E : \mathbf{b} \to \mathbf{b}$ является борнологической проективной системой $(\mathscr{D}'(V)\varepsilon E, p_{W,V})_{V\in\mathscr{C}_U}$, имеющей проективный предел в $\mathbf{b}$ [11]. Мы тем самым можем определить следующее b-пространство:

$$\mathscr{D}'_1(U,E) = \varprojlim_{V\in\mathscr{C}_U} \mathscr{D}'(V)\varepsilon E.$$

Существует ограниченное линейное отображение $R : \mathscr{D}'_1(U,E) \to \mathscr{D}'_1(U,E)$ такое, что для любого $V \in \mathscr{C}_U$ будет

$$p_W \circ R = \left(\frac{d}{dx}\varepsilon \operatorname{Id}_E\right) \circ p_V,$$

где $p_K : \mathscr{D}'_1(U,E) \to \mathscr{D}'(K)\varepsilon E$, $K = V, W$, — ограниченное линейное отображение.

Обозначим R через $\frac{d}{dx}\varepsilon \operatorname{Id}_E$. Это ограниченное линейное отображение. Покажем, что оно борнологически сюръективно.

Теорема 2.3. *Пусть U — открытое подмножество в $\mathbb{R}$ и E — b-пространство. Тогда ограниченное линейное отображение*

$$\frac{d}{dx}\varepsilon \operatorname{Id}_E : \mathscr{D}'_1(U,E) \to \mathscr{D}'_1(U,E)$$

борнологически сюръективно.

Доказательство. Пусть $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность ограниченных открытых интервалов, покрывающих U, и $\varphi_0 \in \mathscr{D}(V_1)$ таково, что

$$\int\limits_V \varphi_0(t)dt = \Psi_0(\varphi_0) = 1,$$

где $\Psi_0 \in \mathscr{D}'(V_1)$. Пусть B — ограниченное подмножество в $\mathscr{D}_1'(U,E)$. Множество $B_1 = p_{V_1}(B)$ ограничено в $\mathscr{D}'(V_1)\varepsilon E$. Так как ограниченное линейное отображение

$$\frac{d}{dx}\varepsilon\,\mathrm{Id}_E : \mathscr{D}'(V_1)\varepsilon E \to \mathscr{D}'(V_1)\varepsilon E$$

борнологически сюръективно, существует ограниченное подмножество C_1 в $\mathscr{D}'(V_1)\varepsilon E$ такое, что

$$\left(\frac{d}{dx}\varepsilon\,\mathrm{Id}_E\right)(C_1) = B_1.$$

В то же время существуют ограниченные подмножества B_2 и C_2 в b-пространстве $\mathscr{D}'(V_2)\varepsilon E$ такие, что

$$\left(\frac{d}{dx}\varepsilon\,\mathrm{Id}_E\right)(C_2) = B_2, \quad B_2 = p_{V_2}(B)$$

(тогда $B_1 = p_{V_1V_2}(B_2)$). Согласно тождеству

$$(p_{WV}\varepsilon\,\mathrm{Id}_E)\circ\left(\frac{d}{dx}\varepsilon\,\mathrm{Id}_E\right) = \left(\frac{d}{dx}\varepsilon\,\mathrm{Id}_E\right)\circ(p_{WV}\varepsilon\,\mathrm{Id}_E)$$

получим

$$\left(\frac{d}{dx}\varepsilon\,\mathrm{Id}_E\right)\circ p_{V_1V_2}(T) \in B_1$$

для всех $T \in C_2$. Поскольку $B_1 = (\frac{d}{dx}\varepsilon\,\mathrm{Id}_E)(C_1)$, найдется $S \in C_1$ такое, что

$$\left(\frac{d}{dx}\varepsilon\,\mathrm{Id}_E\right)\circ(p_{V_1V_2}(T) - S) = 0.$$

