Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2004. Том 45, № 3

УДК 519.48

ВЛОЖЕНИЕ МАГНУСА ДЛЯ ПРАВОСИММЕТРИЧНЫХ АЛГЕБР

Д. Х. Козыбаев, У. У. Умирбаев

Аннотация: Построен базис универсальной мультипликативной обертывающей алгебры $U(A)$ правосимметричной алгебры A. Доказан аналог вложения Магнуса для правосимметричных алгебр, т. е. правосимметричная алгебра A/R^2, где A — свободная правосимметричная алгебра, вкладывается в алгебру треугольных матриц второго порядка.

Ключевые слова: правосимметричная алгебра, вложение Магнуса, универсальная обертывающая алгебра.

В теории групп хорошо известна теорема Магнуса (см. [1]) о том, что группа $G/[R,R]$ (где G — свободная группа со свободным множеством порождающих X и R — нормальная подгруппа группы G) имеет точное представление матрицами порядка 2. Вложение Магнуса отображает смежный класс $x[R,R]$ в матрицу

$$\begin{pmatrix} xR & 0 \\ t_x & 1 \end{pmatrix},$$

где t_x — свободный порождающий свободного $Z(G/R)$-модуля. Эта теорема имеет широкое применение в комбинаторной теории групп [2]. Аналоги вложения Магнуса доказаны для ассоциативных алгебр [3], для алгебр Ли [4], для алгебр Лейбница [5], а также имеют многочисленные приложения. В то же время такой аналог не верен для альтернативных алгебр. Для многообразия алгебр справедливость аналога вложения Магнуса является настолько важным, как, например, шпайеровость, существование базиса и т. д.

Многообразие правосимметричных алгебр является интересным классом Ли допустимых алгебр, свободные алгебры которого имеют прозрачный линейный базис [6]. В настоящей работе построен базис универсальной мультипликативной обертывающей алгебры $U(A)$ правосимметричной алгебры A с помощью методов базисов Гребнера — Ширшова (теорема 1). Затем в теореме 2 доказан точный аналог вложения Магнуса для правосимметричных алгебр.

§ 1. Базис универсальной мультипликативной обертывающей алгебры

Пусть F — произвольное поле. Напомним, что алгебра A над полем F называется *правосимметричной*, если для любых $x, y, z \in A$ выполняется тождество

$$(x, y, z) = (x, z, y). \tag{1}$$

Пусть A — правосимметричная алгебра. Через $U(A)$ будем обозначать универсальную мультипликативную обертывающую алгебру (см., например, [7]) алгебры A. Напомним, что $U(A)$ является ассоциативной алгеброй с 1, порожденной операторами левого умножения l_x и правого умножения r_x, где $x \in A$. Из (1) непосредственно вытекают определяющие соотношения алгебры $U(A)$:

$$r_x r_y - r_y r_x = r_{[x,y]}, \quad l_x r_y - r_y l_x + l_y l_x = l_{\mathrm{xy}}, \quad x, y \in A.$$

Линейный базис алгебры $U(A)$ описывает

Теорема 1. *Пусть A — правосимметричная алгебра с линейным базисом $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$. Тогда базис универсальной мультипликативной обертывающей алгебры $U(A)$ алгебры A состоит из слов вида*

$$r_{x_{j_1}} r_{x_{j_2}} \ldots r_{x_{j_t}} l_{x_{i_1}} l_{x_{i_2}} \ldots l_{x_{i_s}}, \tag{2}$$

где $j_1 \le j_2 \le \cdots \le j_t$, $s, t \ge 0$.

