Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2004. Том 45, № 3

УДК 533:517.958

ОЦЕНКИ МАКСИМУМА МОДУЛЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ БЮРГЕРСА

В. И. Налимов

Аннотация: Для решений системы уравнений Бюргерса установлены нелинейные оценки, основанные на специфике конвективных оценок.

Ключевые слова: оценки, максимум, Бюргерс.

Пусть Ω — ограниченная область из $\mathbb{R}_n$ с границей Γ. Обозначим через $u = (u_1, \dots, u_n)$ вектор, определенный на $Q = \Omega \times [0, T]$. Для определенной на Q квадратной матрицы g размерности n обозначим через $\operatorname{div} g$ вектор с компонентами

$$(\operatorname{div} g)_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{1}$$

Рассматривается система уравнений

$$u_t - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u = f + \operatorname{div} g \quad ((x,t) \in Q) \tag{2}$$

с начальными и краевыми условиями

$$u(x,0) = u_0(x) \ (x \in Q), \quad u = u_*(x,t) \ ((x,t) \in \Sigma = \Gamma \times [0,T]).$$

Цель работы состоит в оценке максимума модуля решения задачи (1), (2) через правые части, начальные данные и краевые условия задачи. Отметим, что эти оценки нелинейно зависят от правой части. Вывод их основан на специфических свойствах конвективного члена.

1. Обозначения. Предварительные сведения. Всюду ниже различные несущественные постоянные будем обозначать одним и тем же символом C.

Для матрицы g с элементами $g_{ij} : Q \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ положим

$$G_i = \left(\sum_{j=1}^{n} g_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

и определим норму ($1 \le q \le \infty$, $1 \le p \le \infty$)

$$\|g\|_{L_q(0,T;L_p(\Omega))} = \max_i \|G_i\|_{L_q(0,T;L_p(\Omega))} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Для векторного поля $u = (u_1, \dots, u_n) : Q \to \mathbb{R}$ определим нормы ($1 \le q \le \infty$, $1 \le p \le \infty$)

$$\|u\|_{L_q(0,T;L_p(\Omega))} = \max_i \|u_i\|_{L_q(0,T;L_p(\Omega))},$$
$$\|u\|_{L_\infty(\Sigma)} = \max_i \sup_{(x,t)\in\Sigma} |u_i(x,t)| \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$
$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = \max_i \|u_i\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Пусть $E_0(x,t)$ — фундаментальное решение оператора теплопроводности:

$$E_0(x,t) = (4\pi\nu t)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4\nu t}\right\}.$$

В дальнейшем нам понадобятся хорошо известные и легко проверяемые свойства фундаментального решения оператора теплопроводности (запись интеграла без указания области интегрирования означает, что интеграл берется по всему пространству $\mathbb{R}_n$): для любой ограниченной функции $f : Q \to \mathbb{R}$ и $p \geq 1$

$$\left|\int E_0(y-x,\tau-t) f(x,t)\, dx\right| \leq C(\nu(\tau-t))^{-\frac{n}{2p}} \|f(t)\|_{L_p(\mathbb{R}_n)},$$

$$\left|\int |\nabla E_0(y-x,\tau-t)| f(x,t)\, dx\right| \leq C(\nu(\tau-t))^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2p}} \|f(t)\|_{L_p(\mathbb{R}_n)}.$$

Фундаментальное решение оператора

$$\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta + \mu$$

имеет вид

$$E(x,t) = e^{-\mu t} E_0(x,t). \tag{3}$$

Пусть $1 \leq q \leq \infty$ и $q' = q/(q-1)$. Если $\frac{n}{2}q' < p \leq \infty$, то

$$\left|\int_0^\tau dt \int E(y-x,\tau-t) f(x,t)\, dx\right| \leq C\nu^{-\frac{n}{2p}} \mu^{-\frac{1}{q'}+\frac{n}{p}} \|f\|_{L_q(0,T;L_p(\Omega))}. \tag{4}$$