Ввиду того, что b-пространства $\mathscr{D}'(V)\varepsilon E$ и $E\varepsilon\mathscr{D}'(V)$ борнологически изоморфны для $V = V_1, V_2$, получим

$$\left(\frac{d}{dx}\right)\circ(p_{V_1V_2}(T) - S) = 0.$$

Предположим, что все рассматриваемые ограниченные подмножества являются ограниченными в $\mathscr{D}'(V_i)\varepsilon E_A$, где A — наполняющее ограниченное подмножество E. Тогда для всех $f \in (E_A)'$ имеем

$$\left(\frac{d}{dx}\right)\circ(p_{V_1V_2}(T) - S)(f) = 0.$$

С другой стороны, существует $\alpha_f \in \mathbb{R}$ такое, что

$$(p_{V_1V_2}(T) - S)(f) = \alpha_T(f)\Psi_0.$$

Следовательно, есть $\alpha_T \in (E_A)''$ такое, что $p_{V_1V_2}(T) - S = \Psi_0\alpha_T$, т. е. $p_{V_1V_2}(T) - \Psi_0\alpha_T = S$. Поскольку $\Psi_0\alpha_T$ принадлежит $\mathscr{D}'(V_2)\varepsilon E$ и $p_{V_1V_2}(\Psi_0\alpha_T) = \Psi_0\alpha_T$, получаем $p_{V_1V_2}(T - \Psi_0\alpha_T) = S$.

Пусть

$$C_2' = \{T - \Psi_0\alpha_T : T \in C_2\}.$$

Имеем

$$p_{V_1V_2}(C_2') = C_1, \quad \left(\frac{d}{dx}\varepsilon\,\mathrm{Id}_E\right)(C_2') = B_2$$

(так как $(\frac{d}{dx}\varepsilon\,\mathrm{Id}_E)(\Psi_0\alpha_T)=0$), и C_2' ограничены в $\mathscr{D}'(V_2)\varepsilon E$. Обозначим C_2 через C_2'. Построим рекуррентно ограниченное подмножество C_n в $\mathscr{D}'(V_n)\varepsilon E$ такое, что

$$\left(\frac{d}{dx}\varepsilon\,\mathrm{Id}_E\right)(C_n)=B_n,\quad p_{V_nV_{n+1}}(C_{n+1})=C_n.$$

Тогда получим ограниченное подмножество C в $\mathscr{D}_1'(U,E)$ такое, что

$$\frac{d}{dx}\varepsilon\,\mathrm{Id}_E(C)=B.$$

Пусть E и F — b-пространства. Поскольку

$$(\mathscr{D}_1'(U,E),p_V)=\varprojlim_{V\in\mathscr{C}_U}(\mathscr{D}'(V)\varepsilon E,p_{V,W})$$

(соответственно $(\mathscr{D}_1'(U,F),q_V)=\varprojlim\limits_{V\in\mathscr{C}_U}(\mathscr{D}'(V)\varepsilon F,p_{V,W})$), для каждого ограниченного линейного отображения $u:E\to F$ существует ограниченное линейное отображение $\mathscr{D}_1'(U,u):\mathscr{D}_1'(U,E)\to\mathscr{D}_1'(U,F)$, $f\mapsto u\circ f$, такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{D}_1'(U,E) & \xrightarrow{p_V} & \mathscr{D}'(V)\varepsilon E\\ \big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle \mathrm{Id}_{\mathscr{D}'(V)}\varepsilon u}\\ \mathscr{D}_1'(U,F) & \xrightarrow{q_V} & \mathscr{D}'(V)\varepsilon F\end{array}$$

коммутативна.

Теорема 2.4. *Пусть U — открытое подмножество в $\mathbb{R}$ и $u:E\to F$ — борнологически сюръективное ограниченное линейное отображение между b-пространствами. Тогда ограниченное линейное отображение*

$$\mathscr{D}_1'(U,u):\mathscr{D}_1'(U,E)\to\mathscr{D}_1'(U,F),\quad f\mapsto u\circ f,$$

борнологически сюръективно.

Доказательство. По определению имеем

$$(\mathscr{D}_1'(U,E),p_V)=\varprojlim_{V\in\mathscr{C}_U}(\mathscr{D}'(V)\varepsilon E,p_{V,W})$$

(соответственно $(\mathscr{D}_1'(U,F),q_V)=\varprojlim\limits_{V\in\mathscr{C}_U}(\mathscr{D}'(V)\varepsilon F,p_{V,W})$). Тогда существует ограниченное линейное отображение $\mathscr{D}_1'(U,u)$ такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}\mathscr{D}_1'(U,E) & & \xrightarrow{p_V} & & \mathscr{D}'(V)\varepsilon F\\ & {\scriptstyle\mathscr{D}_1'(U,u)}\nwarrow & & \nearrow{\scriptstyle q_V} & \\ & & \mathscr{D}_1'(U,F) & & \end{array}$$

коммутативна.