Доказательство. По определению $U(A)$ является ассоциативной алгеброй с порождающими r_{x_i}, l_{x_i}, $i \ge 1$, и определяющими соотношениями

$$r_{x_j} r_{x_k} - r_{x_k} r_{x_j} - r_{[x_j, x_k]} = 0, \quad j > k, \tag{3}$$

$$l_{x_i} r_{x_k} - r_{x_k} l_{x_i} + l_{x_k} l_{x_i} - l_{x_i x_k} = 0. \tag{4}$$

Положим

$$r_{x_1} < r_{x_2} < \cdots < r_{x_s} < \cdots < l_{x_1} < l_{x_2} < \cdots < l_{x_s} < \ldots. \tag{5}$$

Пусть u, v — произвольные ассоциативные слова в алфавите $r_{x_1}, r_{x_2}, \ldots, r_{x_s}, \ldots, l_{x_1}, l_{x_2}, \ldots, l_{x_s}, \ldots$. Положим $u < v$, если выполняется одно из следующих условий:

1) $d_r(u) < d_r(v)$, где d_r — функция длины по переменным r_{x_i};

2) $d_r(u) = d_r(v)$, $d(u) < d(v)$, где d — функция общей длины по переменным r_{x_i}, l_{x_j};

3) $d_r(u) = d_r(v)$, $d(f) = d(g)$, и u предшествует v относительно лексикографического порядка слева направо.

Относительно порядка $<$ старшими членами правых частей равенств (3) и (4) являются слова вида $r_{x_j} r_{x_k}$ $(j > k)$, $l_{x_i} r_{x_k}$ (для всех i, k). Следовательно, они образуют композицию (см. [8, с. 53–55]) с основами $w_1 = r_{x_j} r_{x_k} r_{x_i}$ при$j > k > i$ и $w_2 = l_{x_i} r_{x_j} r_{x_k}$ при $j > k$. Вычислим эти композиции (ниже сравнение $\equiv$ означает равенство по модулю слагаемых со старшими членами $< w_i, i = 1, 2$, см. [8]).

Случай 1. $w_1 = r_{x_j} r_{x_k} r_{x_i}, j > k > i$. Имеем

$$\begin{aligned}
&(r_{x_j} r_{x_k} - r_{x_k} r_{x_j} - r_{[x_j, x_k]}) r_{x_i} - r_{x_j} (r_{x_k} r_{x_i} - r_{x_i} r_{x_k} - r_{[x_k, x_i]}) \\
&\qquad = -r_{x_k} r_{x_j} r_{x_i} - r_{[x_k, x_k]} r_{x_i} + r_{x_j} r_{x_i} r_{x_k} + r_{x_j} r_{[x_k, x_i]} \\
&\quad \equiv -r_{x_k} (r_{x_i} r_{x_j} + r_{[x_j, x_i]}) - r_{[x_j, x_k]} r_{x_i} + (r_{x_i} r_{x_j} + r_{[x_j, x_i]}) r_{x_k} + r_{x_j} r_{[x_k, x_i]} \\
&\quad \equiv -r_{x_k} r_{x_i} r_{x_j} - r_{x_k} r_{[x_j, x_i]} - r_{[x_j, x_k]} r_{x_i} + r_{x_i} r_{x_j} r_{x_k} + r_{[x_j, x_i]} r_{x_k} + r_{x_j} r_{[x_k, x_i]} \\
&\quad \equiv -r_{x_i} r_{x_k} r_{x_j} - r_{[x_k, x_i]} r_{x_j} - r_{x_k} r_{[x_j, x_i]} - r_{[x_j, x_k]} r_{x_i} + r_{x_i} r_{x_k} r_{x_j} + r_{x_i} r_{[x_j, x_k]} \\
&\qquad\qquad + r_{[x_j, x_i]} r_{x_k} + r_{x_j} r_{[x_k, x_i]} \equiv 0.
\end{aligned}$$

