Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2003. Том 44, № 5

УДК 517.55

ВЫРАЖЕНИЕ СУПЕРПОЗИЦИИ ОБЩИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЧЕРЕЗ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

И. А. Антипова

Аннотация: Показано, что суперпозиция общих алгебраических функций может быть представлена в виде отношения гипергеометрических рядов.

Ключевые слова: алгебраическая функция, гипергеометрический ряд, преобразование Меллина, суперпозиция, многомерные вычеты.

В 1921 г. Меллин [1] получил формулу для решения общего алгебраического уравнения

$$y^m + x_{m-1}y^{m-1} + \dots + x_1 y - 1 = 0. \tag{1}$$

Для решения $y(x) = y(x_1, \dots, x_{m-1})$, которое мы будем называть общей алгебраической функцией, он привел две формулы: представление в виде интеграла, называемого теперь интегралом Меллина — Барнса [2–4], и формулу разложения в степенной ряд с центром в точке $x = 0$. Указанный степенной ряд является гипергеометрическим рядом по Горну (см. [5, 6]): отношения соседних коэффициентов ряда являются рациональными функциями от переменных суммирования ряда.

В настоящей работе обобщаются формулы Меллина для суперпозиции общих алгебраических функций. Как отмечено в [7], суперпозицию n алгебраических функций можно проинтерпретировать как n-ю координату решения системы n алгебраических уравнений «треугольного» вида, причем под «треугольностью» понимается, что первое уравнение зависит только от первой неизвестной переменной, второе — от первой и второй и т. д. Имея в виду обобщение уравнения (1), такую «треугольную» систему запишем в виде

$$\begin{cases} y_1^{m_1} + \sum\limits_{0<k_1^1<m_1} x_{k_1^1} y_1^{k_1^1} - 1 = 0, \\ y_2^{m_2} + \sum\limits_{0<k_2^2<m_2} x_{k_1^2 k_2^2} y_1^{k_1^2} y_2^{k_2^2} - 1 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n^{m_n} + \sum\limits_{0<k_n^n<m_n} x_{k_1^n \dots k_n^n} y_1^{k_1^n} \dots y_n^{k_n^n} - 1 = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где во втором уравнении нет ограничений на суммирование по k_1^2, в третьем — на суммирование по k_1^3, k_2^3 и т. д., в последнем уравнении — на суммирование

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00167).

по $k_1^n, \ldots, k_{n-1}^n$, а предполагается лишь, что суммы конечные. Таким образом, в i-м уравнении системы суммирование ведется по множеству мультииндексов $\Delta_i \subset \mathbb{Z}_+^i$ вида $\Delta_i = \Delta_i' \times [1, m_i - 1]$, где $\Delta_i' \subset \mathbb{Z}_+^{i-1}$ — конечное множество.

Набор показателей $\left(k_1^i, \ldots, k_i^i\right) \in \Delta_i$, обслуживающих i-е уравнение в (2), будем кратко обозначать через k^i, а соответствующий коэффициент $x_{k_1^i \ldots k_i^i}$ в этом уравнении — через x_{k^i}.

Для вычисления n-й координаты $y_n(x) = y_n(\{x_{k^1}\}, \ldots, \{x_{k^n}\})$ решения $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$ системы (2) исследуем любую мономиальную функцию

$$y^\mu(x) := y_1^{\mu_1}(x) \cdot \ldots \cdot y_n^{\mu_n}(x), \quad \text{где} \quad \mu_1 > 0, \ldots, \mu_n > 0.$$

В п. 1 вычислено преобразование Меллина для $y^\mu(x)$, а в п. 2 с помощью преобразования Меллина выписано интегральное представление (теорема 2) и разложение в ряд Тейлора для $y^\mu(x)$ (теорема 3). Последняя теорема утверждает, что для ветви $y(x)$ со свойством $y_i(0) = 1$, $i = 1, \ldots, n$, функция y^μ разлагается в ряд Тейлора:

$$y^\mu(x) = 1 + \sum_{|p| \geqslant 1} \frac{(-1)^{|p|}}{p^1! \cdot \ldots \cdot p^n!} C_p \prod_{j=1}^{n} \prod_{k^j \in \Delta_j} x_{k^j}^{p_{k^j}}.$$

