Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2004. Том 45, № 5

УДК 514.13+514.132

ОБЪЕМ СИММЕТРИЧНОГО ТЕТРАЭДРА В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ И СФЕРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВАХ

Д. А. Деревнин, А. Д. Медных, М. Г. Пашкевич

Аннотация: Получены элементарные формулы для вычисления объема симметричного тетраэдра в гиперболическом и сферическом пространствах.

Ключевые слова: гиперболический тетраэдр, сферический тетраэдр, формула объема, матрица Грама.

1. Введение

Вычисление объема многогранника — очень старая задача. Несколько лет тому назад И. Х. Сабитов [1] доказал, что объем евклидова многогранника — это корень алгебраического уравнения, коэффициенты которого являются многочленами, зависящими от длин ребер и комбинаторного типа многогранника. В гиперболическом и сферическом случаях ситуация более сложная. Формула объема для бипрямоугольного тетраэдра (ортосхемы) известна со времен Н. И. Лобачевского [2] и Шлефли [3]. Объем куба Ламберта и некоторых других многогранников были получены Келлерхальц [4], Д. А. Деревниным и А. Д. Медных [5], А. Ю. Весниным, А. Д. Медных и Паркером [6] и др. Мартин [7] исследовал объем правильного тетраэдра в гиперболическом пространстве. Объемы идеальных гиперболических многогранников во многих основных частных случаях были найдены Винбергом [8].

Формула объема для произвольных гиперболического и сферического тетраэдров долгое время была не известна. Общий алгоритм для нахождения указанной формулы принадлежит Хсянгу [9]. В работах Чо и Кима [10], Мураками и Яно [11] получена довольно сложная формула для объема тетраэдра. Простое доказательство этой формулы, которое включает также объемы усеченных тетраэдров, найдено Ушиджимой [12].

Цель этой статьи состоит в нахождении элементарных формул для вычисления объема симметричного тетраэдра в гиперболическом и сферическом пространствах.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00104), ИНТАС (грант 03–51–3663) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ–300.2003.1).

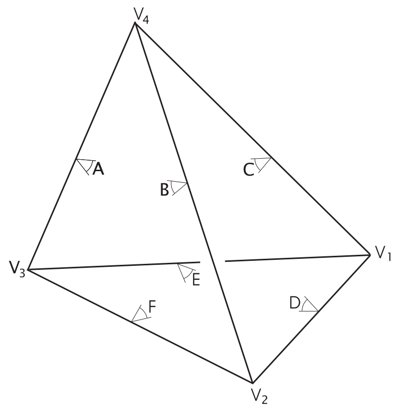

Рис. 1

2. Предварительные результаты

Обозначим через $\mathbb{X}^n$ сферическое пространство $\mathbb{S}^n$ или гиперболическое пространство $\mathbb{H}^n$. Пусть $T = T(A,B,C,D,E,F) \in \mathbb{X}^3$ — тетраэдр с вершинами v_1, v_2, v_3, v_4 и двугранными углами A, B, C, D, E, F при ребрах с длинами $l_A, l_B, l_C, l_D, l_E, l_F$ соответственно (рис. 1). Необходимые и достаточные условия существования тетраэдра в сферическом и гиперболическом пространствах в терминах матрицы Грама приведены в работах [8] и [13]. При этом тетраэдр однозначно с точностью до изометрии определяется набором его двугранных углов.

Тетраэдр T будем называть *симметричным*, если $A = D$, $B = E$, $C = F$.

Вычисление объемов тетраэдров основывается на следующей формуле Шлефли (см., например, [3, 4, 14]).