Случай 2. $w_2 = l_{x_i} r_{x_j} r_{x_k}, j > k$. Имеем

$$\begin{aligned}
&l_{x_i} (r_{x_j} r_{x_k} - r_{x_k} r_{x_j} - r_{[x_j, x_k]}) - (l_{x_i} r_{x_j} - r_{x_j} l_{x_i} + l_{x_j} l_{x_i} - l_{x_i x_j}) r_{x_k} \\
&\qquad = -l_{x_i} r_{x_k} r_{x_j} - l_{x_i} r_{[x_j, x_k]} + r_{x_j} l_{x_i} r_{x_k} - l_{x_j} l_{x_i} r_{x_k} + l_{x_i x_j} r_{x_k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\equiv -r_{x_k}l_{x_i}r_{x_j}+l_{x_k}l_{x_i}r_{x_j}-l_{x_ix_k}r_{x_j}-r_{[x_j,x_k]}l_{x_i}+l_{[x_j,x_k]}l_{x_i}-l_{x_i[x_j,x_k]}+r_{x_j}r_{x_k}l_{x_i}\\&-r_{x_j}l_{x_k}l_{x_i}+r_{x_j}l_{x_ix_k}-l_{x_j}r_{x_k}l_{x_i}+l_{x_j}l_{x_k}l_{x_i}-l_{x_j}l_{x_ix_k}+r_{x_k}l_{x_ix_j}-l_{x_k}l_{x_ix_j}+l_{(x_ix_j)x_k}\\&\equiv(-r_{[x_j,x_k]}+r_{x_j}r_{x_k}-r_{x_k}r_{x_j})l_{x_i}+r_{x_j}l_{x_k}l_{x_i}-l_{x_j}l_{x_k}l_{x_i}+l_{x_kx_j}l_{x_i}-l_{x_jx_k}l_{x_i}\\&\quad+l_{[x_j,x_k]}l_{x_i}-r_{x_j}l_{x_k}l_{x_i}+l_{x_j}l_{x_k}l_{x_i}-l_{x_i[x_j,x_k]}+l_{(x_ix_j)x_k}-l_{(x_ix_k)x_j}\equiv 0.\end{aligned}$$

Следовательно, определяющие соотношения (3), (4) алгебры $U(A)$ замкнуты относительно композиции. Тогда по лемме Ширшова [8] базис универсальной мультипликативной обертывающей алгебры $U(A)$ состоит из слов вида (2). $\square$

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1 *слова вида*

$$l_{x_{i_1}}l_{x_{i_2}}\dots l_{x_{i_s}}r_{x_{j_1}}r_{x_{j_2}}\dots r_{x_{j_t}}, \tag{6}$$

где $j_1\le j_2\le\dots\le j_t$, $s,t\ge 0$, *составляют базис алгебры* $U(A)$.

Доказательство следствия 1 проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Через $RU(A)$ будем обозначать правую универсальную мультипликативную обертывающую алгебру алгебры A, т. е. подалгебру алгебры $U(A)$, порожденную универсальными операторами r_x, где $x\in A$. Аналогично определяем левую универсальную мультипликативную обертывающую алгебру $LU(A)$, подалгебру алгебры $U(A)$, порожденную универсальными операторами l_x, где $x\in A$.

Следствие 2. 1. *В условиях теоремы* 1 *слова вида*

$$r_{x_{j_1}}r_{x_{j_2}}\dots r_{x_{j_t}}, \tag{7}$$

где $j_1\le j_2\le\dots\le j_t$, $t\ge 0$, *составляют базис алгебры* $RU(A)$.

2. *Алгебра* $RU(A)$ *является ассоциативной алгеброй с порождающими* r_{x_i}, $i\ge 1$, *и определяющими соотношениями* (3).

Доказательство. По определению $RU(A)$ является подалгеброй ассоциативной алгебры $U(A)$, порожденной элементами r_{x_i}, $i\ge 1$. Пользуясь только соотношениями (3), легко показать, что любой элемент алгебры $RU(A)$ линейно выражается словами вида (7). Так как слова вида (7) являются частью базиса (2), они также линейно независимы и составляют базис алгебры $RU(A)$. Отсюда вытекает и второе утверждение следствия. $\square$

Из теоремы 1 непосредственно получаем также

Следствие 3. *В условиях теоремы* 1 *алгебра* $LU(A)$ *является свободной ассоциативной алгеброй со свободным множеством порождающих*

$$l_{x_{i_1}}, l_{x_{i_2}}, \dots, l_{x_{i_s}}, \dots. \tag{8}$$

§ 2. Универсальные дифференцирования правосимметричных алгебр

Пусть A — правосимметричная алгебра с линейным базисом $x_1,x_2,\dots x_n,\dots$. Положим

$$x_ix_j=\sum\gamma_{ij}^s x_s, \tag{9}$$

где γ_{ij}^s — структурные константы.