Пусть $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность ограниченных открытых множеств, покрывающая U. Согласно [7] $\mathscr{D}'(V_n)$ — ядерное b-пространство, и тогда мы можем представить его как борнологический индуктивный предел банаховых пространств, изоморфных банахову пространству c_0. Так как c_0 является $\mathscr{L}_\infty$-пространством [9], ограниченное линейное отображение $\mathrm{Id}_{c_0}\varepsilon u: c_0\varepsilon E\to c_0\varepsilon F$ борнологически сюръективно [12]. Его образ при точном функторе индуктивного предела [7] будет ограниченным линейным отображением

$$\mathrm{Id}_{\mathscr{D}'(V_n)}\varepsilon u:\mathscr{D}'(V_n)\varepsilon E\to\mathscr{D}'(V_n)\varepsilon F,$$

которое борнологически сюръективно. Приходим к следующей коммутативной диаграмме:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_{\mathscr{D}'(V_2)}\varepsilon u) & \longrightarrow & \mathscr{D}'(V_2)\varepsilon E & \xrightarrow{\operatorname{Id}_{D'(V_2)}\varepsilon u} & \mathscr{D}'(V_2)\varepsilon F \\ & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle p_{V_1V_2}\varepsilon\operatorname{Id}_E} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p_{V_1V_2}\varepsilon\operatorname{Id}_F} \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_{\mathscr{D}'(V_1)}\varepsilon u) & \longrightarrow & \mathscr{D}'(V_1)\varepsilon E & \xrightarrow{\operatorname{Id}_{D'(V_1)}\varepsilon u} & \mathscr{D}'(V_1)\varepsilon F. \end{array}$$

Пусть теперь B — ограниченное подмножество в $\mathscr{D}'_1(U,F)$. Положим $B_n = q_{V_n}(B)$. Так как ограниченное линейное отображение

$$\operatorname{Id}_{\mathscr{D}'(V_n)}\varepsilon u : \mathscr{D}'(V_n)\varepsilon E \to \mathscr{D}'(V_n)\varepsilon F$$

борнологически сюръективно, найдется ограниченное подмножество C_n в $\mathscr{D}'(V_n)\varepsilon E$ такое, что $(\operatorname{Id}_{\mathscr{D}'(V_2)}\varepsilon u)(C_n) = B_n$. Следовательно,

$$(p_{V_1V_2}\varepsilon\operatorname{Id}_F)(B_2) = B_1, \quad (\operatorname{Id}_{\mathscr{D}'(V_2)}\varepsilon u)(C_2) = B_2$$

и

$$(\operatorname{Id}_{\mathscr{D}'(V_1)}\varepsilon u)(C_1) = B_1.$$

Пусть $\Psi \in C_2$. Тогда $(\operatorname{Id}_{\mathscr{D}'(V_2)}\varepsilon u)(\Psi) \in B_2$ и

$$(p_{V_1V_2}\varepsilon\operatorname{Id}_F)\circ(\operatorname{Id}_{\mathscr{D}'(V_2)}\varepsilon u)(\Psi) \in (\operatorname{Id}_{\mathscr{D}'(V_1)}\varepsilon u)(C_1).$$

Существует $\eta_\Psi \in C_1$ такое, что

$$(p_{V_1V_2}\varepsilon\operatorname{Id}_F)\circ(\operatorname{Id}_{\mathscr{D}'(V_2)}\varepsilon u)(\Psi) = (\operatorname{Id}_{\mathscr{D}'(V_1)}\varepsilon u)(\eta_\Psi)$$

и тем самым

$$(\operatorname{Id}_{\mathscr{D}'(V_1)}\varepsilon u)\circ(p_{V_1V_2}\varepsilon\operatorname{Id}_E)(\Psi) = (\operatorname{Id}_{\mathscr{D}'(V_1)}\varepsilon u)(\eta_\Psi),$$

т. е.

$$(\operatorname{Id}_{\mathscr{D}'(V_1)}\varepsilon u)[(p_{V_1V_2}\varepsilon\operatorname{Id}_E)(\Psi) - \eta_\Psi] = 0.$$

Этим показано, что

$$\Delta = \{(p_{V_1V_2}\varepsilon\operatorname{Id}_E)(\Psi) - \eta_\Psi : \Psi \in C_2\}$$

ограничено в $\operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_{\mathscr{D}'(V_1)}\varepsilon u)$ (потому что $\Delta \subset (p_{V_1V_2}\varepsilon\operatorname{Id}_E)(C_2) - C_1$, а множество справа является ограниченным подмножеством в $\mathscr{D}'(V_1)\varepsilon E$).

