Сибирский математический журнал
Июль—август, 2004. Том 45, № 4

УДК 519.21

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ПОЛОСЫ ТРАЕКТОРИЯМИ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ

В. И. Лотов, Н. Г. Орлова

Аннотация: Получены полные асимптотические разложения для распределения числа пересечений полосы за n шагов траекториями целочисленного случайного блуждания с нулевым средним. Предполагается, что выполнено условие Крамера на распределение скачков и ширина полосы растет вместе с n; результаты получены при различных условиях на ее скорость роста. Метод состоит в нахождении факторизационных представлений производящих функций изучаемых распределений, выделении главных членов асимптотики этих представлений и последующем обращении этих главных членов с помощью модификации метода перевала.

Ключевые слова: Случайное блуждание, число пересечений, полное асимптотическое разложение.

1. Введение

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Обозначим $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $n \geq 1$. Для произвольных $a > 0$, $b > 0$ определим случайные величины $\eta_n^{(1)}$, $\eta_n^{(2)}$, равные соответственно числу пересечений снизу вверх и сверху вниз полосы $-a \leq y \leq b$ на координатной плоскости точек (x, y) траекторией случайного блуждания $\{(n, S_n)\}_{n=0}^{\infty}$ за промежуток времени от 0 до n. Более строгое задание случайных величин $\eta_n^{(1)}$, $\eta_n^{(2)}$ содержится в доказательстве теоремы 1 ниже.

Объектом изучения являются распределения случайных величин $\eta_n^{(i)}$, $i = 1, 2$. Хорошо известно неравенство, полученное Дж. Дубом [1], для среднего числа пересечений полосы последовательностью, образующей субмартингал. В [2] найдены в точном виде распределения $\eta_n^{(i)}$, $\eta_\infty^{(i)}$ для некоторых случайных блужданий; там же доказана предельная теорема для совместного распределения случайных величин $\eta_n^{(i)}$ и S_n при $n \to \infty$, когда $\mathbf{E}\xi_1 = 0$, $\mathbf{E}\xi_1^2 < \infty$, а ширина полосы увеличивается с ростом n. Другие библиографические сведения можно найти в [2].

В настоящей работе получены полные асимптотические разложения вероятностей $\mathbf{P}\big(\eta_n^{(1)} = k\big)$, $\mathbf{P}\big(\eta_n^{(2)} = k\big)$ при различных ограничениях на $a = a(n)$,

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00902) и программы «Ведущие научные школы» (грант НШ–2139.2003.1).

$b = b(n)$, $k = k(n)$, совместимых с требованиями $(a+b)k = o(n)$, $a \to \infty$, $b \to \infty$, $n \to \infty$.

Основные результаты доказываются в предположении, что случайные величины ξ_n целочисленны, $\mathbf{E}\xi_1 = 0$ и н.о.д. разностей всевозможных значений ξ_1 равен единице. Кроме того, на распределение ξ_1 будет накладываться условие Крамера о существовании экспоненциальных моментов.

Исследования проводятся с помощью факторизационной техники в несколько этапов по схеме, предложенной А. А. Боровковым в [3] и адаптированной для решения задач с двумя границами в [4, 5]. Напомним основные этапы этого метода.

На первом из них находятся факторизационные представления для преобразований Лапласа — Стилтьеса над искомыми распределениями. Получаемые здесь формулы не требуют для их справедливости никаких дополнительных условий типа условия Крамера или условий существования моментов; однако найденные представления оказываются слишком сложными для непосредственного обращения. Обращение в явном виде оказывается возможным только при существенном сужении класса рассматриваемых случайных блужданий (скажем, при введении требования об экспоненциальном характере убывания хвостов распределения ξ_1). В то же время исследование асимптотических свойств изучаемых распределений возможно при весьма широких ограничениях на исходные распределения. Так, предельные теоремы для распределения числа пересечений расширяющейся полосы могут быть получены из принципа инвариантности, для их справедливости достаточно потребовать конечности $\mathbf{E}\xi_1^2$ (см. [2]). Используемая в граничных задачах факторизационная техника позволяет, как правило, получать более сильные асимптотические результаты, а именно полные асимптотические разложения в условиях удаляющихся границ. Для этого на втором этапе проводится асимптотический анализ преобразований Лапласа — Стилтьеса искомых распределений с целью выделения пригодных для последующего обращения главных частей этих преобразований. Получаемые при этом остаточные члены оказываются пренебрежимо малы: они отличаются от главных членов экспоненциально малым множителем. Таким образом, второй этап завершается построением асимптотических представлений для преобразований Лапласа — Стилтьеса; здесь все результаты получаются при дополнительном требовании о существовании экспоненциальных моментов у ξ_1. На третьем этапе главные члены полученных асимптотических представлений обращаются с помощью контурного интегрирования. Здесь используются модификации метода перевала, разработанные в [3], и ряд технических приемов из [4, 5].

Обозначим

$$Q_i(z,k) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{P}\big(\eta_n^{(i)} = k\big), \quad i = 1, 2.$$

Факторизационные представления для этих функций содержатся в теореме 1. Теорема 2 содержит асимптотические представления для $Q_i(z,k)$ при $a \to \infty$, $b \to \infty$ для значений z, близких к единице. В силу симметричности рассуждений в дальнейшем рассматривается только случай $i = 1$. Главная часть асимптотического представления для $Q_1(z,k)$ подвергается затем контурному интегрированию, в результате чего находится асимптотическое разложение для $\mathbf{P}\big(\eta_n^{(1)} = k\big)$ по степеням $n^{-1/2}$ (теорема 3). Оно носит предварительный характер, поскольку коэффициенты этого разложения сами зависят от n. Налагая далее те или иные условия на скорость удаления границ полосы, мы получаем из теоремы 3 искомые полные асимптотические разложения (теоремы 4–6). Поскольку выражения для коэффициентов разложений задаются цепочками достаточно сложных выражений, вводимых в процессе доказательства, формулировки окончательных результатов размещены в конце соответствующего параграфа после доказательств.

2. Факторизационные представления производящих функций

Пусть $r_z(\mu) = r_{z+}(\mu) \cdot r_{z-}(\mu)$ — факторизация на прямой $\operatorname{Re}\mu = 0$ ($|z| < 1$) функции $r_z(\mu) = 1 - z\mathbf{E}\exp\{\mu\xi_1\}$, где функции $r_{z\pm}(\mu)$ при $|z| < 1$ задаются, например, так:

$$r_{z+}(\mu) = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}\mathbf{E}(\exp\{\mu S_k\}; S_k > 0)\right\},$$

$$r_{z-}(\mu) = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}\mathbf{E}(\exp\{\mu S_k\}; S_k \le 0)\right\}.$$

Пусть g — произвольная функция, допускающая на прямой $\operatorname{Re}\mu = 0$ представление

$$g(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu y}\, dG(y),$$

где полная вариация функции G конечна. Следуя [3, 4], введем операторы

$$Ag(z,\mu) = r_{z-}(\mu)\big[r_{z-}^{-1}(\mu)g(\mu)\big]^{(-\infty,-a]}, \quad Bg(z,\mu) = r_{z+}(\mu)\big[r_{z+}^{-1}(\mu)g(\mu)\big]^{[b,\infty)}.$$

Здесь $|z| < 1$, $\operatorname{Re}\mu = 0$ и по определению

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu y}\, dG(y)\right]^D = \int_D e^{\mu y}\, dG(y).$$

Функция g может также зависеть от z; для краткости записи зависимость от z в обозначениях операторов A и B не подчеркивается.

Теорема 1. *Для любого $k \ge 0$ и $|z| < 1$*

$$Q_1(z,k) = \frac{1}{1-z}\{((BA)^k e)(z,0) - ((BA)^{k+1}e)(z,0)\}, \tag{1}$$

$$Q_2(z,k) = \frac{1}{1-z}\{((AB)^k e)(z,0) - ((AB)^{k+1}e)(z,0)\}, \tag{2}$$

где $e(z,\mu) \equiv e(\mu) \equiv 1$.

Доказательство. Для рассматриваемого случайного блуждания определим моменты остановки $\tau_0^+ = \tau_0^- = 0$, $\tau_i^- = \inf\{n \ge \tau_{i-1}^+ : S_n \le -a\}$, $\tau_i^+ = \inf\{n \ge \tau_i^- : S_n \ge b\}$, $i \ge 1$; здесь всегда подразумевается, что $\inf\varnothing = \infty$. Положим $\eta_n^{(1)} = \max\{i \ge 0 : \tau_i^+ \le n\}$. В [6] установлено, что при $|z| < 1$, $\operatorname{Re}\mu = 0$

$$\mathbf{E}\big(z^{\tau_k^+}\exp\{\mu S_{\tau_k^+}\}; \tau_k^+ < \infty\big) = ((BA)^k e)(z,\mu). \tag{3}$$

Случайная величина $\eta_n^{(2)}$ определяется аналогично: пусть $\nu_0^+ = \nu_0^- = 0$, $\nu_i^+ = \inf\{n \geq \nu_{i-1}^- : S_n \geq b\}$, $\nu_i^- = \inf\{n \geq \nu_i^+ : S_n \leq -a\}$, $i \geq 1$. Тогда $\eta_n^{(2)} = \max\{i \geq 0 : \nu_i^- \leq n\}$ и

$$\mathbf{E}\bigl(z^{\nu_k^-} \exp\{\mu S_{\nu_k^-}\}; \nu_k^- < \infty\bigr) = ((AB)^k e)(z, \mu). \tag{4}$$

Ясно, что, положив $\mu = 0$ в (3), (4), мы получим производящие функции случайных величин τ_k^+, ν_k^-:

$$\sum_{j=1}^{\infty} z^j \mathbf{P}\bigl(\tau_k^+ = j\bigr) = ((BA)^k e)(z, 0), \quad \sum_{j=1}^{\infty} z^j \mathbf{P}\bigl(\nu_k^- = j\bigr) = ((AB)^k e)(z, 0).$$

Заметим, что

$$\mathbf{P}\bigl(\eta_n^{(1)} \geq k\bigr) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}\bigl(\tau_k^+ = j\bigr).$$

Имеем теперь

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{P}\bigl(\eta_n^{(1)} \geq k\bigr) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}\bigl(\tau_k^+ = j\bigr)$$
$$= (1 + z + z^2 + \dots) \sum_{j=1}^{\infty} z^j \mathbf{P}\bigl(\tau_k^+ = j\bigr) = \frac{1}{1-z}((BA)^k e)(z, 0),$$

и для доказательства (1) остается воспользоваться соотношением $\mathbf{P}\bigl(\eta_n^{(1)} = k\bigr) = \mathbf{P}\bigl(\eta_n^{(1)} \geq k\bigr) - \mathbf{P}\bigl(\eta_n^{(1)} \geq k+1\bigr)$. Формула (2) получается аналогично. Теорема 1 доказана.