Пусть M — свободный правый $U(A)$-модуль с порождающим множеством $\overline{X}=\{\overline{x_1},\overline{x_2},\dots,\overline{x_n},\dots\}$. Через $\mathfrak{R}$ будем обозначать $U(A)$-подмодуль модуля M, порожденный элементами $\left(\overline{x_j}l_{x_i}+\overline{x_i}r_{x_j}-\sum\gamma_{ij}^s\overline{x_s}\right)$, $i,j\ge 1$.

Положим

$$I_A = M/\mathfrak{R}.$$

Рассмотрим линейное отображение

$$D : A \to I_A, \tag{10}$$

определенное правилом $D(x_i) = \overline{x_i}$, $i \geq 1$.

Имеем

$$D(x_i x_j) = D\Big(\sum \gamma_{ij}^s x_s\Big) = \sum \gamma_{ij}^s \overline{x_s} = \overline{x_j} l_{x_i} + \overline{x_i} r_{x_j} = D(x_i) r_{x_j} + D(x_j) l_{x_i},$$

т. е. отображение D является дифференцированием алгебры A с коэффициентами в I_A. Согласно [9] D является универсальным дифференцированием алгебры A в многообразии правосимметричных алгебр, а I_A — универсальным дифференциальным модулем. Далее, для любого $x \in A$ положим $\bar{x} = D(x)$.

Тогда справедлива следующая

Лемма 1. *Базис модуля I_A состоит из слов вида*

$$\overline{x_i} l_{x_{j_1}} l_{x_{j_2}} \dots l_{x_{j_t}}. \tag{11}$$

Доказательство. В силу определения I_A имеем

$$\overline{x_i} r_{x_j} + \overline{x_j} l_{x_i} - \sum \gamma_{ij}^s \overline{x_s} = \overline{x_i} r_{x_j} + \overline{x_j} l_{x_i} - \overline{x_i x_j} = 0. \tag{12}$$

На множестве базисных слов алгебры $U(A)$ введем порядок $\leq$, как в доказательстве теоремы 1. Относительно порядка $\leq$ положим $\overline{x_i} w < \overline{x_j} v$, где w, v — слова вида (2), если $w < v$ или $w = v$, $i < j$. По введенному порядку старшим членом соотношения (12) будут слова вида $\overline{x_i} r_{x_j}$. Старшими членами соотношений (3), (4) будут слова вида $r_{x_j} r_{x_k}$ $(j > k)$, $l_{x_i} r_{x_j}$ $(\forall i, j)$ соответственно.

В доказательстве теоремы 1 проверено, что соотношения (3) и (4) замкнуты относительно композиции. Соотношения (3) и (12) образуют композицию с основой $v = \overline{x_i} r_{x_j} r_{x_k}$, $j > k$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\overline{x_i}(r_{x_j} r_{x_k} - r_{x_k} r_{x_j} - r_{[x_j,x_k]}) - (\overline{x_j} l_{x_i} + \overline{x_i} r_{x_j} - \overline{x_i x_j}) r_{x_k} \\
&\qquad = -\overline{x_i} r_{x_k} r_{x_j} - \overline{x_i} r_{[x_j,x_k]} - \overline{x_j} l_{x_i} r_{x_k} + \overline{x_i x_j} r_{x_k} \\
&\equiv \overline{x_k} l_{x_i} r_{x_j} - \overline{x_i x_k} r_{x_j} + \overline{[x_j,x_k]} l_{x_i} + \overline{x_i [x_j,x_k]} - \overline{x_j} r_{x_k} l_{x_i} + \overline{x_j} l_{x_k} l_{x_i} - \overline{x_j} l_{x_i x_k} - \overline{x_k} l_{x_i x_j} \\
&\qquad \equiv \overline{x_k} r_{x_j} l_{x_i} - \overline{x_k} l_{x_j} l_{x_i} + \overline{x_k} l_{x_i x_j} + \overline{x_j} l_{x_i x_k} - \overline{(x_i x_k) x_j} + \overline{[x_j x_k]} l_{x_i} \\
&\qquad - \overline{x_i [x_j,x_k]} + \overline{x_k} l_{x_j} l_{x_i} - \overline{x_j x_k} l_{x_i} + \overline{x_j} l_{x_k} l_{x_i} - \overline{x_j} l_{x_i x_k} - \overline{x_k} l_{x_i x_j} \\
&\equiv -\overline{x_j} l_{x_k} l_{x_i} + \overline{x_k x_j} l_{x_i} - \overline{(x_i x_k) x_j} + \overline{[x_j,x_k]} l_{x_i} - \overline{x_i [x_j,x_k]} - \overline{x_j x_k} l_{x_i} + \overline{x_j} l_{x_k} l_{x_i} \equiv 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, определяющие соотношения (3), (4), (9) замкнуты относительно композиции. Тогда по лемме Ширшова [8] базис модуля I_A состоит из слов вида (11). $\square$