Ограниченные линейные отображения $p_{V_1V_2}\varepsilon\operatorname{Id}_E$ и $p_{V_1V_2}\varepsilon\operatorname{Id}_F$ борнологически сюръективны по лемме 3x3 в [13], а значит, ограниченное линейное отображение

$$p_{V_1V_2}\varepsilon\operatorname{Id}_E : \operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_{\mathscr{D}'(V_2)}\varepsilon u) \to \operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_{\mathscr{D}'(V_1)}\varepsilon u)$$

сюръективно. Оно борнологически сюръективно. Действительно, пусть M — ограниченное подмножество в $\operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_{\mathscr{D}'(V_1)}\varepsilon u)$. Оно будет ограниченным подмножеством в $\mathscr{D}'(V_1)\varepsilon E$, так что существует ограниченное подмножество A в $\mathscr{D}'(V_2)\varepsilon E$ такое, что $(p_{V_1V_2}\varepsilon\operatorname{Id}_E)(A) = M$. Рассмотрим $A\cap\operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_{\mathscr{D}'(V_2)}\varepsilon u)$. Это ограниченное подмножество в $\operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_{\mathscr{D}'(V_2)}\varepsilon u)$ такое, что

$$(p_{V_1V_2}\varepsilon\operatorname{Id}_E)_{|\operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_{\mathscr{D}'(V_2)}\varepsilon u)}(A\cap\operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_{\mathscr{D}'(V_2)}\varepsilon u)) = M.$$

Следовательно, найдется ограниченное подмножество ∇ в $\operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_{\mathscr{D}'(V_2)}\varepsilon u)$ такое, что $(p_{V_1V_2}\varepsilon\operatorname{Id}_E)(\nabla)=\Delta$. Тем самым существует $\mu_\Psi\in\nabla$ такое, что

$$(p_{V_1V_2}\varepsilon\operatorname{Id}_E)(\mu_\Psi)=(p_{V_1V_2}\varepsilon\operatorname{Id}_E)(\Psi)-\eta_\Psi \text{ и } (\operatorname{Id}_{\mathscr{D}'(V_2)}\varepsilon u)(\mu_\Psi)=0.$$

Пусть

$$C_2'=\{\Psi-\mu_\Psi:\Psi\in C_2\}.$$

Имеем $C_2'\subset C_2-\nabla$, тем самым C_2' — ограниченное подмножество в $\mathscr{D}'(V_2)\varepsilon E$ с $(p_{V_1V_2}\varepsilon\operatorname{Id}_E)(C_2')=C_1$ (ибо $\mu_\Psi\in C_1$) и $(\operatorname{Id}_{\mathscr{D}'(V_2)}\varepsilon u)(C_2')=B_2$.

Обозначим теперь C_2' через C_2. Построим рекуррентно последовательность ограниченных подмножеств $(C_n)_n$ таких, что

$$(p_{V_nV_{n+1}}\varepsilon\operatorname{Id}_E)(C_{n+1})=C_n,\quad (\operatorname{Id}_{\mathscr{D}'(V_n)}\varepsilon u)(C_n)=B_n.$$

Этим показано существование ограниченного подмножества C в $\mathscr{D}_1'(U,E)$ такого, что $\mathscr{D}_1'(U,u)(C)=B$.