Заметим, что теорема 1 справедлива для произвольного случайного блуждания без каких-либо ограничений на распределение его скачков.

3. Асимптотическое представление для $Q_1(z, k)$

Начиная с этого места мы предполагаем, что случайные величины ξ_n целочисленны. По этой причине нам будет удобнее работать с производящей функцией $\varphi(\lambda) = \mathbf{E}\lambda^{\xi_1}$ вместо преобразования Лапласа — Стилтьеса $\mathbf{E}\exp\{\mu\xi_1\}$ и использовать переменную $\lambda = e^{\mu}$ в определении компонент факторизации и операторов A и B. Кроме того, мы предполагаем, что $\mathbf{E}\xi_1 = 0$, н.о.д. разностей всевозможных значений ξ_1 равен единице и выполнено условие Крамера: функция $\varphi(\lambda)$ аналитична в кольце $1 - \varepsilon < |\lambda| < 1 + \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Из этих условий, в частности, следует, что функция $r_z(\lambda) = 1 - z\varphi(\lambda)$ имеет ровно два нуля при z, близких к единице, $z < 1$. Обозначим их через $h_1(z)$ и $h_2(z)$; здесь $h_1(1) = h_2(1) = 1$, и пусть $h_1(z) < 1 < h_2(z)$ при $z \in (1 - \delta, 1)$. Далее мы будем использовать ряд сведений о компонентах факторизации из [7]. Введенные выше нули функции $r_z(\lambda)$ могут быть определены в некоторой δ-окрестности точки $z = 1$, разрезанной по лучу $z > 1$, и являются там ветвями двузначной функции. Существует такое число $\delta_1 > 0$, при котором положительная компонента факторизации $r_{z+}(\lambda)$ аналитична в круге $|\lambda| < 1 + \delta_1$, непрерывна на границе и единственным ее нулем в области $|\lambda| \leq 1 + \delta_1$ для z, близких к единице, $|z| < 1$, является $h_2(z)$. Отрицательная компонента $r_{z-}(\lambda)$ аналитична при $|\lambda| > 1 - \delta_1$, непрерывна на границе и при тех же условиях на z единственным ее нулем при $|\lambda| > 1 - \delta_1$ является $h_1(z)$.

Обозначим $v_z(\lambda) = r_{z+}(\lambda)/(\lambda - h_2(z))$. Функции $v_z^{\pm 1}(\lambda)$ будут аналитическими по совокупности переменных λ и z в области $|\lambda| < 1 + \delta_1$, $|z - 1| < \varepsilon_1$ при некотором $\varepsilon_1 > 0$. Соответственно функции $u_z^{\pm 1}(\lambda) = (\lambda r_{z-}(\lambda)/(\lambda - h_1(z)))^{\pm 1}$ аналитичны при $|\lambda| > 1 - \delta_1$, $|z - 1| < \varepsilon_1$. Пусть

$$H_1(z) = \frac{u_z(h_2(z))}{u_z(h_1(z))}, \quad H_2(z) = \frac{v_z(h_1(z))}{v_z(h_2(z))}, \quad H(z) = H_1(z)H_2(z), \quad \mu(z) = \frac{h_1(z)}{h_2(z)}.$$

Теорема 2. *Существуют $\delta > 0$, $\gamma > 0$ такие, что при $z \in L_\delta = \{|z| < 1, |z - 1| < \delta\}$, $k \geq 1$, $a \to \infty$, $b \to \infty$*

$$Q_1(z,k) = \frac{1 - \mu^{a+b}(z)H(z)}{(1 - z)} \left\{ a_1(z) \frac{(\mu^{a+b}(z)H(z))^k}{h_1^b(z)} + \Lambda_1(z,k) \right\}, \tag{5}$$

$$Q_2(z,k) = \frac{1 - \mu^{a+b}(z)H(z)}{(1 - z)} \left\{ a_2(z)(\mu^{a+b}(z)H(z))^k h_2^a(z) + \Lambda_2(z,k) \right\}, \tag{6}$$

где

$$\begin{gathered} a_1(z) = \frac{v_z(1)}{v_z(h_2(z))} H_2^{-1}(z), \quad a_2(z) = \frac{u_z(1)}{u_z(h_1(z))} H_1^{-1}(z), \\ |\Lambda_i(z,k)| = M^{k-1}(z) O(e^{-\gamma(a+b)}), \quad i = 1, 2, \\ M(z) = |\mu^{a+b}(z)H(z)|(1 + |h_2(z) - h_1(z)|)^2. \end{gathered} \tag{7}$$

Доказательство теоремы 2. Нашей ближайшей целью является получение асимптотического представления оператора $((BA)^k e)(z,\lambda)$. Для этого мы воспользуемся следующими леммами [4].

Лемма 1. *Пусть $g(\lambda)$ аналитична в кольце $1 - \delta_1 < |\lambda| < 1$ и непрерывна, включая границу. Тогда при некотором $\delta > 0$ и любом $\gamma < -\ln(1 - \delta_1)$ найдется такая константа $C > 0$, что*

$$Ag(z,\lambda) = \frac{u_z(\lambda)h_1^a(z)g(h_1(z))}{\lambda^a u_z(h_1(z))} + (\lambda - h_1(z))\theta(z,\lambda), \quad |\lambda| \geq 1, \ z \in L_\delta,$$

где $\theta(z,\lambda) = \sum\limits_{k=-\infty}^{-a-1} \lambda^k \theta_k(z)$, $|\theta_k(z)| \leq Ce^{\gamma k}$ равномерно по $z \in L_\delta$, $k \leq -a - 1$.

Заметим, что если коэффициенты в разложении Лорана функции $g(\lambda)$ зависят от z и равномерно ограничены по $z \in L_\delta$, то, как следует из доказательства этой леммы в [4], константа C возникает в результате применения неравенств

$$|\theta_k(z)| \leq C(\gamma) \sup_{|\lambda|=1-\delta_1} |g(\lambda)|e^{\gamma k} \leq C(\gamma) \sup_{z \in L_\delta} \sup_{|\lambda|=1-\delta_1} |g(\lambda)|e^{\gamma k} \equiv Ce^{\gamma k}.$$

Этим мы воспользуемся в последующем.

Лемма 2. *Пусть $g(\lambda)$ аналитична в кольце $1 < |\lambda| < 1 + \delta_1$ и непрерывна, включая границу. Тогда при некотором $\delta > 0$ и любом $\gamma < \ln(1 + \delta_1)$ найдется такая константа $C > 0$, что*

$$Bg(z,\lambda) = \frac{\lambda^b v_z(\lambda)g(h_2(z))}{h_2^b(z)v_z(h_2(z))} + (\lambda - h_2(z))\varphi(z,\lambda), \quad |\lambda| \leq 1, \quad z \in L_\delta,$$

где $\varphi(z,\lambda) = \sum\limits_{k=b}^{\infty} \lambda^k \varphi_k(z)$, $|\varphi_k(z)| \leq Ce^{-\gamma k}$ равномерно по $z \in L_\delta$, $k \geq b$.

Аналогично замечанию к лемме 1 имеем

$$|\varphi_k(z)| \leq C(\gamma) \sup_{|\lambda|=1+\delta_1} |g(\lambda)|e^{-\gamma k} \leq C(\gamma) \sup_{z \in L_\delta} \sup_{|\lambda|=1+\delta_1} |g(\lambda)|e^{-\gamma k} \equiv Ce^{-\gamma k}.$$

Применяя по очереди леммы 1 и 2 к соответствующим функциям, получаем

$$((BA)^k e)(z,\lambda) = \frac{\lambda^b v_z(\lambda)}{h_2^b(z) v_z(h_2(z))} \Bigg\{ \mu^{ak+(k-1)b}(z) H_1(z) H^{k-1}(z) + \sum_{i=1}^{k} \mu^{(a+b)(k-i)}(z) H^{k-i}(z)(h_2(z)-h_1(z))\theta_i(z,h_2(z)) + \sum_{i=1}^{k-1} \mu^{(a+b)(k-i)-b}(z) H^{k-i-1}(z) H_1(z)(h_1(z)-h_2(z))\varphi_i(z,h_1(z)) \Bigg\} + (\lambda - h_2(z))\varphi_k(z,\lambda), \quad k \geq 1.$$

Функции $\theta_i(z,\lambda)$, $\varphi_i(z,\lambda)$ имеют вид

$$\theta_i(z,\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{-a-1} \theta_{ij}(z)\lambda^j, \quad \varphi_i(z,\lambda) = \sum_{j=b}^{\infty} \varphi_{ij}(z)\lambda^j,$$

где для $i = 1,\dots,k$

$$|\theta_{ij}(z)| \leq C(\gamma) \sup_{|\lambda|=1-\delta_1} |(BA)^{i-1} e(z,\lambda)| e^{\gamma j}, \quad j \leq -a-1,$$

$$|\varphi_{ij}(z)| \leq C(\gamma) \sup_{|\lambda|=1+\delta_1} |A(BA)^{i-1} e(z,\lambda)| e^{-\gamma j}, \quad j \geq b.$$

Подставляя в (1) найденные выражения для $((BA)^k e)(z,1)$, $((BA)^{k+1} e)(z,1)$, получим (5), где

$$\Lambda_1(z,k) = \Bigg[\sum_{i=1}^{k} \mu^{(a+b)(k-i)}(z) H^{k-i}(z)(h_2(z)-h_1(z))\theta_i(z,h_2(z)) + \sum_{i=1}^{k-1} \mu^{(a+b)(k-i)-b}(z) H^{k-i-1}(z) H_1(z)(h_1(z)-h_2(z))\varphi_i(z,h_1(z))) - \frac{(h_2(z)-h_1(z))}{1-\mu^{a+b}(z)H(z)}\theta_{k+1}(z,h_2(z)) + H_1(z)\mu^a(z)\frac{(h_2(z)-h_1(z))}{1-\mu^{a+b}(z)H(z)}\varphi_k(z,h_1(z)) \Bigg] \times \frac{v_z(1)}{v_z(h_2(z)) h_2^b(z)} + \frac{(1-h_2(z))}{1-\mu^{a+b}(z)H(z)}(\varphi_k(z,1) - \varphi_{k+1}(z,1)).$$

Как и ранее, буквой C с возможными индексами будут обозначаться константы.