Коэффициенты $C_p = C_{p^1 \ldots p^n}$ определяются по формуле

$$\prod_{j=1}^{n} \left[\left(\frac{\mu_j}{m_j} + \sum_{i=j+1}^{n} \sum_{k^i \in \Delta_i} \frac{k_j^i}{m_j} p_{k^i} \right) \prod_{q=1}^{|p^j|-1} \left(\frac{\mu_j}{m_j} + \sum_{i=j}^{n} \sum_{k^i \in \Delta_i} \frac{k_j^i}{m_j} p_{k^i} - |p^j| + q \right) \right],$$

где

$$p^j! = \prod_{k^j \in \Delta_j} p_{k^j}!, \quad |p^j| = \sum_{k^j \in \Delta_j} p_{k^j},$$

причем в случае $|p^j| = 1$ произведение $\prod\limits_{q=1}^{0}$ полагается равным 1.

Степенной ряд для $y^\mu(x)$ получается вычислением обратного преобразования Меллина с помощью многомерных вычетов на основе метода разделяющих циклов А. К. Циха [2–4].

Из структуры коэффициентов C_p видно, что степенной ряд для $y^\mu(x)$ является гипергеометрическим. Координата $y_n(x)$ может быть представлена, например, в виде отношения

$$y_n(x) = \frac{y_1(x) \cdot \ldots \cdot y_{n-1}(x) \cdot y_n^2(x)}{y_1(x) \cdot \ldots \cdot y_{n-1}(x) \cdot y_n(x)}.$$

Поэтому мы получаем (теорема 4): *суперпозиция $y_n(x)$ общих алгебраических функций представляется в виде отношения двух гипергеометрических рядов.*

Это обстоятельство уместно сравнить с замечанием Б. Штурмфельса [8] о том, что в отличие от случая одного уравнения решения систем уравнений не всегда зависят от коэффициентов гипергеометрическим образом.

Автор благодарен рецензентам за полезные замечания.

1. Преобразование Меллина для $y^\mu(x)$

Преобразование Меллина для $y^\mu(x) = y_1^{\mu_1}(x) \cdot \ldots \cdot y_n^{\mu_n}(x)$ определяется интегралом

$$M(u) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{s_1}} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}_+^{s_n}} y_1^{\mu_1}(x) \cdot \ldots \cdot y_n^{\mu_n}(x) \prod_{i=1}^{n} \prod_{k^i \in \Delta_i} x_{k^i}^{u_{k^i} - 1} \, dx, \tag{3}$$

где

$$dx = \prod_{i=1}^{n} \prod_{k^i \in \Delta_i} dx_{k^i},$$

а s_i равно количеству коэффициентов в i-м уравнении системы (2), т. е. мощности Δ_i.

Для вычисления интеграла (3) введем замену переменных $\xi \to x$:

$$x_{k^r} = \xi_{k^r} W_1^{\frac{k_1^r}{m_1}} \cdot \ldots \cdot W_r^{\frac{k_r^r}{m_r}} \cdot W_r^{-1}, \quad k^r \in \Delta_r, \quad r = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

где

$$W_r = 1 + \sum_{k^r \in \Delta_r} \xi_{k^r}, \quad r = 1, \ldots, n.$$

Учитывая соотношения (2), легко видеть, что

$$y_r = W_r^{-\frac{1}{m_r}}.$$

Для вычисления якобиана

$$\frac{\partial(x)}{\partial(\xi)} = \frac{\partial(\{x_{k^1}\}, \ldots, \{x_{k^n}\})}{\partial(\{\xi_{k^1}\}, \ldots, \{\xi_{k^n}\})}$$