Следствие 2.5. *Пусть U — открытое подмножество в $\mathbb{R}$, E — b-пространство и F — борнологически замкнутое подпространство в E. Тогда*

$$\mathscr{D}_1'(U,E/F)=\mathscr{D}_1'(U,E)/\mathscr{D}_1'(U,F).$$

3. Результаты

Пусть E — b-пространство. Говорят, что $f:\mathbb{R}\to E$ — *функция умеренного роста*, если существует $N\in\mathbb{N}$ такое, что $\{w_0(t)^Nf(t):t\in\mathbb{R}\}$ ограничено в E, где $w_0(t)=(1+t^2)^{-1/2}$. Обозначим через $\theta(\mathbb{R},w_0,E)$ пространство всех функций умеренного роста из $\mathbb{R}$ в E. Подмножество $B\subset\theta(\mathbb{R},w_0,E)$ ограничено, если найдется $N\in\mathbb{N}$ такое, что $\{w_0(t)^Nf(t):\ t\in\mathbb{R},\ f\in B\}$ ограничено в E.

Теорема 3.1. *Пусть $u:E\to F$ — борнологически сюръективное ограниченное линейное отображение между b-пространствами. Тогда ограниченное линейное отображение $\theta(\mathbb{R},w_0,u):\theta(\mathbb{R},w_0,E)\to\theta(\mathbb{R},w_0,F)$, $f\mapsto u\circ f$, борнологически сюръективно.*

Доказательство. Пусть B — ограниченное подмножество в $\theta(\mathbb{R},w_0,F)$. Существует $N\in\mathbb{N}$ такое, что

$$\{w_0(t)^Ng(t):\ t\in\mathbb{R},\ g\in B\}$$

ограничено в F. Поскольку u борнологически сюръективно, найдется ограниченное подмножество C в E такое, что

$$u(C)=\{w_0(t)^Ng(t):t\in\mathbb{R},\ g\in B\}.$$

По аксиоме выбора для любой $g\in B$ существует $f_g\in\theta(\mathbb{R},w_0,E)$ такая, что

$$\{w_0(t)^Nf_g(t):t\in\mathbb{R}\}\subset C \quad\text{и}\quad g=u\circ f_g.$$

Следовательно, множество $A=\{f_g:g\in B\}$ ограничено в $\theta(\mathbb{R},w_0,E)$ и

$$\theta(\mathbb{R},w_0,u)(A)=\{u\circ f_g:g\in B\}=B.$$

Тем самым ограниченное линейное отображение

$$\theta(\mathbb{R},w_0,u):\theta(\mathbb{R},w_0,E)\to\theta(\mathbb{R},w_0,F)$$

борнологически сюръективно.

Следствие 3.2. *Пусть E — b-пространство и F — борнологически замкнутое подпространство в E. Тогда $\theta(\mathbb{R}, w_0, E/F) = \theta(\mathbb{R}, w_0, E)/\theta(\mathbb{R}, w_0, F)$.*

Определим пространство непрерывных функций со значениями в b-пространстве. Если X — компактное пространство и E — b-пространство, обозначим через $C(X, E)$ пространство $\bigcup_B C(X, E_B)$, где B пробегает множество всех наполняющих ограниченных подмножеств в E и $C(X, E_B)$ — пространство непрерывных функций на X со значениями в банаховом пространстве E_B. Борнология на b-пространстве $C(X, E)$ определяется следующим семейством: подмножество A в $C(X, E)$ ограничено, если существует наполняющее ограниченное подмножество B в E такое, что $A \subset C(X, E_B)$ ограничено.

В [1] установлено, что X является компактным пространством и $u : E \to F$ — борнологически сюръективное ограниченное линейное отображение между b-пространствами. Ограниченное линейное отображение $C(X, u) : C(X, E) \to C(X, F)$, $f \mapsto u \circ f$, борнологически сюръективно.

Пусть E — b-пространство и $r \in \mathbb{N}$. Функцию $f : \mathbb{R} \to E$ называют *r-дифференцируемой*, если для любого $x \in \mathbb{R}$ найдутся окрестность U_x точки x и наполняющее ограниченное подмножество B_x в E такие, что ограничение $f|_{U_x}$ является r-дифференцируемым отображением из U_x в банахово пространство E_{B_x}. Обозначим через $C^r(\mathbb{R}, E)$ пространство всех r-дифференцируемых действующих из $\mathbb{R}$ в E функций.

Подмножество B в $C^r(\mathbb{R}, E)$ ограничено, если для каждого $x \in \mathbb{R}$ найдутся окрестность U_x точки x и наполняющее ограниченное подмножество B_x в E такие, что для всех $k \le r$, $k \in \mathbb{N}$, множество $D^k B|_{U_x} = \{D^k f|_{U_x} : f \in B\}$ ограничено в $C^r(U_x, E_{B_x})$.