Оценим $|\Lambda_1(z,k)|$. Заметим, что

$$|\theta_i(z,h_2(z))| \leq C_0 \sup_{|\lambda|=1-\delta_1} |(BA)^{i-1} e(z,\lambda)| e^{-\gamma a},$$

$$|\varphi_i(z,h_1(z))| \leq C_0 \sup_{|\lambda|=1+\delta_1} |A(BA)^{i-1} e(z,\lambda)| e^{-\gamma b}$$

и, следовательно, нужно оценить сверху

$$\sup_{|\lambda|=1-\delta_1} |(BA)^{i-1} e(z,\lambda)|, \qquad \sup_{|\lambda|=1+\delta_1} |A(BA)^{i-1} e(z,\lambda)|.$$

Для этого нам потребуются две леммы.

Лемма 3. *Пусть* $f(\lambda) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} f_k \lambda^k$ *при* $|\lambda| = 1$, *где* $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |f_k| < \infty$, *и пусть функция* f *аналитична при* $1-\delta_1 < |\lambda| < 1$ *и непрерывна на границе. Обозначим* $g(z,\lambda) = Af(z,\lambda)$. *Тогда для достаточно больших* a *при* $z \in L_\delta$ *справедливо неравенство*

$$\max(|g(z,h_2(z))|, \sup_{|\lambda|=1+\delta_1} |g(z,\lambda)|) \le K_1(z) \max(|f(h_1(z))|, \sup_{|\lambda|=1-\delta_1} |f(\lambda)|),$$

где $K_1(z) = |H_1(z)\mu^a(z)| + |h_2(z) - h_1(z)|C(\gamma)e^{-\gamma a}$.

Доказательство леммы 3. Если

$$\max(|g(z,h_2(z))|, \sup_{|\lambda|=1+\delta_1} |g(z,\lambda)|) = |g(z,h_2(z))|,$$

то

$$\begin{aligned}
|g(z,h_2(z))| &\le |H_1(z)\mu^a(z)||f(h_1(z))| + |h_2(z) - h_1(z)||\theta(z,h_2(z))| \\
&\le |H_1(z)\mu^a(z)||f(h_1(z))| + |h_2(z) - h_1(z)|C(\gamma)e^{-\gamma a} \sup_{|\lambda|=1-\delta_1} |f(\lambda)| \\
&\le (|H_1(z)\mu^a(z)| + |h_2(z) - h_1(z)|C(\gamma)e^{-\gamma a}) \max(|f(h_1(z))|, \sup_{|\lambda|=1-\delta_1} |f(\lambda)|) \\
&= K_1(z) \max(|f(h_1(z))|, \sup_{|\lambda|=1-\delta_1} |f(\lambda)|).
\end{aligned}$$

Если

$$\max(|g(z,h_2(z))|, \sup_{|\lambda|=1+\delta_1} |g(z,\lambda)|) = \sup_{|\lambda|=1+\delta_1} |g(z,\lambda)|,$$

то

$$\begin{aligned}
\sup_{|\lambda|=1+\delta_1} |g(z,\lambda)| &\le \sup_{|\lambda|=1+\delta_1} \left|\frac{u_z(\lambda)h_1^a(z)}{u_z(h_1(z))\lambda^a}\right| |f(h_1(z))| \\
&\quad + \sup_{|\lambda|=1+\delta_1} |\lambda - h_1(z)| \sup_{|\lambda|=1+\delta_1} |\theta(z,\lambda)| \\
&\le \sup_{|\lambda|=1+\delta_1} \left|\frac{u_z(\lambda)h_1^a(z)}{u_z(h_1(z))\lambda^a}\right| |f(h_1(z))| + \sup_{|\lambda|=1+\delta_1} |\lambda - h_1(z)|C(\gamma)e^{-\gamma a} \sup_{|\lambda|=1-\delta_1} |f(\lambda)| \\
&\le \left(\sup_{|\lambda|=1+\delta_1} \left|\frac{u_z(\lambda)h_1^a(z)}{u_z(h_1(z))\lambda^a}\right| + \sup_{|\lambda|=1+\delta_1} |\lambda - h_1(z)|C(\gamma)e^{-\gamma a} \right) \\
&\qquad \times \max(|f(h_1(z))|, \sup_{|\lambda|=1-\delta_1} |f(\lambda)|) \\
&\le \left(\sup_{|\lambda|=1+\delta_1} \left|\frac{u_z(\lambda)h_1^a(z)}{u_z(h_1(z))}\right| + \sup_{|\lambda|=1+\delta_1} |\lambda - h_1(z)|C(\gamma) \right) e^{-\gamma a} \\
&\qquad \times \max(|f(h_1(z))|, \sup_{|\lambda|=1-\delta_1} |f(\lambda)|) \\
&\le Ce^{-\gamma a} \max(|f(h_1(z))|, \sup_{|\lambda|=1-\delta_1} |f(\lambda)|) \le K_1(z) \max(|f(h_1(z))|, \sup_{|\lambda|=1-\delta_1} |f(\lambda)|).
\end{aligned}$$

Последнее неравенство выполняется для достаточно больших a. Доказательство леммы 3 закончено.

Лемма 4. *Пусть* $f(\lambda) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} f_k \lambda^k$ *при* $|\lambda| = 1$, *где* $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |f_k| < \infty$, *и пусть функция* f *аналитична при* $1 < |\lambda| < 1 + \delta_1$ *и непрерывна на границе.*

Обозначим $g(z,\lambda) = Bf(z,\lambda)$. *Тогда для достаточно больших* b *при* $z \in L_\delta$ *справедливо неравенство*

$$\max(|g(z,h_1(z))|, \sup_{|\lambda|=1-\delta_1} |g(z,\lambda)|) \le K_2(z)\max(|f(h_2(z))|, \sup_{|\lambda|=1+\delta_1} |f(\lambda)|),$$

где $K_2(z) = |H_2(z)\mu^b(z)| + |h_2(z) - h_1(z)|C(\gamma)e^{-\gamma b}$.

Доказательство леммы 4. Используя рассуждения, аналогичные приведенным в лемме 3, получаем следующие неравенства:

$$\begin{aligned}|g(z,h_1(z))| &\le (|H_2(z)\mu^b(z)| + |h_2(z) - h_1(z)|C(\gamma)e^{-\gamma b})\\ &\times \max(|f(h_2(z))|, \sup_{|\lambda|=1+\delta_1} |f(\lambda)|) = K_2(z)\max(|f(h_2(z))|, \sup_{|\lambda|=1+\delta_1} |f(\lambda)|),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sup_{|\lambda|=1-\delta_1} |g(z,\lambda)| &\le \left(\sup_{|\lambda|=1-\delta_1} \left|\frac{v_z(\lambda)}{v_z(h_2(z))h_2^b(z)}\right| + \sup_{|\lambda|=1-\delta_1} |\lambda - h_2(z)|C(\gamma)\right)\\ &\times e^{-\gamma b}\max(|f(h_2(z))|, \sup_{|\lambda|=1+\delta_1} |f(\lambda)|) \le Ce^{-\gamma b}\max(|f(h_2(z))|, \sup_{|\lambda|=1+\delta_1} |f(\lambda)|)\\ &\le K_2(z)\max(|f(h_2(z)|, \sup_{|\lambda|=1+\delta_1} |f(\lambda)|).\end{aligned}$$

Последнее неравенство выполняется для достаточно больших b. Доказательство леммы 4 закончено.

Последовательное применение оценок, полученных в леммах 3 и 4, приводит нас к неравенствам

$$|\theta_i(z,h_2(z))| \le C_1(K_1(z)K_2(z))^{i-1}e^{-\gamma(a+b)},$$
$$|\varphi_i(z,h_1(z))| \le C_1K_1^i(z)K_2^{i-1}(z)e^{-\gamma(a+b)}, \quad i = 1,\dots,k+1.$$

Поясним более подробно, как это делается. На первом шаге нужно воспользоваться содержащимися в доказательстве лемм оценками

$$\sup_{|\lambda|=1+\delta_1} |g(z,\lambda)| \le Ce^{-\gamma a}\max(|f(h_1(z))|, \sup_{|\lambda|=1-\delta_1} |f(\lambda)|),$$

$$\sup_{|\lambda|=1-\delta_1} |g(z,\lambda)| \le Ce^{-\gamma b}\max(|f(h_2(z))|, \sup_{|\lambda|=1+\delta_1} |f(\lambda)|),$$

а затем применять оценки, содержащиеся в утверждениях лемм.

Далее временно опустим аргумент z в обозначениях функций $h_1(z)$, $h_2(z)$, $\mu(z)$, $H_1(z)$, $H_2(z)$, $H(z)$ и рассмотрим модули сумм, входящих в $\Lambda_1(z,k)$:

$$\begin{aligned}S_1(z) &\equiv \left|\sum_{i=1}^k \mu^{(a+b)(k-i)}H^{k-i}(h_2 - h_1)\theta_i(z,h_2)\right|\\ &\le C_1e^{-\gamma(a+b)}|h_2 - h_1|\sum_{i=1}^k |\mu^{a+b}H|^{k-i}(|\mu^aH_1| + |h_2 - h_1|C(\gamma)e^{-\gamma a})^{i-1}\\ &\times (|\mu^bH_2| + |h_2 - h_1|C(\gamma)e^{-\gamma b})^{i-1}\\ &\le C_1e^{-\gamma(a+b)}|h_2 - h_1||\mu^{a+b}H|^{k-1}\sum_{i=1}^k (1 + |h_2 - h_1|)^{2(i-1)}\end{aligned}$$

$$\leq C_1 e^{-\gamma(a+b)}|h_2-h_1||\mu^{a+b}H|^{k-1}(1+|h_2-h_1|)^{2(k-1)}\sum_{i=1}^{\infty}(1+|h_2-h_1|)^{-(i-1)}$$
$$\leq Ce^{-\gamma(a+b)}|\mu^{a+b}H|^{k-1}(1+|h_2-h_1|)^{2(k-1)}.$$

Здесь все неравенства выполняются при достаточно больших a и b. Аналогично получаем

$$S_2(z)\equiv\left|\sum_{i=1}^{k-1}\mu^{(a+b)(k-1-i)}H^{k-1-i}\mu^a H_1(h_2-h_1)\varphi_i(z,h_1)\right|$$
$$\leq Ce^{-\gamma(a+b)}|\mu^{a+b}H|^{k-1}(1+|h_2-h_1|)^{2(k-1)}.$$

Заметим, что величины

$$|(h_2-h_1)/(1-\mu^{a+b}H)|,\quad |(1-h_2)/(1-\mu^{a+b}H)|,\quad \big|v_z(1)/\big(v_z(h_2)h_2^b\big)\big|$$

равномерно ограничены в L_δ при достаточно больших a и b (см. оценки в [4]) и, следовательно,

$$|\Lambda_1(z,k)|=|\mu^{a+b}H|^{k-1}(1+|h_2-h_1|)^{2(k-1)}O(e^{-\gamma(a+b)}).$$

Теорема 2 доказана.