матрицу Якоби рассмотрим как блочную с n^2 блоками

$$\frac{\partial(\{x_{k^r}\})}{\partial(\{\xi_{l^s}\})}, \quad r, s = 1, \ldots, n,$$

у которой диагональные блоки квадратные. В клетках, стоящих на диагонали, диагональные элементы следующие:

$$\frac{\partial x_{k^r}}{\partial \xi_{k^r}} = W_1^{\frac{k_1^r}{m_1}} \cdot \ldots \cdot W_{r-1}^{\frac{k_{r-1}^r}{m_{r-1}}} W_r^{\frac{k_r^r}{m_r}-1} + \xi_{k^r} W_1^{\frac{k_1^r}{m_1}} \cdot \ldots \cdot W_{r-1}^{\frac{k_{r-1}^r}{m_{r-1}}} \left(\frac{k_r^r}{m_r} - 1\right) W_r^{\frac{k_r^r}{m_r}-2}.$$

Вне диагоналей в этих клетках стоят элементы вида

$$\frac{\partial x_{k^r}}{\partial \xi_{l^r}} = \xi_{k^r} W_1^{\frac{k_1^r}{m_1}} \cdot \ldots \cdot W_{r-1}^{\frac{k_{r-1}^r}{m_{r-1}}} \left(\frac{k_r^r}{m_r} - 1\right) W_r^{\frac{k_r^r}{m_r}-2}, \quad k^r \neq l^r.$$

Клетки, расположенные выше диагонали, состоят из нулей ввиду треугольности системы (2). Определитель этой матрицы равен произведению определителей блоков, стоящих на диагонали. Несложные вычисления приводят к следующему выражению для якобиана.

Лемма. *Якобиан замены* (4) *выражается формулой*

$$\frac{\partial(x)}{\partial(\xi)} = \prod_{i=1}^{n} \left[W_i^{A_i} \left(1 + \sum_{k^i \in \Delta_i} \xi_{k^i} \frac{k_i^i}{m_i} \right) \right],$$

где

$$A_i = \sum_{k^i \in \Delta_i} \left(\frac{k_i^i}{m_i} - 1 \right) + \left(\sum_{j=i+1}^{n} \sum_{k^j \in \Delta_j} \frac{k_i^j}{m_i} \right) - 1.$$

Теперь сформулируем и докажем основное утверждение настоящего пункта.

Теорема 1. *Преобразование Меллина $M(u)$, определяемое интегралом* (3), *равно*

$$\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\Big(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=j}^{n}\sum\limits_{k^i\in\Delta_i}k_j^i u_{k^i}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=j}^{n}\sum\limits_{k^i\in\Delta_i}k_j^i u_{k^i}+\sum\limits_{k^j\in\Delta_j}u_{k^j}+1\Big)}\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum_{i=j+1}^{n}\sum_{k^i\in\Delta_i}k_j^i u_{k^i}\right)\prod_{k^j\in\Delta_j}\Gamma(u_{k^j})\right].$$

Интеграл (3) *сходится при условиях*

$$\operatorname{Re}u_{k^j}>0\quad(k^j\in\Delta_j),\quad \operatorname{Re}\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum_{i=j}^{n}\sum_{k^i\in\Delta_i}k_j^i u_{k^i}\right)>0,\quad j=1,\dots,n.$$

Замечание. Для случая $n=1$ преобразование $M(u)$ вычислено Меллином в [1].

Доказательство. Заметим, что замена переменной (4) определяет биекцию пространства $\mathbb{R}_+^{|s|}$. В самом деле, эта замена на каждой из плоскостей вида

$$\alpha_r=\Big\{\xi\in\mathbb{R}_+^{|s|}:\sum_{k^p\in\Delta_p}\xi_{k^p}=r_p,\ p=1,\dots n\Big\}$$

представляет собой обычное растяжение, и потому она инъективна на таких плоскостях. При разных r плоскости α_r не пересекаются в октанте $\mathbb{R}_+^{|s|}$, причем таким же свойством обладают образы этих плоскостей. Следовательно, замена (4) инъективна, а ее сюръективность вытекает из того, что при $r\in[0;+\infty)^n$ образы плоскостей α_r исчерпывают весь октант $\mathbb{R}_+^{|s|}$.