Следствие 4. *В условиях леммы* 1 *модуль I_A является свободным правым $LU(A)$-модулем с базой $\overline{x_i}$, $i \geq 1$.*

Далее, пусть A — произвольная правосимметричная алгебра и R — произвольный идеал алгебры A такой, что $R^2 = 0$. Через J будем обозначать идеал алгебры U_A, порожденный всеми операторами l_x, r_x, где $x \in R$.

Положим

$$D(A) = \{D(x) \mid x \in A\} \subseteq I_A.$$

Лемма 2. $D(A)J \cap D(A) = 0$.

Доказательство. Выберем базис алгебры A следующим способом:

1) $C = \{c_1, c_2, \dots c_k, \dots\}$ — базис подпространства R;

2) $C \cup B$ — базис A, где $B = \{b_1, b_2, \dots, b_s, \dots\}$.

Полагая $b_1 < \dots < b_s < \dots < c_1 < \dots < c_k < \dots$, согласно теореме 1 получаем базис алгебры $U(A)$

$$w = r_{b_{i_1}} \dots r_{b_{i_s}} r_{c_{j_1}} \dots r_{c_{j_k}} l_{d_{t_1}} \dots l_{d_{t_p}}, \tag{13}$$

где $i_1 < \dots < i_s$, $j_1 < \dots < j_k$, $c_i \in C$, $b_i \in B$, $d_k \in C \cup B$.

Сначала покажем, что слова вида (13), содержащие $c_i \in C$, составляют базис пространства J. Действительно, так как J — идеал алгебры $U(A)$, порожденный элементами r_x, l_x, где $x \in R$, то слова вида (13), содержащие c_i, принадлежат J. Любой элемент из J представляется линейной комбинацией слов вида

$$uTv, \tag{14}$$

где u и v — произвольные слова от r_x, l_x, где $x \in C \cup B$, T — элемент вида r_y, l_y, где $y \in C$. Слова вида (14) приводятся к базисному виду (13) с помощью замен подслов $r_x r_y$ $(x > y)$, $l_x r_y$ элементами вида $r_y r_x + r_{[x,y]}$, $r_y l_x + l_{xy} - l_y l_x$ соответственно. Очевидно, слова, которые появляются при этих заменах, также имеют вид (14). Следовательно, любой элемент из J представляется линейной комбинацией слов вида (13), которые содержат $c_i \in C$. В силу независимости они составляют базис пространства J.

Значит, базис пространства $D(A)J$ состоит из слов вида

$$\overline{b_i}w, \quad \overline{c_j}w,$$

где w — слова вида (13), содержащие $c_i \in C$.

Согласно следствию 4 I_A является свободным правым $LU(A)$-модулем с базой $\overline{b_i}$, $\overline{c_j}$, $i, j \geq 1$. Из следствия 3 вытекает, что $LU(A/R) = LU(A)/J \cap LU(A)$ — свободная ассоциативная алгебра с порождающими $l_{b_1}, l_{b_2}, \dots, l_{b_s}, \dots$.