Заметим, что для любого подмножества $A\subset L_\delta$, отделенного от единицы,

$$\sup_{z\in A}|h_1(z)|<1-\delta_2,\quad \inf_{z\in A}|h_2(z)|>1+\delta_2,\quad \delta_2>0,$$

поэтому для $z\in A$ оценку (7) можно усилить до

$$|\Lambda_i(z,k)|=O(e^{-\gamma(k+a+b)}),\quad \gamma>0. \tag{8}$$

4. Асимптотические разложения вероятностей

Целью данного пункта является получение полных асимптотических разложений для $\mathbf{P}\big(\eta_n^{(1)}=k\big)$ при условии, что величины a, b, k и n растут согласованным образом. Поскольку простых выражений для коэффициентов разложений в данной задаче, по-видимому, не существует, мы, по существу, приводим алгоритмы (т. е. цепочки формул), ведущие к нахождению указанных коэффициентов. При этом главные члены разложений будут вычислены в явном виде.

Введем обозначения

$$J_1(n,k)\equiv\frac{1}{2\pi i}\int_{l_1}\frac{Q_1(z,k)}{z^{n+1}}\,dz,$$

$$J_2(n,k)\equiv\frac{1}{2\pi i}\int_{l_2}a_1(z)H^k(z)\frac{h_1^{ak+b(k-1)}(z)}{h_2^{ak+kb}(z)}\frac{1-\mu^{a+b}(z)H(z)}{(1-z)z^{n+1}}\,dz,$$

$$J_3(n,k)\equiv\frac{1}{2\pi i}\int_{l_2}\frac{\Lambda_1(z,k)(1-\mu^{a+b}(z)H(z))}{(1-z)z^{n+1}}\,dz,$$

где $l_1=\{|z-1|\geq\delta,|z|=1\}$, а l_2 — контур, полученный из дуги $\{|z-1|<\delta,|z|=1\}$ искривлением внутрь L_δ вблизи точки $z=1$. Тогда

$$\mathbf{P}\big(\eta_n^{(1)}=k\big)=J_1(n,k)+J_2(n,k)+J_3(n,k). \tag{9}$$

Оценим $J_1(n,k)$. Известно [7], что при $z \in l_1$ и при некотором $\delta_1 > 0$ функции $r_{z+}^{\pm 1}(\lambda)$, $r_{z-}^{\pm 1}(\lambda)$ аналитически продолжаются в области $|\lambda| < 1+\delta_1$, $|\lambda| > 1-\delta_1$ соответственно. Обозначим для $z \in l_1$

$$r_{z+}^{\pm 1}(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i^{\pm}(z)\lambda^i, \quad r_{z-}^{\pm 1}(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i^{\pm}(z)\lambda^{-i},$$

тогда для $v_i^{\pm}(z)$, $u_i^{\pm}(z)$ справедливы оценки

$$\left|v_i^{\pm}(z)\right| \le \sup_{|\lambda|=1+\delta_1} r_{z+}^{\pm 1}(\lambda)/(1+\delta_1)^{i+1} \le C_v^{\pm} e^{-\gamma i}, \tag{10}$$

$$\left|u_i^{\pm}(z)\right| \le \sup_{|\lambda|=1-\delta_1} r_{z-}^{\pm 1}(\lambda)/(1-\delta_1)^{-i+1} \le C_u^{\pm} e^{-\gamma i}, \quad \gamma > 0. \tag{11}$$

Здесь первые неравенства следуют из общей формулы для коэффициентов в рядах Лорана. Далее, для оценки $Q_1(z,k)$ на контуре l_1 нам потребуется следующая

Лемма 5. *Пусть $z \in l_1$. Тогда для любого $k \ge 1$*

$$((BA)^k e)(z,\lambda) \equiv \sum_{i=b}^{\infty} p_i^{(k)}(z)\lambda^i, \quad |\lambda| \le 1,$$

где

$$\left|p_i^{(k)}(z)\right| \le C_0^{2k-1} C^k (i-b+1) e^{-2\gamma(a+b)(k-1)-2\gamma a-\gamma i}, \tag{12}$$

$$C = C_u^+ C_u^- C_v^+ C_v^-, \quad C_0 = \sum_{j=1}^{\infty} j e^{-2(j-1)\gamma}.$$

Доказательство леммы 5. Воспользуемся индукцией. При $k=1$ имеем

$$(Ae)(z,\lambda) = \left(\dots + u_1^+(z)\lambda^{-1} + u_0^+(z)\right)\left[\dots + u_1^-(z)\lambda^{-1} + u_0^-(z)\right]^{(-\infty,-a]} \equiv \sum_{i=a}^{\infty} q_i^{(1)}(z)\lambda^{-i},$$

где $q_i^{(1)}(z) = u_0^+(z)u_i^-(z) + u_1^+(z)u_{i-1}^-(z) + \dots + u_{i-a}^+(z)u_a^-(z)$. Используя (10) и (11), получаем

$$\left|q_i^{(1)}(z)\right| \le (i-a+1)C_u^+ C_u^- e^{-\gamma i}.$$

Далее,

$$\left[r_{z+}^{-1}(\lambda)\sum_{i=a}^{\infty} q_i^{(1)}(z)\lambda^{-i}\right]^{[b,\infty)}$$

$$= \left[\left(v_0^-(z)+v_1^-(z)\lambda+\dots\right)\left(\dots+q_{a+1}^{(1)}(z)\lambda^{-a-1}+q_a^{(1)}(z)\lambda^{-a}\right)\right]^{[b,\infty)} \equiv \sum_{i=b}^{\infty} \tilde{p}_i^{(1)}(z)\lambda^i,$$

$$\tilde{p}_i^{(1)}(z) = q_a^{(1)}(z)v_{i+a}^-(z) + q_{a+1}^{(1)}(z)v_{i+a+1}^-(z) + q_{a+2}^{(1)}(z)v_{i+a+2}^-(z) + \dots,$$

$$\left|\tilde{p}_i^{(1)}(z)\right| \le C_0 C_u^+ C_u^- C_v^- e^{-\gamma i - 2\gamma a},$$

$$(BA)e(z,\lambda) = r_{z+}(\lambda)\sum_{i=b}^{\infty} \tilde{p}_i^{(1)}(z)\lambda^i \equiv \sum_{i=b}^{\infty} p_i^{(1)}(z)\lambda^i,$$

$$p_i^{(1)}(z) = v_0^+(z)\tilde{p}_i^{(1)}(z) + v_1^+(z)\tilde{p}_{i-1}^{(1)}(z) + \dots + v_{i-b}^+(z)\tilde{p}_b^{(1)}(z),$$

$$\left|p_i^{(1)}(z)\right| \le (i-b+1)C_0C_u^+C_u^-C_v^+C_v^- e^{-2\gamma a - \gamma i} = C_0C(i-b+1)e^{-2\gamma a-\gamma i}.$$

Утверждение леммы для $k = 1$ установлено.

Покажем теперь, что из справедливости (12) для $k = m$ следует справедливость (12) для $k = m + 1$. Пусть

$$\left[r_{z-}^{-1}(\lambda)\sum_{i=b}^{\infty} p_i^{(m)}(z)\lambda^i\right]^{(-\infty,-a]} = \left[(\dots + u_1^-(z)\lambda^{-1} + u_0^-(z))\right.$$
$$\times \left(p_b^{(m)}(z)\lambda^b + p_{b+1}^{(m)}(z)\lambda^{b+1} + \dots\right)\Big]^{(-\infty,-a]} \equiv \sum_{i=a}^{\infty}\tilde{q}_i^{(m+1)}(z)\lambda^{-i},$$

тогда

$$\tilde{q}_i^{(m+1)}(z) = u_{i+b}^-(z)p_b^{(m)}(z) + u_{i+b+1}^-(z)p_{b+1}^{(m)}(z) + \dots,$$

$$\left|\tilde{q}_i^{(m+1)}(z)\right| \le C_0^{2m}C^mC_u^- e^{-2\gamma(a+b)m-\gamma i}.$$

Далее, для коэффициентов разложения

$$r_{z-}(\lambda)\sum_{i=a}^{\infty}\tilde{q}_i^{(m+1)}(z)\lambda^{-i} = \left(\dots + u_1^+(z)\lambda^{-1} + u_0^+(z)\right)$$
$$\times \left(\dots + \tilde{q}_{a+1}^{(m+1)}(z)\lambda^{-a-1} + \tilde{q}_a^{(m+1)}(z)\lambda^{-a}\right) \equiv \sum_{i=a}^{\infty} q_i^{(m+1)}(z)\lambda^{-i}$$

имеем

$$q_i^{(m+1)}(z) = u_0^+(z)\tilde{q}_i^{(m+1)}(z) + u_1^+(z)\tilde{q}_{i-1}^{(m+1)}(z) + \dots + u_{i-a}^+(z)\tilde{q}_a^{(m+1)}(z),$$

$$\left|q_i^{(m+1)}(z)\right| \le C_0^{2m}C^mC_u^-C_u^+(i-a+1)e^{-2\gamma(a+b)m-\gamma i}.$$

Аналогично если

$$\left[r_{z+}^{-1}(\lambda)\sum_{i=a}^{\infty} q_i^{(m+1)}(z)\lambda^{-i}\right]^{[b,\infty)} = \left[(v_0^-(z) + v_1^-(z)\lambda + \dots)\right.$$
$$\times \left(\dots + q_{a+1}^{(m+1)}(z)\lambda^{-a-1} + q_a^{(m+1)}(z)\lambda^{-a}\right)\Big]^{[b,\infty)} \equiv \sum_{i=b}^{\infty}\tilde{p}_i^{(m+1)}(z)\lambda^i,$$

то

$$\tilde{p}_i^{(m+1)}(z) = q_a^{(m+1)}(z)v_{i+a}^-(z) + q_{a+1}^{(m+1)}(z)v_{i+a+1}^-(z) + q_{a+2}^{(m+1)}(z)v_{i+a+2}^-(z) + \dots,$$

$$\left|\tilde{p}_i^{(m+1)}(z)\right| \le C_0^{2m+1}C^mC_u^+C_u^-C_v^- e^{-2\gamma(a+b)m-\gamma i-2\gamma a}.$$

Если

$$((BA)^{m+1}e)(z,\lambda) = r_{z+}(\lambda)\sum_{i=b}^{\infty}\tilde{p}_i^{(m+1)}(z)\lambda^i \equiv \sum_{i=b}^{\infty} p_i^{(m+1)}(z)\lambda^i,$$

то

$$p_i^{(m+1)}(z) = v_0^+(z)\tilde{p}_i^{(m+1)}(z) + v_1^+(z)\tilde{p}_{i-1}^{(m+1)}(z) + \dots + v_{i-b}^+(z)\tilde{p}_b^{(m+1)}(z),$$

$$\left|p_i^{(m+1)}(z)\right| \le C_0^{2m+1}C^{m+1}(i-b+1)e^{-2\gamma(a+b)m-2\gamma a-\gamma i}.$$

Лемма 5 доказана.