В преобразовании Меллина (3) произведем замену переменной (4) и подставим значение якобиана, найденное в лемме. В результате $M(u)$ запишется интегралом

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^{s_1}}\cdots\int\limits_{\mathbb{R}_+^{s_n}}\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}\left[\Big(1+\sum\limits_{k^j\in\Delta_j}\xi_{k^j}\frac{k_j^j}{m_j}\Big)\prod\limits_{k^j\in\Delta_j}\xi_{k^j}^{u_{k^j}-1}\right]d\xi}{\prod\limits_{j=1}^{n}W_j^{\frac{1}{m_j}\Big(\mu_j-\sum\limits_{k^j\in\Delta_j}(k_j^j-m_j)(u_{k^j}-1)-\sum\limits_{i=j+1}^{n}\sum\limits_{k^i\in\Delta_i}k_j^i(u_{k^i}-1)-m_jA_j\Big)}}.$$

Перепишем степень величины W_j в знаменателе подынтегрального выражения в виде

$$\frac{1}{m_j}\left(\mu_j-\sum_{k^j\in\Delta_j}(k_j^j-m_j)(u_{k^j}-1)-\sum_{i=j+1}^{n}\sum_{k^i\in\Delta_i}k_j^i(u_{k^i}-1)-m_jA_j\right)$$
$$=\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum_{i=j}^{n}\sum_{k^i\in\Delta_i}k_j^i u_{k^i}+\sum_{k^j\in\Delta_j}u_{k^j}+1.$$

Тогда

$$M(u)=\prod_{j=1}^{n}J_j,$$

где

$$J_j=\int\limits_{\mathbb{R}_+^{s_j}}\frac{\Big(1+\sum\limits_{k^j\in\Delta_j}\xi_{k^j}\frac{k_j^j}{m_j}\Big)\prod\limits_{k^j\in\Delta_j}\xi_{k^j}^{u_{k^j}-1}\,d\xi_{k^j}}{W_j^{\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=j}^{n}\sum\limits_{k^i\in\Delta_i}k_j^iu_{k^i}+\sum\limits_{k^j\in\Delta_j}u_{k^j}+1}}. \tag{5}$$

Для вычисления интегралов J_j воспользуемся формулой (см. [9]) :

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^{s_j}}\frac{\prod\limits_{k^j\in\Delta_j}\xi_{k^j}^{u_{k^j}-1}\,d\xi_{k^j}}{\big(1+\sum\limits_{k^j\in\Delta_j}\xi_{k^j}\big)^p}=\frac{\prod\limits_{k^j\in\Delta_j}\Gamma(u_{k^j})\Gamma\big(p-\sum\limits_{k^j\in\Delta_j}u_{k^j}\big)}{\Gamma(p)}. \tag{6}$$

Интеграл (6) сходится, если $\operatorname{Re}u_{k^j}>0$, $\operatorname{Re}p>0$, следовательно, интегралы (5), а поэтому и интеграл (3) будут сходиться при условиях

$$\operatorname{Re}(u_{k^j})>0,\quad \operatorname{Re}\Bigg(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum_{i=j}^{n}\sum_{k^i\in\Delta_i}k_j^iu_{k^i}\Bigg)>0,\quad k^j\in\Delta_j,\ j=1,\ldots,n.$$