Пусть $f \in C^r(\mathbb{R}, E)$. Отображение f и все его производные являются функциями умеренного роста, если для любого $k \in \mathbb{N}$ такого, что $0 \le k \le r$, имеет место соотношение $\frac{d^k f}{dt^k} \in \theta(\mathbb{R}, w_0, E)$. Пусть $\theta_0(\mathbb{R}, w_0, E)$ — множество всех элементов из $\theta(\mathbb{R}, w_0, E)$, снабженное индуцированной борнологией.

Обозначим через $\theta_r(\mathbb{R}, w_0, E)$ пространство, состоящее из всех $f \in C^r(\mathbb{R}, E)$ таких, что они сами и их производные до порядка r суть функции умеренного роста. Подмножество B в $\theta_r(\mathbb{R}, w_0, E)$ ограничено, если существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\{w_0(t)^N f^{(k)}(t) : f \in B,\ t \in \mathbb{R},\ 0 \le k \le r\}$$

ограничено в E. Снабженное этой борнологией, $\theta_r(\mathbb{R}, w_0, E)$ будет b-пространством, являющимся также b-подпространством в $\theta(\mathbb{R}, w_0, E)$.

Теорема 3.3. *Пусть $u : E \to F$ — борнологически сюръективное ограниченное линейное отображение между b-пространствами. Тогда для каждого $r \in \mathbb{N}$ ограниченное линейное отображение*

$$\theta_r(\mathbb{R}, w_0, u) : \theta_r(\mathbb{R}, w_0, E) \to \theta_r(\mathbb{R}, w_0, F), \quad f \mapsto u \circ f,$$

борнологически сюръективно.

Доказательство. 1. Если $r = 0$, то согласно [1] ограниченное линейное отображение $C(\mathbb{R}_\infty, u) : C(\mathbb{R}_\infty, E) \to C(\mathbb{R}_\infty, F)$, $f \mapsto u \circ f$, борнологически сюръективно, где $\mathbb{R}_\infty$ — александровская компактификация $\mathbb{R}$. Пусть B — ограниченное подмножество в $\theta_0(\mathbb{R}, w_0, F)$. Существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\{w_0(t)^N f(t) : f \in B,\ t \in \mathbb{R}\}$$

ограничено в F. Следовательно, $B' = \{{w_0}^{N+1} f : f \in B\}$ ограничено в $C(\mathbb{R}_\infty, F)$. Так как ограниченное линейное отображение $C(\mathbb{R}_\infty, u)$ борнологически сюръективно, найдется ограниченное подмножество A b-пространства $C(\mathbb{R}_\infty, E)$ такое, что

$$C(\mathbb{R}_\infty, u)(A) = \{u \circ g : g \in A\} = B'.$$

Положим $C = \{g/{w_0}^{N+1},\ g \in A\}$. Это ограниченное подмножество в $\theta_0(\mathbb{R}, w_0, E)$ и

$$\theta_0(\mathbb{R}, w_0, u)(C) = \{u \circ (g/{w_0}^{N+1}) : g \in A\} = \left\{ \frac{1}{{w_0}^{N+1}}(u \circ g) : g \in A \right\}$$
$$= \left\{ \frac{1}{{w_0}^{N+1}}({w_0}^{N+1} f) : f \in B \right\} = B.$$

Отсюда вытекает, что отображение $\theta_0(\mathbb{R}, w_0, u)$ борнологически сюръективно.

2. Предположим, что результат теоремы справедлив для r. Существует инъективное ограниченное линейное отображение $C(\mathbb{R}, E_B) \to L^1(\mathbb{R}, E_B)$, где B пробегает совокупность всех наполняющих ограниченных подмножеств в E. Его образ при точном функторе $\varinjlim\limits_{B}$ будет инъективным ограниченным линейным отображением $C(\mathbb{R}, E) \to L^1(\mathbb{R}, E)$, где

$$L^1(\mathbb{R}, E) = \varprojlim_{V \in \mathscr{C}_\mathbb{R}} L^1(V) \widehat{\otimes}_\pi E$$

и $L^1(V)\widehat{\otimes}_\pi E$ — наполнение нормированного векторного пространства $(L^1(V) \otimes E, \|\ \|_\pi)$ и где проективная норма $\|\ \|_\pi$ определяется равенством

$$\|z\|_\pi = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\|_{L^1(V)} \|y_i\|_F : z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\}.$$

