Сибирский математический журнал
Июль—август, 2004. Том 45, № 4

УДК 517.55

О РАДИУСЕ БОРА ДЛЯ ДВУХ КЛАССОВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Л. А. Айзенберг, А. Видрас

Аннотация: С помощью многомерных аналогов неравенств Е. Ландау и Ф. Винера для тейлоровских коэффициентов специальных классов голоморфных функций на области Рейнхарта получены оценки радиуса Бора.

Ключевые слова: радиус Бора, гиперконус.

0. О радиусе Бора

Теорема Бора о степенных рядах [1–4] может быть сформулирована (после уточнений М. Рисса, И. Шура и Ф. Винера) следующим образом: *если степенной ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{0.1}$$

сходится в единичном круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ *и модуль его суммы меньше* 1, *то*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k| < 1$$

в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1/3\}$ *и постоянная* $1/3$ *неулучшаема.* В работах [5–7] содержатся первые результаты, полученные в направлении многомерных аналогов этой теоремы. Однако, как отмечено в [7], некоторые доказательства в [5, 6] имеют неточности. Для $p > 0$ рассмотрим область

$$\mathscr{D}_n^p = \{z \in \mathbb{C}^n : \ |z_1|^p + \dots + |z_n|^p < 1\}$$

в $\mathbb{C}^n$. Для $p = \infty$ область $\mathscr{D}_n^\infty$ — это единичный поликруг

$$U_n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, \ j = 1, \dots, n\}.$$

Пусть $\mathscr{D}$ — полная область Рейнхарта, т. е. ограниченная полная n-круговая область в $\mathbb{C}^n$. Обозначим через $R(\mathscr{D})$ наибольшее из неотрицательных чисел r, обладающих следующим свойством: если степенной ряд

$$\sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha z^\alpha, \tag{0.2}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и все α_j суть неотрицательные целые, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|$, сходится в $\mathscr{D}$ и удовлетворяет там оценке

$$\Big| \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha z^\alpha \Big| \leq 1, \tag{0.3}$$

то

$$\sum_{|\alpha|\geq 0} |c_\alpha z^\alpha| < 1 \tag{0.4}$$

в гомотетичной области $r\mathscr{D}$. Число $R(\mathscr{D})$ называют *радиусом Бора*.

Х. Боас и Д. Хавинсон показали в [7], что в случае единичного поликруга U_n выполнены следующие оценки радиуса Бора $R(U_n)$ для $n > 1$:

$$\frac{1}{3\sqrt{n}} < R(U^n) < \frac{2\sqrt{\log n}}{\sqrt{n}}. \tag{0.5}$$

С другой стороны, Л. А. Айзенберг в [8] установил, что радиус Бора гиперконуса $\mathscr{D}_n^1$ находится в промежутке

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{e}} < R\big(\mathscr{D}_n^1\big) \leq \frac{1}{3}.$$

Последние две оценки обобщены в [9] на класс областей $\mathscr{D}_n^p$ следующим образом:

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{3}} n^{1-\frac{1}{p}}} \leq R(\mathscr{D}_n^p) < 3\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{1-\frac{1}{p}}, \quad \text{если } 1 \leq p \leq 2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < R(\mathscr{D}_n^p) < 3\left(\frac{\sqrt{\ln n}}{\sqrt{n}}\right), \quad \text{если } 2 \leq p \leq \infty.$$

В ряде недавних работ [10–13] исследовался вопрос о существовании радиуса Бора для произвольных базисов в пространствах голоморфных функций на комплексных многообразиях или даже в пространствах решений эллиптических уравнений второго порядка. Другие вопросы, касающиеся феномена радиуса Бора, рассмотрены в [14–17]. В [18] найдена интерпретация теоремы Бора в области теории операторов. Недавно в этом направлении наблюдалась наибольшая активность [19–22]. В частности, хотелось бы отметить статьи [21, 22]. В первой из них дано применение радиуса Бора к алгебре некоммутативных операторов. Во второй содержится гипотеза о связи радиуса Бора и расстояния Банаха — Мазура между банаховыми пространствами. Получены серьезные результаты, поддерживающие эту гипотезу.

В настоящей работе мы исследуем вопрос о радиусе Бора для двух классов голоморфных функций, определенных на области Рейнхарта $\mathscr{D} \subset \mathbb{C}^n$. Будем писать $f \in \mathscr{H}_0(\mathscr{D})$, если и только если f голоморфна в $\mathscr{D}$ и удовлетворяет условию $f(0) = 0$. Радиус Бора для класса $\mathscr{H}_0(\mathscr{D})$ обозначается через $R_1(\mathscr{D})$.

Второй класс голоморфных функций, определенных на $\mathscr{D} \subset \mathbb{C}^n$, обозначается через $B(\mathscr{D})$. Он состоит из голоморфных функций, которые могут быть разложены в $\mathscr{D}$ в ряд (0.2), удовлетворяют там неравенству $|f(z)| \leq 1$ и такие, что в ряде (0.2) для каждого $c_\alpha \neq 0$ в разложении (0.2) отсутствует моном $c_\beta z^\beta$, удовлетворяющий равенству $|\beta| = m|\alpha|$ для некоторого целого $m > 1$. Здесь, как обычно, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Радиус Бора для класса $B(\mathscr{D})$ обозначается через $R(B(\mathscr{D}))$.