Таким образом, $|(BA)^k e(z,1)| = O(e^{-\gamma k(a+b)/2})$. Отсюда сразу следует, что

$$J_1(n,k) = O(e^{-\gamma k(a+b)/2}). \tag{13}$$

Заметим, что функции $a_1(z)$, $h_1(z)$, $h_2(z)$, $H(z)$ аналитически продолжаются в область $D_\delta = \{|z-1| < \delta\} \backslash \{z = \operatorname{Re} z \geq 1\}$ при некотором $\delta > 0$. Пусть $K_\delta = \{z \in D_\delta,\ |\arg(z-1)| > \pi/4\}$. Для любого подмножества $A \subset K_\delta$, отделенного от единицы,

$$\sup_{z\in A} |h_1(z)| < 1 - \delta_1, \quad \sup_{z\in A} |h_2(z)| > 1 + \delta_1, \quad \delta_1 > 0.$$

Пусть l_3 — контур, полученный из контура $\{|\arg(z-1)| = \pi/4,\ |z-1| \leq \delta\}$ искривлением внутрь K_δ вблизи точки $z = 1$. Обозначим через l_4, l_5 отрезки прямых, соединяющие концы контуров l_1 и l_3, находящиеся соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Im} z < 0$.

Отметим, что введенные в формулировке теоремы 2 и непосредственно перед ней функции $a_j(z)$, $H_j(z)$, $h_j(z)$, $j = 1, 2$, $H(z)$, $\mu(z)$ допускают разложения в ряды по неотрицательным степеням величины $i(z-1)^{1/2}$ в некоторой окрестности единицы, разрезанной по лучу $\{z = \operatorname{Re} z \geq 1\}$. Это следует из определения этих функций и работ [4, 7]. Кроме того, $H_j(1) = H(1) = \mu(1) = 1$. Сделаем замену $t = i(z-1)^{1/2}$ (здесь выбирается главное значение корня) и для удобства сохраним прежние обозначения для функций h_j, H_j, a_j, $j = 1, 2$, μ, H, Λ_1. Ясно, что все эти функции (теперь уже как функции переменной t) будут аналитическими в окрестности нуля.

Пусть Γ_2, Γ, Γ_4, Γ_5, $\widetilde{L}_\delta$, $\widetilde{K}_\delta$ соответственно образы l_2, l_3, l_4, l_5, L_δ, K_δ в плоскости переменной t.

Для $t \in \widetilde{K}_\delta$, целых a и b имеют место неравенства

$$\left|\frac{1-\mu^{a+b}(t)H(t)}{t}\right| \leq \left|\frac{1-H(t)}{t}\right| + \left|H(t)\frac{1-\mu^{a+b}(t)}{t}\right| \leq \left|\frac{1-H(t)}{t}\right|$$
$$+\left|H(t)\frac{1-\mu(t)}{t}(1+\mu(t)+\cdots+\mu^{a+b-1}(t))\right| \leq \left|\frac{1-H(t)}{t}\right| + \left|(a+b)H(t)\frac{1-\mu(t)}{t}\right|.$$

Функции $(1-H(t))/t$, $(1-\mu(t))/t$ аналитичны в $\widetilde{K}_\delta$, непрерывны в замыкании $\widetilde{K}_\delta$, и $|1-\mu^{[a+b]+1}(t)| \geq |1-\mu^{a+b}(t)|$. Здесь квадратные скобки означают целую часть числа. Вместе с (8) это дает

$$|J_3(n,k)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_2} \frac{2\Lambda_1(t,k)(1-\mu^{a+b}(t)H(t))}{t(1-t^2)^{n+1}}\,dt\right|$$
$$= (a+b)O(e^{-\gamma(k+a+b)}) = O(e^{-\gamma(k+a+b)/2}). \tag{14}$$

Обозначим

$$\Pi(t) = -\frac{1}{\pi i}a_1(t)H^k(t)\frac{h_1^{ak+(k-1)b}(t)}{h_2^{ak+bk}(t)}\frac{(1-\mu^{a+b}(t)H(t))}{(1-t^2)^{n+1}t}.$$

В силу теоремы Коши и замечаний, сделанных выше, для

$$d(n) \equiv \int\limits_{\Gamma_4\cup\Gamma_5} \Pi(t)\,dt = \int\limits_{\Gamma_2} \Pi(t)\,dt - \int\limits_{\Gamma} \Pi(t)\,dt$$

имеем оценку

$$|d(n)| = O(e^{-\gamma k(a+b)}).$$

Пусть

$$\widetilde{J}_2(n,k) \equiv \int\limits_{\Gamma} \Pi(t)\,dt.$$

Тогда

$$J_2(n,k) = \widetilde{J}_2(n,k) + O(e^{-\gamma k(a+b)}).$$

Рассмотрим $\widetilde{J}_2(n,k)$. Имеем

$$\begin{aligned}
\widetilde{J}_2(n,k) = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} a_1(t)H^k(t)\frac{h_1^{ak+(k-1)b}(t)}{h_2^{ak+bk}(t)}\frac{(1-\mu^{a+b}(t)H(t))}{(1-t^2)^{n+1}t}\,dt \\
= -\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} a_1(t)H^k(t)\frac{h_1^{ak+(k-1)b}(t)(1-H(t))}{h_2^{ak+bk}(t)(1-t^2)^{n+1}t}\,dt \\
-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} a_1(t)H^{k+1}(t)\frac{h_1^{ak+(k-1)b}(t)(1-\mu^{a+b}(t))}{h_2^{ak+bk}(t)(1-t^2)^{n+1}t}\,dt \\
= \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\widetilde{D}(t)e^{n\tilde{f}(t)}\,dt + \frac{(a+b)}{\pi i}\int\limits_0^1\int\limits_{\Gamma} D(t)e^{nf(t)}\,dtdx \\
\equiv I_1(n) + (a+b)I_2(n). \quad (15)
\end{aligned}$$

Для получения последнего равенства мы воспользовались представлением

$$\frac{e^{(a+b)\ln\mu}-1}{(a+b)\ln\mu} = \int\limits_0^1 e^{x(a+b)\ln\mu}\,dx,$$

в двойном интеграле поменяли порядок интегрирования и ввели следующие обозначения:

$$\widetilde{D}(t) = -a_1(t)\frac{1-H(t)}{(1-t^2)t}, \qquad D(t) = a_1(t)H(t)\frac{\ln\mu(t)}{(1-t^2)t},$$

$$\tilde{f}(t) = (\tau_1+\tau_2-\tau_4)\ln h_1(t) - (\tau_1+\tau_2)\ln h_2(t) + \tau_5\ln H(t) - \ln(1-t^2),$$

$$\begin{aligned}
f(t) = (\tau_1+\tau_2+x\tau_3+(x-1)\tau_4)\ln h_1(t) \\
-(\tau_1+\tau_2+x\tau_3+x\tau_4)\ln h_2(t) + \tau_5\ln H(t) - \ln(1-t^2),
\end{aligned}$$

$$\tau_1 = \frac{ak}{n},\quad \tau_2 = \frac{bk}{n},\quad \tau_3 = \frac{a}{n},\quad \tau_4 = \frac{b}{n},\quad \tau_5 = \frac{k}{n}.$$

Здесь выбираем главное значение логарифма. Напомним [4, 7], что в окрестности нуля имеют место разложения

$$h_1(t) = 1+\psi_1 t+\psi_2 t^2+\dots,\quad h_2(t) = 1-\psi_1 t+\psi_2 t^2-\dots,\quad \text{где } \psi_1 = \sqrt{2/D\xi_1},$$

$$H(t) = 1+\eta_1 t+\eta_2 t^2+\dots.$$

Следовательно, при подходящем выборе δ значения функций $h_1(t)$, $h_2(t)$, $\mu(t)$, $H(t)$ отделены от нуля. При этом функции $\widetilde{D}(t)$, $D(t)$, $\tilde{f}(t)$, $f(t)$ аналитичны в области $\widetilde{K}_\delta$. Получим теперь асимптотические разложения для $I_1(n)$, $I_2(n)$ с помощью модификации метода перевала [1]. Рассмотрим уравнения

$$F_1(t,z_1,z_2,z_3,z_4,z_5) \equiv z_1\left(\frac{h_1'(t)}{h_1(t)}-\frac{h_2'(t)}{h_2(t)}\right) + z_2\left(\frac{h_1'(t)}{h_1(t)}-\frac{h_2'(t)}{h_2(t)}\right) - z_4\frac{h_1'(t)}{h_1(t)} + z_5\frac{H'(t)}{H(t)} + \frac{2t}{1-t^2} = 0, \quad (16)$$

$$F_2(t,z_1,z_2,z_3,z_4,z_5) \equiv z_1\left(\frac{h_1'(t)}{h_1(t)}-\frac{h_2'(t)}{h_2(t)}\right) + z_2\left(\frac{h_1'(t)}{h_1(t)}-\frac{h_2'(t)}{h_2(t)}\right) + xz_3\left(\frac{h_1'(t)}{h_1(t)}-\frac{h_2'(t)}{h_2(t)}\right) + z_4\left((x-1)\frac{h_1'(t)}{h_1(t)}-x\frac{h_2'(t)}{h_2(t)}\right) + z_5\frac{H'(t)}{H(t)} + \frac{2t}{1-t^2} = 0. \quad (17)$$