Если $q > 2$ и $\frac{nq}{q-2} < p \leq \infty$, то

$$\left|\int_0^\tau dt \int |\nabla E(y-x,\tau-t)| f(x,t)\, dx\right| \leq C\nu^{-\frac{1}{2}(1+\frac{n}{p})} \mu^{-\frac{1}{q'}+\frac{1}{2}(1+\frac{n}{p})} \|f\|_{L_q(0,T;L_p(\Omega))}. \tag{5}$$

Неравенства (4) и (5) легко выводятся из приведенных выше свойств фундаментального решения оператора теплопроводности.

2. Основной результат.

Теорема 1. *Пусть u — гладкое решение задачи* (1), (2) *и* $\operatorname{diam}\Omega = 1$. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Пусть $g = 0$, тогда*

$$\|u\|_{L_\infty(Q)} \leq \max\left(\|u_0\|_{L_\infty(\Omega)}, \|u_*\|_{L_\infty(\Sigma)}\right) + 2\sqrt{2}\|f\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty(Q)}. \tag{6}$$

2. *Пусть*

$$1 < q \leq \infty, \quad \frac{n}{2}q' < p \leq \infty; \quad 2 < q_1 \leq \infty, \quad \frac{nq_1}{q_1-2} < p_1 \leq \infty,$$

$$\alpha = \frac{1}{q} + \frac{n}{p}, \quad \alpha_1 = 1 + \frac{1}{q_1} + \frac{n}{p_1},$$

$$\beta = \left(2 - \frac{2}{q} - \frac{n}{p}\right)^{-1}, \quad \beta_1 = \left(1 - \frac{2}{q_1} - \frac{n}{p_1}\right)^{-1}.$$

Тогда

$$\|u\|_{L_\infty(Q)} \le C\|u_0\|_{L_\infty(\Omega)} + C\|u_*\|_{L_\infty(\Sigma)} + C\nu^{-\alpha\beta}\|f\|^{\beta}_{L_q(0,T;L_p(\Omega))} + C\nu^{-\alpha_1\beta_1}\|g\|^{\beta_1}_{L_{q_1}(0,T;L_{p_1}(\Omega))}. \quad (7)$$

В частности, при $p = p_1 = \infty$ *и* $q = q_1 = \infty$

$$\|u\|_{L_\infty(Q)} \le C\|u_0\|_{L_\infty(\Omega)} + C\|u_*\|_{L_\infty(\Sigma)} + C\|f\|^{1/2}_{L_\infty(Q)} + C\nu^{-1}\|g\|_{L_\infty(Q)}.$$

Доказательство. Для краткости записи введем обозначение

$$M = \max_i \|u_i\|_{L_\infty(Q)} \ (i = 1, 2, \dots, n), \quad M_0 = \max(\|u_0\|_{L_\infty(\Omega)}, \|u_*\|_{L_\infty(\Sigma)}).$$

Без потери общности можно считать, что M совпадает с положительным максимумом функции $u_1(x,t)$ и достигается в точке $x = 0$, $t = T$, $\{0\} \in \Omega$ (случай отрицательного минимума сводится к предыдущему заменой $x \to -x, u \to -u$). Для любого $\lambda > 0$ положим

$$v(x,t) = u_1(x,t) - \lambda x_1, \quad \bar v = \sup_{(x,t)\in Q} v(x,t). \quad (8)$$

Ясно, что $\bar v > u_1(0,T) = M > 0$ и функция v удовлетворяет уравнению

$$v_t - \nu\Delta v + \lambda v + (u\cdot\nabla)v = -\lambda^2 x_1 + f. \quad (9)$$

1. Если функция v достигает своего наибольшего значения на нижнем основании цилиндра Q или на его боковой поверхности, то $\bar v \le M_0 + \lambda$. Следовательно, $u_1(x,t) \le M_0 + 2\lambda$ и $M \le M_0 + 2\lambda$.