Отметим, что классическое доказательство теоремы Бора основано на оценках тейлоровских коэффициентов либо на неравенстве Ландау [2]: если $f(z)$ — голоморфная функция в единичном круге U и $|f(z)| \leq 1$ в U, то

$$|c_k| \leq 2(1 - |c_0|) \quad \text{для каждого } k \geq 1,$$

либо на более сильном неравенстве Ф. Винера:

$$|c_k| \leq 1 - |c_0|^2.$$

Все известные многомерные аналоги теоремы Бора основаны на многомерных аналогах этих неравенств.

Однако для класса $B(\mathscr{D})$ (в одномерном случае для класса $B(U)$) и для более общих случаев можно получить более сильные неравенства для оценки тейлоровских коэффициентов функций указанного класса. В § 1 устанавливаются такие неравенства. В § 2 даны некоторые применения полученных в § 1 неравенств к оценке радиуса Бора $R\big(B\big(\mathscr{D}_n^p\big)\big)$. Наконец, в § 3 рассматривается радиус Бора $R_1\big(\mathscr{D}_n^p\big)$.

1. Оценки тейлоровских коэффициентов голоморфных функций в пространстве $B(\mathscr{D})$ и в более общих ситуациях

Сначала исследуем голоморфные функции с более слабыми ограничениями, чем налагаемые на голоморфные функции класса $B(\mathscr{D})$.

Предложение 1.1. *Пусть для заданного $k \geq 1$ в степенном ряде* (0.1) *коэффициенты c_{nk} таковы, что $c_{nk} = 0$, $n > 1$, и для суммы $f(z)$ ряда* (0.1) *в единичном круге выполняется оценка $|f(z)| \leq 1$. Тогда справедлива оценка*

$$|c_k| \leq 1 - |c_0|. \tag{1.1}$$

Доказательство. Воспользуемся методом Ф. Винера [1] (для многомерного случая [7]). Пусть ω — первообразный корень k-й степени из единицы и

$$g(z) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} f(\omega^j z).$$

Тогда $|g(z)| \leq 1$ в U и $g(z) = c_0 + c_k z^k$. Очевидно, что существует $z_0 \in \partial U$ такое, что

$$1 \geq |g(z_0)| = \big|c_0 + c_k z_0^k\big| = |c_0| + \big|c_k z_0^k\big| = |c_0| + |c_k|.$$

Отсюда вытекает (1.1). □

Пусть Q — круговая полная ограниченная область (область Картана) в $\mathbb{C}^n$. Допустим также, что Q имеет центр в $0 \in Q$. Тогда каждая функция $f(z)$, голоморфная в Q, может быть представлена рядом

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z), \tag{1.2}$$

где $P_k(z)$ — однородный полином степени k для каждого $k \in \mathbb{N}$.

Предложение 1.2. *Если ряд* (1.2) *сходится в области Q и в ней выполнена оценка $|f(z)| \leq 1$, то при любом $k \geq 1$, для которого нет члена в ряде* (1.2) *степени, кратной k, имеет место неравенство*

$$\max_{\overline{Q}} |P_k(z)| \leq 1 - |P_0|. \tag{1.3}$$

Доказательство. Как и в доказательстве предложения 1.1, нетрудно показать, что

$$|P_0 + P_k(z)| \leq 1, \quad z \in Q.$$

Пусть $z_0 \in \partial Q$ таково, что $|P_k(z_0)| = \max\limits_{\overline{Q}} |P_k(z)|$. Поскольку Q — круговая область, имеем $z_0 e^{it} \in \partial Q$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Выберем теперь t_0 так, что

$$|P_0| + \max_{\overline{Q}} |P_k(z)| = |P_0| + |P_k(z_0 e^{it})| = |P_0 + P_k(z_0 e^{it})| \leq 1.$$

Отсюда вытекает неравенство (1.3). □

Займемся оценкой коэффициентов степенного ряда (0.2) в случае, когда $\mathscr{D}$ — ограниченная полная n-круговая область (т. е. область Рейнхарда) с центром в 0.

Предложение 1.3. *Допустим, что ряд* (0.2) *сходится в области* $\mathscr{D}$ *и в* $\mathscr{D}$ *выполнено неравенство* (0.3). *Если для данного* α *в ряде* (0.2) *нет членов* $c_\beta z^\beta$, *у которых* $|\beta|$ *целое, кратное* $|\alpha|$, *то выполнена следующая оценка:*

$$|c_\alpha| \leq \frac{1 - |c_0|}{d_\alpha(\mathscr{D})}, \tag{1.4}$$

где $d_\alpha(\mathscr{D}) = \max\limits_{\overline{\mathscr{D}}} |z^\alpha|$.

Доказательство. Преобразуя ряд (0.2) перестановкой членов в ряд Картана (1.2) и применяя предложение 1.2, получим

$$\max_{\overline{\mathscr{D}}} |P_k(z)| \leq 1 - |c_0|,$$

где $k = |\alpha|$. Кроме того, используя обобщенное неравенство Коши из [23], приходим к выводу о справедливости (1.4). □

Следствие 1.1. *Пусть*

$$P(z) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha z^\alpha$$

удовлетворяет условию $|P(z)| \leq 1$ *для любого* $z \in \mathscr{D}$. *Тогда для любого* α *такого, что* $\alpha > \frac{m}{2}$, *выполнено неравенство* (1.4).

Заметим, что неравенство (1.1) для многочлена одной комплексной переменной и для главного члена (члена степени m) отмечено в [21], но там дано другое доказательство.