Функции $F_j(t,z_1,z_2,z_3,z_4,z_5)$, $j=1,2$, аналитичны в точке $\mathbf{0}=(0,0,0,0,0,0)$, $F_j(\mathbf{0})=\mathbf{0}$, $\frac{\partial F_j(\mathbf{0})}{\partial t}=2$, и, следовательно, по теореме о неявной функции существуют решения $t_1(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5)$ и $t_2(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5)$ уравнений (16) и (17) соответственно, представимые в некоторой окрестности $\Delta=\{|z_j|<\tau,\ j=1,2,3,4,5\}$ в виде сходящихся рядов по степеням z_1, z_2, z_3, z_4, z_5. Заметим, что

$$\tilde{f}'(t)=F_1(t,\tau_1,\tau_2,0,\tau_4,\tau_5), \quad f'(t)=F_2(t,\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4,\tau_5).$$

Таким образом, разложения для точек перевала $\tilde{t}_0$, t_0 функций $\tilde{f}(t)$, $f(t)$ соответственно имеют вид

$$\tilde{t_0}=t_1(\tau_1,\tau_2,0,\tau_4,\tau_5)=-\psi_1\tau_1-\psi_1\tau_2-\frac{\psi_1}{2}\tau_4-\frac{\eta_1}{2}\tau_5+O((\tau_1+\tau_2)^2),$$

$$t_0=t_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4,\tau_5)=-\psi_1\tau_1-\psi_1\tau_2-x\psi_1\tau_3-\frac{2x-1}{2}\psi_1\tau_4-\frac{\eta_1}{2}\tau_5+O((\tau_1+\tau_2)^2).$$

Введем следующие обозначения:

$$\ln h_1(t)\equiv\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\alpha_3 t^3+\ldots,$$

где

$$\alpha_1=\psi_1, \quad \alpha_2=\psi_2-\frac{\psi_1^2}{2}, \quad \alpha_3=\psi_3-\psi_1\psi_2+\frac{1}{3}\psi_1^3.$$

Далее,

$$\ln h_2(t)=\ln h_1(-t)=-\alpha_1 t+\alpha_2 t^2-\alpha_3 t^3+\ldots,$$

$$\ln H(t)\equiv\tilde{\alpha_1}t+\tilde{\alpha_2}t^2+\tilde{\alpha_3}t^3+\ldots, \quad \ln(1-t^2)=-t^2-\frac{t^4}{2}-\frac{t^6}{3}-\ldots.$$

Следовательно,

$$\tilde{f}(t)=(2\psi_1\tau_1+2\psi_1\tau_2-\psi_1\tau_4+\eta_1\tau_5)t+(1-\alpha_2\tau_4+\tilde{\alpha_2}\tau_5)t^2+\ldots,$$

$$f(t)=(2\psi_1\tau_1+2\psi_1\tau_2+2\psi_1x\tau_3+(2x-1)\psi_1\tau_4+\eta_1\tau_5)t+(1-\alpha_2\tau_4+\tilde{\alpha_2}\tau_5)t^2+\ldots,$$

$$\tilde{f}(\tilde{t}_0)=-\left(\psi_1\tau_1+\psi_1\tau_2-\frac{\psi_1}{2}\tau_4+\frac{\eta_1}{2}\tau_5\right)^2+O((\tau_1+\tau_2)^3),$$

$$f(t_0)=-\left(\psi_1\tau_1+\psi_1\tau_2-\psi_1x\tau_3+\frac{2x-1}{2}\psi_1\tau_4+\frac{\eta_1}{2}\tau_5\right)^2+O((\tau_1+\tau_2)^3),$$

$$\tilde{f}''(\tilde{t}_0) = 2 - 2\alpha_2\tau_4 + \tilde{\alpha_2}\tau_5 + O((\tau_1+\tau_2)^2),$$

$$f''(t_0) = 2 - 2\alpha_2\tau_4 + \tilde{\alpha_2}\tau_5 + O((\tau_1+\tau_2)^2).$$

Применим к $I_1(n)$, $I_2(n)$ модифицированный метод перевала. Поскольку $\tilde{f}'(\tilde{t}_0) = 0$, $f'(t_0) = 0$, каждая пара кривых $\operatorname{Re}\tilde{f}(t) = \tilde{f}(\tilde{t}_0)$, $\operatorname{Re} f(t) = f(t_0)$ делит окрестности точек $\tilde{t}_0$, t_0 соответственно на четыре прямоугольных сектора, в которых поочередно $\operatorname{Re}\tilde{f}(t) < \tilde{f}(\tilde{t}_0)$, $\operatorname{Re} f(t) < f(t_0)$ и $\operatorname{Re}\tilde{f}(t) > \tilde{f}(\tilde{t}_0)$, $\operatorname{Re} f(t) > f(t_0)$. При достаточно больших n концы контура Γ лежат внутри секторов $\operatorname{Re}\tilde{f}(t) < \tilde{f}(\tilde{t}_0)$, $\operatorname{Re} f(t) < f(t_0)$. Изменим в $I_1(n)$, $I_2(n)$ контур Γ таким образом, чтобы, оставаясь внутри этих секторов, он проходил через точки $\tilde{t}_0$, t_0.

Пусть $\tilde{g}_{l,s}$, $g_{l,s}$ — коэффициенты при z^l в произведениях

$$\frac{1}{s!}(\widetilde{D}_0 + \widetilde{D}_1 z + \dots)(\tilde{f}_1 z + \tilde{f}_2 z^2 + \dots)^s, \quad \frac{1}{s!}(D_0 + D_1 z + \dots)(f_1 z + f_2 z^2 + \dots)^s$$

соответственно, где

$$\widetilde{D}_m = \frac{\widetilde{D}^{(m)}(\tilde{t}_0)}{m!}, \quad \tilde{f}_m = \frac{\tilde{f}^{(m+2)}(\tilde{t}_0)}{(m+2)!},$$

$$D_m = \frac{D^{(m)}(t_0)}{m!}, \quad f_m = \frac{f^{(m+2)}(t_0)}{(m+2)!}, \quad m = 0, 1, \dots.$$

Тогда при любом $q \geq 1$ метод Лапласа оценки интегралов дает

$$I_1(n) = \sum_{l=0}^{q-1} \frac{1}{n^{l+1/2}} \tilde{Q}_l e^{n\tilde{f}(\tilde{t}_0)} + \frac{1}{n^{q+1/2}} \widetilde{R}_q e^{n\tilde{f}(\tilde{t}_0)}, \tag{18}$$

$$I_2(n) = \sum_{l=0}^{q-1} \frac{1}{n^{l+1/2}} \int_0^1 Q_l e^{nf(t_0)} dx + \frac{1}{n^{q+1/2}} \int_0^1 R_q e^{nf(t_0)} dx, \tag{19}$$

$$\widetilde{Q}_l = \frac{(-1)^{1/2}}{\pi} \sum_{s=0}^{2l} \tilde{g}_{2l,s} (-\tilde{f}_0)^{-s-l-1/2} \Gamma(l+s+1/2), \tag{20}$$

$$Q_l = \frac{(-1)^{1/2}}{\pi} \sum_{s=0}^{2l} g_{2l,s} (-f_0)^{-s-l-1/2} \Gamma(l+s+1/2). \tag{21}$$

Остаточные члены $\widetilde{R}_q$, R_q ограничены при достаточно малом τ. Коэффициенты $\widetilde{Q}_l$, Q_l можно представить в виде сходящихся рядов по степеням τ_i, $i = 1, \dots, 5$. Обозначим

$$d_l(a, b, n, k) = \widetilde{Q}_l e^{n\tilde{f}(\tilde{t}_0)} + (a+b) \int_0^1 Q_l e^{nf(t_0)}\, dx, \tag{22}$$

$$r_l(a, b, n, k) = \widetilde{R}_q e^{n\tilde{f}(\tilde{t}_0)} + (a+b) \int_0^1 R_q e^{nf(t_0)}\, dx. \tag{23}$$

Мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Для произвольного целого* $q \geq 1$, $k \geq 1$, $ak = o(n)$, $bk = o(n)$, $a = a(n) \to \infty$, $b = b(n) \to \infty$ $(n \to \infty)$

$$\mathbf{P}\big(\eta_n^{(1)} = k\big) = \sum_{l=0}^{q-1} \frac{d_l(a,b,n,k)}{n^{l+1/2}} + \frac{r_q(a,b,n,k)}{n^{q+1/2}} + O(e^{-\gamma(k+a+b)}),$$

где $d_l(a,b,n,k)$, $r_l(a,b,n,k)$ *определяются формулами* (22), (23).

Полученное асимптотическое разложение носит предварительный характер, так как величины $d_l(a,b,n,k)$, $r_q(a,b,n,k)$ зависят от n. Дальнейшее уточнение зависимости этих коэффициентов от n требует знания скорости роста границ.

Наибольший интерес представляет случай «нормального» роста границ. Предположим, что $k = \mathrm{const}$, $k \geq 1$, $a = x_1\sqrt{n}$, $b = x_2\sqrt{n}$. Как отмечалось, предельная теорема для числа пересечений полосы в этой ситуации доказана в [2]. Теперь наша задача состоит в нахождении полных асимптотических разложений. В последующих формулах используется переменная s, равная всегда $s = i_1 + i_2$, где i_1, i_2 принимают значения $0, 1, 2 \ldots$. В наших условиях величины $e^{n\tilde f(\tilde t_0)}$, $e^{nf(t_0)}$, $\widetilde{Q}_l$, Q_l допускают разложения по степеням $n^{-1/2}$:

$$e^{n\tilde f(\tilde t_0)} = e^{-\psi_1^2(kx_1 + \frac{2k-1}{2}x_2)^2}\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{n^{j/2}}\sum_{s\in N_j}\tilde m_{i_1 i_2}^{(j)}(k)x_1^{i_1}x_2^{i_2}\right), \tag{24}$$

$$e^{nf(t_0)} = e^{-\psi_1^2((k+x)x_1 + \frac{2k+2x-1}{2}x_2)^2}\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{n^{j/2}}\sum_{s\in N_j} m_{i_1 i_2}^{(j)}(k,x)x_1^{i_1}x_2^{i_2}\right), \tag{25}$$

$$\widetilde{Q}_l = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{n^{j/2}}\sum_{s=j}\tilde d_{i_1 i_2}^{(jl)}(k)x_1^{i_1}x_2^{i_2}, \tag{26}$$

$$Q_l = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{n^{j/2}}\sum_{s=j} d_{i_1 i_2}^{(jl)}(k,x)x_1^{i_1}x_2^{i_2}, \tag{27}$$

где $N_j = \{j + 2i; i = 1, 2, \ldots, j\}$.