Непрерывная инъекция $L^1(\mathbb{R}) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ индуцирует инъективное ограниченное линейное отображение

$$L^1(\mathbb{R}, E) = \varprojlim_{V \in \mathscr{C}_\mathbb{R}} L^1(V)\widehat{\otimes}_\pi E \to \varprojlim_{V \in \mathscr{C}_\mathbb{R}} \mathscr{D}'(V)\widehat{\otimes}_\pi E = \varprojlim_{V \in \mathscr{C}_\mathbb{R}} \mathscr{D}'(V) \varepsilon E = \mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, E).$$

Эта композиция определяет инъективное ограниченное линейное отображение $C(\mathbb{R}, E) \to \mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, E)$.

Рассмотрим инъективное ограниченное линейное отображение

$$v : \theta_r(\mathbb{R}, w_0, E) \to \mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, E),$$

являющееся композицией инъективного ограниченного линейного отображения $\theta_r(\mathbb{R}, w_0, E) \to C(\mathbb{R}, E)$ и ограниченного линейного отображения $C(\mathbb{R}, E) \to \mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, E)$. По теореме 2.4 ограниченное линейное отображение

$$\frac{d}{dx} \varepsilon \operatorname{Id}_E : \mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, E) \to \mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, E)$$

борнологически сюръективно.

Рассмотрим отображение

$$h_E : \theta_r((\mathbb{R}, w_0, E) \oplus \theta_r((\mathbb{R}, w_0, E) \oplus \mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, E) \to \mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, E) \oplus \mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, E),$$
$$(f, g, T) \mapsto \left(\left(\frac{d}{dx} \varepsilon \operatorname{Id}_E\right)(f - T), \left(\frac{d}{dx} \varepsilon \operatorname{Id}_E\right)(T) - g \right),$$

где производные понимаются в обобщенном смысле. Согласно [14] это ограниченное линейное отображение борнологически сюръективно. Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
\theta_r((\mathbb{R}, w_0, E) \oplus \theta_r(\mathbb{R}, w_0, E) \oplus \mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, E) & \xrightarrow{h_E} & \mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, E) \oplus \mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, E) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\theta_r((\mathbb{R}, w_0, F) \oplus \theta_r(\mathbb{R}, w_0, F) \oplus \mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, F) & \xrightarrow{h_F} & \mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, F) \oplus \mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, F).
\end{array}$$

Так как $\mathrm{Ker}(h_G) = \theta_1(\mathbb{R}, w_0, G)$ для $G = E, F$, приходим к следующей коммутативной диаграмме:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Ker}(h_E) & \to & \theta_r((\mathbb{R}, w_0, E) \oplus \theta_r(\mathbb{R}, w_0, E) \oplus \mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, E) & \to & \mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, E) \oplus \mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, E) \\
\downarrow v & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Ker}(h_F) & \to & \theta_r((\mathbb{R}, w_0, F) \oplus \theta_r(\mathbb{R}, w_0, F) \oplus \mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, F) & \to & \mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, F) \oplus \mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, F),
\end{array}$$

где ограниченное линейное отображение $w : \mathrm{Ker}(h_E) \to \mathrm{Ker}(h_F)$, $f \mapsto u \circ f$, является ограничением ограниченного линейного отображения $\theta_r((\mathbb{R}, w_0, u) \oplus \theta_r(\mathbb{R}, w_0, u) \oplus \mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, u)$.

Поскольку отображения $\theta_r((\mathbb{R}, w_0, u) \oplus \theta_r(\mathbb{R}, w_0, u) \oplus \mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, u)$ и $\mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, u) \oplus \mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, u)$ борнологически сюръективны, из леммы 3х3 в [13] вытекает, что отображение $v : \mathrm{Ker}(h_E) \to \mathrm{Ker}(h_F)$, $f \mapsto u \circ f$, сюръективно.