Теорема 1 (дифференциальная формула объема Шлефли). *Пусть компактный симплекс $\mathscr{S} \in \mathbb{X}^n$ $(n \geq 2)$ имеет вершины $P_0, \dots, P_n$ и двугранные углы $\alpha_{jk} = \angle(\mathscr{S}_j, \mathscr{S}_k)$, $0 \leq j < k \leq n$, образованные $(n-1)$-мерными гранями $\mathscr{S}_j, \mathscr{S}_k$ симплекса $\mathscr{S}$ при грани $\mathscr{S}_{jk} = \mathscr{S}_j \cap \mathscr{S}_k$.*

Тогда дифференциал объема $V = \mathrm{Vol}_n$ на множестве всех симплексов в $\mathbb{X}^n$ имеет вид

$$KdV(\mathscr{S}) = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{n+1} \mathrm{Vol}_{n-2}(\mathscr{S}_{jk}) d\alpha_{jk} \quad (\mathrm{Vol}_0(\mathscr{S}_{jk}) := 1),$$

где K — кривизна пространства $\mathbb{X}^n$.

В настоящей статье положим $K = -1$ для гиперболического пространства и $K = 1$ для сферического пространства. Формула Шлефли для гиперболического и сферического трехмерных пространств приводится к следующему виду:

$$KdV = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{4} l_{jk} d\alpha_{jk},$$

где l_{jk} — длина соответствующего ребра симплекса $\mathscr{S}$.

3. Объем гиперболического тетраэдра

Пусть T — гиперболический тетраэдр. Обозначим через

$$G = \langle -\cos\alpha_{ij}\rangle_{i,j=1,2,3,4} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos A & -\cos B & -\cos F \\ -\cos A & 1 & -\cos C & -\cos E \\ -\cos B & -\cos C & 1 & -\cos D \\ -\cos F & -\cos E & -\cos D & 1 \end{pmatrix}$$

матрицу Грама тетраэдра T, а через $C = \langle c_{ij}\rangle_{i,j=1,2,3,4}$ — присоединенную матрицу, состоящую из элементов $c_{ij} = (-1)^{i+j}G_{ij}$, где G_{ij} — ij-й минор матрицы G.

Доказательство следующего вспомогательного утверждения содержится в [12].

Предложение 1. *Пусть T — гиперболический тетраэдр. Тогда*

$$\text{(i)}\ \det G < 0, \qquad \text{(ii)}\ c_{ii} > 0,\ i = 1,2,3,4, \qquad \text{(iii)}\ \frac{\sin A}{\operatorname{sh} l_A} = \frac{\sqrt{c_{33}c_{44}}}{\sqrt{-\det G}}.$$

Из предложения 1 непосредственно следует

Предложение 2. *Пусть T — гиперболический тетраэдр. Тогда*

$$\frac{\sin A \sin D}{\operatorname{sh} l_A \operatorname{sh} l_D} = \frac{\sin B \sin E}{\operatorname{sh} l_B \operatorname{sh} l_E} = \frac{\sin C \sin F}{\operatorname{sh} l_C \operatorname{sh} l_F} = \frac{\sqrt{P}}{-\det G}, \tag{3.1}$$

где $P = c_{11}c_{22}c_{33}c_{44}$.

Пусть теперь T — симметричный гиперболический тетраэдр. Положим $a = \cos A$, $b = \cos B$, $c = \cos C$. В этом случае несложно заметить, что $c_{11} = c_{22} = c_{33} = c_{44} = \gamma$, где $\gamma = 1 - a^2 - b^2 - c^2 - 2abc > 0$ и

$$\Delta = -\det G = (1 - a + b + c)(1 + a - b + c)(1 + a + b - c)(-1 + a + b + c).$$

Подстановкой найденных выражений в предложение 2 получается

Теорема 2 (теорема синусов). *Пусть T — симметричный гиперболический тетраэдр. Тогда*

$$\frac{\sin A}{\operatorname{sh} l_A} = \frac{\sin B}{\operatorname{sh} l_B} = \frac{\sin C}{\operatorname{sh} l_C} = u,$$

где $u = \frac{\gamma}{\sqrt{\Delta}}$, $\gamma = 1 - a^2 - b^2 - c^2 - 2abc$, $\Delta = (1 - a + b + c)(1 + a - b + c)(1 + a + b - c)(-1 + a + b + c)$ и $A = \cos\alpha$, $B = \cos\beta$, $C = \cos\gamma$.