Воспользовавшись формулой (6), получим

$$\begin{aligned}
J_j&=\int\limits_{\mathbb{R}_+^{s_j}}\frac{\prod\limits_{k^j\in\Delta_j}\xi_{k^j}^{u_{k^j}-1}\,d\xi_{k^j}}{W_j^{\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=j}^{n}\sum\limits_{k^i\in\Delta_i}k_j^iu_{k^i}+\sum\limits_{k^j\in\Delta_j}u_{k^j}+1}}\\
&\qquad+\int\limits_{R_+^{s_j}}\frac{\Big(\sum\limits_{k^j\in\Delta_j}\frac{k_j^j}{m_j}\xi_{k^j}\Big)\prod\limits_{k^j\in\Delta_j}\xi_{k^j}^{u_{k^j}-1}\,d\xi_{k^j}}{W_j^{\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=j}^{n}\sum\limits_{k^i\in\Delta_i}k_j^iu_{k^i}+\sum\limits_{k^j\in\Delta_j}u_{k^j}+1}}\\
&=\frac{\prod\limits_{k^j\in\Delta_j}\Gamma(u_{k^j})\Gamma\Bigg(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=j}^{n}\sum\limits_{k^i\in\Delta_i}k_j^iu_{k^i}+1\Bigg)}{\Gamma\Bigg(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=j}^{n}\sum\limits_{k^i\in\Delta_i}k_j^iu_{k^i}+\sum\limits_{k^j\in\Delta_j}u_{k^j}+1\Bigg)}\\
&\quad+\sum_{l^j\in\Delta_j}\frac{l_j^j}{m_j}\frac{\Big(\prod\limits_{\substack{k^j\in\Delta_j\\k^j\neq l^j}}\Gamma(u_{k^j})\Big)\Gamma(u_{l^j}+1)\Gamma\Bigg(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=j}^{n}\sum\limits_{k^i\in\Delta_i}k_j^iu_{k^i}\Bigg)}{\Gamma\Bigg(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=j}^{n}\sum\limits_{k^i\in\Delta_i}k_j^iu_{k^i}+\sum\limits_{k^j\in\Delta_j}u_{k^j}+1\Bigg)}\\
&=\prod_{k^j\in\Delta_j}\Gamma(u_{k^j})\Bigg[\frac{\Gamma\Bigg(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=j}^{n}\sum\limits_{k^i\in\Delta_i}k_j^iu_{k^i}\Bigg)}{\Gamma\Bigg(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=j}^{n}\sum\limits_{k^i\in\Delta_i}k_j^iu_{k^i}+\sum\limits_{k^j\in\Delta_j}u_{k^j}+1\Bigg)}\\
&\qquad\times\Bigg(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum_{i=j}^{n}\sum_{k^i\in\Delta_i}k_j^iu_{k^i}+\sum_{k^j\in\Delta_j}\frac{k_j^j}{m_j}u_{k^j}\Bigg)\Bigg]
\end{aligned}$$

$$= \prod_{k^j\in\Delta_j}\Gamma(u_{k^j})\left[\frac{\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=j}^{n}\sum\limits_{k^i\in\Delta_i}k_j^i u_{k^i}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=j}^{n}\sum\limits_{k^i\in\Delta_i}k_j^i u_{k^i}+\sum\limits_{k^j\in\Delta_j}u_{k^j}+1\right)}\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum_{i=j+1}^{n}\sum_{k^i\in\Delta_i}k_j^i u_{k^i}\right)\right],$$

откуда вытекает утверждение теоремы.

2. Интегральная формула и ряд Тейлора для $y^\mu(x)$

Следуя Меллину [1], приведем интегральную формулу для

$$y^\mu = y_1^{\mu_1}(x)\cdot\ldots\cdot y_n^{\mu_n}(x)\quad(\mu_1>0,\ldots,\mu_n>0),$$

где $y(x)=(y_1(x),\ldots,y_n(x))$ — решение системы (2). А именно, формула обращения для преобразования Меллина приводит к следующему утверждению.