Положим

$$N = I_A / I_A(J \cap LU(A))$$

и через $\xi : I_A \longrightarrow N$ обозначим естественный гомоморфизм. Тогда N является свободным модулем с базой $\overline{b_i}$, $\overline{c_j}$, $i, j \geq 1$, над свободной ассоциативной алгеброй $LU(A/R)$.

Найдем образы элементов $D(A)J$ в N. Если в слове w вида (13) один из элементов $d_{t_1}, d_{t_2}, \dots, d_{t_p}$ совпадает с элементом из C, то легко проверить, что $\xi(\overline{b_i}w) = 0$, $\xi(\overline{c_j}w) = 0$.

Допустим, что $k \geq 1$. Тогда также легко проверить, что $\xi(\overline{b_i}w)$, $\xi(\overline{c_j}w)$ линейно выражаются элементами вида

$$\overline{b_i} r_{c_k} l_{d_{t_1}} \dots l_{d_{t_p}} = (-\overline{c_k} l_{b_i} + \overline{b_i c_k}) l_{d_{t_1}} \dots l_{d_{t_p}}, \; \overline{c_j} r_{c_k} l_{d_{t_1}} \dots l_{d_{t_p}} = -\overline{c_k} l_{c_j} l_{d_{t_1}} \dots l_{d_{t_p}} = 0.$$

Таким образом, если $t \in D(A)J$, то $\xi(t)$ лежит в $LU(A/R)$-подмодуле свободного модуля N, порожденного элементами вида

$$\overline{c_k} l_{b_i} - \overline{b_i c_k}, \quad k, i \geq 1.$$

На множестве базисных слов модуля N введем линейный порядок $<$, как в доказательстве леммы 1. Согласно лемме Ширшова [8] старший член элемента $\xi(t)$ содержит слово вида $\overline{c_k} l_{b_i}$. Пусть

$$d = \sum \beta_i \overline{b_i} + \sum \gamma_i \overline{c_i} \in D(A) \cap D(A)J.$$

Тогда старший член

$$\xi(d) = \sum \beta_i \overline{b_i} + \sum \gamma_i \overline{c_i}$$

должен содержать подслово вида $\overline{c_k} l_{b_i}$. Следовательно, $\beta_i = \gamma_i = 0$, т. е. $d = 0$. Отсюда получаем, что $D(A)J \cap D(A) = 0$. $\square$

Пусть R — произвольный идеал алгебры A. Через J, как и прежде, обозначим идеал алгебры $U(A)$, порожденный всеми операторами r_x, l_x, где $x \in R$.

Лемма 3. $D(A)J \cap D(A) = D(R^2)$.

Доказательство. Рассмотрим естественный гомоморфизм $\phi : A \to A/R^2$. Он индуцирует гомоморфизм алгебр

$$\phi : U(A) \to U(A/R^2),$$

определенный правилом $r_x \to r_{\phi(x)}$, $l_x \to l_{\phi(x)}$, где $x \in A$, и согласованный гомоморфизм правых $U(A)$-, $U(A/R^2)$-модулей:

$$\phi : I_A \longrightarrow I_{A/R^2}.$$

Заметим, что $D(A/R^2) = D(A)/D(R^2)$.

Допустим, что $f \in D(A) \cap D(A)J$. Тогда $\phi(f) \in D(A/R^2)$ и

$$\phi(f) = \phi(D(A)J) = \phi(D(A))\phi(J) = D(A/R^2)\phi(J),$$

т. е. $\phi(f) \in D(A/R^2) \cap D(A/R^2)\phi(J)$. Поскольку идеал J алгебры $U(A)$ порождается операторами r_x, l_x, где $x \in R$, то идеал $\phi(J)$ алгебры $U(A/R^2)$ порождается операторами $r_{\phi(x)}$, $l_{\phi(x)}$, где $x \in R$. Заметим, что идеал $\phi(R)$ алгебры A/R^2 удовлетворяет условию леммы 2, т. е. $\phi(R)^2 = 0$. Тогда по лемме 2 имеем $\phi(f) = 0$. Отсюда получаем, что $f \in D(R^2)$. Тем самым доказано включение $D(A)J \cap D(A) \subseteq D(R^2)$.