Отметим, что из определения u следует полезное тождество

$$u^2 + 1 = \frac{4(a + bc)(b + ac)(c + ab)}{(1 - a + b + c)(1 + a - b + c)(1 + a + b - c)(-1 + a + b + c)}. \tag{3.2}$$

Для вывода формулы объема симметричного гиперболического тетраэдра потребуется следующая

Лемма 1. *Пусть t определяется из равенства*

$$t^2 = \frac{4(a + bc)(b + ac)(c + ab)}{(1 - a + b + c)(1 + a - b + c)(1 + a + b - c)(-1 + a + b + c)}, \tag{3.3}$$

где $a = \cos A$, $b = \cos B$, $c = \cos C$ *и* A, B, C *— двугранные углы симметричного гиперболического тетраэдра* T. *Тогда*

$$\arcsin\frac{a}{t} + \arcsin\frac{b}{t} + \arcsin\frac{c}{t} = \arcsin\frac{1}{t}. \tag{3.4}$$

Доказательство. Заметим, что $t^2 = u^2 + 1 > 1$. Покажем, что t, определяемое (3.3), является корнем уравнения (3.4). Пользуясь тригонометрическим тождеством

$$\arcsin(x) \pm \arcsin(y) = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}),$$

приведем уравнение (3.4) к следующему виду:

$$\arcsin\left(\frac{a}{t}\sqrt{1-\frac{b^2}{t^2}} + \frac{b}{t}\sqrt{1-\frac{a^2}{t^2}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{t}\sqrt{1-\frac{c^2}{t^2}} - \frac{c}{t}\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}\right).$$

Для главных значений арксинуса последнее эквивалентно равенству

$$a\sqrt{t^2-b^2} + b\sqrt{t^2-a^2} = \sqrt{t^2-c^2} - c\sqrt{t^2-1}.$$

Учитывая (3.2), при непосредственном вычислении имеем

$$t^2 - a^2 = \frac{(a(1-a^2+b^2+c^2)+2bc)^2}{\Delta}, \quad t^2 - b^2 = \frac{(b(1-b^2+a^2+c^2)+2ac)^2}{\Delta},$$

$$t^2 - c^2 = \frac{(c(1-c^2+a^2+b^2)+2ab)^2}{\Delta}, \quad t^2 - 1 = \frac{(1-a^2-b^2-c^2-2abc)^2}{\Delta}.$$

По предложению 1(ii) имеем $1 - a^2 - b^2 - c^2 - 2abc = c_{11} > 0$. Подставив в равенство

$$a\sqrt{t^2-b^2} + b\sqrt{t^2-a^2} = \sqrt{t^2-c^2} - c\sqrt{t^2-1}$$

полученные для t^2-a^2, t^2-b^2, t^2-c^2, t^2-1 выражения, придем к тождеству. $\square$

Следующая теорема дает интегральное представление для объема гиперболического симметричного тетраэдра T.

Теорема 3. *Объем гиперболического симметричного тетраэдра* T *вычисляется по формуле*

$$\operatorname{Vol} T = \int_u^{+\infty} \left(\arcsin\frac{a}{\sqrt{\nu^2+1}} + \arcsin\frac{b}{\sqrt{\nu^2+1}} + \arcsin\frac{c}{\sqrt{\nu^2+1}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{\nu^2+1}}\right)\frac{d\nu}{\nu},$$

где

$$u = \frac{1-a^2-b^2-c^2-2abc}{\sqrt{(1-a+b+c)(1+a-b+c)(1+a+b-c)(-1+a+b+c)}},$$

$$a = \cos A, \quad b = \cos B, \quad c = \cos C.$$

Доказательство. Так как T — симметричный тетраэдр, то $A = D$, $B = E$, $C = F$ и $l_A = l_D$, $l_B = l_E$, $l_C = l_F$. По теореме 1 для $V = \operatorname{Vol} T$ имеем $dV = -l_A dA - l_B dB - l_C dC$. Следовательно, объем V удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial V}{\partial A} = -l_A, \quad \frac{\partial V}{\partial B} = -l_B, \quad \frac{\partial V}{\partial C} = -l_C.$$

Отметим, что $V \to 0$ при $A, B, C \to \arccos\frac{1}{3}$, т. е. в случае, когда T становится правильным евклидовым тетраэдром.