Теорема 2. *Мономиальная функция $y^\mu(x)$ решения системы* (2) *представляется следующим интегралом Меллина — Барнса:*

$$\frac{1}{(2\pi i)^{|s|}}\int\limits_{\gamma+i\mathbb{R}^{|s|}}\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=j}^{n}\sum\limits_{k^i\in\Delta_i}k_j^i u_{k^i}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=j}^{n}\sum\limits_{k^i\in\Delta_i}k_j^i u_{k^i}+\sum\limits_{k^j\in\Delta_j}u_{k^j}+1\right)}\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum_{i=j+1}^{n}\sum_{k^i\in\Delta_i}k_j^i u_{k^i}\right)\prod_{k^j\in\Delta_j}\Gamma(u_{k^j})(x_{k^j})^{-u_{k^j}}\right]du,\tag{7}$$

где $|s|=s_1+\cdots+s_n$, $du=\prod\limits_{j=1}^{n}\prod\limits_{k^j\in\Delta_j}du_{k^j}$. *Вектор* $\gamma\in\mathbb{R}^{|s|}$ *выбирается из многогранника*

$$\left\{u\in\mathbb{R}^{|s|}:u_{k^j}>0,\ k^j\in\Delta_j,\ \frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\sum_{i=j}^{n}\sum_{k^i\in\Delta_i}k_j^i u_{k^i}>0,\ j=1,\ldots,n\right\}.$$

Для вычисления интеграла (7) воспользуемся теорией многомерных вычетов. Результат вычисления интеграла через сумму вычетов и даст нам ряд Тейлора для $y^\mu(x)$.

Теорема 3. *Для любого $\mu\in\mathbb{R}_+^n$ функция $y^\mu(x)$ разлагается в некоторой окрестности начала координат $x=0$ в ряд Тейлора* (*гипергеометрический ряд*)

$$y^\mu(x)=1+\sum_{|p|\geqslant 1}C_p\prod_{j=1}^{n}\prod_{k^j\in\Delta_j}(x_{k^j})^{p_{k^j}},\tag{8}$$

где коэффициенты C_p определяются по формуле

$$C_p=\frac{(-1)^{|p|}}{p^1!\cdot\ldots\cdot p^n!}\prod_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{\mu_j}{m_j}+\frac{1}{m_j}\sum_{i=j+1}^{n}\sum_{k^i\in\Delta_i}k_j^i p_{k^i}\right)\right.$$

$$\times \prod_{q=1}^{|p^j|-1} \left(\frac{\mu_j}{m_j} + \frac{1}{m_j} \sum_{i=j}^{n} \sum_{k^i \in \Delta_i} k_j^i p_{k^i} - |p^j| + q \right) \Bigg], \qquad (9)$$

$$p^j! = \prod_{k^j \in \Delta_j} p_{k^j}!, \quad |p^j| = \sum_{k^j \in \Delta_j} p_{k^j},$$

в случае $|p^j| = 1$ *произведение* $\prod\limits_{q=1}^{0}$ *полагается равным* 1.

Доказательство. Нам потребуется один из фактов многомерной теории вычетов, а именно принцип разделяющих циклов [2–4]. Адаптация этого принципа к нашему случаю касается вычисления интегралов от мероморфных дифференциальных форм вида

$$\omega = \prod_{j=1}^{m} \Gamma(u_j) \frac{\prod\limits_{k} \Gamma(\langle A_k, u\rangle + a_k)}{\prod\limits_{l} \Gamma(\langle B_l, u\rangle + b_l)} P(u) x_1^{-u_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{-u_m}\, du,$$

где $a_k, b_l \in \mathbb{R}$, $A_k, B_l \in \mathbb{R}^m$, $P(u)$ — полином. Обозначим $I = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}^m$.