Следствие 1.2. *Для тейлоровских коэффициентов функций класса* $B(\mathscr{D})$ *имеют место оценки* (1.4).

Следствие 1.3. *Пусть* $f(z)$ *— голоморфная в области* $\mathscr{D}$ *функция, удовлетворяющая неравенству* $|f(z)| \leq 1$. *Если* f *представима в виде ряда Тейлора*

$$f(z) = c_0 + \sum_p \sum_{|a|=p} c_\alpha z^\alpha, \tag{1.5}$$

где суммирование ведется по множеству всех простых чисел, то для коэффициентов c_α *из* (1.5) *выполнена оценка* (1.4).

Замечание 1.1. Оценки, полученные в этом параграфе, неулучшаемы. Это непосредственно видно из рассмотрения функций, являющихся суммой двух мономов, т. е. $c_0 + c_\alpha z^\alpha$.

2. Радиус Бора $R\left(B\left(\mathscr{D}_n^p\right)\right)$

Лемма 2.1. *Пусть U — единичный круг и $f(z)$ — голоморфная функция в U, удовлетворяющая неравенству $|f(z)| \leq 1$. Если f представима в виде степенного ряда*

$$f(z) = c_0 + \sum_p c_p z^p,$$

где суммирование ведется по множеству всех простых чисел, то для любого $r \leq 0.677401$ выполнено неравенство

$$|c_0| + \sum_p |c_p| r^p < 1. \tag{2.1}$$

Доказательство. Используя неравенство (1.1), получим

$$|c_0| + \sum_p |c_p| r^p \leq |c_0| + (1 - |c_0|) \sum_p r^p.$$

Тогда (2.1) имеет место, если r — решение уравнения

$$\sum_p r^p = 1. \tag{2.2}$$

Решая последнее уравнение численно с помощью программы Maple[1)], получаем, что решение уравнения (2.2) больше чем 0.677401. □

Теорема 2.1. *Имеют место оценки*

$$0.677401 < R(B(U)) < 0.772093. \tag{2.3}$$

Доказательство. Вначале докажем левое неравенство в (2.3). Пусть $f(z) \in B(U)$, и пусть f представима в виде ряда (0.1) в U. Применяя неравенство (1.1), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k \leq |c_0| + (1 - |c_0|) \sum_k r^k,$$

где в первой сумме $c_k \neq 0$ только для такого k, для которого нет члена в (0.1), степень которого кратна k (вспомним определение класса $B(U)$ из введения). Для заданной $f(z) \in B(U)$ обозначим через M множество всех индексов k таких, что $c_k \neq 0$. Множество всех простых чисел обозначим через P. Покажем, что

$$\sum_{k \in M} r^k \leq \sum_{p \in P} r^p. \tag{2.4}$$

Сначала допустим, что $M = \{k_n\}$, $n = 1, 2, \dots,$ — бесконечное множество, которое упорядочено так, что $k_l < k_m$ тогда и только тогда, когда $l < m$. Определим биективное соответствие ι между множествами M и P, т. е. $\iota(M) = P$ и $\iota(k_j) = p_j$, где $p_j \in P$ — j-е простое число, когда $k_j \in M$ — j-й индекс в упорядочении элементов M. Легко заметить, что $p_j \leq k_j$. Действительно, если $2 \in M$, то $\iota(2) = 2$. Если $2 \notin M$, то $\iota(k_1) = 2$ и $k_1 > 2$. Если $\iota(2) = 2$ и $3 \in M$, то $\iota(3) = 3$. С другой стороны, если $\iota(2) = 2$, но $3 \notin M$, то $\iota(k_2) = 3 < k_2$.

[1)] Здесь и далее речь идет о численных решениях, полученных с использованием программы Maple.

Если $2 \notin M$, но $k_1 = 3 \in M$, то $\iota(k_1) = 2 < 3$, и т. д. Теперь применяем к (2.4) лемму 2.1.

Если множество M конечно, то, действуя, как и выше, можно получить неравенство (2.4) с той только разницей, что в правой части будет суммирование по конечным промежуткам простых чисел из множества P. Для доказательства оценки сверху в (2.3) рассмотрим многочлен

$$Q(z) = 30 - 1.2z^2 - z^3 - z^5.$$

Используя компьютер, можно увидеть, что $\max\limits_{\overline{U}} Q(z) \leq 31.45$. Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{30 + 1.2r^2 + r^3 + r^5}{31.45} = 1. \tag{2.5}$$

Его численное решение дает корень, который больше чем 0.772093. Завершая доказательство, заметим, что даже после некоторого экспериментирования с различными многочленами, содержащими только простые степени z, мы не сумели найти полином, отличный от Q, для которого решение уравнения, подобного (2.5), давало бы заметно меньший корень. □

Лемма 2.2. *Уравнение*

$$\sum_{p \in P} \frac{p^p}{p!} r^p = 1, \tag{2.6}$$

где суммирование ведется по множеству P всех простых чисел, имеет корень, больший чем 0.350358.