Положим

$$\widetilde{V} = \int\limits_u^{+\infty} F(\nu, A, B, C)\frac{d\nu}{\nu},$$

где

$$F(\nu, A, B, C) = \arcsin\frac{a}{\sqrt{\nu^2+1}} + \arcsin\frac{b}{\sqrt{\nu^2+1}} + \arcsin\frac{c}{\sqrt{\nu^2+1}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{\nu^2+1}}.$$

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что $\widetilde{V}$ обладает свойствами:

(i) имеют место равенства

$$\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial A} = -l_A, \quad \frac{\partial\widetilde{V}}{\partial B} = -l_B, \quad \frac{\partial\widetilde{V}}{\partial C} = -l_C,$$

(ii) $\widetilde{V} \to 0$ при $A, B, C \to \arccos\frac{1}{3}$.

Проверим свойство (i).

Используя формулу Лейбница дифференцирования по параметру, получим

$$\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial A} = -F(u, A, B, C)\frac{\partial u}{\partial A} + \int\limits_u^{+\infty} \frac{\partial F(\nu, A, B, C)}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial A}\frac{d\nu}{\nu}.$$

Из тождества 3.2 по лемме 1 при $t^2 = u^2 + 1$ имеем

$$F(u, A, B, C) = \arcsin\frac{a}{\sqrt{u^2+1}} + \arcsin\frac{b}{\sqrt{u^2+1}} + \arcsin\frac{c}{\sqrt{u^2+1}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{u^2+1}} = 0.$$

Следовательно, $F(u, A, B, C)\frac{\partial u}{\partial A} = 0$.

Далее,

$$\frac{\partial F(\nu, A, B, C)}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{\nu^2+1-a^2}}$$

и

$$\frac{\partial a}{\partial A} = \frac{d(\cos A)}{dA} = -\sin A = -\sqrt{1-a^2},$$

откуда

$$\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial A} = -\int\limits_u^{+\infty} \frac{\sqrt{1-a^2}\,d\nu}{\nu\sqrt{\nu^2+1-a^2}} = \operatorname{arsh}\frac{\sqrt{1-a^2}}{\nu}\bigg|_u^{\infty} = -\operatorname{arsh}\frac{\sqrt{1-a^2}}{u} = -l_A,$$

так как из условия теоремы 2 имеем $l_A = \operatorname{arsh}\frac{\sin A}{u} = \operatorname{arsh}\frac{\sqrt{1-a^2}}{u}$.

Аналогично проверяются равенства $\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial B} = -l_B$, $\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial C} = -l_C$.

Проверим свойство (ii). Если $A, B, C \to \arccos\frac{1}{3}$, то $u \to +\infty$. В силу сходимости интеграла имеем $\widetilde{V} \to 0$. $\square$

Подставляя $\nu = \operatorname{tg} t$ в условие теоремы 3, получим следующее утверждение.

Теорема 4. *Объем гиперболического симметричного тетраэдра T вычисляется по формуле*

$$2\int_{\theta}^{\pi/2}(\arcsin(\cos A\cos t)+\arcsin(\cos B\cos t)+\arcsin(\cos C\cos t)-\arcsin(\cos t))\frac{dt}{\sin 2t},$$

где $0<\theta<\pi/2$,

$$\operatorname{tg}^2\theta=\frac{1-a^2-b^2-c^2-2abc}{\sqrt{(1-a+b+c)(1+a-b+c)(1+a+b-c)(-1+a+b+c)}},$$

$a=\cos A, b=\cos B$ *и* $c=\cos C$.