Обратно, если $x, y \in R$, то $D(xy) = \overline{x} r_y + \overline{y} l_x \in D(A)J \cap D(A)$, т. е. $D(R^2) \subseteq D(A)J \cap D(A)$. $\square$

§ 3. Производные Фокса и вложение Магнуса

Пусть $A = A\langle X \rangle$ — свободная правосимметричная алгебра со свободным множеством порождающих X. Через I_A будем обозначать свободный правый $U(A)$-модуль с базой $Z = \{z_x \mid x \in X\}$.

Отображение $D : X \longrightarrow I_A$, определенное правилом $D(x) = z_x$, где $x \in X$, единственным способом продолжается до дифференцирования

$$D : A \longrightarrow I_A$$

алгебры A с коэффициентами в $U(A)$-модуле I_A. Легко проверить, что D является универсальным дифференцированием алгебры A в многообразии правосимметричных алгебр. Для любого $f \in A$ однозначно находятся элементы $a_x \in U(A)$ такие, что

$$D(f) = \sum z_x a_x.$$

Элементы a_x часто называют *производными Фокса* и обозначают через $\frac{\partial f}{\partial x}$, т. е.

$$D(f) = \sum z_x \frac{\partial f}{\partial x} = \sum D(x) \frac{\partial f}{\partial x}. \tag{15}$$

Пусть R — произвольный идеал алгебры A, через J_R обозначим идеал алгебры $U(A)$, порожденный операторами r_x, l_x, где $x \in R$. Гомоморфизм $\varphi : A \to A/R$ индуцирует гомоморфизм $\varphi : U(A) \to U(A/R)$, который переводит элементы r_x, l_x соответственно в $r_{\varphi(x)}$, $l_{\varphi(x)}$, где $x \in A$. Тогда справедлива следующая

Лемма 4. *Пусть $f \in A$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial x} \in J_R$ для всех $x \in X$ в том и только в том случае, если $f \in R^2$.*

Доказательство. Предположим, что $\frac{\partial f}{\partial x} \in J_R$. Тогда согласно (15) имеем
$$D(f) \in D(A)J_R.$$
В силу леммы 3 отсюда получаем $D(f) \in D(R^2)$, т. е. $f \in R^2$.

Теперь допустим, что $f = ab$, где $a, b \in R$. Тогда
$$D(f) = D(a)r_b + D(b)l_a.$$
Так как $l_a, r_b \in J_R$, представляя элемент $D(f)$ в виде (15), получаем $\frac{\partial f}{\partial x} \in J_R$ для всех $x \in X$. $\square$

Пусть M — свободный правый $U(A/R)$-модуль с базой $Y = \{y_x \mid x \in X\}$, где $U(A/R)$ — универсальная мультипликативная обертывающая алгебра алгебры A/R . Пространство
$$A/R \oplus M$$
имеет структуру правосимметричной алгебры относительно умножения
$$(f_1 + m_1)(f_2 + m_2) = f_1 f_2 + m_1 r_{f_2} + m_2 l_{f_1},$$
где $f_1, f_2 \in A/R$, $m_1, m_2 \in M$.

Так как A — свободная правосимметричная алгебра, существует единственный гомоморфизм
$$\tau : A \to A/R \oplus M,$$
определенный правилом $\tau(x) = \varphi(x) + y_x$, где $x \in X$.

Лемма 5. *Пусть $f \in A$. Тогда*
$$\tau(f) = \varphi(f) + \sum y_x \varphi\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Доказательство. Пусть X^* — множество всех неассоциативных слов в алфавите X. Заметим, что утверждение леммы достаточно доказать для неассоциативных слов f в алфавите X, т. е. можно считать, что $f \in X^*$. Если f имеет длину 1, то утверждение леммы выполняется по определению гомоморфизма τ. Предположим, что f — неассоциативное слово длины ≥ 2 и утверждение леммы справедливо для слов меньшей длины. Однозначно находятся нетривиальные слова u, v такие, что $f = uv$. Имеем
$$\tau(f) = \tau(uv) = \tau(u)\tau(v) = \left(\varphi(u) + \sum y_x \varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)\left(\varphi(v) + \sum y_x \varphi\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)$$
$$= \varphi(u)\varphi(v) + \sum y_x \varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) r_{\varphi(v)} + \sum y_x \varphi\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) l_{\varphi(u)}$$
$$= \varphi(uv) + \sum y_x \left(\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) r_{\varphi(v)} + \varphi\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) l_{\varphi(u)}\right) = \varphi(uv) + \sum y_x \varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x} r_v + \frac{\partial v}{\partial x} l_u\right)$$
$$= \varphi(uv) + \sum y_x \varphi\left(\frac{\partial (uv)}{\partial x}\right) = \varphi(f) + \sum y_x \varphi\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$
что и требовалось доказать. $\square$