Доказательство. Утверждение проверяется непосредственно после численного решения (2.6). □

Теорема 2.2. *Имеют место оценки*

$$0.350358 < R\big(B\big(\mathscr{D}_n^1\big)\big) < 0.772093. \tag{2.7}$$

Доказательство. Обоснование неравенства

$$0.350358 < R\big(B\big(\mathscr{D}_n^1\big)\big)$$

повторяет доказательство неравенства из [8]: если $|f(z)| \leq 1$ в $\mathscr{D}_n^1$, то

$$\sum_{\substack{|\alpha|=k \\ |z_1|+\dots+|z_n|=r}} |c_\alpha z^\alpha| \leq (1 - |c_0|^2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!} r^k. \tag{2.8}$$

Но теперь в правой части (2.8) вместо множителя $(1 - |c_0|^2)$ после применения (1.3) появится множитель $(1 - |c_0|)$. Оставшаяся часть доказательства проводится так же, как и в доказательстве теоремы 2.1, с той лишь разницей, что вместо леммы 2.1 надо использовать лемму 2.2. Другое неравенство

$$R\big(B\big(\mathscr{D}_n^1\big)\big) < 0.772093$$

вытекает из того, что радиус Бора $R\big(B\big(\mathscr{D}_n^1\big)\big)$ не возрастает при возрастании размерности n области $\mathscr{D}_n^1$. Это легко получить, если заметить, что все функции класса $B\big(\mathscr{D}_{n-1}^1\big)$ принадлежат также классу $B\big(\mathscr{D}_n^1\big)$, после чего убедиться, что они не зависят от переменной z_n. □

Теперь рассмотрим радиус Бора в случае поликруга $U_n = \mathscr{D}_n^\infty$.

Теорема 2.3. *Имеют место оценки*

$$\frac{0.677401}{\sqrt{n}} < R(B(U_n)) < \min\left(0.772093, 2\frac{\sqrt{\ln n}}{n}\right). \tag{2.9}$$

Доказательство. Правое неравенство в (2.9) вытекает из оценок (2.3) и (0.5). Рассуждения (приведем их ради полноты) идут по следующим направлениям. Радиус Бора $R(B(U_n))$ не возрастает при $n \longrightarrow \infty$ и Боас и Хавинсон [7] для доказательства правой части в (0.5) используют однородный полином, входящий в класс $B(U_n)$.

Для доказательства левой части в (2.9) можно повторить шаги доказательства теоремы 2.2 и, используя оценки из [7], получить неравенство

$$\sum_{\alpha} |c_\alpha z^\alpha| \le \sum_{P} \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2\right)^{\frac{p}{2}},$$

где $f(z) \in B(U_n)$ и суммирование проводится по множеству P всех простых чисел. Кроме того, если шар радиуса r содержится в U_n и r — корень уравнения (2.2), то в этом шаре выполнено неравенство (0.4). Но указанный шар содержит поликруг $0.677401 \cdot U_n$. $\square$

Наконец, рассмотрим случай области $\mathscr{D}_n^p$, $p > 0$.

Теорема 2.4. *Если* $2 \le p \le \infty$, *то*

$$\frac{0.677401}{\sqrt{n}} < R\big(B\big(\mathscr{D}_n^p\big)\big) < \min\left(0.772093, 2\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right). \tag{2.10}$$

Если $1 \le p \le 2$, *то*

$$\frac{0.350358}{n^{1-\frac{1}{p}}} < R\big(B\big(\mathscr{D}_n^p\big)\big) < \min\left(0.772093, 3\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{1-\frac{1}{p}}\right). \tag{2.11}$$

Если $0 < p < 1$, *то*

$$0.350358 < R\big(B\big(\mathscr{D}_n^p\big)\big) < 0.772093. \tag{2.12}$$

Кроме того, неравенства (2.12) *выполнены также для вогнутой области Рейнхарта типа*

$$\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C}^n : \Phi(|z_1|, \dots, |z_n|) < 0\},$$

где функция Φ *выпуклая.*

Доказательство. Левая часть неравенства (2.10) вытекает из того факта, что область Рейнхарта $\mathscr{D}_n^p$ является объединением поликругов с центрами в начале и что оценка радиуса Бора поликруга снизу выполнена для каждой $\mathscr{D}_n^p$. Правая часть неравенства (2.10) следует из результатов работы [9] (см. также доказательство теоремы 2.3 настоящей статьи). То же самое можно сказать о правом неравенстве в (2.11). Другое неравенство в (2.11) получается в результате использования левого неравенства в (2.9) и повторения рассуждения Боаса из [9], которые мы привели для доказательства левого неравенства в (2.9).

Наконец, неравенство (2.12) вытекает из того, что область $\mathscr{D}_n^p$ для $0 < p \le 1$ (и вообще любая вогнутая область Рейнхарта) представляет собой объединение областей вида

$$\{z \in \mathscr{D} : a_1|z_1| + \dots + a_n|z_n| < 1\},$$

где $a_j > 0$. Эти области получаются из $\mathscr{D}_n^1$ посредством однородной линейной замены переменных. $\square$

3. Радиус Бора $R_1(\mathscr{D}_n^p)$

В начале этого раздела обратим внимание на то, что в случае одной комплексной переменной независимо в [17, 21] доказаны равенства

$$R_1(\mathscr{D}_1^1) = R_1(U) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Для формулировки многомерных результатов введем некоторые понятия.

Рассмотрим на $\partial\mathscr{D}_n^1$ меру μ, определенную так:

$$d\mu = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} d|z_1| \wedge \dots \wedge d|z_{n-1}| \wedge \frac{dz_1}{z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_n}{z_n}.$$

Тогда для каждого монома $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_n^{\alpha_n}$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \dots, n$, имеем

$$\int\limits_{\partial\mathscr{D}_n^1} |z^\alpha| d\mu = \frac{\alpha_1!\alpha_2!\dots\alpha_n!}{(|\alpha| + n - 1)!},$$

где, как обычно, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. В частности, отметим, что $\mu(\partial\mathscr{D}_n^1) = 1$.