4. Объем сферического тетраэдра

Рассмотрим тетраэдр T (см. рис. 1) в сферическом пространстве $\mathbb{S}^3$. Пусть

$$G=\langle-\cos\alpha_{ij}\rangle_{i,j=1,2,3,4}=\begin{pmatrix}1 & -\cos A & -\cos B & -\cos F\\ -\cos A & 1 & -\cos C & -\cos E\\ -\cos B & -\cos C & 1 & -\cos D\\ -\cos F & -\cos E & -\cos D & 1\end{pmatrix}$$

— матрица Грама тетраэдра T, а $C=\langle c_{ij}\rangle_{i,j=1,2,3,4}$ — присоединенная матрица, состоящая из элементов $c_{ij}=(-1)^{i+j}G_{ij}$, где G_{ij} — ij-й минор матрицы G.

Следующее предложение существенно опирается на теоремы существования сферического тетраэдра, полученные в [8] и [13].

Предложение 3. *Пусть T — сферический тетраэдр. Тогда*

$$\text{(i)}\ \det G>0,\qquad \text{(ii)}\ c_{ii}>0,\ i=1,2,3,4,\qquad \text{(iii)}\ \frac{\sin A}{\sin l_A}=\frac{\sqrt{c_{33}c_{44}}}{\sqrt{\det G}}.$$

Доказательство. Условия (i) и (ii) следуют из существования сферического тетраэдра с матрицей Грама G (см. [8, 13]). Для доказательства равенства (iii) воспользуемся следующей теоремой Якоби (см. [15, с. 24, теорема 2.5.1]).

Теорема 5. *Пусть $A=\langle a_{ij}\rangle_{i,j=1,\dots,n}$ — матрица порядка $n\times n$ с определителем $\Delta=\det A$. Обозначим через $C=\langle c_{ij}\rangle_{i,j=1,\dots,n}$ матрицу, состоящую из элементов $c_{ij}=(-1)^{i+j}\det A_{ij}$, где A_{ij} — ij-й минор матрицы A. Тогда для всякого k, $1\le k\le n-1$, справедливо равенство*

$$\det\langle c_{ij}\rangle_{i,j=1,\dots,k}=\Delta^{k-1}\det\langle a_{ij}\rangle_{i,j=k+1,\dots,n}.$$

Применяя эту теорему к матрицам G и C для $k=2$, получим равенство

$$c_{33}c_{44}-c_{34}^2=(1-\cos^2 A)\det G.$$

По формулам сферической геометрии (см., например, [8])

$$\cos l_A=\frac{c_{34}}{\sqrt{c_{33}c_{44}}}.$$

Отсюда элементарными преобразованиями имеем

$$\frac{\sin A}{\sin l_A}=\frac{\sqrt{c_{33}c_{44}}}{\sqrt{\det G}}.\qquad\square$$

Из предложения 3, как и в гиперболическом случае, непосредственно следует

Теорема 6. *Пусть T — сферический тетраэдр. Тогда*

$$\frac{\sin A \sin D}{\sin l_A \sin l_D} = \frac{\sin B \sin E}{\sin l_B \sin l_E} = \frac{\sin C \sin F}{\sin l_C \sin l_F} = \frac{\sqrt{P}}{\det G}, \tag{4.1}$$

где $P = c_{11}c_{22}c_{33}c_{44}$.

Пусть теперь T — симметричный сферический тетраэдр.

Положим $a = \cos A$, $b = \cos B$, $c = \cos C$. В этом случае несложно заметить, что $c_{11} = c_{22} = c_{33} = c_{44} = \gamma$, где $\gamma = 1 - a^2 - b^2 - c^2 - 2abc > 0$, и $\Delta = \det G = (1 - a + b + c)(1 + a - b + c)(1 + a + b - c)(1 - a - b - c)$. Подставляя найденные выражения в теорему 6, получим теорему 7.