Покажем, что оно борнологически сюръективно. Действительно, пусть B — ограниченное подмножество в $\mathrm{Ker}(h_F)$. Очевидно, что B будет ограниченным подмножеством в $\theta_r((\mathbb{R}, w_0, F) \oplus \theta_r(\mathbb{R}, w_0, F) \oplus \mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, F)$. Так как отображение $\theta_r((\mathbb{R}, w_0, u) \oplus \theta_r(\mathbb{R}, w_0, u) \oplus \mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, u)$ борнологически сюръективно, найдется ограниченное подмножество A в $\theta_r((\mathbb{R}, w_0, E) \oplus \theta_r(\mathbb{R}, w_0, E) \oplus \mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, E)$ такое, что

$$(\theta_r((\mathbb{R}, w_0, u) \oplus \theta_r(\mathbb{R}, w_0, u) \oplus \mathscr{D}'_1(\mathbb{R}, u))(A) = B.$$

Возьмем $B \cap \mathrm{Ker}(h_E)$. Это ограниченное подмножество в $\mathrm{Ker}(h_E)$ такое, что

$$v(B \cap \theta_1(\mathbb{R}, w_0, E)) = B.$$

Поскольку $\theta_{r+1}(\mathbb{R}, w_0, E)$ (соответственно $\theta_{r+1}(\mathbb{R}, w_0, F)$) является первой проекцией $\mathrm{Ker}(h_E)$ (соответственно $\mathrm{Ker}(h_F)$), ограничение борнологически сюръективного отображения $v : \mathrm{Ker}(h_E) \to \mathrm{Ker}(h_F)$, $f \mapsto u \circ f$, будет ограниченным линейным отображением

$$\theta_{r+1}(\mathbb{R}, w_0, u) : \theta_{r+1}(\mathbb{R}, w_0, E) \to \theta_{r+1}(\mathbb{R}, w_0, F), \quad f \mapsto u \circ f,$$

которое борнологически сюръективно.

Следствие 3.4. *Пусть E — b-пространство и F — борнологически замкнутое подпространство в E. Тогда для любого $r \in \mathbb{N}$ имеет место равенство*

$$\theta_r(\mathbb{R}, w_0, E/F) = \theta_r(\mathbb{R}, w_0, E)/\theta_r(\mathbb{R}, w_0, F).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aqzzouz B.* Généralisations du théorème de Bartle — Graves // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser I Math. 2001. V. 333, N 10. P. 925–930.
2. *Waelbroeck L.* Topological vector spaces and algebras. Berlin: Springer-Verl., 1971. (Lecture Notes in Math.; 230).

3. *Waelbroeck L.* Etude spectrale des algèbres complètes // Mém. Cl. Sci. Acad. Roy. Belgique. 1960. T. 31, fax. 7.
4. *Waelbroeck L.* About a spectral theorem // Function Algebras: Proc. Int. Symp. Tulane Univ. 1965. Tulane, 1966. P. 310–321.
5. *Waelbroeck L.* The holomorphic functional calculus and non-Banach algebras // Algebras in Analysis. New York: Acad. Press, 1975. P. 187–251.
6. *Bartle R. G., Graves L. M.* Mappings between functions spaces // Trans. Amer. Math. 1952. V. 72. P. 400–413.
7. *Hogbe Nlend H.* Théorie des bornologies et applications. Berlin: Springer-Verl., 1971. (Lecture Notes in Math.; 213).
8. *Waelbroeck L.* Duality and the injective tensor product // Math. Ann. 1966. V. 163. P. 122–126.
9. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. Berlin: Springer-Verl., 1973. (Lecture Notes in Math.; 338).
10. *Schwartz L.* Théorie des distributions. Paris: Herman, 1973.
11. *Houzel C.* Séminaire Banach. Berlin: Springer-Verl., 1972. (Lecture Notes in Math.; 227).
12. *Aqzzouz B.* The ε_c-product of a Schwartz b-space by a quotient Banach space and applications // Appl. Categ. Structures. 2002. V. 10, N 6. P. 603–616.
13. *Popescu N., Popescu L.* Theory of category. Bucuresti: Ed. Acad. Roumania, 1979.
14. *Schwartz L.* Théorie des distributions à valeurs vectorielles // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). I. 1957. T. 8. P. 1–141; II. 1959. T. 8. P. 1–207.

Статья поступила 28 мая 2003 г.

Belmesnaoui Aqzzouz and Redouane Nouira
Université Ibn Tofail, Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques et Informatique,
Equipe d'Analyse Fonctionnelle, B. P. 133, Kénitra, Maroc
baqzzouz@hotmail.com