Вернемся теперь к формулировке теоремы об оценке радиуса Бора $R_1(\mathscr{D}_n^1)$ в случае $n = 2$, потому что в этом случае результаты особенно тонкие.

Теорема 3.1. *Имеют место оценки*

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \le R_1(\mathscr{D}_2^1) \le \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{3.1}$$

Доказательство. В доказательстве нуждается только неравенство $\frac{1}{\sqrt{3}} \le R_1(\mathscr{D}_2^1)$, ибо радиус Бора в (3.1), как и в случае радиуса Бора $R(B(\mathscr{D}_n^1))$, не возрастает при $n \longrightarrow \infty$.

Если $\|f\|_{H^2} \le 1$, то из равенства Парсеваля следует, что

$$\sum_{|\alpha|\ge 1} |c_\alpha|^2 \frac{(2\alpha_1)!(2\alpha_2)!}{(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)!} = \sum_{|\alpha|\ge 1} |c_\alpha|^2 \int\limits_{\partial\mathscr{D}_n^1} |z_1^{2\alpha_1}||z_2^{2\alpha_2}|\, d\mu \le 1.$$

Для $|z_1| = r_1,\ |z_2| = r_2$ имеем

$$\sum_{|\alpha|\ge 1} |c_\alpha| r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \le \sqrt{\sum_{|\alpha|\ge 1} |c_\alpha|^2 \frac{(2\alpha_1)!(2\alpha_2)!}{(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)!}} \sqrt{\sum_{|\alpha|\ge 1} \frac{(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)!}{(2\alpha_1)!(2\alpha_2)!} r_1^{2\alpha_1} r_2^{2\alpha_2}}$$
$$\le \sqrt{\sum_{|\alpha|\ge 1} \frac{(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)!}{(2\alpha_1)!(2\alpha_2)!} r_1^{2\alpha_1} r_2^{2\alpha_2}}.$$

Для последнего ряда попробуем найти максимальное $r > 0$ такое, что $r_1 + r_2 = r$ и сумма этих рядов меньше чем 1. Такое r ищется из записи суммы этих рядов в явном виде с помощью метода из [24, 25]. А именно,

$$\sum_{|\alpha|\ge 1} \frac{(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)!}{(2\alpha_1)!(2\alpha_2)!} r_1^{2\alpha_1} r_2^{2\alpha_2} = \sum_{|\alpha|\ge 1} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)!}{4(\alpha_1)!(\alpha_2)!} (r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} + (-r_1)^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2})$$
$$+ \sum_{|\alpha|\ge 1} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)!}{4(\alpha_1)!(\alpha_2)!} (r_1^{\alpha_1} (-r_2)^{\alpha_2} + (-r_1)^{\alpha_1} (-r_2)^{\alpha_2}) - 1$$
$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(1 - r_1 - r_2)^2} + \frac{1}{(1 - r_1 + r_2)^2} + \frac{1}{(1 + r_1 - r_2)^2} + \frac{1}{(1 + r_1 + r_2)^2} - 4 \right).$$

Теперь нужно найти минимум предыдущего выражения при ограничении $r = r_1 + r_2$. Используя метод множителей Лагранжа, легко заметить, что этот минимум достигается при $r_1 = r_2 = \frac{r}{2}$. В таком случае минимум равен

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1-r)^2} + \frac{1}{(1+r)^2} - 2\right) = \frac{3r^2 - r^4}{2(1-r^2)^2}.$$

Последнее выражение равно 1, если $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$. $\square$

К сожалению, для этого метода в случае $n > 2$ нижняя оценка не сохраняется. Наилучший результат, который дает оценку радиуса Бора $R_1\big(\mathscr{D}_n^1\big)$ независимо от размерности n, сообщает следующая

Теорема 3.2. *Имеют место оценки*

$$\frac{1}{2\sqrt{e}} \le R_1\left(\mathscr{D}_n^1\right) \le \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{3.2}$$

Кроме того, если $z \notin \frac{1}{\sqrt{2}}\mathscr{D}_n^1$, то существует ряд вида (0.2), *где $c_0 = 0$, сходящийся в $\mathscr{D}_n^1$, и оценка* (0.3) *выполнена в этой области, но* (0.4) *становится неверной в точке z.*

Доказательство. Следуя процессу доказательства теоремы 9 из [8], находим, что функция $f(z)$ голоморфна в $\mathscr{D}_n^1$, $|f(z)| \le 1$ в $\mathscr{D}_n^1$ и $f(0) = 0$. Тогда

$$\sum_{\substack{|\alpha|\ge 1\\ |z_1|+\dots+|z_n|=r}} |c_\alpha||z^\alpha| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} r^k. \tag{3.3}$$

Для завершения надо найти корень уравнения

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!} r^k = 1. \tag{$*$}$$

содержащийся в интервале $(0,1)$. Используя равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!} r^k e^{-kx} = -1 + \frac{1}{1-x},$$

взятое из [26], получим вместо $(*)$ уравнение $-1 + \frac{1}{1-x} = 1$. Его решением будет $x = \frac{1}{2}$. Поэтому корень $(*)$ равен $\frac{1}{2\sqrt{e}}$. Это завершает доказательство левого неравенства в (3.2). Оставшаяся часть (3.2), как обычно, в доказательстве не нуждается.