Если $a, b \in R$, то
$$\tau(ab) = \tau(a)\tau(b) = (\varphi(a) + c)(\varphi(b) + d) = \varphi(a)\varphi(b) + \varphi(a)d + c\varphi(b) = 0.$$
Следовательно, $R^2 \subseteq \mathrm{Ker}(\tau)$, и гомоморфизм τ индуцирует гомоморфизм
$$\psi : A/R^2 \to A/R \oplus M. \tag{16}$$

Точный аналог вложения Магнуса для правосимметричных алгебр дает следующая

Теорема 2. *Гомоморфизм ψ является вложением.*

Доказательство. Предположим, что $\tau(f) = 0$ для некоторого $f \in A$. Из леммы 5 получаем

$$\varphi(f) = 0, \quad \varphi\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0$$

для всех $x \in X$. Это означает, что $\frac{\partial f}{\partial x} \in J_R$ для всех $x \in X$. Тогда по лемме 4 имеем $f \in R^2$. Следовательно, $\mathrm{Ker}(\tau) = R^2$. Это означает, что $\mathrm{Ker}(\psi) = 0$, т. е. гомоморфизм ψ является вложением. $\square$

Заметим, что алгебра $A/R \oplus M$ представляется матрицами вида

$$\begin{pmatrix} x & m \\ 0 & x \end{pmatrix}, \quad x \in A/R,\ m \in M,$$

с правилом умножения

$$\begin{pmatrix} x & m \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & n \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & nl_x + mr_y \\ 0 & xy \end{pmatrix}.$$

При этом элементу $x + m$ сопоставляется матрица $\begin{pmatrix} x & m \\ 0 & x \end{pmatrix}$.

Таким образом, вложение Магнуса смежному классу $x + R^2$ сопоставляет матрицу

$$\begin{pmatrix} \varphi(x) & \overline{x} \\ 0 & \varphi(x) \end{pmatrix},$$

что соответствует классическому вложению Магнуса из теории групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Magnus W.* On a theorem of Marshall Hall // Ann. Math. 1939. V. 40. P. 764–768.
2. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980. Т. 2.
3. *Lewin J.* A matrix representation for associative algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 188, N 2. P. 293–308.
4. *Харлампович О. Г.* Условие Линдона для разрешимых алгебр Ли // Изв. вузов. Математика. 1984. № 9. С. 50–59.
5. *Абдыхалыков А. Т.* Вложение Магнуса для алгебр Лейбница // Наука и образование Южного Казахстана. 1997. Т. 6. С. 218–224.
6. *Segal D.* Free left-symmetric algebras and an analogue of the Poincaré–Birkhoff–Witt theorem // J. Algebra. 1994. V. 164. P. 750–772.
7. *Jacobcon N.* Structure and representations of Jordan algebras. Providence: Amer. Math. Soc., 1968. (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.; 39).
8. *Бокуть Л. А.* Ассоциативные кольца. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1977.
9. *Умирбаев У. У.* О шрейеровых многообразиях алгебр // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, № 3. С. 317–340.

Статья поступила 16 июня 2003 г.

Козыбаев Данияр Хайбилдаевич, *Умирбаев Уалбай Утмаханбетович*
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева,
ул. Мунайтпасова, 5, Астана 473021, Казахстан
kozybayev@rambler.ru, umirbaev@yahoo.com