Утверждение [2, с. 235; 3]. *Если* $I + \sum A_k = \sum B_l$ *и вектор* $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in \mathbb{R}^m$ *таков, что ни одно из полупространств* $\langle A_k, u\rangle + a_k \leq 0$ *не пересекает октант*

$$\{u \in \mathbb{C}^m : \operatorname{Re} u_1 < \gamma_1, \ldots, \operatorname{Re} u_m < \gamma_m\},$$

то справедливо равенство

$$\frac{1}{(2\pi i)^m} \int\limits_{\gamma + i\mathbb{R}^m} \omega = \sum_{p \in \mathbb{N}^m} \operatorname{res}_{u(p)} \omega, \qquad (10)$$

где $\operatorname{res}_{u(p)} \omega$ *— это вычет в точке пересечения* $u(p) = (-p_1, \ldots, -p_m)$ *гиперплоскостей* $u_1 = -p_1, \ldots, u_m = -p_m$, *являющихся полюсами для* $\Gamma(u_1), \ldots, \Gamma(u_m)$. *Ряд из вычетов сходится в некоторой окрестности точки* $x = 0$.

Вычислим интеграл (7) как сумму вычетов по всем точкам $u(p)$:

$$\begin{gathered} u_{k_1^1} = -p_{k_1^1} \quad \big(0 < k_1^1 < m_1\big), \\ u_{k_1^2 k_2^2} = -p_{k_1^2 k_2^2} \quad \big(0 < k_2^2 < m_2\big), \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ u_{k_1^n \ldots k_n^n} = -p_{k_1^n \ldots k_n^n} \quad \big(0 < k_n^n < m_n\big). \end{gathered}$$

В этих точках одновременно имеют полюсы все $\Gamma(u_{k^j})$, $j = 1, \ldots, n$.

Обозначим через ω подынтегральное выражение (7). Так как в точке $u(p)$ полярность формы ω обеспечивается только множителями $\Gamma(u_{k^j})$, вычет $\operatorname{res}_{u(p)} \omega$ равен произведению вычетов в точках $u_{k^j} = -p_{k^j}$ гамма-функций $\Gamma(u_{k^j})$ и значения весового (голоморфного) множителя в точке $u(p)$:

$$\operatorname{res}_{u(p)} \omega = \frac{(-1)^{|p|}}{p^1! \cdot \ldots \cdot p^n!}$$

$$\times \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j} + \frac{1}{m_j} \sum\limits_{i=j}^{n} \sum\limits_{k^i \in \Delta_i} k_j^i p_{k^i} \right) \left(\frac{\mu_j}{m_j} + \frac{1}{m_j} \sum\limits_{i=j+1}^{n} \sum\limits_{k^i \in \Delta_i} k_j^i p_{k^i} \right)}{\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j} + \frac{1}{m_j} \sum\limits_{i=j}^{n} \sum\limits_{k^i \in \Delta_i} k_j^i p_{k^i} - \sum\limits_{k^j \in \Delta_j} p_{k^j} + 1 \right)} \prod_{k^j \in \Delta_j} (x_{k^j})^{p_{k^j}} \right].$$

Согласно (10) имеем

$$y_1^{\mu_1}(x)\cdot\ldots\cdot y_n^{\mu_n}(x)=\sum_{|p|\geqslant 0}\operatorname{res}_{u(p)}\omega. \tag{11}$$

При $|p|=0$ и $|p|=1$ в сумме (11) получаются слагаемые вида

$$1-\sum_{0<k_1^1<m_1}\left(\frac{\mu_1}{m_1}+\frac{k_1^1}{m_1}\right)x_{k^1}-\cdots-\sum_{0<k_n^n<m_n}\left(\frac{\mu_n}{m_n}+\frac{k_n^n}{m_n}\right)x_{k^n}.$$