Обратимся к другому утверждению из формулировки теоремы. Напомним, что функция

$$f(z_1) = z_1 \frac{z_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{z_1}{\sqrt{2}}} \tag{3.4}$$

экстремальна для радиуса Бора $R_1(U)$, т. е. если функция $f(z_1)$ представима в виде степенного ряда (0.1), то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k||z_1|^k = 1,$$

когда $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Рассмотрим теперь многомерный аналог функции (3.4):

$$f(z) = (z_1 + \dots + z_n)\frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{z_1 + \dots + z_n}{\sqrt{2}}}.$$

Тогда

$$\sum_{|\alpha|\geq 1} |c_\alpha||z^\alpha| = \frac{|z_1| + \dots + |z_n|}{\sqrt{2} - |z_1| - \dots - |z_n|} > 1,$$

если $|z_1| + \dots + |z_n| > \frac{1}{\sqrt{2}}$. $\square$

Как отмечено выше, нижняя граница $\frac{1}{2\sqrt{e}} = 0.303266$ в (3.2) не зависит от размерности n гиперконуса $\mathscr{D}_n^1$, но не является столь точной, сколь нижняя оценка $\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577350$ в (3.1) для области $\mathscr{D}_2^1$. В следующей теореме мы распространим метод, использованный в теореме 3.1, для $n = 3, 4, \dots, 12$. В этих случаях нижние оценки для радиуса Бора $R_1(\mathscr{D}_n^1)$ лучше, чем нижняя оценка $\frac{1}{2\sqrt{e}} = 0.303266$ в (3.2).

Теорема 3.3. *Имеют место оценки*

$$\begin{gathered} 0.577469 \leq R_1(\mathscr{D}_3^1), \quad 0.497708 \leq R_1(\mathscr{D}_4^1), \quad 0.4120597 \leq R_1(\mathscr{D}_5^1), \\ 0.407771 \leq R_1(\mathscr{D}_6^1), \quad 0.385560 \leq R_1(\mathscr{D}_7^1), \quad 0.355403 \leq R_1(\mathscr{D}_8^1), \\ 0.350238 \leq R_1(\mathscr{D}_9^1), \quad 0.335847 \leq R_1(\mathscr{D}_{10}^1), \\ 0.323081 \leq R_1(\mathscr{D}_{11}^1), \quad 0.311657 \leq R_1(\mathscr{D}_{12}^1). \end{gathered} \tag{3.5}$$

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 3.1, если $\|f\|_{H^2} \leq 1$, то из равенства Парсеваля имеем

$$\sum_{|\alpha|\geq 1} |c_\alpha|^2 \frac{(2\alpha_1)!\dots(2\alpha_n)!}{(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + 2\alpha_n + n - 1)!} \leq 1.$$

Далее, тем же путем, что и выше, для $|z_i| = r_i$, $i = 1, \dots, n$, получаем

$$\sum_{|\alpha|\geq 1} |c_\alpha| r_1^{\alpha_1}\dots r_n^{\alpha_n} \leq \left(\sum_{|\alpha|\geq 1} \frac{(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + 2\alpha_n + n - 1)!}{(2\alpha_1)!(2\alpha_2)!\dots(2\alpha_n)!} r_1^{2\alpha_1}\dots r_n^{2\alpha_n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Остается найти явную форму для суммы в последнем ряде. Если $\mathscr{A}$ — совокупность всех перестановок множества $\{\underbrace{(\pm 1, \dots, \pm 1)}_{n \text{ раз}}\}$, то она содержит 2^n элементов. Отсюда если $\sigma_j \in \mathscr{A}$, то $\sigma_j = (\sigma_j^1, \sigma_j^2, \dots, \sigma_j^n)$, где $\sigma_j^i = \pm 1$, $i = 1, \dots, n$. Тем самым

$$\begin{aligned} &\sum_{|\alpha|\geq 1} \frac{(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + 2\alpha_n + n - 1)!}{(2\alpha_1)!(2\alpha_2)!\dots(2\alpha_n)!} r_1^{2\alpha_1}\dots r_n^{2\alpha_n} \\ &\quad = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{|\alpha|\geq 1} \frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_n + n - 1)!}{(\alpha_1)!\dots(\alpha_n)!}\left(\sum_{\sigma_j\in\mathscr{A}} (\sigma_j^1 r_1)^{\alpha_1}\dots(\sigma_j^n r_n)^{\alpha_n}\right) - 2^n\right) \\ &\quad = \frac{1}{2^n}\sum_{\sigma_j\in\mathscr{A}}\left(\sum_{|\alpha|\geq 1} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + n - 1)!}{(\alpha_1)!(\alpha_2)!\dots(\alpha_n)!}(\sigma_j^1 r_1)^{\alpha_1}\dots(\sigma_j^n r_n)^{\alpha_n} - 1\right) \\ &\qquad\qquad = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{\sigma_j\in\mathscr{A}} \frac{1}{(1 - \sigma_j^1 r_1 - \dots \sigma_j^n r_n)^n} - 2^n\right). \end{aligned}$$

Обычным путем можно показать, что минимум последней функции при ограничении $r_1+r_2+\dots+r_n=r<1$ достигается, когда $r_1=r_2=\dots=r_n=\frac{r}{n}$. Отсюда вытекает, что радиус Бора $R_1(\mathscr{D}_n^1)$ оценивается снизу решением уравнения

$$\frac{1}{2^n}\left(\sum_{\sigma_j\in\mathscr{A}}\frac{1}{(1-\sigma_j^1\frac{r}{n}-\dots\sigma_j^n\frac{r}{n})^n}-2^n\right)=1,$$

содержащимся в интервале $(0,1)$.