Если функция v достигает своего наибольшего значения внутри цилиндра Q или на его верхнем основании, то в точке максимума $\nabla v = 0, v_t - \Delta v \ge 0$ и из уравнения (9) имеем

$$\bar v \le \lambda + \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L_\infty(Q)}.$$

Учитывая снова, что $M \le \bar v + \lambda$, для всех $\lambda > 0$ получим

$$M \le M_0 + 2\lambda + \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L_\infty(Q)}.$$

Выбирая $\lambda = \frac{1}{\sqrt2}\|f\|^{1/2}_{L_\infty(Q)}$, приходим к оценке (6).

2. При выводе оценки (7) положим

$$\lambda = \frac14 M, \quad k = M_0 + \frac12 M$$

и определим функцию [1]

$$\eta(x,t) = \max\{v(x,t) - k, 0\},$$

так что в силу выбора λ и k будет $\eta = 0$ на Σ и $\eta = 0$ при $t = 0$. На носителе функции η производные от v и η совпадают. Поэтому при любом $m \ge 2$ для функции η в смысле обобщенных функций в $\mathbb{R}_n$ выполняется равенство

$$\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial t}\eta^m - \frac{\nu}{m}\Delta\eta^m + \lambda\eta^m + k\lambda\eta^{m-1} + \nu(m-1)\eta^{m-2}|\nabla\eta|^2 = -x_1\lambda^2\eta^{m-1} + \eta^{m-1}f_1 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(g_{1j}\eta^{m-1}) - (u\cdot\nabla)\eta\eta^{m-1} - (m-1)\sum_{j=1}^n \eta^{m-2}g_{1j}\frac{\partial\eta}{\partial x_j} \quad (10)$$

с функциями f_1 и g_{1j} $(j = 1, 2, \dots , n)$, продолженными нулем вне Q. При выводе этого равенства учтено, что $v = \eta + k$ на носителе функции η.

Оценим правую часть в равенстве (10):

$$|(u \cdot \nabla)\eta\eta^{m-1}| \le \frac{\nu(m-1)}{2}\eta^{m-2}|\nabla\eta|^2 + \frac{nM^2}{2(m-1)\nu}\eta^m,$$

$$\left|\sum_{j=1}^n g_{1j}\frac{\partial\eta}{\partial x_j}\right| \le \frac{\nu}{2}|\nabla\eta|^2 + \frac{1}{2\nu}G_1^2.$$

Далее положим

$$m = \max\left(\frac{4nM}{\nu}, 3\right)$$

так, что

$$\lambda - \frac{nM^2}{2(m-1)\nu} \ge \frac{M}{8}.$$

Тогда из (10) следует выполняемое в обобщенном смысле неравенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta^m - \nu\Delta\eta^m + \mu\eta^m \le m\eta^{m-1}f_1 + \frac{m^2}{\nu}G_1^2\eta^{m-2} + m\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(g_{1j}\eta^{m-1}), \qquad (11)$$

где $\mu = \frac{1}{8}M$.

Воспользовавшись фундаментальным решением (3), из (11) после интегрирования по частям в правой части получим неравенство

$$\eta^m(y,\tau) \le m\int\limits_{\Pi_\tau} |f_1|\eta^{m-1}E\,dxdt + m\int\limits_{\Pi_\tau} G_1\eta^{m-1}|\nabla E|\,dxdt + \frac{m^2}{\nu}\int\limits_{\Pi_\tau} G_1^2\eta^{m-2}E\,dxdt.$$

Здесь

$$\Pi_\tau = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}_n, 0 \le t \le \tau\}, \quad E = E(y-x, \tau-t).$$