Для преобразования остальных слагаемых суммы (11) ($|p|\geqslant 2$) воспользуемся формулой $\Gamma(\tau+l)=(\tau)_l\Gamma(\tau)$, где $(\tau)_l$ — символ Похгаммера,

$$(\tau)_l=\tau(\tau+1)\cdot\ldots\cdot(\tau+l-1),\quad l\in\mathbb{N}.$$

Имеем

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j}+\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=j}^{n}\sum\limits_{k^i\in\Delta_i}k_j^i p_{k^i}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j}+\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=j}^{n}\sum\limits_{k^i\in\Delta_i}k_j^i p_{k^i}-\sum\limits_{k^j\in\Delta_j}p_{k^j}\right)}\frac{\left(\frac{\mu_j}{m_j}+\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=j+1}^{n}\sum\limits_{k^i\in\Delta_i}k_j^i p_{k^i}\right)}{\left(\frac{\mu_j}{m_j}+\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=j}^{n}\sum\limits_{k^i\in\Delta_i}k_j^i p_{k^i}-\sum\limits_{k^j\in\Delta_j}p_{k^j}\right)}$$

$$=\frac{\left(\frac{\mu_j}{m_j}+\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=j}^{n}\sum\limits_{k^i\in\Delta_i}k_j^i p_{k^i}-|p^j|\right)_{|p^j|}\left(\frac{\mu_j}{m_j}+\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=j+1}^{n}\sum\limits_{k^i\in\Delta_i}k_j^i p_{k^i}\right)}{\left(\frac{\mu_j}{m_j}+\frac{1}{m_j}\sum\limits_{i=j}^{n}\sum\limits_{k^i\in\Delta_i}k_j^i p_{k^i}-|p^j|\right)}$$

$$=\left(\frac{\mu_j}{m_j}+\frac{1}{m_j}\sum_{i=j+1}^{n}\sum_{k^i\in\Delta_i}k_j^i p_{k^i}\right)\prod_{q=1}^{|p^j|-1}\left(\frac{\mu_j}{m_j}+\frac{1}{m_j}\sum_{i=j}^{n}\sum_{k^i\in\Delta_i}k_j^i p_{k^i}-|p^j|+q\right).$$

Отсюда вытекает формула (9) для коэффициентов ряда (8). Теорема доказана.

Из структуры коэффициентов C_p видно, что степенной ряд для $y^\mu(x)$ является гипергеометрическим. Координата $y_n(x)$ может быть представлена, например, в виде отношения

$$y_n(x)=\frac{y_1(x)\cdot\ldots\cdot y_{n-1}(x)\cdot y_n^2(x)}{y_1(x)\cdot\ldots\cdot y_{n-1}(x)\cdot y_n(x)}.$$

Поэтому справедлива

Теорема 4. *Суперпозиция $y_n(x)$ общих алгебраических функций представляется в виде отношения двух гипергеометрических рядов.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mellin H. J.* Resolution de l'equation algebrique generale a l'aide de la fonction // C. R. Acad. Sci. 1921. V. 172. P. 658–661.
2. *Passare M., Tsikh A., Zhdanov O.* A multidimensional Jordan residue lemma with an application to Mellin–Barnes integrals // Aspects Math. 1994. V. E 26. P. 233–241.
3. *Жданов О. Н., Цих А. К.* Исследование кратных интегралов Меллина — Барнса с помощью многомерных вычетов // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 2. С. 282–298.
4. *Семушева А. Ю., Цих А. К.* Продолжение исследований Меллина о решении алгебраических уравнений // Комплексный анализ и дифференциальные операторы: Сб. науч. тр. Красноярск: КрасГУ, 2000. С. 134–146.

5. *Sadykov T. M.* On the Horn system of partial differential equations and series of hypergeometric type // Math. Scand. 2002. V. 91. P. 127–149.

6. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С.* Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа // Успехи мат. наук. 1992. Т. 47, № 4. С. 3–82.

7. *Арнольд В. И.* Топологические инварианты алгебраических функций. II // Функциональный анализ и его прил. 1970. Т. 4, № 4. С. 1–9.

8. *Sturmfels B.* Solving algebraic equations in terms of $\mathscr{A}$-hypergeometric series // Discrete Math. 2000. V. 15, N 1–3. P. 171–181.

9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.

Статья поступила 1 марта 2002 г.

Антипова Ирина Августовна
Красноярский гос. технический университет, кафедра прикладной математики,
ул. Киренского, 26, Красноярск 660074
antipov@akadem.ru