Заметим, что $\widetilde{m}_{i_1 i_2}^{(j)}(k)$, $m_{i_1 i_2}^{(j)}(k,x)$, $\tilde d_{i_1 i_2}^{(jl)}(k)$, $d_{i_1 i_2}^{(jl)}(k,x)$ являются многочленами степени не выше s по каждому аргументу. Подставим теперь выражения (24)–(27) в (18) и (19), выполним умножение рядов и перегруппируем слагаемые по степеням $n^{-1/2}$. В результате получаем разложения вида

$$I_1(n) = e^{-\psi_1^2(kx_1 + \frac{2k-1}{2}x_2)^2}\left(\sum_{l=0}^{q-1}\frac{1}{n^{(l+1)/2}}\sum_{s\in M_l'} L_{i_1 i_2}^{(1l)}(k)x_1^{i_1}x_2^{i_2} + \frac{1}{n^{(q+1)/2}}\Psi_q^{(1)}(k,x_1,x_2)\right), \tag{28}$$

$$I_2(n) = \sum_{l=0}^{q-1}\frac{1}{n^{(l+1)/2}}\sum_{s\in M_l'} x_1^{i_1}x_2^{i_2}\int_0^1 L_{i_1 i_2}^{(2l)}(k,x)e^{-\psi_1^2((k+x)x_1 + \frac{2k+2x-1}{2}x_2)^2}\,dx + \frac{1}{n^{(q+1)/2}}\int_0^1 \Psi_q^{(2)}(k,x_1,x_2,x)e^{-\psi_1^2((k+x)x_1 + \frac{2k+2x-1}{2}x_2)^2}dx, \tag{29}$$

где $L_{00}^{(10)} = L_{00}^{(20)} = \frac{2\psi_1}{\sqrt{\pi}}$. Множества M_l' определяются следующим образом: $M_l' = \{2i; i = 0, 1, 2, \dots, \frac{3(l-1)}{2}\}$ для нечетных номеров l и $M_l' = \{2i+1; i = 0, 1, 2, \dots, \frac{3(l-1)-1}{2}\}$ для четных l. Можно показать, что при некотором $C > 0$ для нечетных значений q

$$\left|\Psi_q^{(1)}(k, x_1, x_2)\right| \le C(k(x_1 + x_2))^{\frac{3(q-1)}{2}} \tag{30}$$

и для четных q

$$\left|\Psi_q^{(1)}(k, x_1, x_2)\right| \le C(k(x_1 + x_2))^{\frac{3(q-1)-1}{2}}. \tag{31}$$

Последний интеграл в (29) допускает следующие оценки: при нечетном q

$$\left|\int_0^1 \Psi_q^{(2)}(k, x_1, x_2, x) e^{-\psi_1^2((k+x)x_1 + \frac{2k+2x-1}{2}x_2)^2}\, dx\right| \\ \le C(k(x_1 + x_2))^{\frac{3(q-1)}{2}} e^{-\psi_1^2(kx_1 + \frac{2k-1}{2}x_2)^2}$$

и при четном q

$$\left|\int_0^1 \Psi_q^{(2)}(k, x_1, x_2, x) e^{-\psi_1^2((k+x)x_1 + \frac{2k+2x-1}{2}x_2)^2}\, dx\right| \\ \le C(k(x_1 + x_2))^{\frac{3(q-1)-1}{2}} e^{-\psi_1^2(kx_1 + \frac{2k-1}{2}x_2)^2}.$$

Обозначим

$$I_1(n) + (a+b)I_2(n) = I_1(n) + \sqrt{n}(x_1 + x_2)I_2(n) \\ \equiv \sum_{l=0}^{q-1} \frac{1}{n^{l/2}} \sum_{s \in M_l} U_{i_1 i_2}^{(l)}(k) x_1^{i_1} x_2^{i_2} + \frac{1}{n^{q/2}} \Psi_q(k, x_1, x_2), \tag{32}$$

где

$$\Psi_q(k, x_1, x_2) = \Psi_q^{(1)}(k, x_1, x_2) e^{-\psi_1^2(kx_1 + \frac{2k-1}{2}x_2)^2} + \sqrt{n}(x_1 + x_2) \\ \times \int_0^1 \Psi_{q+1}^{(2)}(k, x_1, x_2, x) e^{-\psi_1^2((k+x)x_1 + \frac{2k+2x-1}{2}x_2)^2}\, dx. \tag{33}$$

Для нечетных l и q

$$M_l = \left\{2i; i = 0, 1, 2, \dots, \frac{3l+1}{2}\right\}, \tag{34}$$

$$|\Psi_q(k, x_1, x_2)| \le Ck^{\frac{3q-1}{2}}(x_1 + x_2)^{\frac{3q+1}{2}} e^{-\psi_1^2(kx_1 + \frac{2k-1}{2}x_2)^2}. \tag{35}$$

Если l, q четные или $l = 0$, то

$$M_l = \left\{2i+1; i = 0, 1, 2, \dots, \frac{3l}{2}\right\}, \tag{36}$$

$$|\Psi_q(k, x_1, x_2)| \le k^{\frac{3q}{2}}(x_1 + x_2)^{\frac{3q}{2}+1} e^{-\psi_1^2(kx_1 + \frac{2k-1}{2}x_2)^2}. \tag{37}$$

Главный член разложения (32) равен

$$U_{10}^{(0)}x_1 + U_{01}^{(0)}x_2 = \frac{x_1+x_2}{\sqrt{\pi}} 2\psi_1 \int\limits_0^1 \exp\left\{-\psi_1^2\left((k+x)x_1 + \frac{2k+2x-1}{2}x_2\right)^2\right\}dx$$
$$= 2(\Phi_{0,\sigma}(2(k+1)(x_1+x_2)-x_2) - \Phi_{0,\sigma}(2k(x_1+x_2)-x_2)), \quad (38)$$

где $\Phi_{0,\sigma}(x)$ — функция нормального распределения с параметрами 0 и σ.

Подставляя (13), (14), (32) в (9), получаем асимптотическое разложение для $\mathbf{P}\big(\eta_n^{(1)} = k\big)$ в указанном случае. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $k = \mathrm{const}$, $k \geq 1$, $a = x_1\sqrt{n}$, $b = x_2\sqrt{n}$, $n \to \infty$. Тогда при $q \geq 1$*

$$\mathbf{P}(\eta_n^{(1)} = k) = \sum_{l=0}^{q-1} \frac{1}{n^{l/2}} \sum_{i_1+i_2\in M_l} U_{i_1 i_2}^{(l)}(k) x_1^{i_1} x_2^{i_2} + \frac{1}{n^{q/2}}\Psi_q(k, x_1, x_2), \quad (39)$$

где M_l, $U_{i_1 i_2}^{(l)}(k)$, $\Psi_q(k, x_1, x_2)$ определяются соотношениями (32)–(37), *главный член разложения* (39) *вычислен в* (38).

Займемся нахождением полных асимптотических разложений распределения числа пересечений в случае, когда ширина полосы растет медленнее, чем $\sqrt{n}$. Предположим, что $ak = o(\sqrt{n})$, $bk = o(\sqrt{n})$, $a = a(n) \to \infty$, $b = b(n) \to \infty$, $n \to \infty$. Обозначим $i = (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$, и пусть в отличие от предыдущих рассмотрений $s = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5$, где i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 принимают значения $0, 1, 2, \ldots$. Функции $n\tilde{f}(t_0)$, $nf(t_0)$ допускают разложения вида

$$n\tilde{f}(\tilde{t}_0) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=j+1} \tilde{\alpha}_i^{(j)} \frac{(ak)^{i_1}(bk)^{i_2}a^{i_3}b^{i_4}k^{i_5}}{n^j}, \quad (40)$$

$$nf(t_0) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=j+1} \alpha_i^{(j)}(x) \frac{(ak)^{i_1}(bk)^{i_2}a^{i_3}b^{i_4}k^{i_5}}{n^j}. \quad (41)$$

Заметим, что при указанной скорости роста a, b, k все члены рядов (40), (41) стремятся к нулю и, следовательно, имеют место разложения

$$e^{n\tilde{f}(\tilde{t}_0)} \equiv 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j+1\leq s\leq 2j} \tilde{\beta}_i^{(j)} \frac{(ak)^{i_1}(bk)^{i_2}a^{i_3}b^{i_4}k^{i_5}}{n^j}, \quad (42)$$

$$e^{nf(t_0)} \equiv 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j+1\leq s\leq 2j} \beta_i^{(j)}(x) \frac{(ak)^{i_1}(bk)^{i_2}a^{i_3}b^{i_4}k^{i_5}}{n^j}. \quad (43)$$

Функции $\widetilde{Q}_l$, Q_l также допускают разложения вида

$$\widetilde{Q}_l \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=j} \tilde{\nu}_i^{(jl)} \frac{(ak)^{i_1}(bk)^{i_2}a^{i_3}b^{i_4}k^{i_5}}{n^j}, \quad (44)$$

$$Q_l \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=j} \nu_i^{(jl)}(x) \frac{(ak)^{i_1}(bk)^{i_2}a^{i_3}b^{i_4}k^{i_5}}{n^j}. \quad (45)$$

Коэффициенты $\tilde{\beta}_i^{(j)}$, $\beta_i^{(j)}(x)$, $\tilde{\nu}_i^{(jl)}$, $\nu_i^{(jl)}(x)$ от n не зависят. Кроме того, $\beta_i^{(j)}(x)$, $\nu_i^{(jl)}(x)$ являются многочленами от x степени не выше s, а $\tilde{\nu}_{\mathbf{0}}^{(00)} = \nu_{\mathbf{0}}^{(00)}(x) = 2\psi_1/\sqrt{\pi}$, где $\mathbf{0} = (0,0,0,0,0)$.