Пусть, далее,

$$\bar\eta = \sup_{(x,t)\in Q} \eta(x,t)$$

и максимум достигается в точке $(y, \tau) \in Q_T$. Из предыдущего неравенства вытекает, что

$$\bar\eta^2 \le m\bar\eta\int\limits_{\Pi_\tau} |f_1|E\,dxdt + m\bar\eta\int\limits_{\Pi_\tau} G_1|\nabla E|\,dxdt + \frac{m^2}{\nu}\int\limits_{\Pi_\tau} G_1^2E\,dxdt. \qquad (12)$$

Оценим каждое слагаемое из правой части (12) с помощью неравенств (4) и (5), считая $M \ge 3\nu/(4n)$ (случай ограниченного $M \le 3\nu/(4n)$ объявляется неинтересным). Учитывая определение числа m и неравенство $\eta \le \frac{3}{4}M$, будем иметь

$$\bar\eta m\int\limits_{\Pi_\tau} |f_1|E\,dxdt \le C\nu^{-\alpha}M^{2-\frac{1}{\beta}}\|f\|_{L_q(0,T;L_p(\Omega))},$$

$$\bar\eta m\int\limits_{\Pi_\tau} G_1|\nabla E|\,dxdt \le C\nu^{-\alpha_1}M^{2-\frac{1}{\beta_1}}\|g\|_{L_{q_1}(0,T;L_{p_1}(\Omega))},$$

$$\frac{m^2}{\nu}\int\limits_{\Pi_\tau} G_1^2 E\,dxdt \le C\nu^{-2\alpha_1} M^{2(1-\frac{1}{\beta_1})}\|g\|^2_{L_{q_1}(0,T;L_{p_1}(\Omega))}.$$

В соответствии с определением чисел k и λ

$$\bar\eta \ge \frac{1}{4}M - M_0.$$

Из (12) следует неравенство

$$\frac{1}{4}M - M_0 \le C\nu^{-\alpha/2}M^{2-\frac{1}{2\beta}}\|f\|^{1/2}_{L_q(0,T;L_p(\Omega))}$$
$$+ C\nu^{-\alpha_1/2}M^{1-\frac{1}{\beta_1}}\|g\|^{1/2}_{L_{q_1}(0,T;L_{p_1}(\Omega))} + C\nu^{-\alpha_1}M^{1-\frac{1}{\beta_1}}\|g\|_{L_{q_1}(0,T;L_{p_1}(\Omega))},$$

решение которого доказывает теорему 1.

Для стационарной системы уравнений Бюргерса

$$-\nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u = f + \operatorname{div} g \quad (x\in\Omega),$$
$$u = u_0 \quad (x\in\Gamma)$$

справедлив аналогичный результат.

Теорема 2. *Пусть u — гладкое решение стационарной системы уравнений Бюргерса и $\operatorname{diam}\Omega = 1$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Пусть $g = 0$, тогда*

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \le \|u_0\|_{L_\infty(\Gamma)} + 2\sqrt{2}\|f\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)}.$$

2. *Пусть $\frac{n}{2} < p \le \infty, n < p_1 \le \infty$, тогда*

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \le C\|u_0\|_{L_\infty(\Gamma)} + C\nu^{-\frac{n}{2p-n}}\|f\|^{\frac{p}{2p-n}}_{L_p(\Omega)} + C\nu^{-\frac{p_1+n}{p_1-n}}\|g\|^{\frac{p_1}{p_1-n}}_{L_{p_1}(\Omega)}.$$

В частности, при $p = \infty$ и $p_1 = \infty$

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \le C\|u_0\|_{L_\infty(\Gamma)} + C\|f\|^{1/2}_{L_\infty(\Omega)} + C\nu^{-1}\|g\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Первое утверждение теоремы доказывается так же, как и первое утверждение теоремы 1. Доказательство второго утверждения основано на свойствах фундаментального решения оператора $-\nu\Delta + \mu$ и здесь не приводится.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладыженская О. А. Уральцева Н. И.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

Статья поступила 27 июня 2002 г., окончательный вариант — 11 февраля 2004 г.

Налимов Виктор Иванович
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090