Теорема 7 (теорема синусов). *Пусть T — симметричный сферический тетраэдр. Тогда*

$$\frac{\sin A}{\sin l_A} = \frac{\sin B}{\sin l_B} = \frac{\sin C}{\sin l_C} = v,$$

где

$$v = \frac{\gamma}{\sqrt{\Delta}}, \quad \gamma = 1 - a^2 - b^2 - c^2 - 2abc,$$

$$\Delta = (1 - a + b + c)(1 + a - b + c)(1 + a + b - c)(1 - a - b - c)$$

и $a = \cos A$, $b = \cos B$, $c = \cos C$.

Отметим, что из определения v следует полезное тождество

$$v^2 - 1 = \frac{4(a + bc)(b + ac)(c + ba)}{(1 - a + b + c)(1 + a - b + c)(1 + a + b - c)(1 - a - b - c)}. \tag{4.2}$$

Аналогично лемме 1 получаем лемму 2.

Лемма 2. *Пусть p определяется из равенства*

$$p^2 = \frac{4(a + bc)(b + ac)(c + ba)}{(1 - a + b + c)(1 + a - b + c)(1 + a + b - c)(1 - a - b - c)},$$

где $a = \cos A$, $b = \cos B$, $c = \cos C$ и A, B, C — двугранные углы симметричного сферического тетраэдра T. Тогда

$$\operatorname{arsh} \frac{a}{p} + \operatorname{arsh} \frac{b}{p} + \operatorname{arsh} \frac{c}{p} = \operatorname{arsh} \frac{1}{p}.$$

Следующая теорема дает интегральное представление для объема сферического симметричного тетраэдра T.

Теорема 8. *Объем сферического симметричного тетраэдра T вычисляется по формуле*

$$\operatorname{Vol} T = -\int\limits_v^{+\infty} \left(\operatorname{arsh} \frac{a}{\sqrt{\nu^2 - 1}} + \operatorname{arsh} \frac{b}{\sqrt{\nu^2 - 1}} + \operatorname{arsh} \frac{c}{\sqrt{\nu^2 - 1}} - \operatorname{arsh} \frac{1}{\sqrt{\nu^2 - 1}} \right) \frac{d\nu}{\nu},$$

где

$$v = \frac{1 - a^2 - b^2 - c^2 - 2abc}{\sqrt{(1 - a + b + c)(1 + a - b + c)(1 + a + b - c)(-1 + a + b + c)}}$$

и $a = \cos A$, $b = \cos B$, $c = \cos C$.

Доказательство. По теореме 1 для $V = \operatorname{Vol} T$ имеем $dV = l_A dA + l_B dB + l_C dC$. Следовательно, объем V удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\frac{\partial V}{\partial A} = l_A, \quad \frac{\partial V}{\partial B} = l_B, \quad \frac{\partial V}{\partial C} = l_C.$$

Отметим, что $V \to 0$ при $A, B, C \to \arccos\frac{1}{3}$, т. е. в случае, когда тетраэдр T становится правильным евклидовым тетраэдром.

Положим

$$\widetilde{V} = -\int\limits_{v}^{+\infty} F(\nu, A, B, C)\frac{d\nu}{\nu}.$$

где

$$F(\nu, A, B, C) = \operatorname{arsh}\frac{a}{\sqrt{\nu^2-1}} + \operatorname{arsh}\frac{b}{\sqrt{\nu^2-1}} + \operatorname{arsh}\frac{c}{\sqrt{\nu^2-1}} - \operatorname{arsh}\frac{1}{\sqrt{\nu^2-1}}.$$

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что $\widetilde{V}$ обладает свойствами:

(i) выполнены равенства

$$\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial A} = l_A, \quad \frac{\partial\widetilde{V}}{\partial B} = l_B, \quad \frac{\partial\widetilde{V}}{\partial C} = l_C,$$

(ii) $\widetilde{V} \to 0$ при $A, B, C \to \arccos\frac{1}{3}$.

Проверим свойство (i).