Численные решения предыдущего уравнения с использованием программы Maple приводят к соотношениям (3.5). $\square$

Оценим теперь радиус Бора $R_1(\mathscr{D}_n^2)$. Верхняя граница получена в [9], где оценка сверху была предпринята для однородных полиномов высоких степеней и тем самым для голоморфных функций, удовлетворяющих условию $f(0)=0$. Появление этой оценки в формулировке теоремы 3.4 оправдывается целями полноты ее формулировки.

Теорема 3.4. *Имеют место оценки*

$$\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}}}\le R_1(\mathscr{D}_n^2)\le\min\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},2\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right\}. \tag{3.6}$$

Доказательство. Для доказательства левой части в (3.6) рассмотрим борелевскую вероятностную меру на $\partial\mathscr{D}_n^2$, заданную равенством

$$d\mu_1=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}d|z_1|^2\wedge\dots\wedge d|z_{n-1}|^2\wedge\frac{dz_1}{z_1}\wedge\dots\wedge\frac{dz_n}{z_n}.$$

Она инвариантна относительно всех унитарных преобразований в $\mathbb{C}^n$. Отметим, что все мономы z^α ортогональны относительно интегрирования по μ_1 и

$$\int\limits_{\partial\mathscr{D}_n^2}|z^{2\alpha}|d\mu_1=\frac{\alpha_1!\dots\alpha_n!(n-1)!}{(|\alpha|+n-1)!}.$$

Если $|f(z)|\le 1$ в $\mathscr{D}_n^2$, то $f\in H^2(\mathscr{D}_n^2)$. Из равенства Парсеваля, принимая во внимание то, что $f(0)=0$, получим

$$\sum_{|\alpha|\ge1}|c_\alpha|^2\frac{\alpha_1!\dots\alpha_n!(n-1)!}{(|\alpha|+n-1)!}=\sum_{|\alpha|\ge1}|c_\alpha|^2\int\limits_{\partial\mathscr{D}_n^2}|z^{2\alpha}|d\mu_1\le 1.$$

Более того, для $|z_j|=r_j$, $j=1,2,\dots,n$, имеем

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|\ge1}|c_\alpha|r_1^{\alpha_1}\dots r_n^{\alpha_n}&=\sum_{|\alpha|\ge1}\sqrt{\frac{\frac{\alpha_1!\dots\alpha_n!(n-1)!}{(|\alpha|+n-1)!}}{\frac{\alpha_1!\dots\alpha_n!(n-1)!}{(|\alpha|+n-1)!}}}|c_\alpha|r_1^{\alpha_1}\dots r_n^{\alpha_n}\\
&\le\sqrt{\sum_{|\alpha|\ge1}\frac{\alpha_1!\dots\alpha_n!(n-1)!}{(|\alpha|+n-1)!}|c_\alpha^2|}\sqrt{\sum_{|\alpha|\ge1}\frac{(|\alpha|+n-1)!}{\alpha_1!\dots\alpha_n!(n-1)!}r_1^{2\alpha_1}\dots r_n^{2\alpha_n}}\\
&\le\sqrt{\sum_{|\alpha|\ge1}\frac{(|\alpha|+n-1)!}{\alpha_1!\dots\alpha_n!(n-1)!}r_1^{2\alpha_1}\dots r_n^{2\alpha_n}}=\sqrt{\frac{1}{(1-r_1^2-\dots-r_n^2)^n}-1}.\end{aligned}$$

Для завершения доказательства теоремы остается выяснить, когда последняя функция меньше единицы при ограничении $r_1^2 + \dots + r_n^2 = r^2 < 1$. Это произойдет, когда $r = \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}}}$. $\square$

Заметим, что асимптотика в левой части (3.6) дается равенством

$$r = \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}}} = \frac{\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

при $n \to \infty$. В следующей теореме мы рассмотрим случай поликруга $U_n = \mathscr{D}_n^\infty$.

Теорема 3.5. *Имеют место оценки*

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < R_1(U_n) < \min\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right). \tag{3.7}$$

Доказательство. По тем же соображениям, что и выше, мы должны доказать лишь левую часть неравенства (3.7). Повторяя доказательство теоремы 2 из [7], получим, что если $f(z)$ голоморфна в U_n, $f(0) = 0$ и $|f(z)| \le 1$ в U_n, то

$$\sum_{|\alpha| \ge 1} |c_\alpha z^\alpha| \le \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2\right)^{\frac{k}{2}}.$$

Следовательно, если z лежит в шаре радиуса $\frac{1}{2}$, то

$$\sum_{|\alpha| \ge 1} |c_\alpha z^\alpha| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Шар радиуса $\frac{1}{2}$ содержит полукруг $\frac{1}{2\sqrt{n}} U_n$, и этим доказательство неравенства (3.7) завершено. $\square$

Более того, применяя метод Боаса [9], как мы уже сделали в доказательстве теоремы 2.4, вместе с другими соображениями, представленными в доказательстве теоремы 2.4, получим следующий результат.