Подставим результаты непосредственного перемножения рядов (42) и (44), (43) и (45) соответственно в (18) и (19). Проведем перегруппировку слагаемых по степеням n. Полученные результаты обозначим через

$$I_1(n) \equiv \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{0\le s\le 2l} \tilde{\rho}_i^{(l)} \frac{(ak)^{i_1}(bk)^{i_2}a^{i_3}b^{i_4}k^{i_5}}{n^{l+1/2}} + O\left(\frac{((a+b)k)^{2q}}{n^{q+1/2}}\right), \tag{46}$$

$$I_2(n) \equiv \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{0\le s\le 2l} \rho_i^{(l)} \frac{(ak)^{i_1}(bk)^{i_2}a^{i_3}b^{i_4}k^{i_5}}{n^{l+1/2}} + O\left(\frac{((a+b)k)^{2q}}{n^{q+1/2}}\right). \tag{47}$$

Далее,

$$I_1(n) + (a+b)I_2(n) \equiv \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{0\le s\le 2l+1} \kappa_i^{(l)} \frac{(ak)^{i_1}(bk)^{i_2}a^{i_3}b^{i_4}k^{i_5}}{n^{l+1/2}} + O\left(\frac{(a+b)^{2q+1}k^{2q}}{n^{q+1/2}}\right). \tag{48}$$

Окончательно подстановка (13), (14), (48) в (9) дает асимптотическое разложение для $\mathbf{P}\bigl(\eta_n^{(1)} = k\bigr)$. Таким образом, доказана

Теорема 5. *Пусть $k \ge 1$, $ak = o(\sqrt{n})$, $bk = o(\sqrt{n})$, $a = a(n) \to \infty$, $b = b(n) \to \infty$, $n \to \infty$. Тогда для любого $q \ge 1$*

$$\mathbf{P}\bigl(\eta_n^{(1)} = k\bigr) = \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{0\le s\le 2l+1} \kappa_i^{(l)} \frac{(ak)^{i_1}(bk)^{i_2}a^{i_3}b^{i_4}k^{i_5}}{n^{l+1/2}} + O\left(\frac{(a+b)^{2q+1}k^{2q}}{n^{q+1/2}}\right), \tag{49}$$

где главный член разложения (49) *равен* $\frac{2\psi_1(a+b)}{\sqrt{\pi n}}$, *коэффициенты* $\kappa_i^{(l)}$ *определяются цепочкой формул* (40)–(48), $i = (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$, $s = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5$, $i_j \ge 0$, $j = 1, \dots, 5$.

Рассмотрим последний случай, когда $(ak)/\sqrt{n} \to \infty$, $(bk)/\sqrt{n} \to \infty$. Буквой s, как и при доказательстве теоремы 6, будем обозначать сумму используемых индексов, $s = i_1+i_2+i_3+i_4+i_5$, $i = (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$. Пусть m равно наибольшему индексу j, при котором хотя бы одно слагаемое во внутренней сумме в (40) (а также и в (41)) не стремится к нулю при $n \to \infty$. Полагаем $m = \infty$, если таких чисел j не найдется. Ясно, что в широких условиях (например, при $\max(ak, bk) \le Cn^{1-\varepsilon}, \varepsilon > 0$) число m конечно.

Определим функцию d следующим образом: для $s = j+1$ полагаем $d(i,j) = 1$, если $(ak)^{i_1}(bk)^{i_2}a^{i_3}b^{i_4}k^{i_5}/n^j \to 0$ при $n \to \infty$, и $d(i,j) = 0$ в противном случае.

Обозначим

$$\widetilde{K}(a,b,k,n) \equiv \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=j+1} \tilde{\alpha}_i^{(j)} (1 - d(i,j)) \frac{(ak)^{i_1}(bk)^{i_2}a^{i_3}b^{i_4}k^{i_5}}{n^j}, \tag{50}$$

$$K(a,b,k,n,x) \equiv \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=j+1} \alpha_i^{(j)}(x) (1 - d(i,j)) \frac{(ak)^{i_1}(bk)^{i_2}a^{i_3}b^{i_4}k^{i_5}}{n^j}. \tag{51}$$

Тогда

$$\exp\{n\tilde{f}(\tilde{t}_0)\} = e^{\widetilde{K}(a,b,k,n)} \exp\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=j+1} \tilde{\alpha}_i^{(j)} d(i,j) \frac{(ak)^{i_1}(bk)^{i_2}a^{i_3}b^{i_4}k^{i_5}}{n^j}\right\} \tag{52}$$

и аналогично

$$\exp\{nf(t_0)\} = e^{K(a,b,k,n,x)} \exp\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=j+1} \alpha_i^{(j)}(x) d(i,j) \frac{(ak)^{i_1}(bk)^{i_2} a^{i_3} b^{i_4} k^{i_5}}{n^j}\right\}. \tag{53}$$

Экспоненты, участвующие в правых частях этих формул, могут быть также разложены в ряды:

$$\exp\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=j+1} \tilde{\alpha}_i^{(j)} d(i,j) \frac{(ak)^{i_1}(bk)^{i_2} a^{i_3} b^{i_4} k^{i_5}}{n^j}\right\} \equiv 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j+1 \le s \le 2j} \tilde{u}_i^{(j)} \frac{(ak)^{i_1}(bk)^{i_2} a^{i_3} b^{i_4} k^{i_5}}{n^j} \tag{54}$$

и аналогично

$$\exp\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=j+1} \alpha_i^{(j)}(x) d(i,j) \frac{(ak)^{i_1}(bk)^{i_2} a^{i_3} b^{i_4} k^{i_5}}{n^j}\right\} \equiv 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j+1 \le s \le 2j} u_i^{(j)}(x) \frac{(ak)^{i_1}(bk)^{i_2} a^{i_3} b^{i_4} k^{i_5}}{n^j}. \tag{55}$$

Заметим, что $\widetilde{Q}_l$, Q_l, в свою очередь, допускают разложения вида

$$\widetilde{Q}_l = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=j} \tilde{v}_i^{(jl)} \frac{(ak)^{i_1}(bk)^{i_2} a^{i_3} b^{i_4} k^{i_5}}{n^j}, \tag{56}$$

$$Q_l = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=j} v_i^{(jl)}(x) \frac{(ak)^{i_1}(bk)^{i_2} a^{i_3} b^{i_4} k^{i_5}}{n^j}, \tag{57}$$

где $\tilde{v}_{\mathbf{0}}^{(00)} = v_{\mathbf{0}}^{(00)} = 2\psi_1/\sqrt{\pi}$. Подставим (54), (55) в (52), (53), а затем полученные результаты вместе с (56), (57) подставим в (18), (19). Перемножив соответствующие ряды, получим разложения вида

$$I_1(n) \equiv e^{\widetilde{K}(a,b,k,n)} \left(\sum_{l=0}^{q-1} \sum_{0 \le s \le 2l} \widetilde{A}_i^{(l)} \frac{(ak)^{i_1}(bk)^{i_2} a^{i_3} b^{i_4} k^{i_5}}{n^{l+1/2}} + O\left(\frac{((a+b)k)^{2q}}{n^{q+1/2}}\right)\right), \tag{58}$$

$$I_2(n) \equiv \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{0 \le s \le 2l} \int_0^1 e^{K(a,b,k,n,x)} A_i^{(l)}(x)\, dx \frac{(ak)^{i_1}(bk)^{i_2} a^{i_3} b^{i_4} k^{i_5}}{n^{l+1/2}} + \int_0^1 e^{K(a,b,k,n,x)} A_i^{(q)}(x)\, dx\, O\left(\frac{((a+b)k)^{2q}}{n^{q+1/2}}\right). \tag{59}$$

Собирая полученные разложения в соответствии с формулами (9), (13)–(15), приходим к асимптотическому разложению для $\mathbf{P}\big(\eta_n^{(1)} = k\big)$. Тем самым доказана следующая

Теорема 6. *Пусть* $\frac{ak}{\sqrt{n}} \to \infty$, $\frac{bk}{\sqrt{n}} \to \infty$, $n \to \infty$. *Тогда для любого* $q \geq 1$, $k \geq 1$

$$\mathbf{P}\big(\eta_n^{(1)} = k\big) = \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{0\le s\le 2l} \left(e^{\widetilde{K}(a,b,k,n)} \widetilde{A}_i^{(l)} + (a+b) \int\limits_0^1 e^{K(a,b,k,n,x)} A_i^{(l)}(x)\, dx \right)$$
$$\times \frac{(ak)^{i_1} (bk)^{i_2} a^{i_3} b^{i_4} k^{i_5}}{n^{l+1/2}} + \left(e^{\widetilde{K}(a,b,k,n)} + \int\limits_0^1 e^{K(a,b,k,n,x)}\, dx \right) O\left(\frac{(a+b)^{2q+1} k^{2q}}{n^{q+1/2}} \right). \tag{60}$$

Коэффициенты $\widetilde{A}_i^{(l)}$, $A_i^{(l)}(x)$ *определяются цепочкой формул* (52)–(59), $\widetilde{A}_{\mathbf{0}}^{(0)} = A_{\mathbf{0}}^{(0)}(x) = 2\psi_1/\sqrt{\pi}$. *Функции* $\widetilde{K}(a,b,k,n)$, $K(a,b,k,n,x)$ *определены в* (50), (51); *при* $n \to \infty$ *они обе равны* $-\psi_1^2 \frac{(a+b)^2 k^2}{n}(1+o(1))$.

Заметим, что явный вид остаточных членов в теоремах 4–6 позволяет использовать указанные результаты для получения интегральных теорем по растущим множествам значений k.

Авторы благодарны Б. А. Рогозину, внимательно прочитавшему рукопись статьи и сделавшему ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дуб Дж.* Вероятностные процессы. М.: Изд-во иностр. лит., 1956.
2. *Лотов В. И., Орлова Н. Г.* О числе пересечений полосы траекториями случайного блуждания // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 6. С. 135–146.
3. *Боровков А. А.* Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 5. С. 645–694.
4. *Лотов В. И.* Асимптотический анализ распределений в двуграничных задачах. 1 // Теория вероятностей и ее применения. 1979. Т. 24, № 3. С. 475–485.
5. *Лотов В. И.* Асимптотический анализ распределений в двуграничных задачах. 2 // Теория вероятностей и ее применения. 1979. Т. 24, № 4. С. 873–879.
6. *Лотов В. И.* Об одном подходе в двуграничных задачах // Статистика и управление случайными процессами. М.: Наука, 1989. С. 117–121.
7. *Боровков А. А., Рогозин Б. А.* Граничные задачи для некоторых двумерных случайных блужданий // Теория вероятностей и ее применения. 1964. Т. 9, № 3. С. 401–430.

Статья поступила 18 февраля 2003 г.

Лотов Владимир Иванович, Орлова Нина Геннадьевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
lotov@math.nsc.ru