Используя формулу Лейбница дифференцирования по параметру, получим

$$\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial A} = F(v, A, B, C)\frac{\partial v}{\partial A} + \int\limits_{v}^{+\infty} \frac{\partial F(\nu, A, B, C)}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial A}\frac{d\nu}{\nu}.$$

Из тождества (4.2) по лемме 2 при $p^2 = v^2 - 1$ имеем

$$F(v, A, B, C) = \operatorname{arsh}\frac{a}{\sqrt{v^2-1}} + \operatorname{arsh}\frac{b}{\sqrt{v^2-1}} + \operatorname{arsh}\frac{c}{\sqrt{v^2-1}} - \operatorname{arsh}\frac{1}{\sqrt{v^2-1}} = 0.$$

Следовательно, $F(v, A, B, C)\frac{\partial v}{\partial A} = 0$.

Далее,

$$\frac{\partial F(\nu, A, B, C)}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{\nu^2 - (1-a^2)}}$$

и

$$\frac{\partial a}{\partial A} = \frac{d(\cos A)}{dA} = \sin A = \sqrt{1-a^2}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial A} = -\int\limits_{v}^{+\infty} \frac{\sqrt{1-a^2}\,d\nu}{\nu\sqrt{\nu^2-(1-a^2)}} = -\arcsin\frac{\sqrt{1-a^2}}{\nu}\bigg|_{v}^{+\infty} = \arcsin\frac{\sqrt{1-a^2}}{v} = l_A,$$

так как из условия теоремы 7

$$l_A = \arcsin\frac{\sin A}{v} = \arcsin\frac{\sqrt{1-a^2}}{v}.$$

Аналогично проверяются равенства

$$\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial B} = l_B, \quad \frac{\partial\widetilde{V}}{\partial C} = l_C.$$

Проверим свойство (ii). Если $A, B, C \to \arccos\frac{1}{3}$, то $v \to +\infty$. В силу сходимости интеграла имеем $\widetilde{V} \to 0$. $\square$

Следствие 1. *Пусть T — симметричный сферический тетраэдр. Предположим, что величины $\pi - A$, $\pi - B$ и $\pi - C$ являются сторонами некоторого прямоугольного сферического треугольника, т. е. имеет место одно из соотношений $\cos A + \cos B \cos C = 0$, $\cos B + \cos A \cos C = 0$ или $\cos C + \cos A \cos B = 0$. Тогда объем тетраэдра T равен*

$$\frac{A^2 + B^2 + C^2}{2} - \frac{\pi^2}{4}.$$

Доказательство. Так как сферическое пространство $\mathbb{S}^3$ замощается 16 экземплярами тетраэдра

$$T = T\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

имеем

$$V\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{16}\,\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^3) = \frac{\pi^2}{8}.$$

Когда A, B, C удовлетворяют условию теоремы 8, тогда

$$v^2 - 1 = \frac{4(a + bc)(b + ac)(c + ba)}{(1 - a + b + c)(1 + a - b + c)(1 + a + b - c)(1 - a - b - c)} = 0.$$

Следовательно, $v = 1$. Тогда из теоремы 8 получаем

$$V\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \int\limits_1^{+\infty} \operatorname{arsh} \frac{1}{\sqrt{\nu^2 - 1}} \frac{d\nu}{\nu} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Рассмотрим функцию

$$I(A) = -\int\limits_1^{+\infty} \operatorname{arsh} \frac{\cos A}{\sqrt{\nu^2 - 1}} \frac{d\nu}{\nu}.$$

Лемма 3. *Имеем место равенство*

$$I(A) = -\int\limits_1^{+\infty} \operatorname{arsh} \frac{\cos A}{\sqrt{\nu^2 - 1}} \frac{d\nu}{\nu} = \frac{A^2}{2} - \frac{\pi^2}{8}, \quad 0 \le A \le \frac{\pi^2}{2}.$$

Доказательство. Действительно,

$$I^{'}(A) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin A}{\sqrt{1 + \frac{\cos^2 A}{\nu^2 - 1}}} \frac{d\nu}{\nu\sqrt{\nu^2 - 1}} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin A}{\sqrt{\nu^2 - \sin^2 A}} \frac{d\nu}{\nu} = A.$$

Учитывая что

$$V\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{8},$$

имеем $I(0) = -\frac{\pi^2}{8}$. Следовательно,

$$I(A) = \frac{A^2}{2} - \frac{\pi^2}{8}. \qquad \square$$

По теореме 8

$$V(A, B, C) = I(A) + I(B) + I(C) - I(0) = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{2} - \frac{\pi^2}{4}.$$

Следствие 1 доказано. $\square$

Подставляя $\nu = \operatorname{cth} t$ в условие теоремы 8, приходим к следующему утверждению.