Теорема 3.6. *Если $2 \le p \le \infty$, то*

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < R_1\big(\mathscr{D}_n^p\big) < \min\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right). \tag{3.8}$$

Если $1 \le p \le 2$, то

$$\frac{1}{2\sqrt{2} n^{1-\frac{1}{p}}} < R_1\big(\mathscr{D}_n^p\big) < \min\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 3\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{1-\frac{1}{p}}\right). \tag{3.9}$$

Если $0 < p \le 2$, то

$$\frac{1}{2\sqrt{e}} < R_1\big(\mathscr{D}_n^p\big) < \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{3.10}$$

Кроме того, неравенства (3.10) *имеют место для области Рейнхарта*

$$\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C}^n : \phi(|z_1|, \dots, |z_n|) < 0\},$$

в которой функция ϕ выпукла.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bohr H.* A theorem concerning power series // Proc. London Math. Soc. 1914. V. 13. P. 1–5.
2. *Landau E., Gaier D.* Darstellung und Bergundung eininger neurer Ergebnisse der Functionentheorie. Berlin: Springer-Verl., 1986.

3. *Sidon S.* Uber einen Satz von Herrn Bohr // Math. Z. 1927. Bd 26. S. 731–732.
4. *Tomic M.* Sur une theorem de H. Bohr // Math. Scand. 1962. V. 11. P. 103–106.
5. *Dineen S., Timoney R. M.* Absolute bases, tensor products and a theorem of Bohr // Studia Math. 1989. V. 94, N 2. P. 227–234.
6. *Dineen S., Timoney R. M.* On a problem of H. Bohr // Bull. Soc. Roy. Sci. Liege. 1991. V. 60, N 6. P. 401–404.
7. *Boas H. P., Khavinson D.* Bohr's power series theorem in several variables // Proc. Amer. Math. Soc. 1997. V. 125. P. 2975–2979.
8. *Aizenberg L.* Multidimensional analogues of Bohr's theorem on power series // Proc. Amer. Math. Soc. 2000. V. 128. P. 1147–1155.
9. *Boas H. P.* Majorant series // J. Korean Math. Soc. 2000. V. 37. P. 321–337.
10. *Aizenberg L., Aytuna A., Djakov P.* An abstract approach to Bohr's phenomenon // Proc. Amer. Math. Soc. 2000. V. 128. P. 2611–2619.
11. *Aizenberg L., Aytuna A., Djakov P.* Generalization of Bohr's theorem for bases in spaces of holomorphic functions of several complex variables // J. Math. Anal. Appl. 2001. V. 258. P. 428–447.
12. *Aizenberg L., Tarkhanov N.* A Bohr phenomenon for elliptic equations // Proc. London Math. Soc. 2001. V. 82. P. 385–401.
13. *Aizenberg L.* Bohr theorem // Encyclopedia of Mathematics. Supplement II / ed. M. Hazewinkel. Dordrecht: Kluwer, 2000. P. 76–78.
14. *Aizenberg L.* Generalization of Caratheodory's inequality and the Bohr radius for multidimensional power series // Complex Variables Theory Appl. (To appear).
15. *Aizenberg L., Liflyand E., Vidras A.* Multidimensional analogue of van der Corput-Visser inequality and its application to the estimation of the Bohr radius // Ann. Polon. Math. 2003. V. 80. P. 47–54.
16. *Айзенберг Л. А., Гроссман И. Б., Коробейник Ю. Ф.* Некоторые замечания о радиусе Бора для степенных рядов // Изв. вузов. Математика. 2002. № 10. С. 3–10.
17. *Djakov P. B., Ramanujan M. S.* A remark on Bohr's theorem and its generalizations // J. Anal. 2000. V. 8. P. 65–77.
18. *Глазман И. М., Любич Ю. И.* Конечномерный линейный анализ. М.: Наука, 1969.
19. *Dixon P. G.* Banach algebras satisfying the non-unital von Neumann Inequalities // Bull. London Math. Soc. 1995. V. 27. P. 359–362.
20. *Nikolskii N. K.* Operators, functions and systems: An easy Reading. Providence RI: Amer. Math. Soc., 2002. V. 1, 2.
21. *Paulsen V. I., Popescu G., Singh D.* On Bohr's inequality // Proc. London Math. Soc. (3). 2002. V. 85. P. 493–515.
22. *Defant A., Garcia D., Maestre M.* Bohr's power series theorem and local Banach space theory // J. Reine Angew. Math. 2003. V. 557. P. 173–197.
23. *Айзенберг Л. А. , Митягин Б. С.* Пространства функций, аналитических в кратно-круговых областях // Сиб. мат. журн. 1960. Т. 1, № 2. С. 153–170.
24. *Айзенберг Л. А.* Интегральные представления голоморфных в n-круговых областях («продолжение ядер Сёге») // Мат. сб. 1964. Т. 65. С. 104–133.
25. *Айзенберг Л. А., Южаков А. П.* Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1983.
26. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. Н.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1983. Т. 1.

Статья поступила 8 января 2003 г., окончательный вариант — 10 ноября 2003 г.

Айзенберг Лев Абрамович (Lev Aizenberg)
Department of Mathematics and Computer Science
Bar-Ilan University, 52900 Ramat-Gan, Israel
aizenbrg@macs.biu.ac.il

Видрас Алекос (Alekos Vidras)
Department of Mathematics and Statistics
University of Cyprus, Nicosia 1678, Cyprus
msvidras@ucy.ac.cy