Теорема 9. *Объем сферического симметричного тетраэдра T вычисляется по формуле*

$$-2\int\limits_0^\tau (\operatorname{arsh}(\cos A\operatorname{sh} t) + \operatorname{arsh}(\cos B\operatorname{sh} t) + \operatorname{arsh}(\cos C\operatorname{sh} t) - t)\frac{dt}{\operatorname{sh} 2t},$$

где τ — положительное число, которое находится из уравнения

$$\operatorname{cth}^2\tau = \frac{1-a^2-b^2-c^2-2abc}{\sqrt{(1-a+b+c)(1+a-b+c)(1+a+b-c)(1-a-b-c)}},$$

где $a=\cos A$, $b=\cos B$, $c=\cos C$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сабитов И. Х.* Объем многогранника как функция длин его ребер // Вестн. МГУ. Сер. I. Математика и механика. 1996. № 6. С. 89–91.
2. *Lobatschefskij N. I.* Imaginäre Geometrie und ihre Anwendung auf einige Integrale. Leipzig: Teubner, 1904. (Deutsche Übersetzung von H. Liebmann).
3. *Schläfli L.* Theorie der vielfachen Kontinuität. Basel: Birkhäuser, 1950. (Gesammelte mathematishe Abhandlungen).
4. *Kellerhals R.* On the volume of hyperbolic polyhedra // Math. Ann. 1989. V. 285. P. 541–569.
5. *Derevnin D. A., Mednykh A. D.* On the volume of spherical Lambert cube, arXiv: math.MG/0212301, 22pp.
6. *Mednykh A. D., Parker J., Vesnin A. Yu.* On hyperbolic polyhedra arising as convex cores of quasi-Fuchsian punctured torus groups. Seoul, 2002. 33 p. (RIM-GARC Preprint Series / Seoul National Univ.; 02–01).
7. *Martin G. J.* The volume of regular tetrahedra and sphere packings in hyperbolic 3-space // Math. Chronicle. 1991. V. 20. P. 127–147.
8. *Vinberg E. B.* Geometry II. New York: Springer-Verl., 1993.
9. *Wu-Yi Hsiang.* On infinitesimal symmetrization and volume formula for spherical or hyperbolic tetrahedrons // Quart. J. Math. Oxford (2). 1988. V. 39. P. 463–468.
10. *Cho Yu., Kim H.* On the volume formula for hyperbolic tetrahedra // Discrete Comput. Geom. 1999. V. 22. P. 347–366.
11. *Murakami J., Yano M.* On the volume of hyperbolic tetrahedron. 2001. (Preprint). Available at http://faculty.web.waseda.ac.jp/murakami/papers/tetrahedronrev3.pdf.
12. *Ushijima A.* A volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra. 2002. (Preprint). Available at http://www.math.titech.ac.jp/Users/ushijima/welcome-e.html.
13. *Luo F.* On a problem of Fenchel // Geom. Dedicata. 1997. V. 64. P. 227–282.
14. *Hodgson C. D.* Degeneration and regeneration of geometric structures on three-manifolds: Ph. D. Thesis. Princeton: Princeton Univ. Press, 1986.
15. *Прасолов В. В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: Наука, 1996.

Статья поступила 17 апреля 2003 г.

Деревнин Дмитрий Александрович,
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
derevnin@math.nsc.ru

Медных Александр Дмитриевич,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
mednykh@math.nsc.ru

Пашкевич Марина Геннадьевна
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
marinap@math.nsc.ru